

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Teconologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# A Propriedade Erdős-Pósa Para Matróides

por

José Eder Salvador de Vasconcelos <sup>†</sup>

sob orientação do

**Prof. Dr. Braulio Maia Junior**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# A Propriedade Erdős-Pósa Para Matróides

por

**José Eder Salvador de Vasconcelos**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo - UESB**

---

**Prof. Dr. Manoel José Machado Soares Lemos - UFPE**

---

**Prof. Dr. Bráulio Maia Junior - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Novembro/2009**

# Resumo

O número de cocircuitos disjuntos em uma matróide é delimitado pelo seu posto. Existem, no entanto, matróides de posto arbitrariamente grande que não contêm dois cocircuitos disjuntos. Considere, por exemplo,  $M(K_n)$  e  $U_{n,2n}$ . Além disso, a matróide bicircular  $B(K_n)$  pode ter posto arbitrariamente grande, mas não tem 3 cocircuitos disjuntos. Nós apresentaremos uma prova, obtida por Jim Geelen e Kasper Kabell em (5), para o seguinte fato: para cada  $k$  e  $n$ , existe uma constante  $c$  tal que, se  $M$  é uma matróide com posto no mínimo  $c$ , então  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos ou contém uma das seguintes matróides como menor  $U_{n,2n}$ ,  $M(K_n)$  ou  $B(K_n)$ .

**Palavras-chaves:** Matróides, Cocircuitos, Posto, Menor.

# Abstract

The number of disjoint cocircuits in a matroid is bounded by its rank. There are, however, matroids of rank arbitrarily large that do not contain two disjoint cocircuits. Consider, for example,  $M(k_n)$  and  $U_{n,2n}$ . Moreover, the bicircular matroid  $B(k_n)$  may have arbitrarily large rank but do not have 3 disjoint cocircuits. We show a proof obtained by Jim Geelen and Kasper Kabell in (5) to the following fact: for every  $k$  and  $n$ , there is a constant  $c$  such that if  $M$  is a matroid with rank at least  $c$ , then  $M$  has  $k$  disjoint cocircuits or  $M$  contains one of the following matroids as a minor  $U_{n,2n}$ ,  $M(k_n)$  or  $B(k_n)$ .

**Keywords:** Matroids, Cocircuits, Rank, Minor.

# Agradecimentos

- Agradeço a Deus por ter me dado forças para concluir este trabalho e agradeço mais ainda por ele renová-las a cada dia para que eu siga em frente, levando a vida com coragem e sendo sempre agraciado com a simpatia dos amigos.
- Ao meu orientador, prof. Braulio Maia pelo auxílio.
- Aos professores Manoel Lemos e Ademakson Araújo pela contribuição ao trabalho e pelo carinho empregado nas palavras endereçadas a mim.
- Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.
- Aos meus amigos e colegas de mestrado, que me permitiram sorrir durante a minha estada aqui e me fizeram um pouquinho mais feliz quando sorriam comigo. Em especial devo agradecimentos aos colegas de mestrado Jackson, pelo apoio nas horas em que eu achava que não ia dar mais. Luciano, pela simpatia, palavras de carinho, e incentivo. Sheyla, que se tornou amiga para toda a vida. E, Sabrina, exemplo de capacidade, humildade e coleguismo. Além dos colegas de turma: Geizane, Natan, Marcelo, Paulo, Désio, Josiluz, Jéssyca e Leidmar. E ao pessoal da minha segunda turma, Marciel, Sandro e Nercionildo.
- Aos professores Antônio Brandão, sempre disposto a ajudar e nunca pré-disposto a julgar, obrigado por toda ajuda; e Francisco Júlio, eu já havia desistido de me empenhar quando, então, fiz topologia com o senhor.
- Aos "meninos" com quem formei um lar, pelo companheirismo: Josiluz (Os cara), Paulo (O cabrunco), Marcelo, Hebbert (O baitcha), Désio, Annaxsuel, Lucemarques e Rodrigo (Coentro). Obrigado por me aturarem. E aos amigos Rawlilson e Tonhaunm.
- Yonasses (vulgo Annaxsuel), meu irmão, agradeço por sua presença no momento mais difícil, e pela sua torcida. Desculpe-me pela falta de paciência.

- Aos meus irmãos Claudia, Auzeni, Margarida, Francisco, Alexson, Auzeneide, Jacira e Pedro.
- A minha mãe, uma mulher tão forte quanto pode ser um ser humano. E ao meu pai Damião, o som da sua risada nos alegra e traz paz.
- Aos amigos Rawlilson e Josiluz pela leitura minuciosa e Rodrigo pelas dicas e correções.
- Aos amigos Elthon, Mercia, Davizinho, Sarinha, Garrido, Celão, Gerlaine e Iguara.
- A meu grande amigo Francisco de Assis Pereira, o xibata, você me ajudou a ser o homem que sou hoje.
- Minha amiga-irmã, Patrícia Borchardt, "não se afobe não, que nada é pra já". Lhe devo muito, tanto que eu não posso pagar.
- Minha sogra, Maria Martins (Mariinha), que me acolheu como uma mãe e me trata como um filho. Um exemplo de mãe e mulher.
- Aos meus mestres-amigos, pelos conselhos e incentivo. Meu segundo pai Prof. Gurgel; Meu maior incentivador Prof. Jonas; O homem que me fez ver que dar aulas é um lindo ofício, Prof. Antônio Roberto. Ao meu chefe Roosevelt, grande camarada. E ao professor Marcelo, o senhor será sempre um exemplo para todos o que passarem pela UFRN.
- Aos funcionários do PPGMAT, em especial D. Salete, D. Du e D. Argentina.
- Aos corpo docente do DME-UFCG, em especial ao coordenador da pós-graduação prof. Aparecido Jesuino, parabéns pela postura.
- A minha esposa, Renata. "De todas as maneiras que há de amar eu te amo". Deus te deu a mim para que, juntos, descobrissemos o caminho para a felicidade plena. Todas as montanhas que tivemos que transpor serviram para que nos tornássemos cada vez mais cúmplices. E, se hoje estamos juntos, é porque de fato nos amamos e nada vai mudar isso. Amo muito você.

# Dedicatória

*Tarefa*

*Geir Campos*

*Morder o fruto amargo e não cuspir  
mas avisar aos outros quanto é amargo,  
cumprir o trato injusto e não falhar  
mas avisar aos outros quanto é injusto,  
sofrer o esquema falso e não ceder  
mas avisar aos outros quanto é falso;  
dizer também que são coisas mutáveis...  
E quando em muitos a noção pulsar  
- do amargo e injusto e falso por mudar -  
então confiar à gente exausta o plano  
de um mundo novo e muito mais humano.*

*Peço licença a Deus para agradecer primeiro  
a minha mãe, D. Ozélia.*

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1 Introdução a teoria das matróides</b>	<b>8</b>
1.1 Introdução . . . . .	8
1.2 Preliminares . . . . .	8
1.3 Primeiras definições e notações . . . . .	9
1.4 Bases, Circuitos, Restrição e Posto . . . . .	10
1.5 Fecho, Geradores, Duais, Menores e Simplicidade . . . . .	12
1.6 Representação geométrica de matróides de posto pequeno . . . . .	18
1.7 Exemplos importantes . . . . .	20
<b>2 A propriedade Erdős-Pósa para matróides</b>	<b>22</b>
2.1 Introdução . . . . .	22
2.2 Número de cobertura . . . . .	27
2.3 Aproximando circularidade . . . . .	31
2.4 Construindo densidade . . . . .	33
2.5 Configurando circuitos . . . . .	40
2.6 Ninhos . . . . .	47
2.7 Dowling Cliques . . . . .	55
2.8 Cliques . . . . .	60
<b>A</b>	<b>64</b>

# Introdução

O termo *matróide* significa falsa matriz ou matriz fraca e foi introduzido em 1935 por Whitney, em um trabalho intitulado "on the abstract properties of linear independence"(16), abstratamente para tentar capturar a essência de dependência. Outros trabalhos pioneiros em teoria das *matróides* foram feitos por Birkhoff, "Abstract linear dependence and lattices"(1) e MacLane nos trabalhos "Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry"(10) e "A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases"(9). O fato é que num espaço  $n$ -dimensional a família  $\mathcal{I}$  dos conjuntos linearmente independentes satisfaz os axiomas da definição 1.3.1.

Encontrar *cocircuitos* disjuntos em uma *matróide* é uma ferramenta importante para se ter informações a respeito do seu posto, provaremos (Lema 1.5.15) que ao deletarmos um *cocircuito* de uma *matróide*, obtemos uma nova *matróide* cujo posto é uma unidade menor que o da anterior. Assim, se uma *matróide* tem  $k$  *cocircuitos* disjuntos, então ela tem posto no mínimo  $k$ . Nosso trabalho apresenta uma generalização do resultado encontrado por Geelen, Gerards e Whittle no artigo "Disjoint cocircuits in matroid with large rank"(6). Eles provaram o seguinte:

**Teorema 2.2.1** *Existe uma função  $c : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, se  $M$  é uma *matróide* sem menores  $U_{2,q+2}$ , ou  $M(K_n)$  e  $r(M) \geq c(k, q, n)$ , então  $M$  tem  $k$  *cocircuitos* disjuntos.*

Tal resultado foi motivado pelo Teorema de Erdős-Pósa, mostrado por Erdős e Pósa no artigo "on the maximal number of disjoint cocircuits of a graph"(4). Lá eles afirmam:

**Teorema 2.1.8** *Existe uma função  $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, se o tamanho de um circuito de cobertura minimal de  $G$  é pelo menos  $c(k)$ , então  $G$  tem  $k$  circuitos disjuntos.*

Em contra partida existem matróides de posto arbitrariamente grande, mas que não contém dois cocircuitos disjuntos. O intuito deste trabalho, portanto, é determinar entre aquelas que têm cocircuito disjuntos, qual seria o limite inferior para esse número (de cocircuitos disjuntos).

O primeiro capítulo apresenta a teoria básica a ser usada, direta ou indiretamente, no trabalho.

No segundo capítulo apresentamos o resultado principal e a teoria reunida e desenvolvida por Geelen e Kabell, no artigo "The Erdős-Pósa property for matroids circuits"(5), que serve como base para esta dissertação, para demonstrar o resultado principal.

Finalmente, no apêndice A, apresentamos uma prova para a circularidade das matróides  $U_{r,n}$ , com  $n \geq 2r - 1$  e  $M(K_n)$ . Além disso, apresentaremos a prova que a matróide bicircular  $B(K_n)$  não tem três cocircuitos disjuntos.

# Capítulo 1

## Introdução a teoria das matróides

### 1.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas referentes a teoria das matróides, além dos conceitos necessários para o bom entendimento do capítulo seguinte.

### 1.2 Preliminares

As notações utilizadas aqui são, basicamente, as mesmas utilizadas por Oxley em (13). Se  $E$  é um conjunto finito, denotaremos por  $2^E$  sua coleção de subconjuntos e por  $|E|$  sua cardinalidade. O conjunto dos números inteiros, números inteiros positivos, números racionais, números reais e números complexos serão denotados por  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , respectivamente. Se  $X$  e  $Y$  são conjuntos, então  $X - Y$  denotará o conjunto  $\{x \in X : x \notin Y\}$ .

Frequentemente desejaremos adicionar ou remover um único elemento de um conjunto  $X$ . Em tais casos, abreviaremos  $X \cup \{e\}$  e  $X - \{e\}$  por  $X \cup e$  e  $X - e$ , respectivamente. Usaremos o termo multiconjunto, em vez de conjunto, quando houver a possibilidade deste conjunto possuir elementos repetidos. Se denotarmos um corpo arbitrário por  $K$  então  $K^n$  denotará o espaço vetorial de dimensão  $n$  sobre  $K$ . No entanto, quando o corpo considerado for um corpo de *Galois* contendo  $q^n$  elementos, com  $q$  primo, denotaremos este corpo por  $GF(q^n)$ . Neste caso, o espaço vetorial de dimensão  $m$  sobre  $GF(q^n)$  será denotado por  $V(m, q^n)$ . A notação para matriz utilizada

aqui será a usual onde a matriz  $I_r$  é a matriz identidade com  $r$  linhas e  $r$  colunas, e a transposta de uma matriz  $A$  será denotada por  $A^t$ . Se  $v$  é um vetor de um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$  então  $\langle v \rangle$  denota o subespaço de  $V$  gerado por  $v$ . A dimensão de  $V$  é denotada por  $\dim V$ .

### 1.3 Primeiras definições e notações

**Definição 1.3.1** *Uma matróide  $M$  é um par ordenado  $(E, \mathcal{I})$  consistindo de um conjunto finito  $E$  e uma coleção  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $E$  satisfazendo os seguintes axiomas:*

- I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ;*
- I2) Se  $I \in \mathcal{I}$  e  $\tilde{I} \subseteq I$ , então  $\tilde{I} \in \mathcal{I}$ ;*
- I3) Se  $X$  e  $Y$  estão em  $\mathcal{I}$  com  $|X| < |Y|$ , então existe um elemento  $a$  de  $Y - X$  tal que  $X \cup a \in \mathcal{I}$ .*

Se  $M$  é a matróide  $(E, \mathcal{I})$ , então  $M$  é chamada uma matróide em  $E$ . Os membros de  $\mathcal{I}$ , também denotado por  $\mathcal{I}(M)$ , são os **independentes** de  $M$ , os subconjuntos de  $E$  que não estão em  $\mathcal{I}(M)$  são ditos os **dependentes** de  $M$ . Em especial, os **independentes maximais** e **dependentes minimais** de  $M$  (em relação a inclusão de conjuntos) serão chamados **bases** e **circuitos**, respectivamente. O conjunto  $E$  como na definição acima é chamado o **conjunto básico** de  $M$ . Em geral, dada uma matróide  $M$  denotaremos seu conjunto básico por  $E(M)$ . Denotaremos a família dos circuitos de  $M$  por  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{C}(M)$ , a família dos dependentes de  $M$  por  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{D}(M)$  e a família das bases de  $M$  por  $\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{B}(M)$ .

Além da axiomatização de matróides, dada na Definição 1.3.1, podemos definir uma matróide através da sua coleção de circuitos ou através da sua coleção de bases.

**Observação 1.3.2** *(i) Um circuito constituído por um único elemento é dito um laço .*

*(ii) Um circuito contendo três elementos é dito um triângulo .*

Observe que  $a$  é um laço se, e somente se,  $a$  não está contido em nenhum conjunto independente.

A família dos subconjuntos linearmente independentes do espaço vetorial  $K^n$ , onde  $K$  é um corpo finito, satisfaz os axiomas da definição de matróide.

**Proposição 1.3.3** *Seja  $K$  um corpo finito. A família  $\mathcal{I}$  dos subconjuntos linearmente independentes (L.I.) em  $K^n$  satisfaz os axiomas da Definição 1.3.1. Isto é, o par  $(K^n, \mathcal{I})$  tal que  $\mathcal{I}$  é a família dos subconjuntos L.I. em  $K^n$  é uma matróide.*

**Demonstração:** Inicialmente note que  $\emptyset \in \mathcal{I}$ , desde que  $\emptyset$  é uma base do subespaço nulo de  $K^n$ .

Agora, seja  $X$  um subconjunto L.I. de  $K^n$ . Se  $Y \subseteq X$ , então  $Y$  é também L.I. em  $K^n$ . Com efeito, se não existiria  $v \in Y$  gerado pelos demais elementos de  $Y$ . E, como  $Y \subseteq X$  isso valeria também em  $X$ . Ou seja, se  $X \in \mathcal{I}$  e  $Y \subseteq X$ , então  $Y \in \mathcal{I}$ .

Finalmente, observe que se  $X$  e  $Y$  são L.I. em  $K^n$  com  $|X| < |Y|$ , então deve haver  $u \in Y$  tal que  $u \notin \langle X \rangle$ . Do contrário,  $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$ , um absurdo visto que uma base de  $\langle Y \rangle$  deve ter, pelo menos,  $|Y|$  elementos. Logo  $u \cup X$  é L.I. em  $K^n$ . Isto é, se  $X, Y \in \mathcal{I}$  e  $|X| < |Y|$ , então existe  $u \in Y - X$  tal que  $X \cup u \in \mathcal{I}$ . ■

Sejam  $M$  e  $N$  matróides, uma bijeção  $\varphi : E(M) \rightarrow E(N)$  é um isomorfismo entre as matróides  $M$  e  $N$  quando  $X \subseteq E(M)$  é independente em  $M$  se, e somente se,  $\varphi(X) \subseteq E(N)$  é independente em  $N$ . Quando existe um isomorfismo entre  $M$  e  $N$ , dizemos que  $M$  e  $N$  são isomorfas e escrevemos  $M \cong N$ .

## 1.4 Bases, Circuitos, Restrição e Posto

Nesta seção consideraremos formas alternativas para definir matróides através das suas famílias de bases, circuitos ou através do seu posto. A partir de agora, quando não especificarmos  $G$  representará um grafo e  $M$  uma matróide.

O próximo resultado fornece uma axiomatização de matróides através da sua família de circuitos. A partir dele poderíamos definir uma matróide como sendo o par  $(E, \mathcal{C})$  onde  $E$  é um conjunto e  $\mathcal{C}$  uma família de subconjuntos de  $E$  satisfazendo o Teorema 1.4.1. Uma demonstração para esse resultado (Teorema 1.4.1) pode ser vista em (13).

**Teorema 1.4.1** *A coleção  $\mathcal{C}$  dos circuitos de uma matróide  $M$  tem as seguintes propriedades:*

$$C_1) \emptyset \notin \mathcal{C};$$

$$C_2) \text{ Se } C_1, C_2 \in \mathcal{C} \text{ e } C_1 \subseteq C_2, \text{ então } C_1 = C_2;$$

$C_3$ ) Se  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ , com  $C_1 \neq C_2$  e  $a \in C_1 \cap C_2$ , então existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - a$ .

Reciprocamente, se existe um conjunto  $E$  e uma família  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $E$  satisfazendo os axiomas acima, então existe uma única matróide  $M$  com conjunto básico  $E$  e família de circuitos  $\mathcal{C}$ . Essa matróide terá a seguinte família de independentes:

$$\{I \subseteq E : \text{não existe } C \in \mathcal{C} \text{ com } C \subseteq I\}.$$

■

O próximo resultado caracteriza matróides em termos da sua coleção de bases. A prova pode ser vista em (13)

**Teorema 1.4.2** *Seja  $\mathcal{B}$  uma coleção de subconjuntos de um conjunto finito  $E$ . Então  $\mathcal{B}$  é a coleção de bases de uma matróide em  $E$  se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

$B_1$ )  $\mathcal{B}$  é não-vazio;

$B_2$ ) Se  $B_1$  e  $B_2$  são membros de  $\mathcal{B}$  e  $x \in B_1 - B_2$ , então existe um elemento  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$ .

■

**Corolário 1.4.3** *Seja  $B$  uma base de uma matróide  $M$ . Se  $f \in E(M) - B$ , então  $B \cup f$  contém um único circuito,  $C(B, f)$ . Além disso,  $f \in C(B, f)$ .*

Chamaremos  $C(B, f)$  o *circuito fundamental* de  $f$  com respeito a  $B$ .

Segue imediatamente do item I3) da Definição 1.3.1 que, assim como em espaços vetoriais, todas as bases de uma matróide  $M$  tem a mesma cardinalidade, isto é **são equicardinais**.

**Definição 1.4.4** *A cardinalidade de uma base de  $M$  é chamada o **posto** de  $M$  e será denotado por  $r(M)$ .*

**Definição 1.4.5** *Dado um subconjunto  $X \subseteq E$  podemos definir uma estrutura de matróide com conjunto básico  $X$  e cuja família de independentes é constituída pelos independentes de  $M$  que estão contidos em  $X$  ( $\mathcal{I} \cap 2^X$ ). Essa matróide é chamada a **restrição** de  $M$  a  $X$  e denotada por  $M|X$ .*

As Definições 1.4.4 e 1.4.5 permitem definir a seguinte função, chamada **função posto** de  $M$ :

$$r_M : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

$$X \mapsto r_M(X) := r(M|X)$$

Esta função está bem definida, visto que o posto existe e é único, e quando não houver risco de confusão será denotada simplesmente por  $r$ .

Segue da equicardinalidade das bases em  $M|X$  que o conjunto dos independentes maximais contidos em  $X$ , que coincide com  $\mathcal{B}(M|X)$ , tem elementos equicardinais e a cardinalidade desses elementos coincidem com  $r(X)$ . Algumas vezes dizemos que um independente maximal contido em  $X$  é uma base de  $X$ .

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser vista em (13), fornece uma axiomatização de matrôides através da função posto definida acima.

**Teorema 1.4.6** *Uma função  $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$  é a função posto de uma matrôide  $M$  com conjunto básico  $E$  se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

P1)  $0 \leq r(X) \leq |X|$

P2) Se  $X \subseteq Y \subseteq E$ , então  $r(X) \leq r(Y)$

P3) Para todos  $X, Y \subseteq E$ ,  $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

■

Observe que os independentes dessa matrôide serão aqueles conjuntos  $I \subseteq E$  tais que  $r(I) = |I|$ .

## 1.5 Fecho, Geradores, Duais, Menores e Simplicidade

Se  $M$  é uma matrôide e  $X \subseteq E(M)$ , chamamos o conjunto

$$cl(X) = \{x \in E(M) : r(x \cup X) = r(X)\}$$

de **fecho** ou **gerado** de  $X$  em  $M$ . Se  $cl(X) = X$  dizemos que  $X$  é um subconjunto fechado de  $M$ . A família dos conjuntos fechados de  $M$  será denotada por  $\mathcal{F}$ . Se  $Y \subseteq cl(X)$  dizemos que  $Y$  é gerado por  $X$  e que  $X$  é um gerador de  $Y$ . Quando um conjunto  $X$  gera  $E(M)$  dizemos que  $X$  gera  $M$ , neste caso  $cl(X) = E(M)$ . O conjunto dos geradores de  $M$  será denotado por  $\mathcal{S}$ .

**Observação 1.5.1** *Um subconjunto fechado de posto 2 é dito uma linha.*

Os resultados a seguir listam propriedades importantes do fecho de um conjunto  $X$  numa matróide  $M$ .

**Teorema 1.5.2** *Se  $M$  é uma matróide, para todos os subconjuntos  $X, Y \subseteq E(M)$ :*

$$F1) X \subseteq cl(X);$$

$$F2) \text{ Se } X \subseteq Y, \text{ então } cl(X) \subseteq cl(Y);$$

$$F3) cl(cl(X))=cl(X); \text{ em particular, } cl(X) \in \mathcal{F}.$$

■

**Teorema 1.5.3** *Para todos os subconjuntos  $X, Y \subseteq E$ :*

$$i) \text{ Se } X, Y \in \mathcal{F}, \text{ então } X \cap Y \in \mathcal{F};$$

$$ii) cl(X) = \bigcap_{X \subseteq F \in \mathcal{F}} F; \text{ em particular, } cl(X) \in \mathcal{F};$$

$$iii) r(cl(X))=r(X);$$

$$iv) \text{ Se } e \in cl(X) \text{ e } f \in cl(X \cup e) \text{ então } f \in cl(X);$$

$$v) e \in cl(X) \text{ se, e somente se, existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } e \in C \subseteq X \cup e.$$

■

Uma das principais estruturas na teoria de matróides é a "**Dual**". Ao contrário do que acontece com os grafos, visto que no nem todo grafo possui dual, toda matróide possui uma dual.

**Teorema 1.5.4** *Seja  $\mathcal{B}$  a família de bases de uma matróide  $M$  sobre  $E$ , então*

$$B^* = \{E - B : B \in \mathcal{B}\}$$

*é a família de bases de uma matróide  $M^*$  sobre  $E$ , chamada matróide **dual** de  $M$ .*

A figura 1.1 representa uma matr ide e sua dual. Elas estao representadas geometricamente. Na Seao 1.6 mais a frente, mostraremos como uma matr oide pode ser representada geometricamente.

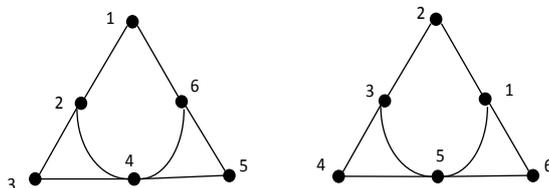


Figura 1.1: A matr oide  $M(K_4)$  e sua dual  $[M(K_4)]^*$

Por definiao, uma matr oide  $M$  e sua dual  $M^*$  estao relacionadas por

$$(M^*)^* = M.$$

Ao se referir a algum elemento de uma matr oide dual, utilizamos o prefixo ‘‘co’’. Assim, os independentes, bases, circuitos, laos, fechados, a funao posto, etc, da matr oide  $M^*$  sao denominados coindependentes, cobases, cocircuitos, colaos, cofechados, funao coposto, etc, de  $M$ . Finalmente, diremos que uma matr oide e auto-dual se  $M^* = M$ .

O resultado a seguir estabelece uma relaao entre os circuitos e os cocircuitos de uma matr oide.

**Teorema 1.5.5 (ortogonalidade)** *Se  $M$  e uma matr oide,  $C$  e um circuito e  $C^*$  um cocircuito de  $M$ . Entao  $|C \cap C^*| \neq 1$ .*

■

O pr oximo resultado estende o Teorema 1.5.5 e da uma caracterizaao para o conjunto de circuitos de uma matr oide. A demonstraao de ambos pode ser vista em (13).

**Proposiao 1.5.6** *Um subconjunto  $D \subseteq E$  e um circuito de  $M$  se, e somente se,  $D$  e minimal nao-vazio com a seguinte propriedade:  $|D \cap C^*| \neq 1$  para todo cocircuito  $C^*$  de  $M$ .*

■

Agora definiremos algumas das principais estruturas para o nosso estudo, as quais nos remeteremos inumeras vezes, as deleoes e contraoes.

**Definição 1.5.7** *Seja  $T \subseteq E$ . Definimos a deleção de  $T$  em  $M$  por  $M|(E - T)$ , e denotamos  $M \setminus T$ . Definimos também a contração de  $T$  em  $M$  por  $(M^* \setminus T)^*$  e denotamos por  $M/T$ . Também denotamos  $M/(E - T)$  por  $M \cdot T$ .*

O Teorema a seguir traz algumas propriedades das deleções e contrações em uma matróide.

**Proposição 1.5.8** *Sejam  $M$  uma matróide e  $E(M)$  o conjunto básico de  $M$ . Se  $X$  e  $Y$  são subconjuntos disjuntos de  $E(M)$ , então:*

- i)  $(M \setminus X) \setminus Y = M \setminus (X \cup Y) = (M \setminus Y) \setminus X$ ;*
- ii)  $(M/X)/Y = M/(X \cup Y) = (M/Y)/X$ ;*
- iii)  $M \setminus X/Y = M/Y \setminus X$ ;* ■

A próxima definição merece atenção especial, pois faz referência a uma das principais estruturas em uma matróide e fundamental também no nosso estudo, os menores.

**Definição 1.5.9** *Sejam  $M$  uma matróide e  $X, Y \subseteq E(M)$ , com  $X \cap Y = \emptyset$ . Uma matróide do tipo  $M \setminus X/Y$  é dita um **menor** de  $M$ .*

Os menores são estruturas fundamentais em uma matróide. Tais estruturas foram introduzidas por Tutte no artigo "A homotopy theorem for matroids I" (15), e alguns dos mais celebres resultados para matróides fazem referência aos menores.

O próximo resultado caracteriza as famílias de independentes, dependentes, bases, circuitos, fecho e da função posto das contrações de uma matróide.

**Teorema 1.5.10** *Os independentes, dependentes e circuitos de  $M \setminus T$  são respectivamente os independentes, dependentes e os circuitos de  $M$  que evitam  $T$ ,*

$$r_{M \setminus T} = r_M|_{2^{(E-T)}},$$

$$cl_{M \setminus T} : X \longrightarrow cl(X) - T,$$

*e os geradores de  $M \setminus T$  são os subconjuntos de  $E - T$  que geram  $E - T$  em  $M$ .* ■

A seguir mostraremos como obter as famílias de independentes, bases, circuitos e a função posto das contrações de uma matróide a partir das famílias de independentes, bases, circuitos e da função posto da própria matróide.

**Teorema 1.5.11** *Sejam  $M$  uma matróide,  $T \subseteq E(M)$  e  $B_T$  uma base de  $M|T$ , então:*

*i) Se  $X \subseteq E(M)$ ,  $r_{(M/T)}(X) = r(X \cup T) - r(T)$ ;*

*ii) Seja  $\mathcal{I}_{M/T}$  a família de independentes de  $M/T$ . Então,*

$$\mathcal{I}_{(M/T)} = \{I \subseteq E-T; I \cup B_T \in \mathcal{I}\} = \{I \subseteq E-T; \text{ existe } B \in \mathcal{B}_{(M|T)} \text{ com } B \cup I \in \mathcal{I}\}.$$

*iii) Seja  $\mathcal{B}_{(M/T)}$  a família de bases de  $M/T$ . Então,*

$$\mathcal{B}_{(M/T)} = \{B \subseteq E-T; B \cup B_T \in \mathcal{B}\} = \{B \subseteq E-T; \text{ existe } B' \in \mathcal{B}_{(M|T)} \text{ com } B \cup B' \in \mathcal{B}\}$$

*iv) A família de circuitos de  $M/T$ ,  $\mathcal{C}_{(M/T)}$ , é a coleção dos membros minimais e não vazios de  $\{C - T : C \in \mathcal{C}(M)\}$ ;*

*v) Se  $C \in \mathcal{C}(M)$ , então  $C - T$  é a união dos circuitos de  $M/T$ . ■*

**Corolário 1.5.12** *Se  $M$  é uma matróide e  $f \in E(M)$  então  $r(M/f) = r(M) - 1$ , a menos que  $f$  seja um laço. E, se  $f$  não é um colaço,  $r(M \setminus f) = r(M)$ . ■*

**Definição 1.5.13** *Quando  $H \subseteq E(M)$  é fechado e  $r(H) = r(M) - 1$  dizemos que  $H$  é um **hiperplano** de  $M$ . O conjunto dos hiperplanos de  $M$  será denotado por  $\mathcal{H}$ .*

O teorema seguinte caracteriza as famílias de cocircuitos e a função coposto de uma matróide.

**Teorema 1.5.14** *Valem as seguintes propriedades para as famílias de cocircuitos e a função coposto:*

*(i)  $\mathcal{I}^* = \{E - S : S \in \mathcal{S}\}$ ;*

*(ii)  $\mathcal{C}^* = \{E - H : H \in \mathcal{H}\}$ ;*

*(iii)  $r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X)$ . ■*

O próximo resultado é importante para o nosso estudo, visto que estamos tentando determinar o número de cocircuitos disjuntos em uma matróide. Como corolário dele, obtemos que uma matróide de posto  $k$  pode ter, no máximo,  $k$  cocircuitos disjuntos.

**Lema 1.5.15** *Seja  $M$  uma matróide com conjunto básico  $E$  e  $C^*$  um cocircuito de  $M$ . Então  $r(M \setminus C) = r(M) - 1$ .*

**Demonstração:** Seja  $M$  uma matróide e  $C^*$  um cocircuito de  $M$ , temos

$$M \setminus C^* = M|(E - C) \Rightarrow r(M \setminus C^*) = r_M(E - C^*).$$

como  $C^*$  é um cocircuito,  $E - C^*$  é um hiperplano de  $M$ . Assim,

$$r_M(E - C^*) = r(M) - 1.$$

e, portanto

$$r(M \setminus C^*) = r(M) - 1.$$

■

**Teorema 1.5.16** *As seguintes afirmações são verdadeiras a respeito de uma matróide  $M$ :*

- 1)  $C^*(M \setminus T)$  é o conjunto dos membros minimais não vazios de  $\{C^* - T \subseteq E - T : C^* \in \mathcal{C}^*(M)\}$ ;
- 2)  $C^*(M/T) = \{C^* \subseteq E - T : C^* \in \mathcal{C}^*(M)\}$ ;
- 3)  $\mathcal{H}(M \setminus T)$  é o conjunto dos subconjuntos próprios maximais de  $E - T$  da forma  $H - T$ , onde  $H \in \mathcal{H}$ ;
- 4)  $\mathcal{H}(M/T) = \{X \subseteq E - T : X \cup T \in \mathcal{H}(M)\}$ .

■

**Definição 1.5.17** *Seja  $M$  uma matróide, dizemos que dois elementos  $x, y \in E(M)$  estão em **paralelo** (são paralelos) quando  $\{x, y\}$  é um circuito em  $M$ . Dizemos que  $\emptyset \neq X \subseteq E(M)$  é uma **classe em paralelo** de  $M$ , se  $X$  é maximal com a propriedade que cada dois elementos distintos de  $X$  estão em paralelo em  $M$ . Definimos, ainda, uma **classe em série** de  $M$  como sendo uma classe em paralelo de  $M^*$ . Uma classe em série ou em paralelo que possui um só elemento é dita trivial. Quando dois elementos de  $E(M)$  pertencem a mesma classe em série, dizemos que estes elementos estão em série.*

**Definição 1.5.18** Uma matróide é dita **simples** se não possui laços ou elementos em paralelo e dita **cosimples** se  $M^*$  é simples. Isto é, se não possui colaços ou elementos em série.

Dada uma matróide  $M$  podemos associar a ela uma outra matróide, denotada por  $si(M)$ , obtida da própria  $M$  através da deleção de seus laços e da deleção de todos, exceto um, elementos de cada classe em paralelo. A matróide assim obtida é chamada a **simplicação** de  $M$ . Analogamente, definimos a **cosimplicação** de  $M$  por,  $coM := (si(M^*))^*$ . Isto é,  $coM$  é obtida de  $M$  através da deleção de seus colaços e pela contração de todos, exceto um, elementos de cada classe em série.

**Teorema 1.5.19** Seja  $M$  uma matróide,  $x, y \in E(M)$  estão em série se, e somente se,  $x$  e  $y$  são tais que  $C \cap \{x, y\} = \emptyset$  ou  $\{x, y\} \subseteq C$  para todo circuito  $C$  de  $M$ .

## 1.6 Representação geométrica de matróides de posto pequeno

Nesta seção mostraremos que toda matróide de posto pequeno tem uma representação geométrica. As matróides mostradas neste trabalho são representadas geometricamente.

Um multiconjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , cujos membros estão em  $V(m, F)$ , é *afim-dependente* se  $k \geq 1$  e existem elementos  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de  $F$ , nem todos nulos, tais que,

$$\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k a_i = 0.$$

Equivalentemente,  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é afim-dependente se o multiconjunto

$$\{(1, v_1), (1, v_2), \dots, (1, v_k)\}$$

é linearmente dependente em  $V(m+1, F)$ , de modo que  $(1, v_i)$  é a  $(m+1)$ -upla de elementos de  $F$  cuja primeira entrada é 1 e cujas entradas restantes são as entradas de  $v_i$ . Um multiconjunto de elementos de  $V(m, F)$  é *afim-independente* se não é afim-dependente.

**Proposição 1.6.1** Suponhamos que  $E$  é um conjunto que rotula um multiconjunto de elementos de  $V(m, F)$ . Seja  $\mathcal{I}$  a coleção de subconjuntos  $X$  de  $E$  tais que  $X$  rotula um subconjunto afim-independente de  $V(m, F)$ . Então  $(E, \mathcal{I})$  é uma matróide. ■

A matr oide  $(E, \mathcal{I})$  da proposição anterior   chamada a **matr oide afim** em  $E$ , e se  $M$    isomorfa a uma tal matr oide dizemos que  $M$    afim sobre  $F$ .

**Exemplo 1.6.2** *Seja  $E$  o subconjunto  $\{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1)\}$  de  $V(2, \mathbb{R})$  e considere a matr oide afim  $M$  em  $E$ . Os seis elementos de  $E$  podem ser representados como pontos no espaço euclideo  $\mathbb{R}^2$  como na figura 1.2. Notemos que os conjuntos dependentes de  $M$  são aqueles subconjuntos, com três elementos, de  $E$  tais que os três pontos que o representam são colineares.*

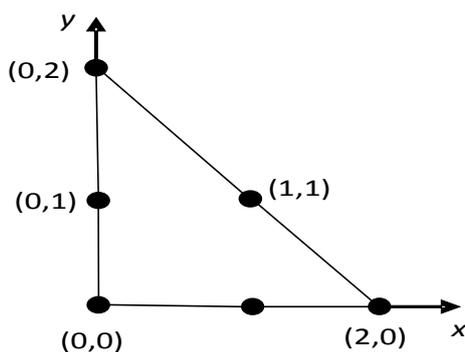


Figura 1.2: Uma matr oide afim de posto 3.

Em geral, se  $M$    uma matr oide afim, de posto  $m + 1$  ( $m \leq 3$ ), sobre  $\mathbb{R}$ , então um subconjunto  $X$  de  $E(M)$    independente em  $M$  se, na representação de  $X$  por pontos em  $\mathbb{R}^m$ , eles são dois pontos idênticos, ou três pontos colineares, ou quatro pontos coplanares, ou cinco pontos no espaço. Então os fechados de  $M$ , de posto um, dois e três são representados geometricamente por pontos, retas e planos, respectivamente.

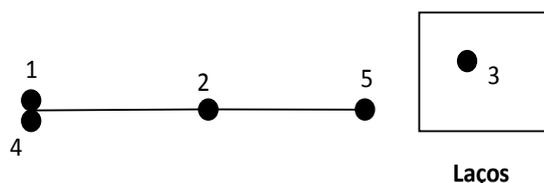


Figura 1.3: Representação geométrica de uma matr oide de posto 2.

**Exemplo 1.6.3** *O diagrama na figura 1.3 representa uma matr oide em 5 elementos de posto 2. Em tal diagrama, representamos um circuito com dois elementos por dois pontos se tocando, e um triângulo por uma linha atravessando os correspondentes pontos. Laços, que não podem ocorrer em uma matr oide afim, são representados em uma caixa como mostrado.*

Em geral valem as seguintes regras para esses diagramas. Todos os laços são representados em uma única caixa. Elementos paralelos são representados por pontos se tocando (lado-a-lado), ou algumas vezes por um único ponto rotulado por todos os elementos da classe em paralelo. Correspondendo a cada elemento que não é um laço e não é uma classe em paralelo não trivial, existe um ponto que não toca outros pontos. Se três elementos formam um circuito, os correspondentes pontos são colineares. Da mesma forma, se quatro elementos formam um circuito, os correspondentes pontos são coplanares. Nesses diagramas, as linhas não precisam ser retas e os planos podem ser curvos. Chamamos um diagrama tal qual a figura 1.3 de uma representação geométrica para uma matróide.

## 1.7 Exemplos importantes

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de matróides com o intuito de ilustrar as definições e a fim de possibilitar ao leitor uma melhor compreensão do texto escrito nesta dissertação.

**Exemplo 1.7.1** *Sejam  $m$  e  $n$  inteiros não negativos tais que  $m \leq n$ . Sejam  $E$  um conjunto com  $n$  elementos e  $\mathcal{B}$  a coleção de subconjuntos de  $E$  com no máximo  $m$  elementos. Então,  $\mathcal{B}$  satisfaz o Teorema 1.4.2 e assim  $(E, \mathcal{B})$  é uma matróide, chamada a **matróide uniforme** e denotada por  $U_{m,n}$ .*

**Exemplo 1.7.2** *Considere uma matriz  $A$ ,  $m \times n$ , com entradas em um corpo  $K$ , e considere os rótulos  $1, 2, \dots, n$  para as respectivas colunas da matriz. Então  $(E, \mathcal{I})$  é uma matróide, onde  $E := \{1, \dots, n\}$  e um subconjunto  $X$  de  $E$  está em  $\mathcal{I}$  se, e somente se, o conjunto dos vetores-coluna rotulados por elementos de  $X$  é linearmente independente em  $K^m$  e quaisquer dois elementos de  $X$  rotulam colunas distintas.*

**Definição 1.7.3** *Uma matróide obtida de uma matriz  $A$ , como no exemplo 1.7.2, é dita uma matróide **vetorial** e representada por  $M[A]$ . Se  $M$  é isomorfa a matróide vetorial de uma matriz  $D$  sobre um corpo  $K$ , então  $M$  é dita **representável** sobre o corpo  $K$  ou  $K$ -representável. Em especial, quando uma matróide  $M$  é representável sobre  $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (resp.  $GF(3) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ) é dita matróide binária (resp. matróide ternária).*

**Observação 1.7.4** *O posto de uma matróide vetorial  $M[A]$  é igual ao posto da matriz  $A$ .*

Dizemos que uma matr oide   regular se ela   representável sobre qualquer corpo. Em (12), Oxley levanta a seguinte questão: "toda matr oide   regular?". Pode-se verificar que uma matr oide   regular se, e somente se, ela   binária e ternária. A matr oide  $U_{2,4}$ , (conforme o exemplo 1.7.1),   ternária mas não   binária. Logo não   regular. Faremos a seguir a verifica o de que  $U_{2,4}$  não   regular.

**Afirma o 1.7.5**  $U_{2,4}$  não   binária, mas   ternária.

**Demonstra o:** Suponhamos que  $U_{2,4}$    representável sobre algum corpo  $K$  por uma matriz  $A$ . Então, desde que  $U_{2,4}$  tem posto 2, o espaço vetorial gerado pelos vetores colunas de  $A$  tem dimensão 2. O espaço vetorial sobre  $GF(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ , de dimensão 2, tem exatamente 4 elementos  $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})$  e  $(\bar{1}, \bar{1})$ . Tr s dos quais são não nulos. Assim, se  $K = GF(2)$ , então  $A$  não tem quatro colunas não nulas distintas. Então  $A$  tem duas colunas que são linearmente dependentes e portanto  $A$  não   representável sobre  $GF(2)$ . Assim,  $U_{2,4}$  não   binária.

Agora, observe que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

representa  $U_{2,4}$  sobre  $GF(3)$ , uma vez que quaisquer duas colunas dessa matriz são linearmente independentes. Então  $U_{2,4}$    ternária. ■

**Exemplo 1.7.6** Dado um corpo  $K$  considere o espaço projetivo  $n$ -dimensional  $\mathbb{P}^n(K)$  formado pelo conjunto dos subespaços vetoriais 1-dimensionais de  $K^{n+1}$ . Dado um subconjunto finito  $E \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ , temos uma matr oide de conjunto básico  $E$ , na qual um conjunto  $I \subseteq E$    independente quando um conjunto formado por um vetor não nulo de cada elemento de  $I$    linearmente independente em  $K^{n+1}$ . Observe que essa matr oide   isomorfa a matr oide vetorial associada a uma matriz que tem como conjunto de colunas um conjunto formado por um vetor não nulo de cada elemento de  $E$ .

**Exemplo 1.7.7** Considere um grafo finito  $G$  com conjunto de arestas  $E = E(G)$  e  $\mathcal{C}$  o conjunto de ciclos de  $G$ . Então,  $\mathcal{C}$    o conjunto de circuitos de uma matr oide sobre  $E$ . A matr oide derivada do grafo  $G$  como acima   chamada de **matr oide ciclo** ou **matr oide poligonal** e   denotada por  $M(G)$ . Uma matr oide que   isomorfa a matr oide ciclo de um grafo   chamada de **matr oide gráfica**. Em (12) Oxley mostra que toda matr oide gráfica   binária.

Se  $G$  é um grafo e uma aresta  $a \in G$  é um laço de  $G$ , então  $\{a\}$  é um circuito de  $M(G)$ .

# Capítulo 2

## A propriedade Erdős-Pósa para matróides

### 2.1 Introdução

O número de cocircuitos disjuntos em uma matróide é limitado pelo seu posto. Existem, contudo, matróides com posto arbitrariamente grande que não contem dois cocircuitos disjuntos; considere por exemplo  $M(K_n)$  e  $U_{n,2n}$ . A matróide bicircular  $B(K_n)$ , a ser definida mais adiante, tem posto arbitrariamente grande, para  $n$  arbitrariamente grande, e não tem 3 cocircuitos disjuntos. Nós provaremos que para cada  $k$  e  $n$  existe uma constante  $c$  tal que, se  $M$  é uma matróide sem menores  $U_{n,2n}$ ,  $M(K_n)$ , ou  $B(K_n)$ , então  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos ou  $r(M) \leq c$ .

O teorema a seguir é o resultado principal deste trabalho, o nosso objetivo, a partir de agora, é reunir elementos que possibilitem a prova deste resultado.

**Teorema 2.1.1** *Existe uma função  $\gamma : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, se  $M$  é uma matróide sem menores  $U_{a,2a}$ ,  $M(K_n)$ , ou  $B(K_n)$  e  $r(M) \geq \gamma(k, a, n)$ , então  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos.*

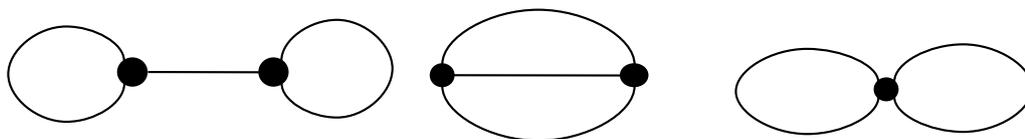
Aqui,  $M(K_n)$  é a matróide ciclo de  $K_n$  e  $B(K_n)$  é a matróide bicircular de  $K_n$  que será definida a seguir.

**Definição 2.1.2** *Seja  $G(V, E)$  um grafo. Defina uma matróide  $\tilde{B}(G)$  em  $V \cup E$ , onde  $V$  é uma base de  $\tilde{B}(G)$  e, para cada aresta  $f = uv$  de  $G$ , deixe  $f$  livre na reta gerada por*

$\{u, v\}$ . Agora definamos  $B(G) := \tilde{B}(G) \setminus V$  e chamemos  $B(G)$  da matr ide bicircular de  $G$ .

Uma caracteriza o diferente de  $B(G)$    a seguinte:

**Observa o 2.1.3** *Seja  $G$  um grafo.  $C$    um circuito de  $B(G)$  se, e somente se,  $G[C]$    uma subdivisão de um dos grafos abaixo.*



Essa caracteriza o d  origem ao nome matr ide bicircular (ver (13), prop. 12.1.6).

O Teorema 2.1.1   uma generaliza o do Teorema 2.1.8, como  $B(K_n)$  tem um menor  $U_{2,q+2}$ , para  $n$  grande (isso   mostrado na Figura 2.1) ele  , em certo sentido, o melhor possível. Cada uma das famílias  $\{M(K_n) : n \geq 1\}$ ,  $\{B(K_n) : n \geq 1\}$  e  $\{U_{a,2a} : a \geq 1\}$ , tem posto não limitado, mas têm um número limitado de cocircuitos disjuntos. Por isso, essas famílias devem ser excluídas (para algum grande posto fixado), para a propriedade Erd s-P sa fazer sentido. O Teorema principal faz isso ao considerar somente matr ides que não tem essas famílias de matr ides como menores.

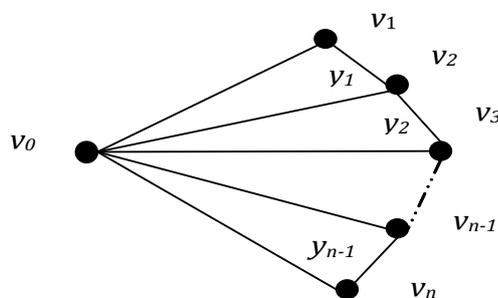


Figura 2.1: O grafo  $G$  acima   um subgrafo de  $K_{n-1}$  satisfazendo  $B(G)/\{y_1, \dots, y_{n-1}\} \cong U_{2,n}$

Além disso, podemos afirmar que é necessária a mensão a essas três famílias, quando nós excluimos as famílias de menores. Isto é, nenhuma das famílias satisfaz, que os membros de posto suficientemente grande contém um membro de grande posto de uma das outras famílias como um menor. Em outras palavras, se faz necessário excluir cada uma das famílias citadas.

Vamos considerar primeiro  $\{U_{a,2a} : a \geq 1\}$ . Para  $n \geq 4$ ,  $M(K_n)$  é não uniforme, e para  $n \geq 5$ , assim é  $B(K_n)$ . Assim, a remoção da família uniforme é necessária.

Consideremos agora  $\{M(K_n) : n \geq 1\}$ . Para  $a \geq 2$ ,  $U_{a,2a}$  contém um menor  $U_{2,4}$ , e para  $n \geq 4$ , assim também é  $B(K_n)$  (vimos acima para  $n \geq 5$  e, para  $n = 4$  basta observar que  $B(K_4) \cong U_{4,6}$ ). Por isso, nenhuma dessas pode ser gráfica, e então a remoção da família gráfica é necessária.

Considere  $\{B(K_n) : n \geq 1\}$ . Pode-se mostrar que se  $G$  é um grafo e " $e$ " é uma aresta de  $G$ , então  $B(G/e) = B(G)/e$ . Segue que qualquer menor, sem laços, de uma matróide bicircular é bicircular. As matróides  $M(K_4)$  e  $U_{3,7}$  não são bicirculares (assim, também não é bicircular  $U_{4,8}$ ). Então, a remoção da família bicircular também é necessária.

A definição seguinte diz respeito a uma estrutura de um grafo cuja cardinalidade delimita o número de circuitos disjuntos no grafo, o circuito de cobertura.

**Definição 2.1.4** *Um circuito de cobertura de um grafo  $G$  é um conjunto  $X \subseteq E(G)$  tal que  $G - X$  não tem circuitos.*

**Lema 2.1.5** *O número máximo de (arestas)circuitos disjuntos em um grafo é delimitado pelo comprimento mínimo de um circuito de cobertura.*

**Demonstração:** Com efeito, se  $G$  tem  $k$  circuitos disjuntos, então para que o subgrafo  $G - X$  não tenha circuitos,  $X$  deve conter pelo menos uma aresta de cada circuito de  $G$ . ■

Esse limite não é padrão, considere  $K_4$ , ver figura 2.2, e observe que o número máximo de (aresta) circuitos disjuntos em  $K_4$  é 1 enquanto o comprimento mínimo de um circuito de cobertura de  $K_4$  é 3.

Erdős e Pósa no artigo "On the maximal number of disjoint cocircuits of a graph"(4) provaram que o número máximo de circuitos disjuntos está qualitativamente

relacionado com o tamanho mínimo de um circuito de cobertura, através do seguinte teorema, chamado Teorema de Erdős-Posá.

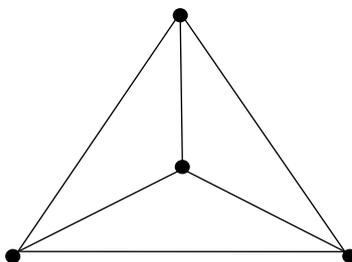


Figura 2.2:  $K_4$ , não tem dois circuitos disjuntos e o comprimento mínimo de um circuito de cobertura é 3.

**Teorema 2.1.6 (Erdős-Pósa)** *Existe uma função  $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, se o tamanho de um circuito de cobertura minimal de  $G$  é pelo menos  $c(k)$ , então  $G$  tem  $k$  circuitos disjuntos.*

■

**Lema 2.1.7** *Seja  $M$  uma matróide. Um conjunto  $X \subseteq E(M)$  intercepta cada circuito de  $M$  se, e somente se,  $E(M) - X$  é independente. Então, um circuito de cobertura minimal de  $M$  é uma base de  $M^*$ .*

**Demonstração:** Seja  $X \subseteq E(M)$  tal que para todo circuito  $C$  de  $M$ ,  $X \cap C \neq \emptyset$ . Se fosse  $E(M) - X$  dependente, então  $E(M) - X$  conteria um circuito e este não interceptaria  $X$ .

Reciprocamente, se  $X \subseteq E(M)$  é tal que  $E(M) - X$  é independente, suponha que existe um circuito  $C$  de  $M$  tal que  $C \cap X = \emptyset$ . Neste caso  $C \subseteq E(M) - X$ , contradizendo o fato de  $E(M) - X$  ser independente. Logo,  $C \cap X \neq \emptyset$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

■

O Teorema de Erdős-Pósa 2.1.6 foi generalizado para matróides por Geelen, Gerards, e Whittle no trabalho "Disjoint cocircuits in matroids with larg rank"(6) gerando o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.8** *Existe uma função  $c : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, se  $M$  é uma matróide sem menores  $U_{2,q+2}$ , ou  $M(K_n)$  e  $r(M) \geq c(k, q, n)$ , então  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos.*

■

Para facilitar a referência às matróides que não tem cocircuitos disjuntos daremos uma definição para essas matróides.

**Definição 2.1.9** *Dizemos que uma matróide é circular se ela não tem dois cocircuitos disjuntos.*

O Lema a seguir mostra uma outra caracterização de matróide circular.

**Lema 2.1.10** *Uma matróide  $M$  é circular se cada cocircuito em  $M$  é um conjunto gerador de  $M$ .*

**Demonstração:** Suponhamos primeiro que  $M$  não tenha dois cocircuitos disjuntos e seja  $C^*$  um cocircuito qualquer de  $M$ . Se  $C^*$  não gera  $M$ , então  $r_M(C^*) \leq r(M) - 1$  e daí,  $C^*$  está contido em um hiperplano. Seja  $H$  esse hiperplano e tome o cocircuito  $D^* = E(M) - H$ , que naturalmente não intercepta  $C^*$ . Uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que cada cocircuito de  $M$  é um conjunto gerador de  $M$  e seja  $C^*$  um cocircuito de  $M$ . Sabemos que,  $C^* = E(M) - H$  onde  $H$  é um hiperplano de  $M$ . Assim, se existe um cocircuito  $D^*$  de  $M$  tal que  $C^* \cap D^* = \emptyset$ , então  $D^* \subseteq H$  e daí  $r_M(D^*) \leq r(M) - 1$ , donde  $D^*$  não pode ser gerador de  $M$ . Contrariando o fato de cada cocircuito gerar  $M$ . ■

Geralmente, para um grafo  $G$ , um cocircuito de  $M(G)$  é um aresta-corte minimal de  $G$ . Se  $G$  é simples,  $G$  não tem dois aresta-cortes disjuntos se, e somente se,  $G$  é completo.

No Apêndice A, mostraremos que as matróides  $\tilde{B}(K_n)$ ,  $M(K_n)$  e  $U_{r,n}$ , onde  $n \geq 2r - 1$  são circulares.

## 2.2 Número de cobertura

Iremos trabalhar com matróides densas na prova do Teorema 2.1.1. Esta seção desenvolve ferramentas para mensurar o comprimento e a densidade de uma matróide.

Uma matróide simples de posto  $k$ ,  $GF(q)$ -representável, pode ser vista como a restrição da geometria projetiva  $PG(r-1, q)$ . Assim, ela tem pelo menos  $\frac{q^r-1}{q-1}$  elementos. Em (8), Kung estende esse limite para a classe de matróides sem menor  $U_{2,q+2}$  (a linha mais curta não representável sobre  $GF(q)$ ).

**Teorema 2.2.1 (Kung)** *Seja  $q > 1$  um inteiro, e seja  $M$  uma matróide simples sem menor  $U_{2,q+2}$ . Então*

$$|E(M)| \leq \frac{q^r - 1}{q - 1}.$$

■

A geometria projetiva mostra que o limite é padrão se  $q$  é uma potência de primo. Para limitar o número de matróides de posto  $r$ , é necessário restringir o comprimento das linhas, ou pode haver muitos elementos arbitrários em uma matróide de posto 2. Como estaremos excluindo uma matróide uniforme de posto superior, precisamos de uma nova medida de comprimento, para assegurar um análogo do Teorema de Kung (8).

**Definição 2.2.2** *Seja  $a$  um inteiro positivo. Uma  $a$ -cobertura de uma matróide  $M$  é uma coleção  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  de subconjuntos de  $E(M)$ , com  $E(M) = \cup X_i$  e*

$$r_M(X_i) \leq a$$

*para todo  $i=1,2,\dots,m$ . O comprimento da  $a$ -cobertura é  $m$ . O comprimento mínimo de uma  $a$ -cobertura de  $M$  é denotado por  $\tau_a(M)$  e dito o número  $a$ -cobertura de  $M$ . Se  $r(M) = 0$ , então nós definimos  $\tau_a(M) = 0$ .*

Note que, para uma matróide  $M$ ,  $\tau_1(M) = |E(si(M))|$ , onde  $si(M)$  denota a simplificação de  $M$ . Se  $M$  tem posto não nulo  $r(M) \leq a$ , então  $\tau_a(M) = 1$  (basta tomar a cobertura  $(E(M))$ ).

Nosso primeiro Lema limita  $\tau_a(M)$  no caso  $r(M) = a + 1$ .

**Lema 2.2.3** *Seja  $b > a \geq 1$ . Se  $M$  é uma matróide de posto  $a+1$ , sem menor  $U_{a+1,b}$ , então*

$$\tau_a(M) \leq \binom{b-1}{a}.$$

**Demonstração:** Seja  $X \subseteq E(M)$  maximal com  $M|X \cong U_{a+1,l}$ . Então, desde que  $M$  não tem menor  $U_{a+1,b}$ ,  $l \leq b-1$ . Para um  $x \notin X$ , pela maximalidade de  $X$ , existe  $Y \subseteq X$  com  $|Y| = a$  tal que  $Y \cup x$  é dependente, e assim  $x \in cl_M(Y)$ . Segue-se que  $(cl_M(Y)|Y \subseteq X, |Y| = a)$  é uma  $a$ -cobertura de  $M$ , visto que  $Y$  é independente, e daí  $r(Y) = |Y| = a$ . Desde que  $l = |X|$ , ela tem comprimento

$$\binom{l}{a} \leq \binom{b-1}{a}.$$

Como  $\tau_a(M)$  é o comprimento mínimo de uma  $a$ -cobertura de  $M$ , temos

$$\tau_a(M) \leq \binom{l}{a} \leq \binom{b-1}{a}.$$

■

O próximo resultado limita  $\tau_a(M)$  quando  $M$  não tem restrição  $U_{a+1,b}$ .

**Lema 2.2.4** *Seja  $b > a \geq 1$ . Se  $M$  é uma matróide sem restrição  $U_{a+1,b}$ , então*

$$\tau_a(M) \leq \binom{b-1}{a} \tau_{a+1}(M).$$

**Demonstração:** Seja  $(X^1, X^2, \dots, X^k)$  uma  $(a+1)$ -cobertura minimal de  $M$ , neste caso  $\tau_{a+1}(M) = k$ . Pelo Lema 2.2.3 cada  $M|X^i$  tem uma  $a$ -cobertura  $(X_1^i, X_2^i, \dots, X_{m_i}^i)$  de comprimento  $m_i \leq \binom{b-1}{a}$ , desde que  $r(M|X^i) = r(X^i) \leq a+1$ . Assim, obtemos uma  $a$ -cobertura  $(X_j^i | j = 1, 2, \dots, m_i; i = 1, 2, \dots, k)$  de  $M$ , com

$$\tau_a(M) \leq \sum m_i \leq \binom{b-1}{a} k = \binom{b-1}{a} \tau_{a+1}(M).$$

■

Nosso próximo resultado estende o Teorema 2.2.1. No entanto, o limite que nós obtemos não é exato.

**Lema 2.2.5** *Seja  $b > a \geq 1$ . Se  $M$  é uma matróide de posto  $r \leq a$  sem menor  $U_{a+1,b}$ , então*

$$\tau_a(M) \leq \binom{b-1}{a}^{r-a}.$$

**Demonstração:** A prova é feita usando indução sobre  $r$ . O caso  $r = a$  é trivial uma vez que  $(E(M))$  é uma  $a$ -cobertura de comprimento 1. Seja, portanto,  $r > a$  e assumamos que o resultado é válido para posto  $r - 1$ .

Seja  $x$  um elemento de  $M$  tal que  $x$  não é um laço. Então pelo Corolário 1.5.12 temos

$$r(M/x) = r - 1$$

e pela hipótese de indução

$$\tau_a(M) \leq \binom{b-1}{a}^{(r-1)-a}.$$

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  uma  $a$ -cobertura minimal de  $M/x$ , então

$$r_{M/x}(X_i) \leq a$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ . Isso nos diz que

$$r_M(X_i \cup x) \leq a + 1$$

e então  $(X_i \cup x; i = 1, 2, \dots, k)$  é uma  $(a + 1)$ -cobertura de  $M$ . Concluimos que

$$\tau_{a+1}(M) \leq \tau_a(M/x).$$

Finalmente, pelo Lema 2.2.4 temos que

$$\begin{aligned} \tau_a(M) &\leq \binom{b-1}{a} \tau_{a+1}(M) \leq \binom{b-1}{a} \tau_a(M/x) \leq \binom{b-1}{a} \binom{b-1}{a}^{(r-1)-a} \Rightarrow \\ \tau_a(M) &= \binom{b-1}{a}^{r-a}. \end{aligned}$$

■

**Definição 2.2.6** *Seja  $a$  um inteiro positivo. A matróide  $M$  é chamada  $a$ -simples, se  $M$  é simples e não tem restrição  $U_{k,2k}$  para  $k = 2, 3, \dots, a$ . Equivalentemente,  $M$  é  $a$ -simples se ela não tem laços e não tem restrição  $U_{k,2k}$  para  $k = 1, 2, 3, \dots, a$ .*

Não iremos definir uma operação "*a-simplificação*", pois para  $a \geq 2$  ela não estaria bem definida, a menos de isomorfismo. Para matróides *a-simples*, o comprimento é proporcional a  $\tau_a$ .

**Lema 2.2.7** *Existe uma função de valores inteiros  $\sigma(a)$  tal que, se  $a \geq 1$  e  $M$  é *a-simples*, então  $|E(M)| \leq \sigma(a)\tau_a(M)$ .*

**Demonstração:** Defina  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  pondo

$$\sigma(a) = \prod_{k=2}^a \binom{2k-1}{k-1}.$$

Desde que  $M$  não tenha restrições  $U_{k,2k}$  para  $k = 2, 3, \dots, a$ , o Lema 2.2.4 nos dá

$$\tau_{k-1}(M) \leq \binom{2k-1}{k-1} \tau_k(M), \quad k = 2, 3, \dots, a.$$

Disso, obtemos

$$|E(M)| = \tau_1(M) \leq \binom{3}{1} \tau_2(M) \leq \dots \leq \binom{3}{1} \dots \binom{2a-1}{a-1} \tau_a(M).$$

Mas,

$$\binom{3}{1} \dots \binom{2a-1}{a-1} = \prod_{k=2}^a \binom{2k-1}{k-1} = \sigma(a).$$

E isso nos dá,

$$|E(M)| \leq \sigma(a)\tau_a(M).$$

■

**Lema 2.2.8** *Existe uma função de valores inteiros  $\sigma_2(a,b)$  tal que, se  $b \geq a \geq 1$  e  $M$  é uma matróide sem laços e não tem restrição  $U_{k,b}$  para  $k = 1, 2, 3, \dots, a$ , então*

$$|E(M)| \leq \sigma_2(a,b)\tau_a(M).$$

**Demonstração:** Defina  $\sigma_2$  pondo

$$\sigma_2(a,b) = (b-1) \prod_{k=2}^a \binom{b-1}{k-1}.$$

Não se pode ter  $b = a = 1$ , pois neste caso  $M$  conteria laços. Suponha, portanto,  $b > 1$  e temos

$$|E(M)| \leq (b-1)\tau_1(M).$$

Agora aplicando o Lema 2.2.4 obtemos,

$$\begin{aligned}\tau_1(M) &\leq \binom{b-1}{1} \tau_2(M), \\ \tau_2(M) &\leq \binom{b-1}{2} \tau_3(M), \\ &\vdots \\ \tau_{a-1}(M) &\leq \binom{b-1}{a-1} \tau_a(M).\end{aligned}$$

e assim

$$|E(M)| \leq (b-1) \binom{b-1}{1} \cdots \binom{b-1}{a-1} \tau_a(M).$$

Donde,

$$|E(M)| \leq (b-1) \prod_{k=2}^a \binom{b-1}{k-1} \tau_a(M) = \sigma_2(a, b) \tau_a(M).$$

■

## 2.3 Aproximando circularidade

A primeira etapa na prova do principal teorema é mostrar, que uma matróide de posto suficientemente grande tem  $k$  cocircuitos disjuntos ou um menor de alto posto, o qual é quase circular.

**Definição 2.3.1** *Seja  $M$  uma matróide. A deficiência do posto de um conjunto de elementos  $X \subseteq E(M)$  é o número  $r_M^-(X) = r(M) - r_M(X)$ . Denotamos por  $\Gamma(M)$  a deficiência de posto máxima entre os cocircuitos de  $M$ . Para  $t \in \mathbb{N}$  dizemos que  $M$  é  $t$ -circular se  $\Gamma(M) \leq t$ .*

**Lema 2.3.2** (1) *Uma matróide  $M$  é circular se, e somente se,  $\Gamma(M) = 0$ , isto é,  $M$  é 0-circular.*

(2) *A condição de ser  $t$ -circular é preservada sobre contrações.*

**Demonstração:** Para ver (1) observe que uma matróide  $M$  é circular se cada cocircuito de  $M$  é um conjunto gerador da matróide. Neste caso, se  $C^*$  é um cocircuito qualquer de  $M$ , então,

$$r_M^-(C^*) = r(M) - r(C^*) = r(M) - r(M) = 0 \Rightarrow \Gamma(M) = 0.$$

Reciprocamente, se  $\Gamma(M) = 0$ , então para todo cocircuito  $C^*$  de  $M$ , tem-se  $r_M^-(C^*) = 0$ .  
 Onde  $M$  é circular.

Agora, para ver (2), no Teorema 2.4.5, mais a frente, apresentaremos a prova da seguinte propriedade de  $\Gamma(M)$ ,  $\Gamma(M/Y) \leq \Gamma(M)$  para todo  $Y \subseteq E(M)$ . Nessas condições, se  $\Gamma(M) \leq t$ , então  $\Gamma(M/Y) \leq t$  para todo  $Y \subseteq E(M)$ . ■

Quando não pudermos obter uma matróide  $t$ -circular, trabalharemos com a seguinte propriedade mais fraca:  $\Gamma(M) \leq \frac{1}{2}r(M)$ .

**Observação 2.3.3** *Observe que  $r(M/X) = r_M^-(X)$ .*

**Demonstração:** Com efeito,

$$\begin{aligned} r(M/X) &= r_{M/X}(E(M) - X) = r_M((E(M) - X) \cup X) - r_M(X) \\ &\Rightarrow r(M/X) = r_M(E(M)) - r_M(X) = r(M) - r_M(X) = r_M^-(X). \end{aligned}$$

■

**Lema 2.3.4** *Seja  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função não-decrescente. Existe uma função de valores inteiros positivos  $f_g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , se  $M$  é uma matróide com  $r(M) \geq f_g(k)$ , então*

1.  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos; ou
2.  $M$  tem um menor  $N=M/Y$  com  $r(N) \geq g(\Gamma(N))$ .

**Demonstração:** Seja  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função não-decrescente e definamos  $f_g$  pondo,

$$f_g(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1 \\ g(f_g(k-1)), & k \geq 2 \end{cases}.$$

A prova é feita usando indução em  $k$ .

Se  $f_g(k) = 1$ ,  $r(M) \geq 1$ , então  $M$  tem um cocircuito ou  $\Gamma(M) = 0$ , assim o resultado vale para  $k = 0, 1$ . Agora, seja  $k \geq 2$  e  $r(M) \geq f_g(k) = g(f_g(k-1))$ . Se  $\Gamma(M) \geq f_g(k-1)$ , então escolha um cocircuito  $C^*$  de  $M$  com  $r_M^-(C^*) = \Gamma(M)$ . Então  $r(M/C^*) = r_M^-(C^*) \geq f_g(k-1)$ . Se  $M/C^*$  tem o menor desejado, está feito. Caso contrário, como  $r(M/C^*) \geq f_g(k-1)$ , temos pela hipótese de indução que  $M/C^*$  tem

$k - 1$  cocircuitos disjuntos. Estes, juntamente com o  $C^*$ , nos dão  $k$  cocircuitos disjuntos de  $M$ .

Se, no entanto,  $\Gamma(M) \leq f_g(k - 1)$ , então como  $g$  é não-decrescente, temos

$$g(\Gamma(M)) \leq g(f_g(k - 1)) = f_g(k) \leq r(M) \Rightarrow$$

Isto é,

$$r(M) \geq g(\Gamma(M))$$

e isso encerra a demonstração. ■

## 2.4 Construindo densidade

A meta desta seção é provar, que uma matrôide quase circular de alto posto sem menor  $U_{a+1,b}$  contém um menor denso.

**Lema 2.4.1** *Sejam  $b > a \geq 1$ ,  $M$  é uma matrôide sem menor  $U_{a+1,b}$  e  $C^*$  um cocircuito de  $M$  de comprimento mínimo. Se  $C_1^*, \dots, C_k^*$  são cocircuitos disjuntos de  $M \setminus C^*$  com  $|C_1^*| \leq \dots \leq |C_k^*|$ , então*

$$|C_i^*| \geq \frac{|C^*|}{a \binom{b-1}{a}},$$

para  $i = a, \dots, k$ .

**Demonstração:** Sejam  $C^*$  e  $C_1^*, \dots, C_k^*$  dados como acima e seja  $i \in \{a, \dots, k\}$ . Como  $C_1^*$  é codependente em  $M$  e  $C_1^* \subseteq E(M) - (C^* \cup C_i^*)$  temos que  $C_1^*$  é codependente em  $M \setminus C^* \setminus C_i^*$ , mas de acordo com o Teorema 1.5.16,  $C_1^*$  pode não ser um cocircuito nesta matrôide. Então existe um cocircuito  $d_1^* \subseteq C_1^*$  de  $M \setminus C^* \setminus C_i^* = M \setminus (C^* \cup C_i^*)$ . Agora, usando o mesmo argumento,  $C_2^*$  é codependente em  $M \setminus C^* \setminus (C_i^* \cup d_1^*)$ . Então existe um cocircuito  $D_2^* \subseteq C_2^*$  de  $M \setminus (C^* \cup C_i^* \cup C_1^*)$ . Continuando dessa forma, para cada  $j = 2, \dots, a - 1$  escolhamos um cocircuito  $d_j^* \subseteq C_j^*$  de  $M \setminus (C^* \cup C_i^* \cup d_1^* \cup \dots \cup d_{j-1}^*)$ . Denote por  $F$  o conjunto  $E(M) - (C^* \cup C_i^* \cup d_1^* \cup \dots \cup d_{a-1}^*)$ . Deletando um cocircuito de uma matrôide diminuimos seu posto em 1. Então,

$$r_M^-(F) = r(M) - r_M(F) = a + 1.$$

Por isso,  $N = M/F$  tem posto  $r(N) = a + 1$ . Desde que  $C^*$  é um cocircuito de  $N$  de comprimento mínimo,  $E(N) - C^*$  deve ser um conjunto de  $N$ , de posto  $a$ , de

comprimento máximo. Temos agora,

$$|C^*| \leq |E(N)| \leq \tau_a(N) |E(N) - C^*| = \tau_a(N) |(C_i^* \cup d_1^* \cup \dots \cup d_{a-1}^*)|.$$

Mas, desde que  $N$  não tem menor  $U_{a+1,b}$ , o Lema 2.2.3 nos dá,

$$\tau_a(N) \leq \binom{b-1}{a}.$$

E assim,

$$|C^*| \leq \binom{b-1}{a} |(C_i^* \cup d_1^* \cup \dots \cup d_{a-1}^*)|.$$

Além disso,

$$|(C_i^* \cup d_1^* \cup \dots \cup d_{a-1}^*)| \leq a |C_i^*|.$$

Donde,

$$|C^*| \leq \binom{b-1}{a} a |C_i^*| \Rightarrow |C_i^*| \geq \frac{|C^*|}{a \binom{b-1}{a}}.$$

■

**Lema 2.4.2** *Sejam  $M$  uma matr oide  $a$ -simples sem menor  $U_{a+1,b}$  satisfazendo,*

$$\Gamma(M) \leq \frac{1}{2}r(M)$$

*e  $C^*$  um cocircuito de comprimento mínimo de  $M$ . Sejam  $b \geq a \geq 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Existe uma fun o de valores inteiros  $k(\lambda, a, b)$  tal que, se  $M \setminus C^*$  tem  $k(\lambda, a, b)$  cocircuitos disjuntos, então  $\tau_a(M) > \lambda r(M)$ .*

**Demonstra o:** Sejam  $a, b$  e  $\lambda$  como acima e definamos

$$k(\lambda, a, b) = k = 2a \binom{b-1}{a} \sigma(a)\lambda + a - 1 \Rightarrow \sigma(a)\lambda = \frac{k - a + 1}{2a \binom{b-1}{a}}$$

Sejam agora,  $C^*$  um cocircuito de comprimento mínimo de  $M$  e  $C_1^*, \dots, C_k^*$  cocircuitos disjuntos de  $M \setminus C^*$  de modo que  $|C_{i-1}^*| \leq |C_i^*|$ . De,

$$\Gamma(M) \geq r_M^-(C^*) = r(M) - r_M(C^*) \Rightarrow r_M(C^*) \geq r(M) - \Gamma(M) \quad (2.1)$$

e  $|C^*| \geq r_M(C^*)$  obtemos  $|C^*| \geq r(M) - \Gamma(M)$ . Como, por hipótese,

$$\Gamma(M) \leq \frac{1}{2}r(M)$$

ficamos com,

$$|C^*| \geq \frac{1}{2}r(M). \quad (2.2)$$

Desde que  $M$  é  $a$ -simples, pelo Lema 2.2.7,

$$|E(M)| \leq \sigma(a)\tau_a(M).$$

Como  $C_1^*, \dots, C_k^*$  são cocircuitos disjuntos de  $M \setminus C^*$  podemos usar o Lema 2.4.1 para concluir que

$$|C_i^*| \geq \frac{|C^*|}{a \binom{b-1}{a}},$$

de modo que,

$$|E(M)| > |C_a^*| + \dots + |C_k^*| \geq \frac{|C^*|}{a \binom{b-1}{a}} + \dots + \frac{|C^*|}{a \binom{b-1}{a}}.$$

Donde,

$$|E(M)| > \frac{[k - (a + 1)] \cdot |C^*|}{a \binom{b-1}{a}}.$$

Da equação (2.2), obtemos

$$|E(M)| > \frac{[k - (a + 1)] \cdot r(M)}{2a \binom{b-1}{a}} = \sigma(a) \cdot \lambda \cdot r(M).$$

O que nos dá,

$$\sigma(a)\tau_a(M) > E(M) \geq \sigma(a) \cdot \lambda \cdot r(M).$$

E daí,

$$\tau_a(M) > \lambda \cdot r(M).$$

■

**Definição 2.4.3** Para uma matróide  $M$  denote por  $\Theta(M)$  o número máximo de cocircuitos disjuntos em  $M$ .

**Lema 2.4.4** Uma matróide  $M$  é circular se, e somente se,  $\Theta(M) = 1$ .

**Demonstração:** Observe que se  $M$  é circular ela não tem dois cocircuitos disjuntos e então  $\Theta(M) = 1$  e reciprocamente, se  $\Theta(M) = 1$  é imediato que  $M$  é circular. ■

Em uma matróide  $M$  os parâmetros  $\Gamma(M)$  e  $\Theta(M)$  estão relacionados por

$$\Theta(M) \leq \Gamma(M) + 1.$$

Isso decorre da observação que se  $C_1^*, \dots, C_k^*$  são cocircuitos disjuntos de  $M$ , então

$$r(M \setminus (C_1^* \cup \dots \cup C_k^*)) \leq r(M) - k.$$

**Lema 2.4.5** *Sejam  $M$  uma matróide e  $X, Y \subseteq E(M)$ . Então,*

- i)  $\Theta(M/Y) \leq \Theta(M)$  e  $\Gamma(M/Y) \leq \Gamma(M)$ ;*
- ii)  $\Theta(M \setminus X) \geq \Theta(M)$  e  $\Gamma(M \setminus X) \geq \Gamma(M)$ , se  $X$  é coindependente;*
- iii)  $\Theta(M \setminus X) = \Theta(M)$  e  $\Gamma(M \setminus X) = \Gamma(M)$ , se para algum número  $a \in \mathbb{N}$ ,  $X$  é minimal com respeito a inclusão, tal que  $M \setminus X$  é  $a$ -simples.*

**Demonstração:**

- i) O Teorema 1.5.16 mostra que todo cocircuito de  $M/Y$  é um cocircuito de  $M$ , assim  $\Theta(M/Y) \leq \Theta(M)$ ;

Seja  $C^*$  é um cocircuito de  $M/Y$ , então

$$r_{M/Y}^-(C^*) = r(M/Y) - r_{M/Y}(C^*) = r(M) - r_M(Y) - r_M(C^* \cup Y) + r_M(Y).$$

Daí,

$$r_{M/Y}^-(C^*) = r(M) - r(C^* \cup Y).$$

Obtemos,

$$r_{M/Y}^-(C^*) \leq r(M) - r_M(C^*) = r_M^-(C^*).$$

Particularmente, se  $C^*$  é tal que  $\Gamma(M/Y) = r_{M/Y}^-(C^*)$ , então

$$\Gamma(M/Y) = r_{M/Y}^-(C^*) \leq r_M^-(C^*) \leq \Gamma(M)$$

donde concluimos a prova.

- ii) Para provar o segundo e o terceiro itens é suficiente considerar  $X = \{x\}$ , onde  $x$  não é um colação de  $M$ . O Teorema 1.5.16 mostra que se  $C^*$  é um cocircuito de  $M$ , então  $C^* - x$  contém um cocircuito em  $M \setminus x$ . Neste caso, para cada cocircuito de  $M$  associamos um cocircuito de  $M \setminus x$ , donde  $\Theta(M \setminus x) \geq \Theta(M)$ . Notemos também que cada cocircuito de  $M \setminus x$  está contido em um circuito de  $M$ . Dessa forma, sejam  $D^*$  um cocircuito de  $M \setminus x$  e  $C^*$  um cocircuito em  $M$  que contém  $D^*$ . Desde que  $x$  não é um colação, o Corolário 1.5.12 nos dá,  $r(M \setminus x) = r(M)$ . E assim,

$$r_{M \setminus x}^-(D^*) = r(M \setminus x) - r_{M \setminus x}(D^*) = r(M) - r_{M \setminus x}(D^*).$$

Mas, o Teorema 1.5.10 mostra que  $r_{M \setminus x}(D^*) = r_M(D^*)$ . Assim,

$$r_{M \setminus x}^-(D^*) = r(M) - r_M(D^*).$$

Sendo  $C^*$  o cocircuito em  $M$  que contém  $D^*$ , temos que  $r_M(C^*) \geq r_M(D^*)$ . Daí,

$$r_{M \setminus x}^-(D^*) = r(M) - r_M(D^*) \geq r(M) - r_M(C^*).$$

Particularmente,  $\Gamma(M \setminus x) \geq \Gamma(M)$ .

iii) Voltemos ao terceiro item. Assuma que  $x \in W$ , onde  $M|W \cong U_{k,2k}$  para um  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $C^*$  é um cocircuito de  $M \setminus x$ , então  $C^* = D^* - x$  para algum cocircuito  $D^*$  de  $M$ , tal que  $C^*$  ou  $C^* \cup x$  é um cocircuito de  $M$ . Olhemos os dois casos:

- Se  $C^* \cap (W - x) = \emptyset$ , então  $C^*$  é um cocircuito de  $M$ , desde que o complemento de um cocircuito é fechado e  $x \in cl_M(W - x)$ .
- Se  $C^* \cap (W - x) \neq \emptyset$ , devemos ter

$$|(W - x) - C^*| < k,$$

desde que  $M|(W - x) \cong U_{k,2k-1}$  e o complemento de  $C^*$  é fechado. Por isso,  $|C^* \cap (W - x)| \geq k$ .

Note que, o segundo caso pode acontecer, no máximo, uma vez em uma coleção de cocircuitos disjuntos. Então, dada uma coleção de cocircuitos disjuntos de  $M \setminus x$ , acrescentando  $x$  em, no máximo, um deles, obtemos uma coleção de cocircuitos disjuntos de  $M$ . Assim,  $\Theta(M) \geq \Theta(M \setminus x)$ . Note também que, para um cocircuito  $C^*$  de  $M \setminus x$ , se  $C^* \cup x$  é um cocircuito de  $M$ , então estamos no segundo caso, e  $r_M(C \cup x) = r_{M \setminus x}(C)$ . Assim,  $\Gamma(M) \geq \Gamma(M \setminus x)$ . Finalmente, desde que um cocircuito não pode conter laços, a deleção de laços também preserva  $\Gamma$  e  $\Theta$ . ■

**Lema 2.4.6** *Sejam  $b > a \geq 1$  e  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Existe uma função de valores inteiros  $\delta(\lambda, a, b)$  tal que se  $M$  é uma matróide  $a$ -simples, sem menor  $U_{a+1,b}$ , satisfazendo*

$$\Gamma(M) \leq \frac{1}{2}r(M) \text{ e } r(M) \geq \delta(\lambda, a, b) = \delta,$$

*então  $M$  tem um menor  $N$  com  $\tau_a(N) > \lambda r(N)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $a$  e  $b$  dados como acima e  $\lambda$  fixado, iremos definir  $\delta(\lambda, a, b)$ . Primeiro definamos uma sequência de funções  $g_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  pondo,

$$g_n(m) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \max(2m, \delta_n), & n \geq 1 \end{cases}.$$

onde,  $\delta_n = 2(f_{g_{n-1}}(k(\lambda, a, b) + 1)) \in \mathbb{N}$ . E, finalmente, seja  $\delta(\lambda, a, b) = \delta_{n_0}$ , onde  $n_0 = 2\sigma(a)\lambda$ . As funções  $\sigma$ ,  $k$  e  $f_{g_n}$  são aquelas definidas anteriormente.

Antes de prosseguir com a prova do Lema, apresentaremos um resultado parcial que é, em verdade, um resultado particular ao seguinte.

**Afirmção 2.4.7** *Seja  $n \geq 0$ . Se  $M$  é uma matróide sem menor  $U_{a+1,b}$  tal que,  $r(M) \geq g_n(\Gamma(M))$ , então*

- *$M$  tem um menor  $N$  com  $\tau_a(N) > \lambda r(N)$ ; ou*
- *Existe uma sequência de matróides  $M_0, M_1, \dots, M_n$  tal que, para  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $M_{i+1} = M_i \setminus C_i^*/Y_i$ , onde  $C_i^*$  é um cocircuito de  $M_i$  que gera  $M_i/Y_i$ .*

**Demonstração:** Provaremos essa afirmação usando indução em  $n$ . O caso  $n = 0$  é trivial. Assuma  $n \geq 1$  e que o resultado é válido para  $n - 1$ . Seja  $X \subseteq E(M)$  minimal tal que,  $M \setminus X$  é  $a$ -simples. Tome um cocircuito  $C_0^*$  de  $M$  com  $|C_0^* - X|$  minimal. Isto significa que  $C = C_0^* - X$  não contém nenhum conjunto do tipo  $D^* - X$ , onde  $D^*$  é um cocircuito de  $M$ , e por isso  $C$  é um cocircuito de  $M \setminus X$  de comprimento minimal. Escolha uma base  $Z$  de  $M/C_0^*$  e seja  $M' = M/Z$ , o Teorema 1.5.16 mostra que  $C_0$  gera  $M'$ . Uma vez que  $r(M) \geq g_n(\Gamma(M))$  e usando a equação (2.1) da prova do Lema 2.4.2,

$$r(M') = r_M(C_0^*) \geq r(M) - \Gamma(M) \geq \frac{1}{2}r(M) \geq \frac{1}{2}\delta_n.$$

Agora,

$$r(M' \setminus C_0^*) = r(M') - 1 \geq \frac{1}{2}\delta_n - 1 \geq \frac{1}{2}[2(f_{g_{n-1}}(k(\lambda, a, b) + 1))] - 1 = f_{g_{n-1}}(k(\lambda, a, b))$$

Assim,

$$r(M' \setminus C_0^*) \geq f_{g_{n-1}}(k(\lambda, a, b))$$

Então, pelo Lema 2.3.4, um dos seguintes casos ocorrem:

- (a)  $M' \setminus C_0^*$  tem  $k(\lambda, a, b)$  cocircuitos disjuntos;

(b)  $M' \setminus C_0^*$  tem um menor  $M_1 = M' \setminus C_0^*/Y$  com  $r(M_1) \geq g_{n-1}(\Gamma(M_1))$ .

Assumamos primeiro que vale (a). Desde que

$$M' \setminus C_0^* = M/Z \setminus C_0^* = M \setminus C_0^*/Z,$$

pelo Lema 2.4.5(i) temos,

$$\Theta(M \setminus C_0^*/Z) \leq \Theta(M \setminus C_0^*).$$

Logo, por (a),  $M \setminus C_0^*$  tem  $k(\lambda, a, b)$  cocircuitos disjuntos. Afirmamos que  $X - C_0^*$  é coindependente em  $M \setminus C_0^*$ . Caso contrário, existe um cocircuito  $D^* \subseteq X \cup C_0^*$  de  $M$  com  $D^* \cap (X - C_0^*) \neq \emptyset$ , contradizendo a escolha de  $C_0^*$ . Agora, pelo Lema 2.4.5(ii),

$$\Theta((M \setminus X) \setminus C_0^*) = \Theta(M \setminus (C_0^* \cup X)) \geq \Theta(M \setminus C_0^*) \geq k(\lambda, a, b).$$

O Lema também dá  $\Gamma(M \setminus X) \leq \frac{1}{2}r(M \setminus X)$ . Podemos agora aplicar o Lema 2.4.2 para  $N = M \setminus X$ , dessa forma  $\tau_a(N) > \lambda r(N)$ .

Assuma agora que (b) vale. Sendo  $Y_0 = Z \cup Y$ , temos

$$M \setminus C_0^*/Y_0 = M \setminus C_0^*/(Z \cup Y) = M \setminus C_0^*/Z/Y = M/Z \setminus C_0^*/Y = M' \setminus C_0^*/Y = M_1$$

e  $C_0^*$  gera  $M/Y_0$ . Aplicando a hipótese de indução em  $M_1$ , temos a prova da afirmação.

Voltemos a prova do Lema e seja  $M$  dada como acima. Note que,

$$g_{n_0}(\Gamma(M)) = \max\{2\Gamma(M), \delta_{n_0}\} \leq r(M).$$

Pela afirmação,  $M$  tem um menor  $N$  com  $\tau_a(N) > \lambda r(N)$  e está feito. Senão, existe uma sequência de matróides  $M_0, M_1, \dots, M_{n_0}$  tal que, para  $i = 0, \dots, n-1$ ,

$$M_{i+1} = M_i \setminus C_i^*/Y_i,$$

onde  $C_i^*$  é um cocircuito de  $M_i$  que gera  $M_i/Y_i$ .

Seja  $M' = M/(Y_0 \cup \dots \cup Y_{n_0-1})$ . Note que, para  $i = 0, \dots, n_0-1$ ,  $C_i^*$  é um gerador de  $M' \setminus (C_0^* \cup \dots \cup C_{i-1}^*)$ . Assim,

$$r_{M'}(C_i^*) = r(M' \setminus (C_0^* \cup \dots \cup C_{i-1}^*)) = r(M') - i.$$

Para todo  $i$ , escolha uma base  $B_i$  para  $M'|C_i^*$ , e defina  $N = M'|(\cup B_i)$ . Então, desde que  $|B_i| = r - i$ ,

$$|E(N)| = \sum_{i=0}^{n_0-1} |B_i| = \sum_{i=0}^{n_0-1} (r - i) = \frac{n_0}{2}[r + (r - n_0 + 1)] = n_0r - \frac{n_0^2 - n_0}{2} > \frac{n_0r}{2}.$$

Afirmamos que  $N$  é *a-simples*. Suponhamos  $N|W \cong U_{k,2k}$  para um  $W \subseteq E(N)$  e  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Como  $B_0$  é independente e todo subconjunto com mais de  $k$  elementos em  $N|W$  é dependente,  $|W \cap B_0| \leq k$ . Assim,  $|W \cap (E(N) - B_0)| \geq k$ , pois  $W \subseteq E(N)$ ,  $|W| = 2k$ , e desde que  $E(N) - B_0$  é fechado,  $|W \cap B_0| = \emptyset$ .

Repetindo esse argumento em  $N \setminus B_0$ , para ver que  $|W \cap B_1| = \emptyset$ , e seguimos assim até que cheguemos a  $|W \cap B_{n_0-2}| = \emptyset$ . Dessa forma,  $W \subseteq B_{n_0-1}$ , uma contradição, pois os elementos  $|W| = 2k$ ,  $B_{n_0-1}$  é independente e, como já foi afirmado, qualquer elemento com mais de  $k$  elementos em  $N|W$  é dependente.

Finalmente, dado que  $N$  é *a-simples*, pelo Lema 2.2.7,

$$\begin{aligned} \sigma(a)\tau_a(N) &\geq |E(N)| > \frac{n_0r}{2} = \frac{2\sigma(a)\lambda r(M')}{2} \geq \sigma(a)\lambda r(N). \\ &\Rightarrow \tau_a(N) > \lambda r(N). \end{aligned}$$

■

## 2.5 Configurando circuitos

Queremos identificar algumas estruturas mais concretas em uma matróide densa. Para isso, temos que ser capazes de separar alguns dos muitos conjuntos de posto pequeno em uma matróide.

Para uma matróide, chamamos os conjuntos  $A_1, \dots, A_n \subseteq E(M)$  de assimétricos se

$$r_M\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i r_M(A_i)$$

Este conceito é análogo a subespaços de um espaço vetorial formando uma soma direta.

O primeiro resultado desta seção é uma ferramenta para encontrar conjuntos que são assimétricos em uma matróide.

Vamos definir uma função  $\mu_M$  numa coleção de subconjuntos de  $E(M)$  da seguinte forma:

Para conjuntos  $A_1, \dots, A_n \subseteq E(M)$  seja

$$\begin{aligned} \mu_M(A_1, \dots, A_n) &= r_M\left(\bigcup_j A_j\right) - \sum_i \left[ r_M\left(\bigcup_j A_j\right) - r_M\left(\bigcup_{j \neq i} A_j\right) \right] \\ &= r_M\left(\bigcup_j A_j\right) - \sum_i \left[ r_{M/\left(\bigcup_{j \neq i} A_j\right)}(A_i - \bigcup_{j \neq i} A_j) \right]. \end{aligned}$$

Esta função pode ser vista como uma função de conectividade generalizada. Para  $n = 2$ ,  $\mu_M$  é igual a função de conectividade

$$\lambda_M(A_1, A_2) = r_M(A_1) + r_M(A_2) - r_M(A_1 \cup A_2).$$

Para  $n \geq 2$  temos a seguinte relação,

$$\mu_M(A_1, A_2, \dots, A_n) = \lambda_M(A_1, A_2 \cup \dots \cup A_n) + \mu_{M/A_1}(A_2, \dots, A_n)$$

A função  $\mu_M$  mensura, de certa forma, o posto da sobreposição dos conjuntos.

**Observação 2.5.1** *Notemos que,  $\mu_M(A_1, \dots, A_n) = 0$  se, e somente se,  $A_1, \dots, A_n$  são assimétricos em  $M$ .*

Se existe um conjunto  $W \subseteq E(M)$  tal que,  $A_1 - W, \dots, A_n - W$  são assimétricos em  $M/W$ , então  $\mu_M(A_1, \dots, A_n) \leq r_M(W)$ .

Para quaisquer inteiros positivos  $n, c, k$ , usaremos  $R(n, c, k)$  para denotar o seguinte número de **Ramsey**: O menor  $R$  tal que se  $X$  é um conjunto com  $|X| = R$ , então para qualquer  $c$ -coloração de  $[X]^n$ ,  $X$  tem um subconjunto monocromático de comprimento  $k$ . Onde  $[X]^n$  denota o conjunto de todos os subconjuntos de  $X$  de comprimento  $n$ .

Por um subconjunto monocromático de  $X$ , chamamos um subconjunto  $Y \subseteq X$  tal que os conjuntos em  $[Y]^n$  tem todos a mesma cor. Este número existe, e sua existência é garantida pelo **Teorema de Ramsey** (ver (14) ou [(2), 9.14]).

**Lema 2.5.2** *Sejam  $b > a \geq 1$  e sejam  $r$  e  $n$  inteiros positivos. Existe uma função de valores inteiros  $\alpha_1(n, r, a, b)$  tal que se  $M$  é uma matróide sem menor  $U_{a+1, b}$  e  $\mathcal{E}$  é uma coleção de subconjuntos de  $E(M)$ , de posto  $r$ , com*

$$r_M\left(\bigcup_{X \in \mathcal{E}} X\right) \geq \alpha_1(n, r, a, b).$$

*Então, existem  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{E}$  tais que,*

a)  $X_i \not\subseteq cl_M(\bigcup_{j \neq i} X_j)$  para  $i = 1, \dots, n$ ;

b)  $\mu_M(X_1, \dots, X_n) \leq (r-1)a$ .

**Demonstração:** Sejam  $n, r, a$  e  $b$  dados como acima e definamos  $\alpha_1(n, r, a, b)$ . Inicialmente, definamos os números  $l_i, s_i$  para  $i = 1, \dots, r$ .

Sejam  $l_r = 0, s_r = n$  e para  $i = 1, \dots, r-1$ , definamos recursivamente:

$$s_i = s_{i+1} + l_{i+1}, u_i = \binom{b-1}{a}^{rs_i - a}, l_i = n \binom{u_i}{r-i}.$$

Seja  $m = s_1 + l_1$ . Então,

$$\begin{aligned} s_r &= 0 \\ s_{r-1} &= s_r + l_r > s_r \\ s_{r-2} &= s_{r-1} + l_{r-1} > s_{r-1} \\ &\vdots \\ s_1 &= s_2 + l_2 > s_2 \\ \Rightarrow 0 &= s_r < s_r - 1 < \dots < s_1 < m = s_1 + l_1 \end{aligned}$$

Feito isso, definamos os números  $k_1, \dots, k_m$  como se segue. Seja  $k_m = m$  e ponhamos

$$k_{i-1} = R(i, r, k_i), \text{ para } i = m, m-1, \dots, 2.$$

Finalmente, seja  $\alpha_1(n, r, a, b) = rk_1$ .

Para um conjunto de subconjuntos  $\mathcal{T} \subseteq 2^{E(M)}$  usaremos a notação  $r_M(\mathcal{T})$  para indicar  $r_M(\bigcup_{X \in \mathcal{T}} X)$ .

Sejam  $M$  e  $\mathcal{E}$  dados como acima com,

$$r_M(\mathcal{E}) \geq \alpha_1(n, r, a, b).$$

Podemos escolher conjuntos  $Y_1, \dots, Y_{k_1} \in \mathcal{E}$ , tais que  $Y_i \not\subseteq cl_M(Y_1 \cup \dots \cup Y_{i-1})$ .

Seja  $\mathcal{F}_1 = \{Y_1, \dots, Y_{k_1}\}$  e ponha  $a_0 = 0, a_1 = r$ .

Vamos construir, iterativamente, as sequências:

$$\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}_m, \quad a_0 < a_1 < \dots < a_m$$

tais que, para  $i = 1, \dots, m$ ,  $|\mathcal{F}_i| = k_i$  e, se  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_i$  com  $|\mathcal{F}'| = i$ , então  $r_M(\mathcal{F}') = a_i$ . Isso vale para  $\mathcal{F}_1$ , desde que  $|\mathcal{F}_1| = k_1$  e para todo subconjunto  $X \subseteq \mathcal{F}_1$  tem-se  $r_M(\mathcal{T}) = r = a_1$ .

Seja, agora,  $i \geq 2$  e assumamos que  $\mathcal{F}_{i-1}$  e  $a_{i-1}$  satisfazem o exposto e vamos encontrar  $\mathcal{F}_i$  e  $a_i$ . Nestas condições, se  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_{i-1}$  com  $|\mathcal{F}'| = i - 1$  tem-se  $r_M(\mathcal{F}') = a_{i-1}$ .

Assim, se  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_{i-1}$  com  $|\mathcal{F}'| = i$  tem-se  $a_{i-1} < r_M(\mathcal{F}') \leq a_i + r$ . Isto define uma  $r$ -coloração de  $[\mathcal{F}_{i-1}]^i$ . Desde que  $|\mathcal{F}_{i-1}| = k_{i-1} = R(i, r, k_i)$ , existe  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i-1}$  tal que, todo conjunto em  $[\mathcal{F}_i]^i$  tem o mesmo posto. Chamemos esse número de  $a_i$ .

Para  $i = 1, \dots, m$ , seja  $b_i = a_i - a_{i-1}$ . Note que, por submodularidade, isto dá uma seqüência decrescente

$$r = b_1 i \geq b_2 \geq \dots \geq b_m \geq 1$$

Com efeito,

$$a_{i+1} + a_{i-1} \leq a_i + a_i \Rightarrow \underbrace{a_{i+1} - a_i}_{b_i} \leq \underbrace{a_i - a_{i-1}}_{b_{i-1}}$$

Então, pela definição dos pares  $(b_i, l_i)$ , existe um  $r' \in \{1, 2, \dots, r\}$  tal que

$$b_{s+1} = b_{s+2} = \dots = b_{s+l} = r', \text{ onde } s = s_{r'} \text{ e } l = l_{r'}.$$

Se  $r' = r$ , então obtemos  $s = 0$ ,  $l = n$  e, portanto,

$$b_1 = \dots = b_n = r,$$

implica que,

$$a_i = a_{i-1} + r \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Assim, se escolhermos quaisquer membros  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}_m$ , então eles são assimétricos e está feito.

Assuma que  $r' < r$ . Escolha  $s$  conjuntos  $Z_1, \dots, Z_s \in \mathcal{F}_m$  e seja  $F = \bigcup_{i=1}^s Z_i$ . Escolha outros  $l$  elementos  $X_1, \dots, X_l \in \mathcal{F}_m - \{Z_1, \dots, Z_s\}$ . Desde que  $b_{s+1} = b_{s+l} = r'$ , os conjuntos  $X_1 - F, \dots, X_l - F$  são assimétricos de posto  $r'$  em  $M/F$ .

Para  $i = 1, \dots, l$ , escolha um conjunto independente  $\overline{B}_i \subseteq X_i$  de comprimento  $r'$ , assimétricos de  $F$ . Expandamos esse conjunto a uma base  $\overline{B}_i \cup B_i$  de  $X_i$ . Nestas condições,

$$|B_i| = r_0 = r - r'.$$

Seja  $M' = M/(\cup_i \overline{B}_i)$  e tome  $B = \cup_i \overline{B}_i$ . Então  $B_i \subseteq cl_{M'}(F)$ , e assim

$$r_{M'}(B) \leq r_{M'}(F) \leq sr_{M'}(Z_i) \leq sr_M(Z_i) \leq sr.$$

Seja  $(W_1, \dots, W_u)$  uma  $a$ -cobertura minimal de  $M'|B$ . Pelo Lema 2.5

$$u = \tau_a(M'|B) \leq \binom{b-1}{a}^{r(M'|B)-a} \leq \binom{b-1}{a}^{r_{M'}(B)-a} \leq \binom{b-1}{a}^{sr-a} = u_{r'}.$$

Uma vez que  $|B_i| = r_0$ , para cada  $B_i$  podemos encontrar um conjunto de índices  $I_i \subseteq \{1, \dots, u\}$  de comprimento  $r_0$  tal que,  $B_i \subseteq \bigcup_{j \in I_i} W_j$ . Existem

$$\binom{u}{r_0} \leq \binom{u_{r'}}{r-r'}$$

possibilidades de escolha para  $I_i$ , e  $l = l_{r'} = n \binom{u_{r'}}{r-r'}$ . Deve existir  $I \subseteq \{1, \dots, u\}$  tal que,  $I_i = I$  para todo  $i \in J$ , onde  $J \subseteq \{1, \dots, l\}$  tem comprimento  $n$ . Por uma possível reordenação dos  $X'_i$  e dos  $W'_j$  podemos assumir que,  $B_1, \dots, B_n \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_{r_0}$ .

Seja  $W = W_1 \cup \dots \cup W_{r_0}$ . Então, os conjuntos  $X_1 - W, \dots, X_n - W$  são assimétricos em  $M/W$ . Daí, segue que,

$$\mu_M(X_1, \dots, X_n) \leq r_M(W) \leq ar_0 \leq a(r-1)$$

e está provado. ■

O próximo Lema mostra como, fazendo contrações adequadas, uma grande coleção de circuitos quase (mas não completamente) assimétricos, pode produzir um conjunto de triângulos quase assimétricos contendo um elemento em comum.

**Lema 2.5.3** *Existe uma função de valores inteiros  $\alpha_2(l, r, m)$  tal que valem os seguintes: Seja  $r \geq 2$  e  $l, m$  inteiros positivos. Se  $n \geq \alpha_2(l, r, m)$  e  $C_1, \dots, C_n$  são circuitos de posto  $r$  de uma matróide  $M$  satisfazendo:*

$$(a) \quad 1 \leq r_M(\cup_j C_j) - r_M(\cup_{j \neq i} C_j) < r \text{ para todo } i, \text{ e}$$

$$(b) \quad \mu_M(C_1, \dots, C_n) \leq m,$$

então,  $M$  tem um menor  $N=M/Y$  com um elemento  $x \in E(N)$  e triângulos  $D_1, \dots, D_l$  de  $N$ , tais que

- $x \in D_i$  para todo  $i$ , e  $r_N(\cup_i D_i) = l + 1$ ,
- Para todo  $i$ ,  $D_i - x \subseteq C_j$  para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Demonstração:** Sejam  $l$  e  $m$  dados e fixados. Para  $r \geq 2$ , definamos  $\alpha_2(l, r, m)$  recursivamente como segue:

$$\begin{aligned}\alpha_2(l, r, m) &= 2^m(q_r(r-1) + 1), \\ q_2 &= l, q_r = \alpha_2(l, r-1, r-2), \text{ para } r > 2.\end{aligned}$$

Para facilitar a indução, o Lema é provado a partir das seguintes suposições mais fracas:

Sejam  $n \geq 2$  e  $C_1, \dots, C_n$  circuitos de  $M$  com  $2 \leq r_M(C_i) \leq r$ . Assuma que existe um conjunto  $F \subseteq E(M)$  tal que,

- (a)  $1 \leq r_M(\cup_j C_j \cup F) - r_M(\cup_{j \neq i} C_j \cup F) < r_M(C_i) - 1$  para todo  $i$ ;
- (b)  $\mu_M(C_1, \dots, C_n, F) \leq m$ .

Essas suposições são certamente mais fracas, desde que, no Lema, consideremos o caso  $F = \emptyset$  e  $r_M(C_i) = r$  para todo  $i$ . A prova é feita usando indução em  $r$ .

Seja  $r = 2$  ou seja  $r > 2$  e assuma que o resultado vale para  $r - 1$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , tome

$$c_i = r_M((\cup_j C_j) \cup F) - r_M((\cup_{j \neq i} C_j) \cup F) \geq 1.$$

Primeiro faremos uma redução simples:

Se não tivermos  $c_i = 1$  para todo  $i$ , então para cada  $i$ , escolha um conjunto  $Y_i \subseteq C_i$  de comprimento  $c_i - 1$ , que é assimétrico de  $(\cup_{j \neq i} C_j) \cup F$ , isto é, tal que

$$r_M(Y_i \cup (\cup_{j \neq i} C_j) \cup F) = r_M(Y_i) + \sum_{j \neq i} r_M(C_j) + r_M(F).$$

Poderíamos trabalhar com os circuitos  $C_i - Y_i$  de  $M/(Y_1 \cup \dots \cup Y_n)$  em vez disso. Então, sem perda de generalidade, suponhamos  $c_i = 1$  para todo  $i$ .

Escolha  $z_i \in C_i - (\cup_{j \neq i} C_j)$  para cada  $i$ , e seja  $\overline{M} = M/\{z_1, \dots, z_n\}$ . Sendo  $W = \cup(C_i - z_i)$ , temos

$$r_{\overline{M}}(W) = r_M(\cup_i C_i) - r_M(\{z_1, \dots, z_n\}) = \mu_M(C_1, \dots, C_n, F) \leq m$$

Seja  $B$  uma base de  $\overline{M}|W$  e escolha uma base  $B_i$  de  $\overline{M}|(C_i - z_i)$ . Agora expandimos  $B_i$  a uma base  $B_i \cup X_i$  de  $\overline{M}|W$  usando elementos de  $B$ . Para todo  $i$  escolhemos  $X_i \subseteq B$  dentre os  $2^{|B|} < 2^m$  subconjuntos de  $B$ . Consequentemente, existe um  $X_0 \subseteq B$  tal que,  $X_i = X_0$  para  $i \in I$ , onde  $|I| = n' \geq \frac{n}{2^m}$ .

Seja  $M_1 = M/X_0$  e ponha  $r' = |B| - |X_0| + 1$ . Então,

$$r_{M_1}(C_i) = r' \text{ e } \mu_{M_1}(\{C_i : i \in I\}) = r' - 1$$

para todo  $i \in I$ .

Possivelmente, pela eventual reordenação dos circuitos, podemos então assumir  $I = \{1, \dots, n'\}$ . Escolhamos um elemento de um circuito,  $z \in C_{n'} - cl_M(\cup_{j < n'} C_j)$  e seja  $M_2 = M_1/z$ . Definamos,

$$Z = cl_{M_2}(C_{n'} - z) \subseteq cl_{M_2}(C_j) \text{ para } i = 1, \dots, n' - 1,$$

assim  $r_{M_2} = r' - 1$ . Escolhamos um elemento  $x \in Z$ , que não é um laço, e elementos  $y_i \in C_i - Z$  para  $i = 1, \dots, n' - 1$ . Desde que  $x \in cl_{M_2}(C_i)$ ,  $C_i \cup x$  é conexo. Então, existe um circuito  $C'_i$  de  $M_2$  com

$$\{x_i, y_i\} \subseteq C'_i \subseteq C_i \cup x \text{ e } r_{M_2}(C'_i) \in \{2, \dots, r'\}.$$

Notemos que  $C'_i \not\subseteq cl_{M_2}(\bigcup_{j \neq i, j < n'} C'_j)$ .

Existe  $s \in \{2, \dots, r'\}$  tal que,  $r_{M_2}(C'_i) = s$  para  $i \in J$ , com

$$|J| \geq \frac{n' - 1}{r - 1} \geq q_r.$$

Agora temos dois casos:

$s = 2$ : Desde que  $q_r \geq q_2 = l$  nós podemos escolher  $J' \subseteq J$  com  $|J'| = l$ .

Agora, tomando  $\{D_1, \dots, D_l\} = \{C'_i : i \in J'\}$  e  $N = M_2$  obtemos o resultado;

$2 < s \leq r'$ : Seja  $M_3 = M_2/x$  e seja  $\overline{C}_i = C_i/x$  para  $i \in J$ . Então  $\overline{C}_i$  é um circuito de  $M_3$  de posto  $s - 1$ , com  $\overline{C}_i \subseteq C_i$ . Sendo  $F' = Z - x$  temos,

$$\mu_{M_3}(\overline{C}_i : i \in J, F') \leq r_{M_3}(F') = r' - 2 \leq r - 2.$$

Como  $|J| \geq \alpha_2(l, r - 1, r - 2)$  obtemos, pela hipótese de indução, o menor desejado. ■

O resultado seguinte é apenas um corolário dos Lemas 2.5.2 e 2.5.3, que nós anunciaremos para facilitar a referência.

**Lema 2.5.4** *Sejam  $b > a \geq 1$  e  $s, l$  inteiros positivos. Existe uma função de valores inteiros  $\alpha_3(s, l, a, b)$  tal que se  $M$  é uma matróide sem menor  $U_{a+1, b}$  e  $\Omega$  é um conjunto de circuitos de  $M$  de posto  $a + 1$ , com  $r_M(\bigcup_{c \in \Omega} C) \geq \alpha_3(s, l, a, b)$ , então:*

- (i) Existem  $s$  circuitos  $C_1, \dots, C_s \in \Omega$  assimétricos; ou
- (ii)  $M$  tem um menor  $N = M/Y$  com um elemento  $x \in E(N)$  e triângulos  $D_1, \dots, D_l$  de  $N$ , tais que
- $x \in D_i$  para todo  $i$ , e  $r_N(\cup_i D_i) = l + 1$ , e
  - Para todo  $i$ ,  $(D_i - x \subseteq C)$  para algum  $C \in \Omega$ .

**Demonstração:** Definamos  $\alpha_3(s, l, a, b) = \alpha_3$ , pondo

$$\alpha_3 = \sum_{r=1}^{a+1} \alpha_1(n_r, r, a, b), \text{ onde } n_r = s + \alpha_2(l, r, (r-1)a),$$

e sejam  $M$  e  $\Omega$  dados. Existem um número  $r \in \{1, \dots, a+1\}$  e  $\mathcal{C}' \subseteq \Omega$ , tal que  $r_M(C) = r$  para todo  $C \in \mathcal{C}'$ , e  $r_M(\bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C) \geq \alpha_1(n_r, r, a, b)$ . Agora, pelo Lema 2.5.2, existem circuitos  $C_1, \dots, C_{n_r} \in \mathcal{C}'$  satisfazendo

$$c_i = r_M(\cup_j C_j) - r_M(\cup_{j \neq i} C_j) \geq 1,$$

para todo  $i$ , e  $\mu_M(C_1, \dots, C_{n_r}) \leq (r-1)a$ .

Sejam  $I = \{i : c_i = r\}$  e  $J = \{i : c_i < r\}$ . Se  $|I| \geq s$ , então vale o caso (i), desde que os  $C_i$  tais que  $i \in I$  são assimétricos. De outro modo,  $|J| \geq \alpha_2(l, r, (r-1)a)$ , e os  $C_i$  com  $i \in J$  satisfazem ainda,

$$r_M(\bigcup_{j \in J} C_j) - r_M(\bigcup_{j \in J-i} C_j) < r.$$

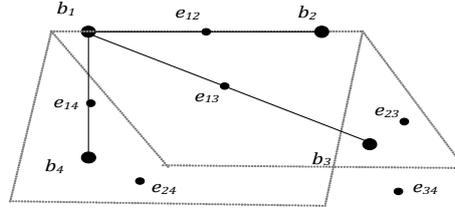
Agora, o Lema 2.5.3 dá o caso (ii) do resultado. ■

## 2.6 Ninhos

Por uma linha longa em uma matróide chamaremos um subconjunto fechado de posto 2 que contenha, pelo menos, 3 subconjuntos fechados de posto 1. Então, uma linha longa em uma matróide simples é um subconjunto fechado de posto 2 com pelo menos 3 elementos. Além disso, note que uma linha é longa se, e somente se, ela contém um triângulo.

Nós precisaremos de uma grande quantidade de linhas longas para construir grandes estruturas Cliques. O primeiro objetivo é construir uma estrutura intermediária denominada ninho.

**Definição 2.6.1** Uma matróide  $M$  é um **Ninho** se tem uma base  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  tal que, para cada par de índices  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  com  $i < j$  o conjunto  $\{b_i, b_j\}$  gera uma linha longa em  $M/\{b_1, \dots, b_{i-1}\}$ . Os elementos em  $B$  são chamados de **juntas** do ninho  $M$ .



**Figura 2.6:** Ninho de posto 4, onde  $\{b_i, b_j, e_{ij}\}$  é um triângulo de  $M/\{b_1, \dots, b_{i-1}\}$ .

**Definição 2.6.2** Um **Clique**  $M(K_n)$  é um ninho tendo o conjunto de arestas incidentes a um vértice fixado em  $K_n$  como juntas.

**Definição 2.6.3** Seja  $M$  uma matróide,  $k \in \mathbb{N}$  e seja  $B \subseteq E(M)$ . Dizemos que  $B$   $k$ -domina  $M$  se, para qualquer elemento  $x \in E(M)$  existe um conjunto  $W \subseteq B$ , com  $r_M(W) \leq k$ , tal que  $x \in cl_M(W)$ .

**Observação 2.6.4** Um conjunto  $k$ -dominador tem de ser, claramente, um conjunto gerador de  $M$ . É fácil verificar que  $k$ -dominação é preservado sob contrações no seguinte sentido: Se  $B, Y \subseteq E(M)$  e  $B$   $k$ -domina  $M$ , então  $B - Y$   $k$ -domina  $M/Y$ .

**Lema 2.6.5** Sejam  $b > a \geq 1$  e  $m, t$  inteiros positivos. Existe uma função de valores inteiros  $\nu_1(m, t, a, b)$  tal que se  $M$  é uma matróide  $t$ -circular sem menor  $U_{a+1, b}$  e  $r(M) \geq \nu_1(m, t, a, b)$  e  $B$  é uma base de  $M$ , então  $M$  tem um menor  $N$  de posto  $m$  com uma base  $B' \subseteq B \cap E(N)$  e um elemento  $b_1 \in B'$  tal que,  $\{b_1, d\}$  gera uma linha longa em  $N$  para cada  $d \in B' - b_1$

**Demonstração:** Sejam  $m, t, a$  e  $b$  dados, e defina as seguintes constantes,

$$r_4 = \alpha_3(m + 1, m, a, b), \quad l = m + r_4, \quad r_3 = \alpha_3(2, l, a, b) \\ \lambda = a^2 \binom{b-1}{a}^{r_3-a} + 1, \quad r_1 = \max(2t, \delta(\lambda, a, b))$$

e vamos definir,

$$\nu_1(m, t, a, b) = \nu_1 = \sigma(a) \binom{b-1}{a}^{r_1-a}. \quad (2.3)$$

Sejam  $M$  e  $B$  dados. Começaremos com uma rápida observação:

**Afirmção 2.6.6 (Afirmção A)** *É suficiente encontrar um menor  $N'$  de  $M$ , com um elemento  $z \in E(N')$  e um conjunto com  $m$  elementos  $B' \subseteq B \cap E(N')$  tal que  $B' \cup z$  é independente em  $N'$  e  $\{z, d\}$  gera uma linha longa em  $N'$  para cada  $d \in B'$ .*

Para ver isso, podemos assumir que  $B' \cup z$  é uma base de  $N'$  (de outra maneira, nos restringimos a  $cl_{N'}(B' \cup z)$ ). Agora escolhamos  $b_1 \in B$  e um elemento  $y$  tal que  $\{z, b_1, y\}$  é um triângulo em  $N'$ . Seja  $N = N'/y$ , e notemos que  $z$  e  $b_1$  são paralelos em  $N$ . Então  $\{b_1, d\}$  gera uma linha longa em  $N$  para  $d \in B' - b_1$ . Desde que  $B'$  é uma base de  $N$  concluímos a demonstração da Afirmção 2.6.6.

**Afirmção 2.6.7 (Afirmção B)**  *$M$  tem um menor  $t$ -circular  $N_1$  com  $r(N_1) \geq r_1$  e  $B \subseteq E(N_1)$  tal que,  $B$   $(a + 1)$ -domina  $N_1$ .*

Seja  $N_1$  um menor minimal de  $M$  satisfazendo:  $N_1$  é  $t$ -circular e  $a$ -simples e  $B \subseteq E(N_1)$ . Tal menor existe, desde que podemos escolher  $X \subseteq E(M)$  minimal, tal que  $M \setminus X$  é  $a$ -simples, e como  $B$  é independente podemos tomar  $X$  com  $X \cap B = \emptyset$ . Então temos,  $\Gamma(M \setminus X) = \Gamma(M) \leq t$ .

Para ver que  $B$   $(a + 1)$ -domina  $N_1$ , seja  $f \in E(N_1) - B$ .  $N_1/f$  é  $t$ -circular, visto que  $N_1$  é  $t$ -circular. Agora  $(N_1/f)|B$  não pode ser  $a$ -simples. Se assim fosse, poderíamos escolher  $X \subseteq E(N_1/f) - B$  minimal, tal que  $N_1/f \setminus X$  seja  $a$ -simples, e daí pelo Lema 2.4.5(iii) teríamos,

$$\Gamma(N_1/f \setminus X) = \Gamma(N_1/f) \leq t,$$

mostrando que  $N_1/f \setminus X$  é  $t$ -circular e contradizendo a minimalidade de  $N_1$ . Como  $N_1$  é simples, então  $N_1/f$  não tem laços.

Desde que  $(N_1/f)|B$  não é  $a$ -simples, deve existir um  $W \subseteq B$  tal que

$$(N_1/f)|W \cong U_{k,2k},$$

para um  $k \in \{1, \dots, a\}$ . Então  $r_{N_1}(W \cup f) = k + 1$ , e devemos ter  $r_{N_1}(W) = k + 1$ . Caso contrário,  $N_1|W \cong U_{k,2k}$ , mas  $N_1$  é  $a$ -simples. Assim,  $f \in cl_{N_1}(W)$ , e daí  $B$   $(a + 1)$ -domina  $N_1$ .

Pelo Lema 2.2.7 temos,

$$\sigma(a)\tau_a(N_1) \geq |E(N_1)| \geq |B| = r(M) \geq \nu_1,$$

e também, usando a equação (2.3) obtemos  $\tau_a(N_1) \geq \binom{b-1}{a}^{r_1-a} > 1$ . Claramente,  $r(N_1) > a$ , então aplicamos o Lema 2.2.5, e obtemos  $r(N_1) \geq r_1$ . E isso encerra a prova da afirmação.

Agora, seja  $N_1$  como na Afirmação 2.6.7. Pela definição de  $r_1$ , temos

$$\Gamma(N_1) \leq t \leq \frac{1}{2}r_1 \leq r(N_1) \quad \text{e} \quad r(N_1) \geq \delta(\lambda, a, b).$$

O Lema 2.4.6 nos permite obter um menor  $N_2$  de  $N_1$  com  $\tau_a(N_2) > \lambda r(N_2)$ . Podemos assumir que,  $N_2 = N_1/Y_1$ . Note que  $N_2$  satisfaz

$$\tau_a^c(N_2) \geq \tau_a(N_2) \geq \lambda r(N_2).$$

Seja  $Y_2 \subseteq E(N_2)$  maximal com,

$$\tau_a^c(N_2/Y_2) \geq \lambda r(N_2/Y_2),$$

e seja  $N_3 = N_2/Y_2$ . Desde que  $Y_2$  é maximal,  $N_3$  deve ser sem laço. Escolha um elemento  $x \in E(N_3)$ . Então,

$$(\tau_a^c(N_3) - \tau_a^c(N_3/x)) > (\lambda r(N_3) - \lambda r(N_3/x)) = \lambda(r(N_3) - r(N_3/x)) = \lambda.$$

Seja  $\mathcal{G}$  a coleção de todos os conjuntos conexos de posto  $a + 1$  em  $N_3$  contendo  $x$ , e seja  $n = r_{N_3}(\bigcup_{X \in \mathcal{G}} X)$ . Pelo Lema 2.6.10, Temos então,

$$\lambda < a^2 \binom{b-1}{a}^{n-a} + 1,$$

e como  $\lambda = a^2 \binom{b-1}{a}^{r_3-a} + 1$ , devemos ter  $n \geq r_3$ .

Denote por  $\mathcal{T}$  a coleção de todos os circuitos de  $N_3$  de posto no máximo  $a + 1$  contendo  $x$ . Para cada  $X \in \mathcal{G}$  e  $y \in X - \{\{\text{laços}\} \cup x\}$ , desde que  $X$  é conexo, existe um circuito  $C \subseteq X$  contendo  $x$  e  $y$ , então  $C \in \mathcal{T}$ . Sendo assim,  $r_{N_3}(\bigcup_{C \in \mathcal{T}} C) \geq n$ .

Desde que  $n \geq r_3 = \alpha_3(2, l, a, b)$  podemos aplicar o Lema 2.5.4. Como quaisquer dois circuitos em  $\mathcal{T}$  não são assimétricos, obtemos o caso (ii) do referido Lema: Existe um menor  $N_4 = N_3/Y_3$ , com  $x \in E(N_4)$  e triângulos  $D_1, \dots, D_l$  de  $N_4$ , tal que  $x \in D_i$  e  $r_{N_4}(\cup_i D_i) = l + 1$ . Escolha um elemento  $h_i \in D_i - x$  para  $i = 1, \dots, l$ .

Seja  $I = \{i : h_i \in B\}$ . Se  $|I| \geq m$ , então podemos escolher um conjunto com  $m$  elementos  $B' \subseteq \{h_i : h_i \in B\}$  e, usando a Afirmação 2.6.7, tomando  $N' = N_4$  e  $z = x$

temos o resultado. Então, assumamos  $|I| \leq m$ . Pela possível reordenação dos  $D_i$ , podemos assumir  $h_1, \dots, h_{r_4} \notin B$ , onde  $r_4 = l - m$ .

Pela observação 2.6.4,  $B \cap E(N_4)$   $(a + 1)$ -domina  $N_4$ . Neste caso, para cada  $i = 1, \dots, r_4$ ,  $h_i$  é o fecho de um subconjunto de  $B$  de posto no máximo  $a + 1$ . Escolha um circuito  $C_i$  de  $N_4$  contendo  $h_i$  com,  $r_{N_4}(C_i) \leq a + 1$  e  $C_i \subseteq B \cup h_i$ . Desde que  $\{h_1, \dots, h_{r_4}\}$  é independente, temos  $r_{N_4}(\cup_i C_i) \geq r_4$ .

Como  $r_4 = \alpha_3(m + 1, m, a, b)$  podemos aplicar o Lema 2.5.4, novamente, para obter um dos dois casos:

- (i) Existem  $s = m + 1$  circuitos assimétricos entre  $C_1, \dots, C_{r_4}$  em  $N_4$ .

Após possível reordenação, podemos assumir que  $C_1, \dots, C_s$  são assimétricos. Se omitirmos um dos membros de  $C_1, \dots, C_s$  podemos afirmar que  $\{x\}$  juntamente com a união dos demais conjuntos são assimétricos. Podemos assumir que os conjuntos  $C_1, \dots, C_m, \{x\}$  são assimétricos em  $N_4$ .

Para  $i = 1, \dots, m$ , escolha um elemento  $b_i \in C_i - h_i$  e seja  $K_i = C_i - \{h_i, b_i\}$ . Defina  $N_5 = N_4 / (\cup_i K_i)$ . Então  $h_i$  e  $b_i$  são paralelos em  $N_5$ . Sendo  $B' = \{b_1, \dots, b_m\}$  e está feito pela Afirmação 2.6.7 com,  $N' = N_5$  e  $z = x$ .

- (ii)  $N_4$  tem um menor  $N_5$  com  $z \in E(N_5)$  e triângulos  $D'_1, \dots, D'_m$  em  $N_5$  tais que, para cada  $i$ ,  $z \in D'_i$  e  $r_{N_5}(\cup_i D'_i) = m + 1$ . Também, para cada  $i$ ,  $(D'_i - z) \subseteq C_j$  para algum  $j$ . Assim,  $(D'_i - z) \subseteq (B \cup h_j)$  e podemos escolher, para cada  $i$ , um elemento  $b_i \in (D'_i - z) \cap B$ . Tomando  $B' = \{b_1, \dots, b_m\}$  e  $N' = N_5$ , nós agora temos o resultado pela Afirmação 2.6.7.

■

O teorema a seguir é o principal resultado desta seção. Ele possibilita identificar as matrôides que possuem ninhos como menores.

**Lema 2.6.8** *Sejam  $b > a \geq 1$  e sejam  $n, t$  inteiros positivos. Existe uma função de valores inteiros  $\nu(n, t, a, b)$  tal que se  $M$  é uma matrôide  $t$ -circular sem menor  $U_{a+1, b}$  e  $r(M) \geq \nu(n, t, a, b)$ , então  $M$  tem um ninho de posto  $n$  como menor.*

**Demonstração:** Seja  $t$  fixado. Seja  $\nu(1, t, a, b) = 1$  e para  $n \geq 2$  definamos  $\nu$  recursivamente pondo,

$$\nu(n, t, a, b) = \nu_1(\nu(n - 1, t, a, b) + 1, t, a, b).$$

A prova será feita usando indução, para facilitar a indução provaremos a seguinte declaração mais forte.

- Se  $M$  é uma matróide  $t$ -circular sem menor  $U_{a+1,b}$  com  $r(M) \geq \nu(n, t, a, b)$  e  $B$  é uma base de  $M$ , então  $M$  tem um ninho, de posto  $n$ ,  $M/Y$  como menor com juntas contidas em  $B$ .

A prova é feita usando indução em  $n$ . Para  $n = 1$  o resultado é trivial, já que qualquer matróide de posto 1 é um ninho.

Seja  $n \geq 2$  e assumamos que o resultado é válido para  $n - 1$ . Sejam  $M$  e  $B$  dados como acima.

Pelo Lema 2.6.5,  $M$  tem um menor  $N_1$  de posto  $\nu(n - 1, t, a, b) + 1$  com uma base  $B_1 \subseteq B$  e  $\{b_1, d\}$  gera uma linha longa em  $N_1$  para cada  $d \in B_1 - b_1$ . Podemos assumir  $N_1 = M/Y_1$ .

Seja  $N'_1 = N_1/b_1$ . Uma vez que  $t$ -circularidade é preservada sob contrações,  $N'_1$  é  $t$ -circular. Agora,

$$r(N'_1) = r(N_1/b_1) = r(N_1) - r_{N_1}(b_1) = \nu(n - 1, t, a, b) + 1 - 1 = \nu(n - 1, t, a, b),$$

desde que  $b_1$  não é um laço de  $N_1$ .

Pela hipótese de indução,  $N'_1$  tem ninho  $N_2 = N'_1/Y_2$  de posto  $n - 1$  como menor, com juntas em  $B_2 \subseteq B_1 - b_1$ .

Agora, sejam  $Y = Y_1 \cup Y_2$  e  $N = M/Y$ . Então, temos

$$N/b_1 = (M/Y)/b_1 = ((M/Y_1)/Y_2)/b_1 = (N_1/Y_2)/b_1 = (N_1/b_1)/Y_2 = N'_1/Y_2 = N_2.$$

Isto é,

$$N/b_1 = N_2.$$

Então,  $N$  satisfaz as seguintes condições:

- $b_1 \subseteq B_2 \subseteq B$  é uma base de  $N$ , visto que  $B_2$  é uma base de  $N/b_1$ ;
- Para cada  $d \in B_2$ ,  $\{b_1, d\}$  gera uma linha longa em  $N$ ;
- $N_1/b = N_2$  é um ninho, com juntas em  $B_2$ .

Assim,  $N$  é um ninho com juntas em  $b_1 \cup B_2$  ■

Vamos considerar coberturas, das matrôides, constituídas pelas componentes conexas. Um laço é uma componente conexa trivial de uma matrôide, que nós desejamos evitar na contagem.

**Definição 2.6.9** *Para uma matrôide arbitrária  $M$  denotaremos por  $\tau_a^c(M)$  o comprimento mínimo de uma  $a$ -cobertura  $(X_1, \dots, X_m)$  de  $M \setminus \{\text{laços}\}$ , onde  $X_1, \dots, X_m$  são conjuntos conexos.*

Claramente,  $\tau_a^c(M) \geq \tau_a(M)$ , desde que  $\tau_a(M)$  é o comprimento mínimo de uma  $a$ -cobertura de  $M$ .

Notemos também que uma matrôide  $N$ , de posto  $a$ , sem laços tem, no máximo,  $a$  componentes conexas, então  $\tau_a^c(N) \leq a$ .

Assim, em geral para uma matrôide  $M$  temos,

$$\tau_a(M) \leq \tau_a^c(M) \leq a\tau_a(M),$$

desde que para cada componente  $X_i$  de uma  $a$ -cobertura minimal  $(X_i : i \in \{1, \dots, \tau_a(M)\})$  tem-se  $\tau_a(X_i) \leq a$ .

**Lema 2.6.10** *Seja  $b > a \geq 1$ . Sejam  $M$  uma matrôide sem menor  $U_{a+1,b}$  e  $x \in E(M)$ . Seja  $\mathcal{L}$  a coleção de todos os subconjuntos conexos de posto  $a+1$  em  $M$  contendo  $x$ . Se  $n = r_M(\bigcup_{X \in \mathcal{L}} X)$ , então*

$$\tau_a(M) - \tau_a^c(M/x) \leq a^2 \binom{b-1}{a}^{n-a} + 1$$

**Demonstração:** Se  $x$  é um laço de  $M$ , então  $\tau_a(M/x) = \tau_a(M)$ , desde que se  $X_1, \dots, X_{\tau_a(M/x)}$  é uma  $a$ -cobertura minimal de  $M/x$ , então  $X_1 \cup x, \dots, X_{\tau_a(M/x)}$  é uma  $a$ -cobertura minimal de  $M$ . Como  $\tau_a^c(M/x) \geq \tau_a(M/x)$ , temos

$$\tau_a(M) - \tau_a^c(M/x) \leq 0.$$

E, portanto o resultado é trivial.

Podemos assumir, que  $M$  não tem laços. Então, seja  $x \in E(M) - \{\text{laços}\}$ .

Seja  $X_1 \cup x, \dots, X_k$  uma  $a$ -cobertura minimal de  $M/x \setminus \{\text{laços}\}$  de conjuntos conexos. Apresentaremos uma construção de uma  $a$ -cobertura de  $M$  constituída por conjuntos conexos. Considere os seguintes casos:

1)  $x \notin cl_M(X_i)$ . Então,  $X_i$  já é conexo em  $M$  com posto  $r_M(X_i) = r_{M/x}(X_i) \leq a$ ;

2)  $x \in cl_M(X_i)$ . Neste caso  $X_i \cup x$  é conexo em  $M$  com posto

$$r_M(X_i \cup x) = r_{M/x}(X_i) + 1 \leq a + 1.$$

Mais ainda,

(2a)  $r_M(X_i \cup x) \leq a$ , ou;

(2b).  $r_M(X_i \cup x) = a + 1$

Podemos assumir, reordenando possivelmente os conjuntos, que  $X_1, \dots, X_m$  satisfazem (2b) e  $X_{m+1}, \dots, X_k$  satisfazem 1) ou (2a). Para  $i = 1, \dots, m$ , temos que  $M|(X_i \cup x)$  não tem menor  $U_{a+1,b}$  e  $r(M|(X_i \cup x)) = r_M(X_i \cup x) = a + 1$ , então o Lema 2.2.3 nos dá

$$\tau_a^c(M|(X_i \cup x)) \leq a\tau_a(M|(X_i \cup x)) \leq a \binom{b-1}{a}$$

Os elementos de  $M$  "destruídos" com a formação de  $M/x \setminus \{\text{laços}\}$  é o conjunto conexo  $cl_M(x)$ . Agora, fica claro que podemos tomar uma  $a$ -cobertura, de comprimento,  $s$  de  $M$  formada por conjuntos conexos, onde

$$\tau_a^c(M) \leq s \leq ma \binom{b-1}{a} + (K - m) + 1.$$

O que implica,

$$\tau_a^c(M) \leq ma \binom{b-1}{a} + \tau_a^c(M/x) + 1.$$

Se  $m = 0$  está feito, pois teríamos

$$\tau_a^c(M) \leq \tau_a^c(M/x) + 1.$$

O que implica,

$$\tau_a^c(M) - \tau_a^c(M/x) \leq 1 \leq a^2 \binom{b-1}{a} + 1.$$

Agora, vamos assumir  $m > 0$ . Definamos  $M' = (M/x)|(\bigcup_{i=1}^m X_i)$  e notemos que  $(X_1, \dots, X_m)$  é uma  $a$ -cobertura minimal de  $M'$  formada por conjuntos conexos. Então, pelo Lema 2.2.5

$$m = \tau_a^c(M') \leq a\tau_a M' \leq a \binom{b-1}{a}^{r(M')-a}.$$

Além disso,

$$r(M') = r_M\left(\bigcup_{i=1}^m (X_i \cup x)\right) - 1$$

desde que  $X_i \cup x$  é um conjunto conexo em  $M$  para  $i = 1, \dots, m$ .

Finalmente, de

$$\tau_a^c(M) \leq ma \binom{b-1}{a} + \tau_a(M/x) + 1,$$

$$m \leq a \binom{b-1}{a}^{r(M')-a},$$

e,

$$r(M') \leq n - 1,$$

temos,

$$\tau_a^c(M) \leq a \binom{b-1}{a}^{n-1-a} a \binom{b-1}{a} + \tau_a^c(M/x) + 1.$$

E, portanto,

$$\tau_a^c(M) - \tau_a^c(M/x) \leq a^2 \binom{b-1}{a}^{n-a} + 1$$

■

## 2.7 Dowling Cliques

O principal resultado desta seção serve de ferramenta para detectar nos ninhos um tipo geral de Clique. Em (3) Dowling introduziu uma classe de geometrias combinatórias (matróides simples). Usaremos um caso especial dessas construções, que chamaremos, em homenagem ao matemático Dowling, de Dowling Clique.

**Definição 2.7.1** *Um **Dowling Clique** é uma matróide  $M$ , com  $E(M) = B \cup X$  onde  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  é uma base de  $M$ , e  $X = \{e_{ij} : 1 \leq i < j < n\}$  satisfaz que  $\{b_i, b_j, e_{ij}\}$  é um triângulo para todo  $i < j < n$ . Chamamos os elementos em  $B$  de juntas de  $M$ . Quando existe a necessidade de enfatizar a base  $B$ , nós escrevemos  $(M, B)$ .*

**Definição 2.7.2** *Seja  $n \geq 1$ . Uma matróide é uma  $n$ -tempestade se seu conjunto básico é a união disjunta  $E(M) = F \cup C_1^* \cup \dots \cup C_m^*$ , onde  $r_M(F) = n$  e cada  $C_i^*$  é um cocircuito independente de comprimento  $n+1$ , com  $F \subseteq cl_M(C_i^*)$ . Chamamos os  $C_i^*$  das núvens de  $M$ .*

Em uma  $n$ -tempestade o conjunto  $F$ , tal qual na definição 2.7.1, deve ser fechado, uma vez que é a interseção de hiperplanos.

Notemos que,  $C_1^*, \dots, C_m^*$  são assimétricos em  $M/F$ , visto que eles são disjuntos e independentes em  $M/F$  e, por isso,  $\mu_M(C_1^*, \dots, C_m^*) = n$ .

Começaremos esta seção mostrando que ninhos contém tempestades como restrições. Para provar o próximo Lema, precisaremos das afirmações abaixo:

**Afirmção 2.7.3** 1)  $e_{1k}, e_{2k}, \dots, e_{k-1k} \notin cl_M(B - b_k)$ , para  $k = 2, \dots, r$ ;

2)  $cl_M(\{b_1, \dots, b_i, b_k\}) = cl_M(\{e_{1k}, \dots, e_{ik}, b_k\})$ , para  $i < k$ .

**Demonstração:** Para ver 1), sejam  $i, k$  como acima, com  $1 \leq i < k$ . Pela definição de  $e_{ik}$  temos que  $e_{ik} \notin cl_M(\{b_1, \dots, b_i\})$ , do contrário  $B$  não seria independente, mas  $e_{ik} \in cl_M(\{b_1, \dots, b_i, b_k\})$ , desde que  $\{b_i, b_k, e_{ik}\}$  é um triângulo. Então, o circuito fundamental de  $e_{ik}$  em  $M$ , com respeito a base  $B$ , deve conter  $b_k$ . Por isso

$$e_{ik} \notin cl_M(B - b_k).$$

Para ver 2) usaremos indução em  $i$  com  $k$  fixo. O caso  $i = 1$  é trivial, uma vez que  $\{b_1, b_k, e_{1k}\}$  é um circuito em  $M$ , e portanto  $cl_M(\{b_1, b_k\}) = cl_M(\{e_{1k}, b_k\})$ . Suponha  $1 < i < k$  e que 2) válido para  $i - 1$ . Novamente pela definição de  $e_{ik}$ , temos  $e_{ik} \notin cl_M(\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_k\})$ , mas  $e_{ik} \in cl_M(\{b_1, \dots, b_i, b_k\})$ . Assim,

$$cl_M(\{b_1, \dots, b_i, b_k\}) = cl_M(\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_k, e_{ik}\}) = cl_M(\{e_{1k}, \dots, e_{i-1k}, b_k, e_{ik}\}),$$

onde, a seguinte hipótese de indução é usada na segunda igualdade:

$$cl_M(\{e_{1k}, \dots, e_{i-1k}, b_k\}) = cl_M(\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_k\}).$$

■

**Lema 2.7.4** *Sejam  $m$  e  $n$  inteiros positivos. Se  $M$  é um ninho de posto, no mínimo,  $n+m$ , então  $M$  tem uma  $n$ -tempestade  $N$  com  $m$  núvens como menor.*

**Demonstração:** Seja  $M$  um ninho de posto  $r$  com juntas  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ , onde  $r = n + m$ . Para cada par  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq r$ , escolha um elemento  $e_{ij}$  tal que  $\{b_i, b_j, e_{ij}\}$  é um triângulo em  $M/\{b_1, \dots, b_{i-1}\}$ .

Sejam  $S = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $F = cl_M(S)$  e para cada  $k = n + 1, \dots, r$  defina,

$$C_k = \{e_{1k}, e_{2k}, \dots, e_{nk}, b_k\}.$$

Notemos que, por 1) da afirmação 2.7.3,  $C_k \cap F = \emptyset$  para todo  $k$ , e  $C_k \cap C_l = \emptyset$  para  $k \neq l$ . De 2), da mesma afirmação, obtemos que  $C_k$  é independente, visto que  $cl_M(C_k) = \{b_1, \dots, b_n, b_k\}$  que é independente, e que  $F \subseteq cl_M(C_k)$  para todo  $k$ . Pondo  $N = M|(F \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_r)$ . É fácil checar que os  $C_k$  são cocircuitos de  $N$ . ■

Para  $n = 2$  o conceito de uma  $n$ -tempestade é similar aquele usado por Kung em (7), e um análogo de uma dessas idéias é parte da prova do resultado a seguir.

**Lema 2.7.5** *Sejam  $b > a \geq 1$  e seja  $n$  um inteiro positivo. Existem funções de valores inteiros  $\phi_1(n, a, b)$ ,  $\phi_2(n, a, b)$  tais que se  $M$  é uma  $\phi_1(n, a, b)$ -tempestade com  $\phi_2(n, a, b)$  núvens que não tem menor  $U_{a+1, b}$ , então  $M$  possui um Dowling Clique  $N$ , de posto  $n$ , como menor.*

**Demonstração:** Sejam  $n, a, b$  dados e vamos definir  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Primeiro sejam  $l = na$ . Para  $r = 1, \dots, a$ ,  $s_r = \alpha_1(n, r, a, b)$  (de acordo com o Lemma 2.5.2) e  $s = \sum_{r=1}^a s_r$ . Defina a sequência de números  $m_0, \dots, m_s$  recursivamente como se segue: Seja  $m_s = l$ , e

$$m_k = \sigma(a, m_{k+1}) \binom{b-1}{a}^{s-a} + 1, \quad \text{para } k = s-1, \dots, 1, 0.$$

Finalmente, seja  $\phi_1(n, a, b) = s$  e  $\phi_2(n, a, b) = m_0$ .

Seja  $M$  uma  $s$ -tempestade com  $m_0$  núvens. Denote as núvens por  $C_1^*, \dots, C_{m_0}^*$  com elementos  $C_i^* = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_s^i\}$ .

Definamos  $M' = M/\{e_0^1, e_0^2, \dots, e_0^m\}$ . Então  $r(M') = s$ . Seja  $I_0 = \{1, \dots, m_0\}$ . Queremos encontrar uma subcoleção das núvens tal que elementos com o mesmo índice estejam em uma restrição uniforme de  $M'$ . Iremos construir uma sequência de subconjuntos,

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_s, \quad \text{onde } |I_k| = m_k$$

tal que, para  $k = 1, \dots, s$ ,

$$M'|\{e_i^k : i \in I_k\} \cong U_{r_k, m_k},$$

para algum número  $r_k \in \{1, \dots, a\}$ .

Seja  $k \geq 1$ , suponhamos que  $I_{k-1}$  tenha sido definido e vamos encontrar  $I_k$ . Seja  $W = \{e_i^k : i \in I_{k-1}\}$  e suponha que  $M'|W$  não tenha restrição  $U_{r,m_k}$  para  $r = 1, \dots, a$ .

O Lema 2.2.8 nos dá,

$$\sigma_2(a, m_k)\tau_a(M'|W) \geq E(M'|W) = |W| = m_{k-1}.$$

Agora, do Lema 2.2.5, temos

$$\tau_a(M'|W) \leq \binom{b-1}{a}^{s-a}.$$

Daí,

$$m_{k-1} \leq \sigma(a, m_k) \binom{b-a}{a}^{s-a},$$

contradição, pois

$$m_{k-1} = \sigma(a, m_k+) \binom{b-1}{a}^{s-a} + 1.$$

Então, tomemos  $U \subseteq W$  tal que  $M'|U$  é isomorfo a  $U_{r_k, m_k}$  e seja  $I_k = \{i : e_k^i \in U\}$ .

Depois, através da eventual reordenação das núvens em  $M$ , podemos assumir que  $I_s = \{1, \dots, l\}$ . Seja  $L_k = \{e_k^1, \dots, e_k^l\}$  para  $k = 1, \dots, s$ , então  $M'|L_k \cong U_{r_k, l}$ .

Agora, podemos assumir que existe  $r \in \{1, \dots, a\}$  e um subconjunto  $J \subseteq \{1, \dots, s\}$  com  $|J| \geq s_r$  tal que,  $r_k = r$  para todo  $k \in J$ . Defina  $\mathcal{L} = \{L_k : k \in J\}$ . Desde que  $C_1 - e_0^1$  é independente em  $M'$ , visto que  $C_1$  é independente em  $M$ , temos

$$r_{M'} = \left( \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L \right) \geq |\mathcal{L}| \geq |J| \geq s_r = \alpha_1(n, r, a, b).$$

Agora, aplicando o Lema 2.5.2, obtemos uma subsequência  $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$  de comprimento  $n$ , tal que  $L \not\subseteq cl_M\left(\bigcup_{L' \in \mathcal{L}' - L} L'\right)$ , para cada  $L \in \mathcal{L}'$ . Depois, possivelmente permutando os elementos de cada núvem, podemos assumir  $\mathcal{L}' = (L_1, \dots, L_n)$ . Seja

$$D_i = \{e_0^i, e_0^i, \dots, e_0^i\} \subseteq C_i.$$

Pela construção de  $L_k$ , podemos encontrar  $B \subseteq \bigcup_{k=1}^n L_k$ , independente em  $M'$  tal que,

$$r_{M'}(L_k \cup B) - r_{M'}(B) = 1, \quad \text{para cada } k = \{1, \dots, n\},$$

e os conjuntos  $L_1 - B, \dots, L_n - B$  são assimétricos em  $M'|B$ .

Agora,  $L_k \not\subseteq cl_{M'}(B)$ , do contrário  $r_{M'}(L_k \cup B) - r_{M'}(B) = 0$ , e uma vez que  $M'|L_k$  é uniforme de posto  $r$ , devemos ter

$$|L_k \cap cl_{M'}(B)| \leq r - 1.$$

Definamos,  $I_B \subseteq \{1, \dots, l\}$  por

$$I_B = \{i : D_i \cap cl_M(B) \neq \emptyset\}.$$

Então,  $B \subseteq \bigcup_{i \in I_B} D_i$  e  $|I_B| \leq n(a - 1) = l - n$ . Notemos que, para cada  $i \notin I_B$ ,  $D_i$  e  $B$  são assimétricos em  $M'$ . Podemos assumir, após reordenação das núvens, que  $\{1, \dots, n\} \subseteq \{1, \dots, l\} - I_B$ . Seja

$$M_1 = M/\{e_0^i : i \in I_B\}/B.$$

Então, por construção, os elementos em  $\{e_k^i : i = 1, \dots, n\}$  estão em paralelo em  $M/\{e_0^i : i = 1, \dots, n\}$  para cada  $k = 1, \dots, n$ .

Seja  $p_k = e_k^n$ , para cada  $k = 1, \dots, n$  e defina

$$M_2 = (M_1/e_0^n)|(D_1 \cup \dots \cup D_{n-1} \cup \{p_1, \dots, p_n\}).$$

$M_2$  é uma  $n$ -tempestade com núvens  $D_1, \dots, D_{n-1}$  tal que, para cada  $i = 1, \dots, n - 1$  e cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $p_k$  está na linha formada por  $e_0^i$  e  $e_k^i$ .

Faremos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  as juntas de um Dowling Clique. Seja

$$N = M_2/\{e_1^1, e_2^2, \dots, e_{n-1}^{n-1}\}.$$

Então  $\{p_1, \dots, p_n\}$  é uma base para  $N$ . Sejam  $(i, j)$  dados com  $1 \leq i < j \leq n$ . Em  $N$ ,  $e_0^i$  e  $p_i$  são paralelos, então  $e_j^i \in cl_N(\{e_0^i, p_j\}) = cl_N(\{p_i, p_j\})$ , e o conjunto  $\{p_i, p_j, e_j^i\}$  é um triângulo em  $N$ . Então  $N$  tem um Dowling Clique de posto  $n$  como restrição. ■

## 2.8 Cliques

Nesta seção tentaremos detectar Cliques gráficos, para isso precisaremos do **Teorema de Mader** (11).

**Teorema 2.8.1 (Teorema de Mader)** *Seja  $H$  um grafo. Existe  $\lambda \in \mathbb{N}$  tal que, se  $G$  é um grafo simples sem menor  $H$ , então  $|E(G)| \leq \lambda |V(G)|$ .*

■

O próximo resultado é um corolário do Teorema 2.8.1, este resultado é a versão para matróides do Teorema de Mader. Tomamos  $H$  para ser um grafo completo e escrevemos o argumento contrapositivo.

**Corolário 2.8.2** *Existe uma função de valores inteiros  $\Theta(n)$  tal que, se  $M$  é uma matróide gráfica simples com  $|E(M)| \geq \Theta(n)r(M)$ , então  $M$  tem um menor  $M(K_n)$ .*

■

**Definição 2.8.3** *Seja  $M$  uma matróide,  $B$  uma base de  $M$ , e seja  $X = E(M) - B$ . Chamamos  $M$  uma Dowling matróide com juntas em  $B$  se cada  $x \in X$  não forma um triângulo com dois elementos quaisquer de  $B$ . E dois elementos quaisquer de  $B$  geram, no máximo, um elemento de  $X$ .*

Pelo grafo associado a  $(M, B)$ , chamamos o grafo  $G$ , com conjunto de vértices  $B$  e conjunto de arestas rotulados por  $X$ , tal que  $x \in X$  rotula  $\{b_1, b_2\}$  se  $x$  está na linha formada por  $b_1$  e  $b_2$  em  $M$ .

**Lema 2.8.4** *Sejam  $M$  um Dowling Clique com juntas em  $B$  e  $X = E(M) - B$ . Se  $B \cap cl_M(X) = \emptyset$ , então  $M|X$  é gráfica.*

**Demonstração:** Seja  $G$  o grafo associado a  $(M, B)$ . Afirmamos que  $M(G) = M|X$ . Basta provar que cada circuito de  $M(G)$  é dependente em  $M|X$ , e que cada conjunto independente de  $M(G)$  é independente em  $M|X$ .

Seja  $C$  um ciclo de  $G$  com conjunto de vértices  $B'$  e conjunto de arestar  $X'$ . Claramente  $X' \subseteq cl_M(B')$  e, pelo pressuposto,  $B' \cap cl_M(X') = \emptyset$ . Desde que  $B'$  e  $X'$  tem mesmo comprimento,  $X'$  deve ser independente em  $M$ .

Seja  $T$  uma floresta em  $G$ . Nós provaremos por indução em  $|E(T)|$  que  $E(T)$  é independente em  $M$ . Seja  $x$  uma aresta folha em  $T$  e assumamos  $E(T) - x \subseteq cl_M(B - b)$ , mas  $x \notin cl_M(B - b)$ , então  $E(T)$  é independente em  $M$ . ■

**Lema 2.8.5** *Sejam  $M$  uma Dowling matróide com juntas  $B$  e  $X = E(M) - B$ . Seja  $G$  o grafo associado de  $(M, B)$ . Se, para cada ciclo  $C \in G$ ,  $E(C)$  é independente em  $M$ , então  $M|X = B(G)$  (na verdade  $M = \tilde{B}(G)$ ).*

Agora, estamos prontos para o passo principal da prova do principal resultado Teorema 2.1.1.

**Lema 2.8.6** *Existe uma função de valores inteiros  $\psi(n)$  tal que, se  $M$  é um Dowling Clique com posto no mínimo  $\psi(n)$ , então  $M$  contém um menor  $M(K_n)$  ou  $B(K_n)$ .*

**Demonstração:** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Definamos  $\psi(n) = nl$ , onde  $l = 2m\theta(n) + 1$  e  $m = 2^n n!$ . Seja  $M$  um Dowling Clique e assumamos que  $r(M) = nl$ . Denote por  $B$  as juntas de  $M$  e seja  $X = E(M) - B$ .

Particionando  $B$  em  $n$  conjuntos  $B_1, \dots, B_n$  de mesmo comprimento,  $|B| = l$ . Iremos contrair cada  $B_i$  a um ponto. Seja  $M_i = M|cl_M(B_i)$ . Escolha  $Y_i \subseteq E(M_i \cap X)$  tal que,  $B_i$  é um conjunto de elementos paralelos em  $M_i/Y_i$  (tome as arestas de uma árvore geradora no grafo associado de  $(M_i, B_i)$ ). Defina  $M' = M/(Y_1, \dots, Y_n)$  e escolha um  $b_i \in B_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Para cada par  $i < j$ , defina

$$X_{ij} = \{x \in X : x \in cl_M(b, d), b \in B_i, d \in B_j\}.$$

Note que, para cada  $x \in X_{ij}$ ,  $\{b_i, b_j, x\}$  é um triângulo em  $M'$ . Vamos considerar dois casos:

(1).  $\tau_1(M|X_{ij}) > m$ , para todos os pares  $i < j$ . Ponha  $B' = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Iremos escolher um conjunto  $X' = \{x_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ , onde  $x_{ij} \in X_{ij}$ , tal que,  $M'|(B' \cup X')$  é o Dowling Clique  $\tilde{B}(K_n)$ .

Seja  $X' \subseteq \cup X_{ij}$  maximal, tal que  $|X' \cap X_{ij}| \leq 1$  para quaisquer  $i < j$ , e os ciclos no grafo associado de  $M'|(V' \cup X')$  todos tem conjuntos, de arestas, independentes em  $M'$ . Afirmamos que  $X' \cap X_{ij} \neq \emptyset$  para todo  $i < j$ , e assim  $M'|(V' \cup X') \cong \tilde{B}(K_n)$  pelo Lema 2.8.5.

Assumamos que  $X' \cap X_{ij} = \emptyset$  para algum par  $i < j$ . Seja  $G$  o grafo associado de  $M'|(V' \cup X')$ . Se  $Z \subseteq X'$  é o conjunto de arestas de um caminho de  $b_i$  a  $b_j$  em  $G$ ,

então  $r_{M'}(cl_{M'}(Z) \cap X_{ij}) \leq 1$ . Então, deve haver, no máximo  $m$  tais  $Z$ , desde que um grafo simples em  $n$  vértices não tem mais que  $2^n n! = m$  ciclos. Assim, podemos tomar  $x_{ij} \in X_{ij}$  assimétricos de cada  $Z$ . Então, os ciclos criados no grafo associado quando adicionamos  $x_{ij}$  a  $X'$  tem todos conjuntos de arestas independentes em  $M'$ , contradizendo a maximalidade de  $X'$ .

(2).  $\tau_1(M'|X_{ij}) \leq m$ , para algum par  $i < j$ . Como  $|X_{ij}| = l^2$ , existe uma classe em paralelo  $P \subseteq X_{ij}$  de  $M'$  com,  $|P| \geq \frac{l^2}{m}$ .

Agora, desde que  $B \cap cl_{M'}(P) = \emptyset$  e  $B \cap cl_M(P) = \emptyset$ , e, pelo Lema 2.8.4, temos que  $M|P$  é gráfica. E

$$r(M|P) \leq |B_i \cup B_j| = 2l.$$

Temos então,

$$|E(M)| \geq \frac{l^2}{m} > l2\theta(n) \geq \theta(n)r(M|P),$$

e, pelo Corolário 2.8.2, obtemos um menor  $M(K_n)$ . ■

Finalmente, estamos aptos a realizar a prova do Teorema 2.1.1.

**Teorema 2.1.1** *Existe uma função  $\gamma : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, se  $M$  é uma matróide com  $r(M) \geq \gamma(k, a, n)$ , então  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos ou um menor isomorfo a  $U_{a,2a}$ ,  $M(K_n)$ , ou  $B(K_n)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $k, a, n$  inteiros positivo. Definamos  $\gamma(k, a, n)$  a seguir: Inicialmente, definamos os seguintes números:  $a' = a - 1$  e  $b = 2a$ . Seja  $k = \psi(n)$  e sejam  $m_1 = \phi_1(k, a', b)$  e  $m_2 = \phi_2(k, a', b)$ . Seja  $r = m_1 + m_2$  e defina  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  por  $g(t) = \nu(r, t, a', b)$ .

$$\gamma(k, a, n) = \begin{cases} k, & a = 1 \\ f_g(k) & a \geq 2 \end{cases}$$

Seja  $M$  dada com  $r(M) \geq \gamma(k, a, n)$ . Se  $a = 1$ , o resultado é trivial, desde que em toda matróide sem menor  $U_{1,2}$  todo elemento é um laço ou um colaço.

Seja  $a \geq 2$  então, pelo Lema 2.3.4,  $M$  tem  $k$  cocircuitos disjuntos ou um menor  $N$  com,  $r(N) \geq g(\Gamma(N))$ .

Assuma, neste caso, que o segundo caso acontece. Assim sendo, se  $N$  tem um menor  $U_{a'+1,b} = U_{a,2a}$  está feito. Então assuma que não é este o caso.

Aplicando o Lema 2.6.8, obtemos um ninho  $N_1$ , de posto  $r = m_1 + m_2$ , como menor de  $N$ . Agora, pelo Lema 2.7.4,  $N_1$  tem uma  $m_1$ -*tempestade*  $N_2$ , com  $m_2$  nuvens, como menor.

Aplicando agora o Lema 2.7.5 obtemos um Dowlin Clique  $N_3$ , de posto  $k$ , como menor de  $N_2$ .

Finalmente, o Lema 2.8.6 nos dá um menor  $N_4$ , de  $N_3$ , tendo um menor  $M(K_n)$  ou  $B(K_n)$ . ■

# Apêndice A

Aqui mostraremos que as matróides  $U_{r,n}$ , onde  $n \geq 2r - 1$ ,  $M(K_n)$  e  $\tilde{B}(K_n)$  são circulares, isto é, não tem dois cocircuitos disjuntos.

**Lema A.0.7** *Seja  $M$  uma matróide e  $H_1, H_2$  hiperplanos distintos em  $M$ , tais que  $H_1 \cup H_2 \neq E(M)$ . Se  $\Theta(M|H_1) \leq m$ , então  $\Theta(M) \leq m$ .*

**Demonstração:** Seja  $e \in E(M) - (H_1 \cup H_2)$ . Podemos assumir, pelo lema 2.4.5, que  $E(M) = (H_1 \cup H_2) \cup e$ . Suponhamos que existe uma coleção  $\mathcal{C}$  de  $m - 1$  cocircuitos disjuntos de  $M$ .

Se  $C$  é um cocircuito de  $M$  e  $C \cap H_1 \neq \emptyset$ , então  $C \cap H_1$  é um cocircuito de  $M|H_1$ . Uma vez que  $|\mathcal{C}| > \Theta(M|H_1)$ , um membro de  $\mathcal{C}$  deve ser  $C_1 = E(M) - H_1$ . Do mesmo modo, determinamos  $C_2 = E(M) - H_2 \in \mathcal{C}$ . Mas  $e \in C_1$  e  $e \in C_2$ , contradizendo o fato dos membros de  $\mathcal{C}$  serem disjuntos. ■

**Nota A.0.8** *Seja  $M$  uma matróide e  $F$  um subconjunto fechado de  $M$ . Dizemos que  $F$  circular, se  $M|F$  é uma matróide circular. Isto é, não existem dois cocircuitos disjuntos, de  $M$ , contidos em  $F$ .*

Tomando  $m = 1$  no Lema A.0.7, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário A.0.9** *Seja  $M$  uma matróide, e  $H_1, H_2$  hiperplano circulares distintos de  $M$ , com  $H_1 \cup H_2 \neq E(M)$ . Então  $M$  é circular.*

**Lema A.0.10** *Dowling cliques são circulares. Em particular,  $M(K_n)$  e  $\tilde{B}(K_n)$  são circulares. Para  $n > 3$ ,  $\theta(B(K_n)) = 2$ .*

**Demonstração:** Provaremos primeiro, usando indução sobre o posto  $r$ , que um Dowling clique  $(M, V)$  é circular.

O caso  $r = 1$  é trivial, desde que uma matrôide de posto 1 não tem mais de um cocircuito. Assuma  $r \geq 2$ . Considere um hiperplano  $H$  de  $M$  gerado por  $V - v$  para algum  $v \in V$ . Então  $(M|H, V - v)$  é um Dowling clique de posto  $n - 1$ . Então  $H$  é circular, pela hipótese de indução. Dois desses hiperplanos não cobrem  $E(M)$ , então pelo Lema A.0.7,  $M$  é circular.

Podemos verificar que  $B(K_4) \cong U_{4,6}$ , e então  $\Theta(B(K_4)) = 2$ . Seja  $(M, V)$  o Dowling-clique  $\tilde{B}(K_n)$  e seja  $N = M \setminus V = B(K_n)$ . Considere um hiperplano  $H$  de  $M$  gerado por  $V - v$  para algum  $v \in V$ . Usando a Observação 2.1.3 temos que  $H - V$  é um hiperplano de  $N$  e  $N|(H - V) \cong B(K_{n-1})$ . Uma simples indução mostra que  $\Theta(N) \leq 2$ , agora usando o lema A.0.7. Desde que  $B(K_n)$  não é circular,  $\Theta(B(K_n)) = 2$ . ■

Agora, para ver que  $U_{r,2r-1}$  é circular considere  $M = U_{r,2r-1}$ . Temos que

$$\mathcal{B}(M) = \{X \subseteq E(M) : |X| = r\}$$

e daí,

$$\mathcal{B}^*(M) = \{Y \subseteq E(M) : |Y| = r - 1\}.$$

O que nos dá

$$\mathcal{C}^* = \{Z \subseteq E(M) : |Z| = r\} = \mathcal{B}(M).$$

Concluimos, portanto, que cada cocircuito de  $M$  é um conjunto gerador de  $M$ . Sendo assim  $M$  é circular.

Finalmente, pra ver que, para cada  $n \geq 2r$ ,  $M = U_{r,n}$  é circular. Consideremos,  $n = 2r + m$ , com  $m \geq 0$ . Assim,

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq E(M) : |X| = r\}.$$

Neste caso,

$$\mathcal{B}^* = \{Y \subseteq E(M) : |Y| = r + m\}.$$

Daí,

$$\mathcal{C}^* = \{Z \subseteq E(M) : |Z| = r + m + 1\} \supseteq \mathcal{B}(M).$$

Donde, cada cocircuito de  $M$  é um conjunto gerador de  $M$  e, portanto,  $M$  é circular.

# Referências

- [1] G. Birkhoff. Abstract linear dependence and lattices. *American Journal of Mathematics*, 57(4):800–804, 1935.
- [2] R. Diestel. Graph Theory. 2005. *Grad. Texts in Math*, 2005.
- [3] T.A. Dowling. A class of geometric lattices based on finite groups, 1972.
- [4] P. Erdős ja L. Posa. On the maximal number of disjoint circuits of a graph. *Publ. Math. Debrecen*, 9:3–12, 1962.
- [5] J. Geelen ja K. Kabell. The Erdos-Posa property for matroid circuits.
- [6] J.F. Geelen, AMH Gerards, ja G. Whittle. Disjoint cocircuits in matroids with large rank. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 87:270–279, 2003.
- [7] J.P.S. KUNG. The long-line graph of a combinatorial geometry. I. Excluding  $M(K_4)$  and the  $(q+2)$ -point line as minors. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 39(2):223–234, 1988.
- [8] J.P.S. Kung. Extremal matroid theory. *Graph Structure Theory, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, ss. 21–62, 1993.
- [9] S. Mac Lane. A lattice formulation for transcendence degrees and  $p$ -bases. *Duke Math. J*, 4(3):455–468, 1938.
- [10] S. MacLane. Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. *American Journal of Mathematics*, 58(1):236–240, 1936.
- [11] W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. *Mathematische Annalen*, 174(4):265–268, 1967.

- [12] J. Oxley. What is a matroid. *Cubo*, 5:179–218, 2003.
- [13] J.G. Oxley. *Matroid theory*. Oxford University Press, 1992.
- [14] F. P. Ramsey. On a problem for formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, 2(30):264–268, 1930.
- [15] WT Tutte. A homotopy theorem for matroids, I. *Transactions of the American Mathematical Society*, ss. 144–160, 1958.
- [16] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, ss. 509–533, 1935.

# Índice

- t-circular*, 31
- assimétricos, 40
- bases, 9
- circuito, 9, 10
  - de cobertura, 24
  - fundamental, 11
- Clique, 48
  - Dowling, 55
- cobase, 14
- cobertura, 27
- cocircuito, 14, 16, 17
- cofechado, 14
- coindependente, 14
- colaço, 14
- contração, 15
- coposto, 14, 16
- deleção, 15
- domina, 48
  - k, 48
- fechado, 12
- Galois, 8
- hiperplano, 16
- Kung, 27
- laço, 9
- linha, 13
  - longa, 47
- Mader, 60
- Matróide, 9
  - a-simples*, 29
  - afim, 18
  - auto-dual, 14
  - bicircular, 23
  - binária, 20
  - ciclo, 21
  - circular, 26
  - cossimplificação de uma, 18
  - Dowling, 60
  - dual, 13
  - fecho, 12
  - gráfica, 21
  - isomorfismo de, 10
  - poligonal, 21
  - regular, 20
  - representável, 20
  - representação geométrica, 18
  - simples, 18

- simplicidade de uma, 18
- ternária, 20
- uniforme, 20
- vetorial, 20

menor, 15

ninho, 47

ortogonalidade, 14

paralelo

- classe, 17
- elementos, 17

posto, 11

- deficiência de, 31
- função, 12

Ramsey, 41

- número de, 41

restrição, 11

série

- classe, 17
- elementos, 17

subconjuntos, 9

- dependentes, 9
- independentes, 9
- monocromático, 41

tempestade, 55

triângulo, 9

Tutte, 15

Whitney, 6