

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Estrutura de Ondas para um Modelo de Escoamento Trifásico com Viscosidades das Fases Assimétricas

por

Maria Joseane Felipe Guedes

sob orientação de

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Abril/2009

# **Estrutura de Ondas para um Modelo de Escoamento Trifásico com Viscosidades das Fases Assimétricas**

por

**Maria Joseane Felipe Guedes**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Arthur Vicentini Ferreira Azevedo(UnB)**

---

**Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes(UFCG)**

---

**Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza(UFCG)**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Abril/2009**

# Abstract

In this work we consider the Riemann problem for a system of conservation laws modeling the oil recovery for a three-phase flow in a porous medium by the injection of a mixture of water and gas in a reservoir which is initially filled with a mixture of water and oil. Using the theory of conservation laws, the solution of the Riemann problem is determined considering all possibilities for the production data. For each of these production data, all possible cases for the injected gas/water mixture are considered as well. For each production case it is shown the existence of some special injection data separating distinct constructions of solutions in the state space. Moreover, among these special injection data one of them is critical in the sense that the wave sequence that describes the solution can be represented by two or three distinct paths in the state space, but consisting of the same solution in the physical space -  $xt$ . In general the solution of the Riemann problem consists of a sequence of two waves separated by one intermediate constant state when the production data are closed to the extreme situations where the initial water or oil saturations are maximal. For production data with a more homogeneous initial water and oil proportion, the solution may consist up to three waves separated by two constant intermediate states for some injected mixtures containing a higher proportion of gas than water. In such cases a nonclassical wave, i. e. a transitional wave, must be used.

# Resumo

Neste trabalho é considerado o problema de Riemann para um sistemas de leis de conservação modelando a recuperação de óleo de um reservatório petrolífero pela injeção de uma mistura do tipo água e gás, supondo que o mesmo contenha inicialmente uma mistura do tipo água e óleo. A partir da teoria de Leis de Conservação é determinada a solução do problema de Riemann considerando os vários casos possíveis para dados de produção. Para cada um desses dados de produção são considerados todos os casos possíveis de injeção da mistura água/gás. Para cada caso de produção é mostrada a existencia de estados especiais de injeção separando construções distintas de soluções no espaço de estados. Além disso, entre esses estados especiais de injeção um deles é crítico, no sentido que a solução é dada de duas ou três maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico -  $xt$ . Em geral a solução do problema de Riemann consiste de uma sequencia de duas ondas separadas por um estado intermediário constante quando o dado de produção está próximo de situações extremas, em que a saturação inicial da água ou do óleo é maximal. Para estados de produção com uma proporção mais homogênea da mistura de água e óleo a solução pode consistir de até três ondas para alguns casos de injeção de uma mistura contendo uma proporção maior de gás do que de água. Nesses casos uma onda não clássica, i. e. uma onda transicional, deve ser usada.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a *Deus*, pois sem Ele nada seria possível.

Ao meu esposo *Álvaro*, pelo amor, amizade, companheirismo, compreensão e incentivo para a realização desta dissertação de mestrado.

Aos meus pais, *Guedes e Tiana*, por todo amor dedicado, pela paciência, carinho e pelos sacrifícios feitos para poder possibilitar a educação dos filhos. Aos meus irmãos, *Josicleide e Felipe*, pelo amor, apoio e incentivo. Ao meu sogro *Luíz*, minha sogra *Amandia (in memorian)* e aos meus cunhados *Murilo e Heloiza* pelo carinho e apoio.

Ao meu orientador, professor *Aparecido Jesuíno*, pela orientação, disponibilidade, paciência e por toda ajuda que me concedeu com sua experiência.

Aos professores e funcionários dos cursos de Graduação e de Pós-Graduação em Matemática da UFCG, e aos professores vinculados ao PRH-25, que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação e conclusão deste trabalho.

Aos amigos e companheiros da UAME, pelo incentivo, ajuda e pelas noites de estudo compartilhadas, em especial, *Leomaques, Suene, David Lobão, Rivaldo, Areli e Luciano*.

Ao professor *Dan Marchesin* por ter gentilmente disponibilizado o "software pakman" utilizado neste trabalho.

À Agência Nacional de Petróleo (ANP) e ao Programa de Recursos Humanos (PRH-25) pelo apoio financeiro.

Aos demais órgãos financiadores deste trabalho, CTBRASIL, CTPETRO, FINEP e CNPq.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente, **muito obrigada!**

# Dedicatória

Ao meu querido esposo Álvaro.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| Introdução . . . . .  | 6         |
| 0.1 Objetivo . . . . .  | 9         |
| <b>1 Preliminares</b>   | <b>10</b> |
| 1.1 Sistema de Leis de Conservação . . . . .                      | 10        |
| 1.1.1 Condições de Entropia . . . . .                             | 15        |
| 1.1.2 Ondas Compostas . . . . .                                   | 18        |
| 1.1.3 Curvas de Onda . . . . .                                    | 19        |
| 1.1.4 Solução do Problema de Riemann . . . . .                    | 20        |
| 1.1.5 Conjuntos de Bifurcação . . . . .                           | 21        |
| <b>2 O Modelo Matemático para o Escoamento Trifásico</b>          | <b>23</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .  | 23        |
| 2.2 Nomenclatura . . . . .  | 23        |
| 2.3 Hipóteses Consideradas . . . . .                              | 24        |
| 2.4 Dedução do Modelo . . . . .                                   | 25        |
| <b>3 Propriedades Básicas do Modelo Matemático</b>                | <b>32</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .  | 32        |
| 3.2 Curvas de Rarefação e Conjuntos de Inflexão . . . . .         | 33        |
| 3.3 Curvas de Hugoniot pelos lados do Triângulo de Saturações . . | 34        |
| 3.4 Curvas de Hugoniot pelos pontos $D$ , $E$ e $B$ . . . . .     | 37        |
| 3.5 Curvas de Hugoniot pelos vértices do Triângulo de Saturações  | 39        |
| 3.6 Restrição do Fluxo ao longo do Segmento $[G, D]$ . . . . .    | 40        |
| 3.7 Conjuntos de Bifurcação . . . . .                             | 41        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.7.1    | Conjunto de Bifurcação Secundária . . . . .            | 41        |
| 3.7.2    | Conjuntos de Extensão de Fronteira . . . . .           | 42        |
| <b>4</b> | <b>Curvas de Onda para o Sistema de duas Equações</b>  | <b>43</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                   | 43        |
| 4.2      | Curvas de Onda-1 . . . . .                             | 43        |
| 4.3      | Ondas Transicionais . . . . .                          | 46        |
| <b>5</b> | <b>Construção da Solução do Problema de Riemann</b>    | <b>47</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .                                   | 47        |
| 5.2      | Definição de alguns Estados Especiais . . . . .        | 51        |
| 5.3      | Construção da Solução do Problema de Riemann . . . . . | 53        |
| 5.3.1    | Caso 1: Estados de Produção $P \in (O, P_1]$ . . . . . | 54        |
| 5.3.2    | Caso 2: Estados de Produção $P \in (P_1, D)$ . . . . . | 60        |
| 5.3.3    | Caso 3: Estado de Produção $P = D$ . . . . .           | 63        |
| 5.3.4    | Caso 4: Estados de Produção $P \in (D, P_2]$ . . . . . | 66        |
| 5.3.5    | Caso 5: Estados de Produção $P \in (P_2, W)$ . . . . . | 70        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>                                      | <b>74</b> |
| <b>A</b> | <b>Figuras dos Capítulos 1,2,3 e 4</b>                 | <b>75</b> |
| <b>B</b> | <b>Figuras do Capítulo 5</b>                           | <b>80</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                    | <b>89</b> |



# Introdução

É bastante conhecido na literatura que a produção de petróleo ocorre inicialmente de forma espontânea devido à atuação da energia natural do reservatório.

No entanto, este processo, chamado de Recuperação Primária permite, em geral, que cerca de no máximo 25% do petróleo existente na jazida seja extraído. Este percentual pode ser aumentado utilizando técnicas especiais chamadas de recuperações Secundária, Terciária e Avançada. Dentre as técnicas secundárias existentes, as mais conhecidas são a injeção contínua de água ou de gás, empregadas separadamente, a fim de melhorar a produção do óleo. No entanto, experimentos mostram que a combinação alternada destes dois métodos pode melhorar ainda mais o fator de recuperação de petróleo.

Neste trabalho estaremos interessados em um modelo matemático de escoamento isotérmico, em um meio poroso, consistindo de três fases móveis imiscíveis (óleo, água e gás).

A modelagem matemática para o escoamento é feita baseando-se nas leis de conservação de massa de cada uma das fases e na lei de força de Darcy, também para cada fase, que substitui a equação de momentum, [4], [12], [17] e [18]. Baseados nestas leis físicas, após algumas simplificações das propriedades do fluido e do reservatório petrolífero, via de regra chegamos a um sistema de quatro equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares dependentes de quatro incógnitas, as quais são as saturações de duas das fases, haja vista que a terceira saturação é obtida a partir das outras duas, a velocidade e a pressão. Com algumas simplificações adicionais o sistema geral pode ser desacoplado num sistema nas saturações e num sistema para a velocidade e pressão. Restringiremos nosso foco ao sistema nas saturações. Devido o alto grau de

complexidade deste sistema, caso não sejam feitas outras simplificações adicionais, a resolução do mesmo é tarefa muito difícil, para não dizer impossível.

Assim, como em outros modelos matemáticos, é usual iniciar o estudo da solução do sistema de equações diferenciais por casos bastante simplificados de tal forma que seja possível o tratamento matemático e que também se adquira indicações sobre o comportamento do sistema mais completo. Dentre várias simplificações que se faz, podemos destacar a porosidade constante, a incompressibilidade das fases, a omissão de forças capilares entre as fases, a vazão constante, as viscosidades constantes, etc. Aqui destacamos as chamadas curvas de permeabilidade relativas para as quais existem dois modelos padrões na literatura (ver [3]); o de Corey em que é considerado que a permeabilidade de cada fase é função apenas da saturação da própria fase e o de Stone em que é considerado que a permeabilidade da fase óleo depende das três saturações. A principal diferença é que o modelo de Stone fornece um sistema do tipo misto elítico-hiperbólico em que há uma região interna ao triângulo de saturações onde as velocidades características do sistema de EDPs linearizado são complexas, enquanto que para o modelo de Corey esta região é reduzida à um ponto, onde as duas velocidades características coincidem, e o sistema tem comportamento tipicamente hiperbólico, [19].

Para a simulação da recuperação de reservatórios petrolíferos as condições iniciais são tomadas constantes por partes com uma descontinuidade do tipo salto em cada saturação. Estas constantes representam então os dados de injeção e os de produção de um reservatório. Na teoria matemática de leis de conservação este tipo de problema de valores iniciais constantes por partes é conhecido como problema de Riemann e é nele que estamos interessados.

A evolução da resolução do problema de Riemann para o modelo de Corey tem seguido essencialmente pelos seguintes passos, longe ainda do problema físico. Um primeiro passo foi dado em [8], considerando as viscosidades das três fases constantes e iguais em que há uma simetria tripla no triângulo das saturações. Para este caso a solução foi determinada completamente e a sequencia de ondas (bancos de óleo, água ou gás) que compõem o escoamento foram perfeitamente descritos. Em seguida um segundo passo foi dado em [20] e em [24], considerando-se a viscosidade da fase água ligeiramente diferente das outras duas e então houve a quebra de uma simetria, restando ainda uma dupla simetria.

Nossa proposta então neste trabalho é dar mais um passo nesta direção considerando-se pelo menos a viscosidade do gás inferior às outras duas, com dados de injeção do tipo uma mistura gás/água e dados de produção do tipo uma mistura óleo/água. Com isto também teremos uma simetria, mas com relação à outro eixo do triângulo de saturações. Juntando os passos dados em [8], [20] e [24], com este a ser dado aqui acreditamos que poderemos então atacar o problema mais geral das três viscosidades distintas.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira; sendo que o leitor já iniciado no assunto pode ir diretamente ao Capítulo 5 onde está construída a solução do problema de Riemann.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados básicos necessários para o entendimento e desenvolvimento da dissertação. Foi feita uma abordagem à cerca de sistemas de Leis de Conservação, tratando-se das condições de entropia, e das definições de ondas elementares, curvas de ondas e conjuntos de bifurcação.

No Capítulo 2 apresentamos a modelagem matemática para o escoamento trifásico, incluindo as hipóteses consideradas e a dedução do modelo matemático.

No Capítulo 3 apresentamos as propriedades bifásicas do modelo matemático, descrevendo as ondas elementares e os conjuntos de bifurcação que foram introduzidos de maneira geral no Capítulo 1. Neste capítulo também obtemos analiticamente as curvas de Hugoniot para estados nos lados e nos vértices do triângulo de saturações.

No Capítulo 4 apresentamos a construção das curvas de onda associadas à família característica - 1, necessárias para a construção da solução do problema de Riemann proposto.

Por fim, no Capítulo 5, que é o principal capítulo desta dissertação, apresentamos a construção da sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann. Inicialmente determinamos os estados especiais de produção no lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações que separam construções distintas da solução do problema de Riemann. Em seguida construímos as sequencias de ondas para cada tipo de dado de produção. Mostramos que para dados de produção próximos de óleo puro, ou próximos de água pura, a solução do problema de Riemann, em geral, consiste de duas ondas separadas por um estado intermediário constante. Enquanto que, para dados de produção com uma proporção um pouco menor de óleo, a solução em geral consiste de três ondas e

dois estados intermediários constantes, sendo que uma destas ondas deve ser um choque não clássico (de Lax), isto é, um choque transicional.

Além disso, é determinado neste capítulo

## 0.1 Objetivo

Determinar a solução do problema de Riemann para o sistema de equações diferenciais parciais proveniente da modelagem matemática de um escoamento trifásico unidimensional com uma simetria em que as viscosidades da água, do óleo e do gás, mesmo que constantes, são dadas de forma que a viscosidade do gás seja inferior à da água e à do óleo.

# Preliminares

## 1.1 Sistema de Leis de Conservação

Nesta seção são apresentados alguns elementos básicos sobre sistemas de leis de conservação, de modo que o texto da dissertação seja o máximo autosuficiente. Um estudo mais amplo sobre o tema pode ser encontrado em [5], [19], [23], entre outros, nos quais estas preliminares estão baseadas. Uma das principais características de uma lei de conservação, devido o seu carácter não linear, é a presença de soluções descontínuas, ou choques. Para efeitos da aplicação considerada neste trabalho, as soluções por choque representam frentes de óleo, água e gás sendo deslocados ao longo de um reservatório de petróleo pela injeção de água e/ou gás.

Um sistema de  $n$  leis de conservação unidimensional em  $n$  - variáveis é um sistema de equações diferenciais parciais (EDP), dependentes do tempo e de uma posição espacial, da seguinte forma:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(U(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

em que  $U \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  representa as variáveis de estado e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de fluxo associada, normalmente considerada de classe  $C^2(\Omega)$ . Em dinâmica dos fluidos o conjunto  $\Omega$  geralmente é referido como o espaço de estados e  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  é referido como o espaço físico- $xt$ .

**Definição 1.1.1** *O sistema (1.1) é dito hiperbólico em  $\Omega$  quando a matriz jacobiana de  $F$ , denotada por  $DF(U) = A(U)$ , tem autovalores reais,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ,*

para todo  $U \in \Omega$ . Se as desigualdades forem todas estritas o sistema é dito estritamente hiperbólico. Estados onde ocorre a igualdade entre velocidades características, são ditos pontos de singularidade hiperbólica do sistema. No caso de existir uma singularidade hiperbólica isolada  $U_*$  tal que  $DF(U_*)$  seja múltipla da matriz identidade, o ponto  $U_*$  é chamado de ponto umbílico.

O problema de Cauchy para o sistema (1.1) consiste do sistema de equações diferenciais parciais, em (1.1), atrelado à uma condição inicial previamente fixada, digamos,

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

**Definição 1.1.2** Uma solução clássica do problema de Cauchy é uma função  $U : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  que satisfaça o sistema de equações (1.1) e a condição inicial (1.2).

No entanto, sistemas hiperbólicos, em particular sistemas de leis de conservação, em geral apresentam soluções descontínuas, por isto faz-se necessário introduzir o conceito de solução fraca a seguir.

**Definição 1.1.3** Uma solução fraca do problema de Cauchy (1.1)-(1.2) é uma função  $U \in L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  tal que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [U(x, t)\phi_t(x, t) + F(U(x, t))\phi_x(x, t)] dxdt + \int_{-\infty}^\infty U_0(x)\phi(x, 0)dx = 0, \quad (1.3)$$

para toda função teste  $\phi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^\infty$  e de suporte compacto em  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

De agora em diante, entende-se por solução do problema de Cauchy uma solução fraca, a menos que seja explicitado o contrário.

O problema de Riemann para um sistema de leis de conservação de  $n$ -equações e  $n$ -incógnitas, centrado na posição  $x = 0$ , é um problema de Cauchy particular para o sistema (1.1), com condições iniciais do tipo salto, como a seguir:

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_- & \text{se } x < 0 \\ U_+ & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

em que  $U_-$  e  $U_+$  representam vetores constantes distintos. No caso  $U_-$  é chamado de estado inicial à esquerda e  $U_+$  de estado inicial à direita.

Dentre as soluções do problema de Riemann (1.1) e (1.4) destaca-se a propriedade radial das mesmas, isto é, se  $U(x, t)$  é solução, então  $U(ax, at)$ , para  $a > 0$ , também o é. Portanto, é esperado que as soluções do problema de Riemann (1.1) e (1.4) sejam constantes ao longo de retas pela origem variando de acordo com suas inclinações, isto é,  $U(x, t) = \mathcal{U}(x/t)$ .

Fazendo  $\xi = x/t$ , supondo que  $\mathcal{U}(\xi)$  seja uma solução clássica não constante e substituindo-a em (1.1), temos

$$[A(\mathcal{U}(\xi)) - \xi I]\mathcal{U}'(\xi) = 0, \quad (1.5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade do  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{U}'(\xi)$  denota a derivada de  $\mathcal{U}(\xi)$ . Assim, como  $\mathcal{U}'(\xi) \neq 0$ , da equação (1.5) segue que  $\mathcal{U}'$  deve ser um vetor característico (à direita) de  $A(U)$  associado à velocidade característica  $\lambda(U) = \xi$ . Portanto, as soluções suaves centradas do sistema (1.1) jazem sobre as curvas integrais dos campos característicos (à direita) de  $A(U)$  no espaço de estados  $\Omega$ . Ou seja, satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO),

$$\mathcal{U}'(\xi) = e^i(\mathcal{U}(\xi)), \quad (1.6)$$

em que  $e^i$  denota um vetor característico (à direita) da matriz Jacobiana  $A(U)$ , associado à velocidade característica  $\lambda^i$ .

**Definição 1.1.4** Dizemos que um estado constante  $U_+$  é conectável ao estado constante  $U_-$  por uma onda de rarefação -  $i$ , se  $U_-$  e  $U_+$  estão na mesma curva integral do  $i$ -ésimo campo característico definida por (1.6) e  $\lambda^i(U(\xi))$  é crescente com  $\xi$ , quando  $U(\xi)$  varia no sentido de  $U_-$  para  $U_+$ .

O fato de exigir que  $\lambda^i(\mathcal{U}(\xi))$  seja crescente de  $U_-$  para  $U_+$  significa que no espaço físico  $(x, t)$ , a inclinação  $\xi = x/t$  deve ser estritamente crescente de  $\xi_- = \lambda^i(U_-)$  para  $\xi_+ = \lambda^i(U_+)$  de tal forma que as retas características cubram toda a região entre as retas de inclinações  $\lambda^i(U_-)$  e  $\lambda^i(U_+)$ , univocamente, ver Figura A.1. Desta forma, a partir da equação  $\xi = \lambda^i(\mathcal{U}(\xi))$  é possível invertê-la e obter a expressão de  $\mathcal{U}(\xi)$  como a função inversa de  $\lambda^i(U(\xi))$ , isto é,  $U(\xi) = (\lambda^i)^{-1}(\xi), \forall \xi \in [\xi_-, \xi_+]$ .

**Definição 1.1.5** Uma curva de rarefação -  $i$  por um estado inicial  $U_-$  é o conjunto dos estados  $U \in \Omega$  que podem ser conectados ao estado  $U_-$  por uma onda de rarefação -  $i$ .

A solução do problema de Riemann (1.1)-(1.4) por uma onda de rarefação -  $i$  tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x \leq \lambda^i(U_-)t, \\ (\lambda^i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda^i(U_-)t \leq x \leq \lambda^i(U_+)t, \\ U_+, & \text{se } x \geq \lambda^i(U_+)t. \end{cases} \quad (1.7)$$

Dessa maneira a primeira restrição na determinação de soluções de problemas de Riemann é, precisamente, que, no caso de ondas de rarefação -  $i$ , se tenha no espaço físico o crescimento da velocidade característica  $\lambda^i(U(x/t))$  em consonância com o crescimento da inclinação  $x/t$ . Outro fato a se notar é que uma solução por uma onda de rarefação é contínua, mas geralmente não é diferenciável ao longo das retas  $x/t = \lambda_i(U_-)$  e  $x/t = \lambda_i(U_+)$ .

**Definição 1.1.6** *O  $i$ -ésimo campo característico de  $A(U)$  é dito genuinamente não linear num subconjunto  $\Omega' \subset \Omega$ , se  $\nabla \lambda^i(U) \cdot e^i(U) \neq 0$ , para todo  $U \in \Omega'$ . Em outras palavras, se a  $i$ -ésima velocidade característica é uma função estritamente monótona sobre a curva integral do campo de linhas associado, no subconjunto  $\Omega'$ . Por outro lado, se  $\nabla \lambda^i(U) \cdot e^i(U) \equiv 0$ , diz-se que o campo é linearmente degenerado.*

O sistema (1.1) é dito genuinamente não linear em  $\Omega'$ , se todos os seus campos característicos são genuinamente não lineares em  $\Omega'$ .

Associado ao conceito de campos genuinamente não lineares temos os pontos isolados ao longo das curvas integrais onde podem ocorrer pontos críticos no crescimento de  $\lambda^i$ , ou seja, onde a não-linearidade genuína é perdida.

**Definição 1.1.7** *O conjunto de inflexão associado à  $i$ -ésima família característica é formado pelos estados  $U \in \Omega$  tais que  $\nabla \lambda^i(U) \cdot e^i(U) = 0$ . Ou seja, o conjunto de inflexão é formado pelos pontos críticos das velocidades características, restritas as curvas integrais dos respectivos campos característicos dados pela equação (1.6).*

Das definições (1.1.4)-(1.1.7) segue que pontos num conjunto de inflexão estão associados com pontos iniciais ou pontos finais de curvas de rarefação.

Para caracterizar soluções descontínuas do problema de Riemann (1.1) e (1.4), seja  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  e considere a seguinte função

$$U(x, t) = \begin{cases} U_- & \text{para } x < \sigma_0 t, \\ U_+ & \text{para } x > \sigma_0 t, \end{cases} \quad (1.8)$$

em que,  $U_-$  e  $U_+$  são os vetores constantes distintos dados em (1.4).



Como consequência do teorema de Green aplicado à igualdade em (1.3), a função (1.8) é uma solução fraca do problema de Riemann (1.1) e (1.4) se satisfaz a chamada condição de Rankine-Hugoniot, dada a seguir

$$F(U_+) - F(U_-) - \sigma_0(U_+ - U_-) = 0, \quad (1.9)$$

em que  $\sigma_0$  é a velocidade de propagação da descontinuidade entre  $U_-$  e  $U_+$ . No caso, a reta  $x = \sigma_0 t$  no espaço físico- $xt$  é dita uma *reta de descontinuidades da solução*.

Considere agora na equação (1.9),  $U_-$  sendo um estado fixo e  $\sigma_0$  e  $U_+$  variáveis. Dessa maneira, substitua  $\sigma_0$  por  $\sigma$  arbitrário em  $\mathbb{R}$  e  $U_+$  por  $U$  arbitrário em  $\Omega$ . Portanto, o sistema (1.9) passa a ser visto como um sistema de  $n$  equações algébricas nas  $(n + 1)$  incógnitas  $\sigma$  e  $U$ :

$$\mathcal{H}(U_-, \sigma, U) \equiv F(U) - F(U_-) - \sigma(U - U_-) = 0. \quad (1.10)$$

Desta forma, a solução do sistema (1.10) representará genericamente uma curva no espaço  $\mathbb{R} \times \Omega$ , que poderá ser parametrizada, digamos por um parâmetro  $\xi$  da seguinte forma,  $(\sigma(\xi), U(\xi))$ ,  $\xi \in I \subset \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Na construção da solução do problema de Riemann o interesse está na projeção desta curva no espaço de estados  $\Omega$ , pois para cada par de vetores constantes  $U_-$  e  $U_+$  fixados, estaremos interessados em determinar o valor  $\sigma_0$  tal que a equação (1.9) seja satisfeita; isto é, que  $(\sigma_0, U_+)$  seja uma solução de (1.10).

Analogamente, poderia ter sido fixado  $U_+$  no lugar de  $U_-$  em (1.10). Então para considerar os dois casos, seja  $U_0$  um estado qualquer em  $\Omega$ .

**Definição 1.1.8** Fixado  $U_0 \in \Omega$ , a curva de Hugoniot por  $U_0$ , denotada por  $\mathcal{H}(U_0)$ , é o conjunto dos estados  $U \in \Omega$  tais que exista  $\sigma \in \mathbb{R}$  satisfazendo a equação (1.10), com  $U_- = U_0$  ou com  $U_+ = U_0$ .

Portanto, a curva de Hugoniot por  $U_0 = U_-$  significa os possíveis estados  $U_+ \in \Omega$  tais que a solução do problema de Riemann (1.1) e (1.4) é dada por uma solução descontínua na forma (1.8). Por sua vez, a curva de Hugoniot por  $U_0 = U_+$  significa os possíveis estados  $U_- \in \Omega$  tais que a solução do problema de Riemann (1.1) e (1.4) é dada por uma solução descontínua na forma (1.8).

Quando necessário, a velocidade de propagação  $\sigma$  de uma descontinuidade entre  $U_-$  e  $U_+$  será denotada por  $\sigma(U_-; U_+)$  já ficando implícito que  $U_-$  e  $U_+$  estão na mesma

curva de Hugoniot.

### 1.1.1 Condições de Entropia

Soluções fisicamente não relevantes aparecem na solução de problemas envolvendo equações não lineares, muitas vezes decorrentes das simplificações utilizadas no modelo. Dessa forma, as chamadas *condições de entropia* tem a finalidade de selecionar as soluções que são fisicamente relevantes. Desse modo, as soluções fracas do problema de Riemann devem satisfazer as condições de entropia.

A condição de entropia a seguir foi formulada por Lax, ver [19], para sistemas estritamente hiperbólicos, genuinamente não-lineares, em termos de desigualdades.

**Definição 1.1.9** (Condição de Entropia de Lax): *uma descontinuidade entre os estados  $U_-$  e  $U_+$ , que se propaga com velocidade  $\sigma$  é dita um choque admissível segundo o critério de Lax, ou apenas um choque- $i$  de Lax, se satisfaz as seguintes desigualdades,*

$$\lambda^{i-1}(U_-) < \sigma < \lambda^i(U_-), \quad \lambda^i(U_+) < \sigma < \lambda^{i+1}(U_+). \quad (1.11)$$

Embora as desigualdades (1.11) sejam mais utilizadas na forma

$$\lambda^{i-1}(U_-) < \sigma < \lambda^{i+1}(U_+), \quad \lambda^i(U_+) < \sigma < \lambda^i(U_-).$$

Note que um choque- $i$  de Lax está associado à  $i$ -ésima família característica, no sentido que as retas características associadas à  $i$ -ésima família característica se encontram ao longo da reta de descontinuidade  $\sigma = x/t$  quando provenientes de lados distintos da descontinuidade.

No caso de sistemas estritamente hiperbólicos  $n \times n$ ,  $n > 1$ , com campos característicos genuinamente não lineares ou linearmente degenerados, a solução do problema de Riemann (1.1) e (1.4), com dados iniciais próximos entre si, consiste de uma sequência de  $k$ -ondas de choques de Lax e de rarefações separadas por  $(k - 1)$  estados intermediários constantes, com  $k - 1 \geq 1$  e  $k \leq n$ , ver [19]. Porém, para sistemas mais gerais podem ser necessárias mais do que  $n$ -ondas elementares para resolver o problema de Riemann, ver [8], [20] e [22], entre outros. Neste caso, fatalmente aparecem descontinuidades que não estão associadas à um campo característico específico, isto é, que não satisfazem as desigualdades de Lax (1.11).

Com a presença de singularidades hiperbólicas e de campos característicos que deixam de ser genuinamente não lineares em pontos isolados, como é o caso do sistema abordado nesta dissertação, a condição de entropia de Lax passou a ser muito restritiva, acarretando inclusive a inexistência de soluções para certos subconjuntos de dados iniciais em  $\Omega$ . Dessa maneira, outras condições de entropia surgiram. Uma delas é a condição de entropia de Oleinik para equações escalares, generalizada por Liu para o caso de sistemas estritamente hiperbólicos com pontos de inflexão em algum campo característico, ver [14] e [15].

Neste trabalho vamos utilizar a chamada *condição de entropia de viscosidade*, introduzida em [6], a qual está baseada numa aproximação parabólica do sistema de leis de conservação (1.1). Para tal, considere uma solução descontínua entre  $U_-$  e  $U_+$  do problema de Riemann (1.1) e (1.4) se propagando com velocidade  $\sigma_0$ . Em seguida, considere a aproximação parabólica para o sistema (1.1), dada por

$$U_t + (F(U))_x = \epsilon(B(U)U_x)_x, \quad (1.12)$$

com  $\epsilon > 0$  e  $B(U)$  uma matriz positiva definida, conhecida como a matriz de viscosidade do sistema (1.1).

Com abuso de notação, consideramos uma possível solução suave de (1.12) da forma  $U(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x - \sigma_0 t}{\epsilon}\right)$ , satisfazendo as condições de contorno  $\mathcal{U}(-\infty) = U_-$  e  $\mathcal{U}(+\infty) = U_+$ . Fazendo  $\xi = \frac{x - \sigma_0 t}{\epsilon}$ , substituindo  $\mathcal{U}(\xi)$  na equação (1.12), integrando em  $\xi$ , e levando em consideração a condição de contorno  $\mathcal{U}(-\infty) = U_-$ , obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$B(\mathcal{U}) \frac{d\mathcal{U}}{d\xi} = F(\mathcal{U}) - F(U_-) - \sigma_0(\mathcal{U} - U_-). \quad (1.13)$$

Da relação de Hugoniot (1.9), segue todos os pontos de equilíbrio do sistema de EDO's (1.13) estão sobre a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(U_-)$ .

**Definição 1.1.10** (Condição de Entropia de Viscosidade): *uma solução descontínua do problema (1.1) e (1.4) com velocidade de propagação  $\sigma_0$  conectando os estados  $U_-$  e  $U_+$  é admissível, segundo o critério de viscosidade, se existir uma órbita do sistema de equações diferenciais ordinárias (1.13) de tal forma que*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(\xi) = U_- \quad e \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\xi) = U_+. \quad (1.14)$$

Embora os pontos de equilíbrio  $U_-$  e  $U_+$  sejam os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limites da órbita referida na definição (1.1.10), normalmente nos referimos à ela como uma órbita conectando o estado  $U_-$  ao estado  $U_+$ . Observe que esta condição de entropia não está, a princípio, relacionada com uma família característica específica e, portanto, a condição de viscosidade é apropriada para sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos, que, como já frisamos anteriormente, é o caso do sistema tratado nesta dissertação.

Para sistemas  $2 \times 2$ , a nomenclatura usada para as possíveis descontinuidades entre dois estados  $U_-$  e  $U_+$  estão listadas na Tabela a seguir.

| Nomenclatura        | Notação | Desigualdades  | Ponto de Equilíbrio do Sistema (1.13)     |
|---------------------|---------|--|---|
| Choque-1 de Lax     | $S_1$   | $\lambda_1(U_-) > \sigma > \lambda_1(U_+)$<br>$\lambda_2(U_+) > \sigma$                  | $U_-$ : nó repulsor<br>$U_+$ : sela       |
| Choque-2 de Lax     | $S_2$   | $\lambda_2(U_-) > \sigma > \lambda_2(U_+)$<br>$\lambda_1(U_+) < \sigma$                  | $U_-$ : sela<br>$U_+$ : nó atrator        |
| Choque transicional | $S_X$   | $\lambda_1(U_-) < \sigma < \lambda_2(U_-)$<br>$\lambda_1(U_+) < \sigma < \lambda_2(U_+)$ | $U_-$ : sela<br>$U_+$ : sela              |
| Choque compressivo  | $S_C$   | $\lambda_2(U_+) < \sigma < \lambda_1(U_-)$   | $U_-$ : nó repulsor<br>$U_+$ : nó atrator |

A nomenclatura referente aos pontos de equilíbrio e teoria de plano de fase de sistemas autônomos pode ser vista em [21].

Na Tabela anterior as desigualdades colocadas são estritas, porém ao ser considerada a condição de entropia de viscosidade uma (ou até duas) destas desigualdades podem se tornar igualdades. Neste caso, dizemos que o choque é característico à esquerda quando  $\sigma = \lambda_1(U_-)$ , ou quando  $\sigma = \lambda_2(U_-)$  e característico à direita quando  $\sigma = \lambda_1(U_+)$ , ou quando  $\sigma = \lambda_2(U_+)$ . Esses casos de igualdades são chamados de casos limites. Conseqüentemente, um ponto de equilíbrio do tipo nó ou do tipo sela poderá se tornar, no limite, um ponto do tipo sela-nó, no entanto, por conveniência vamos utilizar a mesma nomenclatura e notação.

## 1.1.2 Ondas Compostas

Um fato que ocorre no caso de existencia de pontos de inflexão num campo característico, é a presença de soluções do problema de Riemann combinando os dois tipos de ondas, de choque e de rarefação, porém sem estados intermediários constantes, as separando no espaço físico -  $xt$ . Estas são as chamadas ondas compostas, definidas a seguir.

**Definição 1.1.11** *Uma onda composta do tipo rarefação/choque (ou choque/rarefação) é uma solução do problema de Riemann (1.1) e (1.4) consistindo de uma sequencia de uma onda de rarefação (ou de choque) seguida de uma onda de choque (ou de rarefação), sem estados constantes separando as duas ondas. Quando as duas ondas estiverem associadas à  $i$ -ésima família temos uma composta- $i$ , caso contrário temos uma composta transicional.*

**Definição 1.1.12** *Uma curva composta do tipo rarefação/choque (ou choque/rarefação) por um estado  $U_-$  é o conjunto dos estados  $U \in \Omega$ , que são conectáveis à  $U_-$  por uma onda composta do tipo rarefação/choque (ou choque/rarefação).*

Uma solução do problema de Riemann (1.1) e (1.4) por uma onda composta do tipo rarefação -  $i$ /choque é da forma,

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x < \lambda_i(U_-)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U_-)t \leq x \leq \lambda_i(U_M)t, \\ U_+, & \text{se } x > \lambda_i(U_M)t, \end{cases} \quad (1.15)$$

em que,  $U_M$  é um estado na curva de rarefação -  $i$  por  $U_-$  e é tal que  $\lambda_i(U_M)$  é a velocidade de propagação do choque de  $U_M$  para  $U_+$ . Frizamos que neste caso o choque é característico à esquerda.

Assim, para a construção de uma curva composta rarefação -  $i$ /choque por um estado  $U_-$ , determinamos a curva de rarefação por  $U_-$ , ligando  $U_-$  a um estado  $U_I$  no conjunto de inflexão -  $i$ , e para cada ponto  $U_M$  nesta curva de rarefação, a partir de  $U_I$  para  $U_-$ , determinamos o estado  $U$  na curva de Hugoniot por  $U_M$  tal que a descontinuidade de  $U_M$  para  $U$  seja admissível (ou entrópica) e  $\sigma(U_M; U) = \lambda_i(U_M)$ .

De maneira análoga construímos a composta choque/rarefação -  $i$ . Dado um estado  $U_-$ , determine  $U_M \in \mathcal{H}(U_-)$  tal que  $\sigma(U_-; U_M) = \lambda_i(U_M)$ , de maneira que o choque seja admissível, e a partir de  $U_M$  considere a curva de rarefação -  $i$  por  $U_M$ .

Assim, uma solução do problema de Riemann (1.1) e (1.4) por uma composta choque/rarefação -  $i$  é da forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x < \lambda_i(U_M)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U_M)t \leq x \leq \lambda_i(U_+)t, \\ U_+, & \text{se } x > \lambda_i(U_+)t, \end{cases} \quad (1.16)$$

em que  $U_M$  é um estado na curva de Hugoniot por  $U_-$  e  $U_+$  é um estado na curva de rarefação -  $i$  por  $U_M$ , tal que  $\sigma(U_-; U_M) = \lambda_i(U_M)$ . Observe que neste caso o choque é característico à direita.

### 1.1.3 Curvas de Onda

As chamadas curvas de onda são extensões dos conceitos de curvas de rarefação e de choque locais de sistemas estritamente hiperbólicos genuinamente não lineares para sistemas mais gerais, possuindo singularidades hiperbólicas e campos característicos com pontos de inflexão.

Entendemos como sendo as velocidades inicial e final de uma onda de rarefação -  $i$  conectando  $U_-$  à  $U_+$  como as inclinações  $x/t = \lambda^i(U_-)$  e  $x/t = \lambda^i(U_+)$ , respectivamente. Por outro lado, para uma onda de choque de velocidade  $\sigma_0$  entendemos tanto a velocidade inicial quanto a velocidade final como sendo a inclinação da reta de descontinuidades  $x/t = \sigma_0$ .

Uma sequencia de ondas que conecta o estado  $U_-$  ao estado  $U_+$  é dita satisfazer a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades se a velocidade final de cada onda for não superior à velocidade inicial da onda seguinte, quando percorrida de  $U_-$  para  $U_+$ .

Baseados na idéia de sequencia de ondas, temos a seguinte definição para curva de onda.

**Definição 1.1.13** *Uma curva de onda por um estado inicial  $U_-$  associada à  $i$ -ésima família característica, ou curva de onda -  $i$ , é o conjunto de estados  $U \in \Omega$ , que podem ser conectados à  $U_-$  por uma sequencia de ondas elementares, sem estados intermediários constantes, associadas à  $i$ -ésima família característica, satisfazendo a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades.*

Geometricamente, no espaço de estados uma curva de onda -  $i$  é constituída de segmentos de curvas de rarefação -  $i$ , de choques -  $i$  e de compostas -  $i$ . Uma curva de onda -  $i$  por um estado inicial  $U_-$  é denotada por  $\mathcal{W}^i(U_-)$ . Se houver choques transicionais na sequencia de onda que conecta  $U_-$  à  $U$  temos então uma curva de onda transicional, que será denotada por  $\mathcal{W}^t(U_-)$ .

Neste caso, estamos fixando  $U_-$  e parametrizando os estados  $U_+$  que podem ser conectados à  $U_-$  por uma sequencia de ondas. De maneira análoga, podemos fixar o estado  $U_+$  e parametrizar os estados  $U_-$  que podem ser conectados à  $U_+$  por uma sequencia de ondas sem estados intermediários constantes, obtendo assim a chamada curva de onda reversa por  $U_+$ , denotada por  $\mathcal{W}_-^i(U_+)$ .

#### 1.1.4 Solução do Problema de Riemann

De maneira geral, assim como no caso de sistemas estritamente hiperbólicos com campos característicos genuinamente não lineares, ou com campos linearmente degenerados, uma solução fraca do problema de Riemann para o sistema (1.1) e (1.4) consiste de uma sequência de ondas de choque, de rarefação e de compostas separadas por estados intermediários constantes conectando o estado  $U_-$  ao estado  $U_+$ . A sequencia de ondas que conecta o estado  $U_-$  ao estado  $U_+$  deve obedecer a condição de compatibilidade geométrica de que, ao ser iniciada em  $U_-$ , a velocidade ao final de cada onda usada não seja superior à velocidade inicial da onda subsequente. Portanto a construção da solução do problema de Riemann depende da geometria das curvas de onda.

Assim, uma solução do problema de Riemann para o sistema (1.1) e (1.4) pode ser vista como uma sequencia de ondas de rarefação e de choques, incluindo as ondas compostas, intercaladas por estados constantes, conectando  $U_-$  e  $U_+$ , com velocidades compatíveis, isto é, satisfazendo a condição de compatibilidade geométrica, no espaço físico- $xt$ .

### 1.1.5 Conjuntos de Bifurcação

Os chamados conjuntos de bifurcação são utilizados na construção de curvas de onda, uma vez que são responsáveis por mudanças na estrutura das curvas de ondas.

Como demonstrado genericamente em [19], a velocidade  $\sigma$  é monótona ao longo de segmentos de curvas de Hugoniot correspondentes aos choques de Lax. Assim estados ao longo de curvas de Hugoniot onde a velocidade de choque atinge pontos de máximo ou de mínimo são muitas vezes responsáveis por mudanças na estrutura das curvas de onda. Estes estados são caracterizados pelo Teorema a seguir, ver [25], [16].

**Teorema 1.1.14 (Teorema de Bethe-Wendroff)** *Sejam  $U_- \in \Omega$ ,  $U^* \in \Omega$  e  $l_i(U^*)$  o vetor característico à esquerda de  $A(U^*)$  associado à  $\lambda^i(U^*)$ . Suponha que  $U^*$  esteja na curva de Hugoniot por  $U_-$ , isto é, que exista  $\xi^* \in \mathbb{R}$  tal que  $U^* = U(\xi^*)$  e  $\mathcal{H}(U_-, \sigma(\xi^*), U(\xi^*)) = 0$ . Suponha também que  $l_i(U(\xi^*)) \cdot (U(\xi) - U_-) \neq 0$ . Então  $\sigma(U_-; U(\xi^*)) = \lambda_i(U(\xi^*))$  se, e somente se,  $\frac{d\sigma}{d\xi}(\xi^*) = 0$ . Neste caso  $e^i(U(\xi^*)) = \frac{dU}{d\xi}(\xi^*)$ .*

Os pontos nos quais o Teorema de Bethe-Wendroff não se aplica estão associados aos chamados conjuntos de bifurcação secundária do sistema (1.1).

**Definição 1.1.15** *O conjunto de bifurcação secundária, associado à  $i$ -ésima família característica, é definido por*

$$B_i = \{U_- \in \Omega : \exists(\sigma^*, U^*) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad U^* \neq U_-, \mathcal{H}(U_-, \sigma^*, U^*) = 0, \\ \lambda_i(U^*) = \sigma^* \text{ e } l_i(U^*) \cdot (U^* - U_-) = 0\}.$$

O nome *conjunto de bifurcação secundária* se dá pelo fato de no ponto  $U^*$  a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(U_-)$  ter uma ramificação secundária, não valendo as hipóteses do Teorema da Função Implícita para a função  $\mathcal{H}(U_-, \sigma, U)$  no ponto  $(\sigma^*, U^*)$ , ver Figura B.10.

Outro conjunto importante na construção das curvas de onda e na solução do problema de Riemann são os chamados conjuntos de extensão de outros conjuntos dados em  $\Omega$ . Inicialmente começamos pela extensão de um ponto de  $\Omega$ .

**Definição 1.1.16** *Um estado genérico  $A$  é uma extensão -  $i$  de um estado  $B \in \Omega$  se  $\mathcal{H}(A, \lambda_i(A), B) = 0$ , isto é, se  $A$  pertence a curva de Hugoniot por  $B$  e  $\sigma(A; B) = \lambda_i(A)$ .*



**Definição 1.1.17** *A extensão - i de um conjunto  $\mathcal{B} \subset \Omega$  é o conjunto dos estados  $A \in \Omega$  tais que  $A$  é a extensão de algum estado  $B$  em  $\mathcal{B}$  associado à  $i$ -ésima família característica, isto é,*

$$E^i(\mathcal{B}) = \{A \in \Omega : \exists B \in \mathcal{B}, \exists \sigma_0 \in \mathbb{R}, \text{ com } A \neq B, \\ \mathcal{H}(A, \sigma_0, B) = 0 \text{ e } \sigma_0 = \lambda_i(A)\}.$$

Note que a extensão não define necessariamente uma aplicação “um à um” entre o conjunto  $\mathcal{B}$  e o conjunto de extensão- $i$  de  $\mathcal{B}$ .

Finalmente, para encerrar estas preliminares, um teorema bastante útil na construção das curvas de onda e na caracterização de pontos onde há a perda de compatibilidade geométrica entre velocidades, ou mudanças na admissibilidade de choques é o seguinte, ver [24].

**Teorema 1.1.18 (Regra do Choque Triplo)** *Seja  $U_-$  um estado qualquer de  $\Omega$  tal que  $\mathcal{H}(U_-)$  possui dois pontos  $U_1$  e  $U_2$  com  $\sigma(U_-; U_1) = \sigma(U_-; U_2) = \sigma_0$ . Então  $U_2$  pertence à curva de Hugoniot por  $U_1$  e  $\sigma(U_1; U_2) = \sigma_0$ .*

# O Modelo Matemático para o Escoamento Trifásico

## 2.1 Introdução

A dedução do modelo matemático é feita a partir da Equação do Balanço de Massa e da Lei de Darcy considerando algumas hipóteses para o fluido e o meio poroso em questão. Antes vamos introduzir a nomenclatura usual dos escoamentos em meios porosos. Assumiremos então que o fluido é composto de três fases, a saber água, óleo e gás.

## 2.2 Nomenclatura

- $\phi$ : Porosidade do meio.
- $\rho$ : Densidade do fluido (no caso monofásico).
- $s$ : Saturação do fluido (no caso monofásico).
- $v$ : Velocidade do fluido (no caso monofásico).
- $P$ : Pressão (no caso monofásico).
- $K$ : Permeabilidade absoluta do meio poroso.

- $g$ : Gravidade.
- $s_i$ : Saturação da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ , com  $s_w + s_o + s_g = 1$ .
- $P_i$ : Pressão da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ .
- $\rho_i$ : Densidade da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ .
- $v_i$ : Velocidade da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ .
- $V$ : Velocidade de Darcy  $V = v_w + v_o + v_g$ .
- $L$ : Comprimento do meio poroso.
- $P_{ij}$ : Pressão capilar ( $P_{ij} = P_i - P_j$ , com  $i, j = w, o, g$ ).
- $\mu_i$ : Viscosidade da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ .
- $k_{ri}$ : Permeabilidade relativa da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ .
- $\lambda_i$ : Mobilidade da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ , onde  $\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i}$ .
- $\lambda$ : Mobilidade total, onde  $\lambda = \lambda_w + \lambda_o + \lambda_g$ .
- $f_i$ : Função de fluxo fracionário da fase  $i$ ,  $i = w, o, g$ , onde  $f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ .
- $x$ : Variável espacial.
- $t$ : Variável temporal.

## 2.3 Hipóteses Consideradas

Para obtermos o modelo que será estudado, serão feitas algumas hipóteses simplificadoras. Com isto o modelo obtido, embora bastante simplificado, permite ainda captar as características principais do escoamento, e é passível de fazer um tratamento matemático rigoroso.

- H1: O escoamento é trifásico e unidimensional.

- H2: O fluido ocupa todo o espaço poroso da rocha.
- H3: A porosidade é constante, ou seja, tem o mesmo valor para qualquer tempo e em qualquer posição da rocha.
- H4: Os efeitos gravitacionais são desprezados.
- H5: As três fases são imiscíveis.
- H6: Não existem fontes ou sumidouros.
- H7: Os efeitos de compressibilidade das fases e da rocha são desprezíveis.
- H8: Os efeitos de capilaridade são desprezados.
- H9: O fluido é isotérmico.

## 2.4 Dedução do Modelo

Para a engenharia de reservatórios, no caso isotérmico, duas equações são fundamentais, a saber: a equação do balanço de massa e a Lei de Darcy. Para um fluido monofásico unidimensional estas equações são dadas por:

Equação do Balanço de Massa

$$\frac{\partial(\phi\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Lei de Darcy

$$v = -K \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \right). \quad (2.2)$$

Estas equações modelam o escoamento de um fluido monofásico num meio poroso; entretanto, para o fluido trifásico pode-se fazer uma extensão aplicando-se estas equações a cada uma das fases separadamente. Assim as equações (2.1) e (2.2) tornam-se, respectivamente:

$$\frac{\partial(\phi\rho_i s_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x} = 0, \quad i = w, o, g; \quad (2.3)$$

$$v_i = -K \frac{k_{ri}}{\mu_i} \left( \frac{\partial P_i}{\partial x} - \rho_i g \right), \quad i = w, o, g. \quad (2.4)$$

A hipótese H7 significa que  $\rho_w$ ,  $\rho_o$  e  $\rho_g$  são constantes, a hipótese H9 significa que  $\mu_w$ ,  $\mu_o$  e  $\mu_g$  são tomados constantes, e a hipótese H2 significa que  $s_w + s_o + s_g = 1$ . Esquecendo por um instante as hipóteses H4 e H8 e considerando as demais hipóteses teremos o seguinte sistema:

$$s_w + s_o + s_g = 1; \quad (2.5)$$

$$v_i = -K \frac{k_{ri}}{\mu_i} \left( \frac{\partial P_i}{\partial x} - \rho_i g \right), \quad i = w, o, g; \quad (2.6)$$

$$\phi \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad i = w, o, g; \quad (2.7)$$

$$P_{ij} = P_i - P_j, \quad i, j = w, o, g \quad \text{e } i \neq j. \quad (2.8)$$

Se somarmos as três equações em (2.7) teremos:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (s_w + s_o + s_g) + \frac{\partial}{\partial x} (v_w + v_o + v_g) = 0. \quad (2.9)$$

Como  $s_w + s_o + s_g = 1$ , segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_w + v_o + v_g) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$

Portanto a velocidade de Darcy  $V$  é função apenas do tempo, isto é,  $V = V(t)$ . Por outro lado, usando as equações em (2.6), temos:

$$V = \sum_{i=1}^3 v_i = \sum_{i=1}^3 -K \frac{k_{ri}}{\mu_i} \left( \frac{\partial P_i}{\partial x} - \rho_i g \right). \quad (2.11)$$

Daí,

$$V = -K \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} + \frac{k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} \right) + K \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} \rho_w + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \rho_o + \frac{k_{rg}}{\mu_g} \rho_g \right) g. \quad (2.12)$$

Definindo a mobilidade relativa da fase  $i$  por,

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i}, \quad i = w, o, g, \quad (2.13)$$

da equação (2.12), obtemos

$$-K \lambda_w \frac{\partial P_w}{\partial x} - K \lambda_o \frac{\partial P_o}{\partial x} - K \lambda_g \frac{\partial P_g}{\partial x} = V - K (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o + \lambda_g \rho_g) g. \quad (2.14)$$

Derivando (2.8) com relação à  $x$ , obtemos

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x} = \frac{\partial P_i}{\partial x} - \frac{\partial P_j}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Assumindo que as pressões capilares entre as fases sejam funções conhecidas da saturação, temos então que (2.14) e (2.15) formam um sistema nas variáveis  $\frac{\partial P_i}{\partial x}$ , com  $i = w, o, g$ . Definimos agora a função de fluxo fracionária da fase  $i$  por

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad i = w, o, g. \quad (2.16)$$

Usando a definição (2.16) e resolvendo o sistema (2.14)-(2.15), obtemos

$$\frac{\partial P_w}{\partial x} = -\frac{V}{K\lambda} + (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g + \left( f_o \frac{\partial P_{wo}}{\partial x} + f_g \frac{\partial P_{wg}}{\partial x} \right), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} = -\frac{V}{K\lambda} + (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g + \left( f_g \frac{\partial P_{og}}{\partial x} - f_w \frac{\partial P_{wo}}{\partial x} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial x} = -\frac{V}{K\lambda} + (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g - \left( f_w \frac{\partial P_{wg}}{\partial x} + f_o \frac{\partial P_{og}}{\partial x} \right). \quad (2.19)$$

Substituindo (2.17), (2.18) e (2.19) em (2.6), temos

$$\begin{aligned} v_w &= f_w V - K\lambda_w (f_w \rho_w + f_o \rho_o + f_g \rho_g) g \\ &\quad - K\lambda_g \left( f_g \frac{\partial P_{wo}}{\partial x} + f_g \frac{\partial P_{wg}}{\partial x} \right) + K\lambda_w \rho_w g, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} v_o &= f_o V - K\lambda_o (f_w \rho_w + f_o \rho_o + f_g \rho_g) g \\ &\quad - K\lambda_o \left( f_g \frac{\partial P_{og}}{\partial x} - f_w \frac{\partial P_{wo}}{\partial x} \right) + K\lambda_o \rho_o g; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} v_g &= f_g V - K\lambda_g (f_w \rho_w + f_o \rho_o + f_g \rho_g) g \\ &\quad + K\lambda_g \left( f_w \frac{\partial P_{wg}}{\partial x} + f_o \frac{\partial P_{og}}{\partial x} \right) + K\lambda_g \rho_g g; \end{aligned} \quad (2.22)$$

Agora substituindo (2.20), (2.21) e (2.22) em (2.7), temos

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f_w V - \lambda_w K (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( K\lambda_w \left( f_o \frac{\partial P_{wo}}{\partial s_w} + f_g \frac{\partial P_{wg}}{\partial s_w} \right) \frac{\partial s_w}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f_o V - \lambda_o K (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K \lambda_o \left( f_g \frac{\partial P_{og}}{\partial s_w} - f_w \frac{\partial P_{wo}}{\partial s_w} \right) \frac{\partial s_w}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f_g V - \lambda_g K (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -K \lambda_g \left( f_w \frac{\partial P_{wg}}{\partial s_w} + f_o \frac{\partial P_{og}}{\partial s_w} \right) \frac{\partial s_w}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lembrando de (2.16) que  $f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ ,  $i = w, o, g$ , temos que

$$\lambda_w f_o = \lambda_o f_w,$$

$$\lambda_o f_g = \lambda_g f_o,$$

$$\lambda_g f_w = \lambda_w f_g.$$

Para simplificar as expressões, definimos as funções auxiliares:

$$G = K (\rho_w f_w + \rho_o f_o + \rho_g f_g) g, \quad (2.26)$$

$$B_1 = K \lambda_w \left( f_o \frac{\partial P_{cwo}}{\partial s_w} + f_g \frac{\partial P_{cwg}}{\partial s_w} \right), \quad (2.27)$$

$$B_2 = K \lambda_o \left( f_g \frac{\partial P_{cog}}{\partial s_w} - f_w \frac{\partial P_{cwo}}{\partial s_w} \right), \quad (2.28)$$

$$B_3 = -K \lambda_g \left( f_w \frac{\partial P_{cwg}}{\partial s_w} + f_o \frac{\partial P_{cog}}{\partial s_w} \right). \quad (2.29)$$

Além disso, usando o fato de que  $V = V(t)$ , segue que as equações (2.23), (2.24) e (2.25) podem ser reescritas como:

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \left( f_w - \frac{\lambda_w}{V} G \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_1 \frac{\partial s_w}{\partial x} \right), \quad (2.30)$$

$$\phi \frac{\partial s_o}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \left( f_o - \frac{\lambda_o}{V} G \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_2 \frac{\partial s_w}{\partial x} \right), \quad (2.31)$$

$$\phi \frac{\partial s_g}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \left( f_g - \frac{\lambda_g}{V} G \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( B_3 \frac{\partial s_w}{\partial x} \right). \quad (2.32)$$

Levando, agora, em conta as hipóteses H4 (Efeitos gravitacionais desprezados) e H8 (Efeitos capilares desprezados), ou seja, fazendo  $G = B_1 = B_2 = B_3 = 0$ , o sistema (2.30), (2.31) e (2.32) se torna:

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + V(t) \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0; \quad (2.33)$$

$$\phi \frac{\partial s_o}{\partial t} + V(t) \frac{\partial f_o}{\partial x} = 0; \quad (2.34)$$

$$\phi \frac{\partial s_g}{\partial t} + V(t) \frac{\partial f_g}{\partial x} = 0. \quad (2.35)$$

Como usual, para fins teóricos, fazemos a adimensionalização no tempo e no espaço:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad e \quad t_D = \frac{1}{\phi L} \int_0^t V(\xi) d\xi,$$

e desprezando o índice D, chegamos ao sistema adimensional

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w(s_w, s_o, s_g)}{\partial x} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial f_o(s_w, s_o, s_g)}{\partial x} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial f_g(s_w, s_o, s_g)}{\partial x} = 0. \quad (2.38)$$

Levando em conta que  $s_w + s_o + s_g = 1$  e que  $f_w + f_o + f_g = 1$ , uma das equações (2.36)-(2.38) pode ser desprezada, já que uma das saturações pode ser obtida como função das outras duas. Para quaisquer das escolhas, o sistema (2.36)-(2.38) se reduz à um sistema de Leis de Conservação  $2 \times 2$  da forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.39)$$

onde  $U$  e  $F(U)$  são dados em termos de duas das saturações e das duas funções de fluxo correspondentes escolhidas. Embora se necessite de apenas duas saturações para representar um estado, muitas vezes vamos usar as três componentes para representá-lo, de modo que fique claro os valores das três saturações neste estado.

Como mencionado na introdução, existem dois modelos para as funções de permeabilidades relativas bastante conhecidos na literatura, o de Stone e o de Corey. No modelo de Stone a permeabilidade relativa do óleo é considerada depender de duas saturações, enquanto que as permeabilidades da água e do gás são dependentes apenas da respectiva saturação, isto é,  $k_{rw} = k_{rw}(s_w)$ ,  $k_{ro} = k_{ro}(s_w, s_g)$ ,  $k_{rg} = k_{rg}(s_g)$ , ver [2]. No modelo de Corey, o qual será utilizado em nosso trabalho, as permeabilidades



relativas são consideradas dependentes exclusivamente da saturação da própria fase. Baseados em dados experimentais, é usual considerar no modelo de Corey as seguintes relações de dependências para as permeabilidades relativas:  $k_{rw}(s_w) = (s_w)^\alpha$ ,  $k_{ro}(s_o) = (s_o)^\beta$  e  $k_{rg}(s_g) = (s_g)^\gamma$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os chamados expoentes de Corey. Baseados em trabalhos anteriores, ver [8], consideraremos  $\alpha = \beta = \gamma = 2$ .

Assim as funções de fluxo fracionários, definidas em (2.16), se tornam

$$f_i(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_i^2/\mu_i}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \quad i = w, o, g, \quad (2.40)$$

em que,

$$\lambda(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_o^2}{\mu_o} + \frac{s_g^2}{\mu_g}. \quad (2.41)$$

As saturações  $s_w$ ,  $s_o$  e  $s_g$  assumem valores no espaço de estados, chamado de triângulo de saturações, que em coordenadas cartesianas para a escolha de  $s_w$  e  $s_o$  como variáveis básicas, é definido por

$$\Delta' = \{(s_w, s_o); \quad s_w \geq 0, \quad s_o \geq 0, \quad 0 \leq s_w + s_o \leq 1\},$$

ou nas três variáveis por,

$$\Delta = \{(s_w, s_o, s_g); \quad 0 \leq s_w \leq 1, \quad 0 \leq s_o \leq 1, \quad 0 \leq s_g \leq 1, \quad s_w + s_o + s_g = 1\}. \quad (2.42)$$

É usual representar  $\Delta$  em termos das três saturações num triângulo equilátero com coordenadas baricêntricas, ver [11]. A transformação das coordenadas cartesianas  $(s_w, s_o)$  do triângulo retângulo usual para o triângulo equilátero, com coordenadas  $(\tilde{s}_w, \tilde{s}_o)$  é dada por,

$$\begin{cases} \tilde{s}_w &= s_w + \frac{s_o}{2}, \\ \tilde{s}_o &= \frac{\sqrt{3}}{2}s_o. \end{cases} \quad (2.43)$$

A Figura A.2 é uma representação do triângulo de saturações usando coordenadas baricêntricas. Nela os vértices  $G$ ,  $W$  e  $O$  representam estados consistindo de apenas gás ( $s_g = 1$ ), apenas de água ( $s_w = 1$ ) e apenas de óleo ( $s_o = 1$ ), respectivamente. O lado  $[G, W]$  representa estados consistindo de uma mistura de água e gás, em que  $0 \leq s_w + s_g \leq 1$  e  $s_o = 0$ . O lado  $[W, O]$  representa estados consistindo de uma mistura de água e óleo, em que  $0 \leq s_w + s_o \leq 1$  e  $s_g = 0$ . Já o lado  $[G, O]$  representa estados consistindo de uma mistura de gás e óleo, em que  $0 \leq s_o + s_g \leq 1$  e  $s_w = 0$ .

Para o problema de interesse neste trabalho estaremos considerando um reservatório consistindo de uma mistura de água/óleo (poço produtor), em que esta mistura deve ser deslocada pela injeção de uma outra mistura do tipo água/gás num poço injetor. Assim os estados  $U_-$  e  $U_+$  em (1.4) serão tomados nos lados  $[G, W]$  e  $[W, O]$ , respectivamente.

# Propriedades Básicas do Modelo Matemático

## 3.1 Introdução

Descreveremos neste capítulo as ondas elementares e os conjuntos de bifurcação introduzidos genericamente no Capítulo 1, para o problema de Riemann associado ao sistema (1.1) e (1.4), deduzido no Capítulo 2. Utilizaremos a notação de intervalo na reta para representar um segmento, retilíneo ou não. Por exemplo, o segmento  $[W, O]$  representa o lado do triângulo de saturações ligando os vértices  $W$  e  $O$ , incluindo seus extremos, onde estamos considerando o sentido de  $W$  para  $O$ . Por conveniência também representaremos a terna ordenada  $(s_w, s_o, s_g)$  por  $U$ .

O modelo de Corey, que estamos assumindo neste trabalho, tem a peculiaridade de o sistema de leis de conservação correspondente possuir um único ponto umbílico no interior do triângulo de saturações, denotado por “ $\bar{U}$ ”. Este ponto umbílico possui as seguintes componentes no espaço de estados  $(s_w, s_o, s_g)$ , dadas em termos das viscosidades das fases por

$$\bar{U} = \left( \frac{\mu_w}{\mu}, \frac{\mu_o}{\mu}, \frac{\mu_g}{\mu} \right), \quad (3.1)$$

onde  $\mu = \mu_w + \mu_o + \mu_g$ .

As representações geométricas das curvas de Hugoniot, de rarefação, das curvas de onda e dos conjuntos de bifurcação para o modelo aqui utilizado foram obtidos computacionalmente, sendo que muitos deles também foram obtidos analiticamente, de

forma explícita. As figuras foram construídas considerando  $\mu_w = \mu_o = 1$  e  $\mu_g = 0.25$ , embora todos os resultados deste Capítulo sejam válidos para relações de viscosidades arbitrárias. A verificação da admissibilidade das descontinuidades, pela condição de entropia de viscosidade com a matriz de viscosidade sendo a matriz identidade, também foi feita computacionalmente.

## 3.2 Curvas de Rarefação e Conjuntos de Inflexão

As curvas integrais e o conjunto de inflexão, definidos no Capítulo 1, associados às famílias características 1 e 2 são mostrados nas Figuras A.3 e A.4, respectivamente. As setas indicam o sentido de crescimento dos valores característicos sobre as curvas integrais do campo característico. Assim, as curvas com setas representam as curvas integrais, e os conjuntos (curvas) para os quais as setas apontam representam os conjuntos de inflexão (pontos de valor máximo da velocidade característica). Observe que o sentido das setas mudam quando uma curva integral cruza o conjunto de inflexão.

Escolhendo as variáveis  $s_w$  e  $s_o$  e as funções de fluxo fracionário  $f_w$  e  $f_o$  no sistema (2.36)-(2.38), a matriz Jacobiana do sistema (1.1) é dada por

$$A(U) := dF(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_w}{\partial s_w} & \frac{\partial f_w}{\partial s_o} \\ \frac{\partial f_o}{\partial s_w} & \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

As expressões das velocidades características ou dos autovalores da matriz  $A(U)$  em (3.2) são dadas por,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_o}{\partial s_w} \frac{\partial f_w}{\partial s_o}}. \quad (3.3)$$

Denotamos por  $\lambda_1$  a velocidade característica associada ao sinal negativo em (3.3), e por  $\lambda_2$  aquela associada ao sinal positivo em (3.3), de tal forma que  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ .

Dessa maneira, fazendo uma substituição direta em (3.3) e usando as expressões de  $f_w$  e  $f_o$  em (2.40), vemos que  $\lambda_1(U)$  se anula ao longo dos lados  $[G, W]$ ,  $[W, O]$  e  $[G, O]$  do triângulo de saturações. Além disto, por um cálculo direto também verifica-se que  $\lambda_1$  é positivo no interior do triângulo de saturações. Estes dois fatos justificam

a presença do conjunto de inflexão - 1, onde  $\lambda_1(U)$  atinge valores críticos ao longo das curvas integrais associadas, obtidos computacionalmente, ver Figura A.3. Por outro lado, também por substituição direta temos que  $\lambda_2(U) = 0$  nos vértices  $W$ ,  $O$  e  $G$  do triângulo de saturações e são positivos nos outros estados do triângulo de saturações, sendo que  $\lambda_2$  cresce a partir dos vértices ao longo das curvas integrais correspondentes até atingir um máximo, o que também justifica o conjunto de inflexão - 2, obtido computacionalmente, ver Figura A.4.

### 3.3 Curvas de Hugoniot pelos lados do Triângulo de Saturações

Nesta seção, vamos obter analiticamente a expressão que define a curva de Hugoniot para estados arbitrários nos lados do triângulo de saturações, que serão utilizadas para a construção da solução do problema de Riemann considerado. Vamos apresentar os cálculos explícitos para estados  $U_+ = (s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  representando dados de produção restritos ao lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações.

Da condição de Rankine-Hugoniot (1.9) para o sistema (2.36)-(2.38), segue que

$$\sigma(s_w - s_w^+) = f_w - f_w^+, \quad (3.4)$$

$$\sigma(s_o - s_o^+) = f_o - f_o^+, \quad (3.5)$$

$$\sigma(s_g - s_g^+) = f_g - f_g^+, \quad (3.6)$$

em que  $f_\alpha^+$  com  $\alpha = w, o, g$  representa a função de fluxo fracionário associada à fase  $\alpha$  no estado  $U_+$ , definida em (2.40). Como  $U_+ \in [W, O]$  teremos  $s_g^+ = 0$  e, conseqüentemente,  $f_g^+ = 0$ .

Separamos em dois casos a análise da curva de Hugoniot: num deles  $s_g = 0$  e no outro  $s_g \neq 0$ .

Considere o caso  $s_g \equiv 0$ . Como  $f_g = 0$  e  $s_w + s_o = 1$ , as equações (3.4) e (3.6) ficam restritas ao lado  $[W, O]$ . Dessa forma, um ramo da curva de Hugoniot por  $U_+$  coincide com o lado  $[W, O]$  do triângulo e a velocidade  $\sigma$  é calculada usando qualquer uma das equações (3.4) ou (3.5).

Considere agora o caso  $s_g \neq 0$ . Da equação (3.4) temos,

$$\sigma = \frac{f_w - f_w^+}{s_w - s_w^+}. \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7), segue que

$$\frac{f_w - f_w^+}{s_w - s_w^+} = \frac{f_g}{s_g}. \quad (3.8)$$

Substituindo as expressões de  $f_w$  e de  $f_g$  dadas em (2.40) e após algumas manipulações algébricas, a equação (3.8) fornece a seguinte equação quadrática, nas variáveis  $(s_w, s_o)$ ,

$$as_w^2 - bs_o^2 + cs_ws_o + ds_w + es_o + f = 0, \quad (3.9)$$

onde os seus coeficientes são dados por,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mu_g}{\mu_w} - \frac{\mu_g(s_w^+)^2}{\mu_w^2\lambda^+} - \frac{(s_w^+)^2}{\mu_w\lambda^+} + 1 \\ b &= \frac{\mu_g(s_w^+)^2}{\mu_w\mu_o\lambda^+} + \frac{(s_w^+)^2}{\mu_w\lambda^+} \\ c &= \frac{-2(s_w^+)^2}{\mu_w\lambda^+} + 1 \\ d &= \frac{2(s_w^+)^2}{\mu_w\lambda^+} - s_w^+ - 1 \\ e &= \frac{2(s_w^+)^2}{\mu_w\lambda^+} - s_w^+ \\ f &= s_w^+ - \frac{(s_w^+)^2}{\mu_w\lambda^+}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

com  $\lambda^+ = \lambda(U_+)$  definido em (2.41).

A equação (3.9) está na forma da equação geral de uma curva cônica no plano. Lembramos que, quando  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , podemos classificar esta cônica como uma elipse, parábola ou hipérbole, ou outras curvas degeneradas destas, dependendo do discriminante

$$b^2 - 4ac, \quad (3.11)$$

ser negativo, nulo ou positivo. No caso dos coeficientes obtidos em (3.10), após substituí-los em (3.11) verificamos que o discriminante é positivo. Logo a equação (3.9) representa uma hipérbole.

A equação (3.9) pode ser resolvida explicitamente em termos da saturação da água  $s_w$  ou da saturação do óleo  $s_o$ , dependendo das hipóteses do Teorema da Função Implícita serem satisfeitas. Se considerarmos a saturação do óleo como função da

saturação da água, isto é,  $s_o = s_o(s_w)$ , a equação (3.9) se reduz à seguinte equação de segundo grau,

$$-bs_o^2 + (cs_w + e)s_o + (as_w^2 + ds_w + f) = 0. \quad (3.12)$$

Dessa maneira, resolvendo-se a equação (3.12), temos que

$$s_o = \frac{(cs_w + e) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2b}, \quad (3.13)$$

desde que,

$$\Delta_1(s_w) = (cs_w + e)^2 + 4b(as_w^2 + ds_w + f) \quad (3.14)$$

seja não negativo. Por outro lado, se considerarmos a saturação da água como função da saturação do óleo, isto é,  $s_w = s_w(s_o)$ , a equação (3.9) pode ser reescrita na forma

$$as_w^2 + (cs_o + d)s_w + (es_o - bs_o^2 + f) = 0. \quad (3.15)$$

De maneira análoga, resolvendo-se a equação (3.15), temos que

$$s_w = \frac{-(cs_o + d) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2a}, \quad (3.16)$$

desde que,

$$\Delta_2(s_o) = (cs_o + d)^2 - 4a(es_o - bs_o^2 + f) \quad (3.17)$$

seja não negativo.

Dessa forma, dependendo dos sinais dos discriminantes em (3.14) e (3.17), as equações (3.12) e (3.15) em conjunto com a equação  $s_g = 0$ , exibem explicitamente as expressões que definem as curvas de Hugoniot para estados  $U_+$  no lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações. Estas curvas de Hugoniot sempre consistirão do lado  $[W, O]$  conjuntamente com dois ramos de hipérboles internas ao triângulo de saturações, sendo que um dos ramos contém o ponto  $U_+$ , e por isto é chamado de ramo local, e o outro é o ramo não local. Nas Figuras A.5 e A.6, estão exibidas curvas de Hugoniot para dois estados arbitrários no lado  $[W, O]$ , sendo  $U_+ = U_1$  no segmento  $(D, O)$  e  $U_+ = U_2$  no segmento  $(W, D)$ .

De maneira análoga, obtém-se as expressões das curvas de Hugoniot para estados nos lados  $[G, W]$  e  $[G, O]$ , sendo que não as exibiremos aqui, uma vez que não são utilizadas diretamente neste trabalho.

### 3.4 Curvas de Hugoniot pelos pontos $D$ , $E$ e $B$

Nesta seção vamos obter explicitamente as expressões que definem as curvas de Hugoniot pelos pontos  $D$ ,  $E$  e  $B$  dos lados do triângulo de saturações, definidos a seguir e exibidos nas Figuras A.5 e A.6, inclusive calculando as coordenadas dos pontos de bifurcação secundária destas curvas de Hugoniot.

Considere a reta  $r_1$ , a qual passa pelo vértice  $G = (0, 0, 1)$  e pelo ponto umbílico  $\bar{U}$  dado em (3.1), parametrizada por

$$\begin{aligned} s_o &= \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w, \\ s_g &= 1 - s_w - s_o. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, a interseção desta reta  $r_1$  com o lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, onde  $s_g = 0$ , define as coordenadas do ponto  $D$  por

$$D = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}, \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o}, 0 \right). \quad (3.19)$$

De maneira análoga, a interseção da reta  $r_2$ , que passa pelos pontos  $W = (1, 0, 0)$  e  $\bar{U}$ , com o lado  $[G, O]$  do triângulo de saturações define as coordenadas do ponto  $E$  por

$$E = \left( 0, \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{\mu_o + \mu_g} \right), \quad (3.20)$$

Enquanto que a interseção da reta  $r_3$ , que passa pelos pontos  $O = (0, 1, 0)$  e  $\bar{U}$ , com o lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações define as coordenadas do ponto  $B$  por

$$B = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g}, 0, \frac{\mu_g}{\mu_w + \mu_g} \right). \quad (3.21)$$

Para determinar a curva de Hugoniot por  $D$  basta aplicar as coordenadas de  $D$  como sendo os estados à direita  $(s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  nos coeficientes dados em (3.10) e substituí-los em (3.9). Após algumas manipulações e depois de multiplicar a equação (3.9) por  $(1 - s_w - s_o)$ , a equação que define a curva de Hugoniot por  $D$  é dada pelo seguinte polinômio de terceiro grau nas variáveis  $s_w$  e  $s_o$ :

$$(1 - s_w - s_o) \left( s_o - \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w \right) \left( (\mu_w + \mu_g) s_w + \frac{\mu_w(\mu_o + \mu_g)}{\mu_o} s_o - \mu_w \right) = 0. \quad (3.22)$$



Portanto, da expressão (3.22) vemos que a curva de Hugoniot por  $D$  degenera-se nos três segmentos de reta (veja Figura B.10):

$$[W,O] \text{ definido por: } 1 - s_w - s_o = 0, \quad (3.23)$$

$$[G,D] \text{ definido por: } s_o = \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w, \quad (3.24)$$

$$[B,E] \text{ definido por: } (\mu_w + \mu_g) s_w + \frac{\mu_w(\mu_o + \mu_g)}{\mu_o} s_o - \mu_w = 0. \quad (3.25)$$

A intersecção do ramo  $[B, E]$  da curva de Hugoniot por  $D$ , com o ramo  $[G, D]$  define o ponto de bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(D)$ , denotado por  $T^D$  como exibido nas Figuras A.7 e B.10, dado por

$$T^D = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o + 2\mu_g}, \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o + 2\mu_g}, \frac{2\mu_g}{\mu_w + \mu_o + 2\mu_g} \right). \quad (3.26)$$

Um cálculo explícito confirma a igualdade  $\lambda_1(T^D) = \sigma(T^D; D)$ , ver definição (1.1.15). Também por definição temos que  $T^D$  é uma extensão-1 do ponto  $D$ , e é por isso que o denotamos por  $T^D$ . O valor de  $\sigma(T^D; D)$  será calculado explicitamente na Subsecção 5.2 em termos das viscosidades.

De modo análogo, a equação que define a curva de Hugoniot pelo estado  $E$  do lado  $[G, O]$  é dada pelo seguinte produto

$$(1 - s_o - s_g) \left( s_g - \frac{\mu_g}{\mu_o} s_o \right) \left( (\mu_o + \mu_w) s_o + \frac{\mu_o(\mu_g + \mu_w)}{\mu_g} s_g - \mu_o \right) = 0, \quad (3.27)$$

sendo o ponto de bifurcação secundária, ou a extensão - 1 de  $E$ , denotado por  $T^E$  como exibido na Figura A.7, dado por

$$T^E = \left( \frac{2\mu_w}{2\mu_w + \mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_o}{2\mu_w + \mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{2\mu_w + \mu_o + \mu_g} \right). \quad (3.28)$$

Por outro lado, a equação que define a curva de Hugoniot pelo estado  $B$  do lado  $[G, W]$ , que também foi obtida em [1], é dada por:

$$(1 - s_w - s_g) \left( s_w - \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g \right) \left( (\mu_g + \mu_o) s_g + \frac{\mu_g(\mu_w + \mu_o)}{\mu_w} s_w - \mu_g \right) = 0, \quad (3.29)$$

sendo que o estado de bifurcação secundária, ou a extensão - 1 de  $B$ , denotado por  $T^B$  como exibido na Figura A.7, dado por

$$T^B = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g}, \frac{2\mu_o}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{\mu_w + 2\mu_o + 2\mu_g} \right). \quad (3.30)$$

### 3.5 Curvas de Hugoniot pelos vértices do Triângulo de Saturações

Fixe inicialmente  $U_+ = G = (0, 0, 1)$ . Considerando as duas primeiras equações em (3.4) e (3.5) e as expressões de  $f_w$  e  $f_o$  em (2.40), obtemos

$$\sigma s_w = \frac{s_w^2 / \mu_w}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \quad (3.31)$$

$$\sigma s_o = \frac{s_o^2 / \mu_o}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \quad (3.32)$$

em que,

$$\lambda(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_o^2}{\mu_o} + \frac{s_g^2}{\mu_g}, \quad s_g = 1 - s_w - s_o \quad (3.33)$$

Uma curva solução para o sistema (3.31)-(3.32) é dada por  $s_o = 0$  e  $s_w \neq 0$ , em que  $\sigma$  é obtido da relação (3.31). A outra curva solução é dada por  $s_w = 0$  e  $s_o \neq 0$ , em que  $\sigma$  é obtido da relação (3.32). É claro que estas duas relações correspondem aos lados  $[G, W]$  e  $[G, O]$  do triângulo de saturações.

Considerando-se  $s_w$  e  $s_o$  diferentes de zero podemos dividir (3.31) por (3.32), obtendo

$$\frac{s_w}{\mu_w} = \frac{s_o}{\mu_o}, \quad (3.34)$$

ou seja, uma terceira solução da relação de Rankine-Hugoniot é o segmento de reta  $[G, D]$ .

De maneira totalmente análoga, obtemos que a curva de Hugoniot pelo vértice  $W$  é composta pelos lados  $[W, O]$ ,  $[W, G]$  e pelo segmento de reta  $[W, E]$  de equação

$$\frac{s_o}{\mu_o} = \frac{s_g}{\mu_g}. \quad (3.35)$$

enquanto que a curva de Hugoniot pelo vértice  $O$  é constituída dos lados  $[O, G]$ ,  $[O, W]$  e do segmento de reta  $[O, B]$  de equação

$$\frac{s_w}{\mu_w} = \frac{s_g}{\mu_g}. \quad (3.36)$$

### 3.6 Restrição do Fluxo ao longo do Segmento $[G, D]$

Considere as saturações  $(s_w, s_o, s_g)$  restritas ao ramo  $[G, D]$ , definido em (3.32), da curva de Hugoniot por  $G$  exibidas nas Figuras A.5 ou A.6, por exemplo.

Defina a saturação líquida água/óleo, denotada por  $s_{wo}$ , como sendo

$$s_{wo} := s_w + s_o = 1 - s_g, \quad (3.37)$$

e denote a soma das viscosidades da água e do óleo por,

$$\mu_{wo} := \mu_w + \mu_o. \quad (3.38)$$

Usando as equações (3.32) e (3.37) podemos reparametrizar as saturações  $s_w$  e  $s_o$  por  $s_w = \frac{\mu_w}{\mu_{wo}}s_{wo}$  e  $s_o = \frac{\mu_o}{\mu_{wo}}s_{wo}$ . Substituindo estas expressões de  $s_w$  e  $s_o$  no sistema (1.1) e (1.4), obtemos

$$\frac{\mu_w}{\mu_{wo}} \frac{\partial s_{wo}}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{\mu_o}{\mu_{wo}} \frac{\partial s_{wo}}{\partial t} + \frac{\partial f_o}{\partial x} = 0, \quad (3.40)$$

onde as funções de fluxo fracionário reparametrizadas são dadas por

$$f_w = \frac{\mu_w}{\mu_{wo}} \left( \frac{s_{wo}^2}{s_{wo}^2 + \frac{\mu_{wo}}{\mu_g}(1 - s_{wo}^2)} \right), \quad (3.41)$$

$$f_o = \frac{\mu_o}{\mu_{wo}} \left( \frac{s_{wo}^2}{s_{wo}^2 + \frac{\mu_{wo}}{\mu_g}(1 - s_{wo}^2)} \right). \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) e (3.42) em (3.39) e (3.40), respectivamente, e definindo  $\nu = \frac{\mu_{wo}}{\mu_g}$ , temos que o sistema (1.1)-(1.4), se reduz à equação de Buckley-Leverett dependendo do parâmetro  $\nu$ ,

$$\frac{\partial s_{wo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{s_{wo}^2}{s_{wo}^2 + \nu(1 - s_{wo}^2)} \right) = 0. \quad (3.43)$$

A equação (3.43) pode, então, ser escrita na forma

$$s_t + f(s; \nu)_x = 0, \quad (3.44)$$

com

$$f(s; \nu) = \frac{s^2}{s^2 + \nu(1-s)^2} \quad \text{e} \quad s \equiv s_{wo} = s_w + s_o. \quad (3.45)$$

Isto mostra que se tomarmos na condição inicial (1.4) os vetores constantes  $U_-$  e  $U_+$  ao longo do segmento de reta  $[G, D]$ , então a solução do problema de Riemann para o escoamento trifásico se reduz à resolução da equação de Buckley-Leverett para o sistema bifásico nas variáveis  $s_{wo}$  e  $s_g$ .

Analogamente, mostra-se que o mesmo tipo de redução ocorre quando considerados  $U_-$  e  $U_+$  nos segmentos de reta  $[W, E]$  e  $[O, B]$ , e também nos lados  $[G, W]$ ,  $[G, O]$  e  $[W, O]$ , apenas reparametrizando convenientemente e definindo  $\nu$  adequadamente.

## 3.7 Conjuntos de Bifurcação

Nesta seção são apresentados os conjuntos de Bifurcação Secundária definidos em (1.1.15), que serão úteis na construção da solução do problema de Riemann a ser considerado, no Capítulo 5, bem como os conjuntos de Extensão das fronteiras. Esses conjuntos juntamente com as inflexões são fundamentais na construção das curvas de onda, uma vez que caracterizam mudanças na geometria e na estrutura interna das curvas de onda que determinam a solução do problema de Riemann.

### 3.7.1 Conjunto de Bifurcação Secundária

O conjunto de bifurcação secundária coincide com os segmentos de retas  $[B, O]$ ,  $[G, D]$  e  $[W, E]$  e está exibido nas Figuras A.5 e A.6. Sobre estes segmentos de retas falham as hipóteses do teorema de Bethe-Wendroff, e como consequência a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(U_0)$  muda drasticamente sua geometria quando  $U_0$  cruza uma dessas retas de bifurcação. Veja as Figuras A.5 e A.6, com  $U_0 = U_1$  e  $U_0 = U_2$ , respectivamente, e note a mudança no perfil das curvas de Hugoniot por estes estados. Para  $U_0 = U_1$  vemos que o ramo não local (da hipérbole) tem intersecções com o lado  $[G, W]$ , enquanto que para  $U_0 = U_2$  o ramo não local tem intersecção com o lado  $[G, O]$ . Para  $U_0 = D$ , isto

é, para  $U_0$  exatamente num ponto do conjunto de bifurcação secundária, como pode ser visto na Figura B.10, e como discutido na Seção 3.4, a hipérbole que define os dois ramos da curva de Hugoniot se degenera em duas retas que se encontram no ponto de bifurcação secundária  $T^D$ . Para  $U_0$  num dos segmentos  $[B, U]$ ,  $[D, U]$  e  $[E, U]$  tem-se uma bifurcação secundária - 1, ou seja, existe um estado  $U_*$  onde a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(U_0)$  se ramifica, com  $\sigma(U_*; U_0) = \lambda_1(U_*)$ . Para  $U_0$  num dos segmentos  $[O, U]$ ,  $[G, U]$  e  $[W, U]$  tem-se uma bifurcação secundária - 2, ou seja, existe um estado  $U_*$  onde a curva de Hugoniot por  $U_0$  se ramifica, com  $\sigma(U_*; U_0) = \lambda_2(U_*)$ .

### 3.7.2 Conjuntos de Extensão de Fronteira

Estes conjuntos são extremamente relevantes na construção das curvas de onda, uma vez que também são fronteiras onde as curvas de onda mudam de estrutura, estando também associados à compostas. Os conjuntos de extensão das fronteiras  $[W, O]$ ,  $[W, G]$  e  $[G, O]$  associados às famílias características 1 e 2 úteis neste trabalho, estão ilustrados na Figura A.7 e foram obtidos computacionalmente.

Para título de exemplificação, considere uma curva de rarefação partindo de um estado  $I$  no segmento  $(G, B)$  do lado  $[G, W]$  cruzando a extensão da fronteira  $[G, O]$  associada a família característica - 1 num certo estado  $T^N$ , e terminando no estado  $F$  do conjunto de inflexão - 1, conforme ilustrado na Figura A.8. Assumindo a admissibilidade, a partir deste estado  $T^N$  é possível então atingir um estado  $N$  na fronteira  $[G, O]$  por um choque característico à esquerda, isto é, com velocidade  $\sigma(T^N; N) = \lambda_1(T^N)$ . Com a mesma construção, pontos  $Y$  ao longo do segmento de rarefação - 1  $(T^N, F)$  definem pontos  $Y'$  no segmento  $(N, F)$ , de composta - 1 ao longo da curva de onda - 1, com  $Y' \in \mathcal{H}(Y)$  e  $\sigma(Y; Y') = \lambda_1(Y)$ .

# Capítulo 4

## Curvas de Onda para o Sistema de duas Equações

### 4.1 Introdução

Com o intuito de determinar a solução do Problema de Riemann (1.1) e (1.4), este Capítulo se destina a apresentação das curvas de onda associadas à família característica - 1, para estados iniciais  $U_-$  no lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações, onde serão tomados os dados de injeção. As curvas de onda reversas associadas à família característica - 2 serão apresentadas no Capítulo 5, quando da construção da solução do problema de Riemann, apenas para dados de produção  $P$  restritos ao lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações.

### 4.2 Curvas de Onda-1

As curvas de onda - 1 são obtidas com base nas curvas de rarefação - 1 a partir da fronteira  $[G, W]$ , no Teorema de Bethe-Wendroff, e nos conjuntos de bifurcação apresentados no Capítulo 3. Os detalhes da construção destas curvas de onda podem ser encontradas em [24], por exemplo. A convenção usada para a representação gráfica dos vários segmentos que fazem parte das curvas de onda é: (a) linhas sólidas para indicar segmentos de rarefação, sendo as setas uma indicação do crescimento da velocidade

característica ao longo do segmento; (b) linhas segmentadas para indicar segmentos de choques; (c) linhas cruzadas para indicar segmentos de compostas.

Os segmentos dos conjuntos de bifurcação e as curvas especiais que determinam os segmentos do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações para as quais a curva de onda - 1 por  $I$ , denotada por  $\mathcal{W}^1(I)$ , tenha uma estrutura de ondas distinta no espaço de estados são mostrados na Figura A.8. Neste caso, esses conjuntos especiais são a curva  $[W, T^D]$  que representa a extensão - 1 do segmento  $[W, D]$  do lado  $[W, O]$  do triângulo, a curva  $[G, T^E]$  que representa a extensão - 1 do segmento  $[G, E]$  do lado  $[G, O]$  do triângulo de saturações e o segmento de bifurcação secundária  $[B, \bar{U}]$ .

Relembremos na Figura A.8, que o estado  $T^D$  é definido como sendo a extensão - 1 do ponto  $D$  pertencente ao lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, e por definição é tal que  $\sigma(T^D; D) = \lambda_1(T^D)$ . Por sua vez, o estado  $T^J$  é a intersecção do segmento  $[W, \bar{U}]$  de inflexão - 1 com a extensão - 1 do lado  $[G, O]$  do triângulo de saturações. O fato de  $T^J$  estar na extensão - 1 do lado  $[G, O]$ , faz com que ele seja extensão - 1 de um ponto deste lado do triângulo. Denotaremos tal ponto por  $J$ . Ou seja,  $T^J$  é tal que  $\sigma(T^J; J) = \lambda_1(T^J)$ . Com base nesses estados especiais determinamos os estado de injeção que separam segmentos do lado  $[G, W]$ , do triângulo de saturações, para os quais a sequencia de ondas elementares apresentam construções distintas no espaço de estados. Desse modo, o estado  $I^D$  é definido como sendo o ponto definido pela intersecção da curva integral - 1 por  $T^D$  com o lado  $[G, W]$ . Analogamente, o estado de injeção  $I^J$  é definido como sendo o ponto na intersecção da curva integral - 1 por  $T^J$  com o lado  $[G, W]$ .

Os estados de injeção foram tomados de modo que sejam representativos para cada um dos segmentos  $[G, I^D)$ ,  $[I^D, B)$ ,  $[B, I^J)$  e  $(I^J, W)$ , do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações.

As demonstrações dos Lemas, a seguir, podem ser encontradas em [8] e [20], as quais foram construídas com base no conhecimento numérico dos conjuntos de bifurcação, dos perfis das curvas de Hugoniot, da condição de admissibilidade e das curvas de rarefação.

**Lema 4.2.1** *(Veja a Figura A.8). Seja  $I$  um estado de injeção arbitrário pertencente ao segmento  $(G, I^D)$  do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações. Sejam  $T^N$  e  $F$  estados na curva integral - 1 por  $I$  definidos pelas intersecções desta com a extensão - 1 do*

lado  $[G, O]$  e com segmento de inflexão - 1  $[G, T^D]$ , respectivamente. Então  $\mathcal{W}^1(I)$  é constituída pelos segmentos:

- (a) rarefação  $[I, F]$ ;
- (b) composta  $(F, N)$ , associada ao segmento de rarefação  $[T^N, F]$ , com  $N$  no segmento  $(G, E)$  do lado  $[G, O]$  e tal que  $\sigma(T^N; N) = \lambda_1(T^N)$ .

**Lema 4.2.2** (Veja a Figura A.8). Seja  $I$  um estado de injeção arbitrário pertencente ao segmento  $[I^D, B]$  do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações. Sejam  $T^N, T^M$  e  $F$  pontos na curva integral - 1 por  $I$  definidos pelas intersecções desta com a extensão - 1 do lado  $[G, O]$ , com a extensão - 1 do lado  $[W, O]$  e com o segmento de inflexão - 1  $(T^D, U)$ , respectivamente. Então  $\mathcal{W}^1(I)$  é constituída pelos segmentos:

- (a) rarefação  $[I, F]$ ;
- (b) composta local  $(F, N)$ , associada ao segmento de rarefação  $[T^N, F]$ , com  $N$  no segmento  $(G, E)$  do lado  $[G, O]$ , e tal que  $\sigma(T^N; N) = \lambda_1(T^N)$ ;
- (c) composta não-local  $[M, F']$ , associada ao segmento de rarefação  $[T^M, F]$ , com  $M$  no segmento  $(W, D)$  do lado  $[W, O]$  e  $F'$  no segmento do conjunto de bifurcação secundária - 1  $[U, D]$ , de modo que  $\sigma(F; F') = \lambda_1(F)$  e  $\sigma(T^M; M) = \lambda_1(T^M)$ .

**Observação 4.2.1** Para o caso em que  $I = I^D$  teremos  $F = T^D$  e o segmento de composta não-local  $[M, F']$  se reduz ao estado  $D$  no lado  $[W, O]$ .

**Lema 4.2.3** (Veja a Figura A.9). Seja  $I$  um estado de injeção arbitrário no segmento  $(B, I^J)$  do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações. Sejam  $T^N$  e  $T^M$  pontos na curva integral - 1 por  $I$  definidos pelas intersecções desta com a extensão - 1 do lado  $[G, O]$  e com a extensão - 1 do lado  $[W, O]$ , respectivamente. Seja  $F$  definido pela intersecção da curva integral - 1 por  $I$  com o segmento de inflexão - 1  $[T^J, U]$ . Então  $\mathcal{W}^1(I)$  é constituída pelos segmentos:

- (a) rarefação  $[I, F]$ ;
- (b) composta local  $(F, M)$ , associada ao segmento de rarefação  $[T^M, F]$ , com  $M$  no segmento  $(W, D)$  do lado  $[W, O]$  e  $\sigma(T^M; M) = \lambda_1(T^M)$ ;
- (c) composta não-local  $[N, F']$ , associada ao segmento de rarefação  $[T^N, F]$ , com  $N$  no segmento  $[G, J]$  do lado  $[G, O]$  tal que  $\sigma(T^N; N) = \lambda_1(T^N)$ , e  $F'$  no subtriângulo  $GUE$  é a extensão - 1 do estado  $F$ , isto é,  $\sigma(F; F') = \lambda_1(F)$ .

**Observação 4.2.2** Para o caso em que  $I = I^J$ , teremos  $F = T^J$  e o segmento de composta não-local  $[N, F']$  se reduz ao estado  $J$  no lado  $[G, O]$ .



**Observação 4.2.3** *A diferença entre a curva de onda - 1 dos Lemas 4.2.2 e 4.2.3 é a inversão entre os ramos locais e não locais. No Lema 4.2.2, o ramo não local atinge o lado  $[W, O]$  enquanto no Lema 4.2.3 o ramo não local atinge o ramo  $[G, O]$ .*

**Lema 4.2.4** *(Veja a Figura A.9). Seja  $I$  um estado de injeção arbitrário no segmento  $(I^J, W)$  do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações. Sejam  $T^M$  e  $F$  pontos na curva integral - 1 por  $I$  definidos pelas intersecções desta com a extensão - 1 do lado  $[W, O]$  e com o segmento  $[W, T^J]$  do conjunto de inflexão - 1, respectivamente. Então  $\mathcal{W}^1(I)$  é constituída pelos segmentos:*

(a) *rarefação  $[I, F]$ ;*

(b) *composta  $(F, M)$ , associada ao segmento de rarefação  $[T^M, F]$ , com  $M$  no segmento  $(W, D)$  do lado  $[W, O]$  e tal que  $\sigma(T^M; M) = \lambda_1(T^M)$ .*

**Observação 4.2.4** *A curva de onda dada no Lema 4.2.4 é análoga aquela do Lema 4.2.1, sendo que apenas houve uma troca nos pontos de extensão - 1 que definem a composta local. No Lema 4.2.1 temos extensão - 1 do lado  $[G, O]$  e no Lema 4.2.4 temos extensão - 1 do lado  $[W, O]$ .*

### 4.3 Ondas Transicionais

Temos de [8], [20], entre outros, que os choques transicionais para esse modelo de Corey só ocorrem ao longo dos segmentos de retas  $[G, D]$ ,  $[B, O]$  e  $[E, W]$ , correspondentes aos conjuntos de bifurcação secundária.

De acordo com a Figura B.10 que exhibe a curva de Hugoniot pelo estado  $D$  no lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, e com os diagramas de velocidades ao longo de  $[G, D]$  temos a existencia de um segmento de choque transicional -  $S_X$  e de um segmento de choque - 1,  $S_1$ , na curva de Hugoniot por  $D$ .

A análise do sistema de EDO's que define a condição de entropia de viscosidade, que é o critério utilizado neste trabalho com a matriz de viscosidade  $\mathcal{B}(U)$  sendo a matriz identidade, é simples, porque a direção instável da reta por um ponto  $K$  no segmento de choque transicional é a mesma da reta  $[G, D]$ . Além disso, entre  $K$  e  $D$  não há outro ponto de equilíbrio do sistema, sendo portanto esta mesma direção estável em  $D$ , ver Figura B.8 com  $K = C_*$ .

# Construção da Solução do Problema de Riemann

## 5.1 Introdução

Baseados nos estudos feitos nos capítulos anteriores, apresentamos aqui a construção de uma solução do problema de Riemann para condições iniciais representativas de dados de injeção e dados de produção num reservatório petrolífero.

O problema prático que estamos interessados em resolver consiste em considerar o poço produtor contendo qualquer mistura do tipo água/óleo e queremos recuperar este óleo pela injeção de uma mistura do tipo água/gás. Portanto, no triângulo de saturações representado na Figura A.2, os dados de produção correspondem a um ponto arbitrário  $P$  no lado  $[W, O]$  e os dados de injeção a um ponto arbitrário  $I$  no lado  $[G, W]$ .

Assim o problema prático é traduzido no problema matemático de resolução de problemas de Riemann para o sistema de leis de conservação (5.1), sob as condições iniciais (5.2), como segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial f_o}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial f_g}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_- := I & \text{se } x < 0, \\ U_+ := P & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde  $U = (s_w, s_o, s_g)$ .

Lembremos, do Capítulo 2, que as funções de fluxo fracionário do sistema (5.1), obtidas para o modelo de Corey com permeabilidades relativas quadráticas, são dadas por

$$f_w(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_w^2/\mu_w}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \quad (5.3)$$

$$f_o(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_o^2/\mu_o}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \quad (5.4)$$

$$f_g(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_g^2/\mu_g}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \quad (5.5)$$

em que,

$$\lambda(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_o^2}{\mu_o} + \frac{s_g^2}{\mu_g}, \quad \text{e} \quad (5.6)$$

$$s_g = 1 - s_w - s_o. \quad (5.7)$$

Lembremos também que estamos considerando um modelo mais realístico do que aqueles tratados em [8], [20], e que embora as viscosidades sejam consideradas constantes, a viscosidade do gás é tomada inferior às outras duas, ou seja,

$$\mu_g \leq \mu_w = \mu_o, \quad (5.8)$$

sendo que as figuras estão feitas com os valores  $\mu_w = \mu_o = 1$  e  $\mu_g = 0,25$ .

Uma vez apresentado o problema de Riemann em questão, passamos a construção de uma solução do mesmo, cuja metodologia geral é apresentada a seguir. Na construção da solução, inicialmente determinamos estados especiais ao longo do lado  $[W, O]$  que definem segmentos disjuntos para estados de produção  $P$  cuja construção da solução ocorra de maneira distinta. Fixado então um estado  $P$  representativo num destes segmentos, de maneira análoga determinamos estados especiais ao longo do lado  $[G, W]$  que definem segmentos disjuntos para estados de injeção  $I$  cuja construção da solução ocorra de maneira distinta. Uma vez considerados todos os estados representativos de injeção, fixamos um novo estado de produção e procedemos de forma

análoga até que todos os casos representativos, tanto de produção como de injeção, tenham sido considerados.

Antes de definir os segmentos representativos para estados de produção, vamos analisar quais são as possibilidades de conectar um determinado estado de produção  $P$  a um estado intermediário  $M$  por uma das ondas elementares. Iniciemos considerando as ondas de rarefação. Da discussão na Seção 3.2 temos que  $\lambda_1 = 0$  nos lados do triângulo de saturações, em particular em  $P$ , e  $\lambda_1$  cresce no sentido de  $P$  para o interior do triângulo ao longo da curva integral - 1. Logo, não é possível atingir  $P$  por uma onda de rarefação - 1, ver Figura A.3. Da mesma forma, como discutido na Seção (3.2), temos que  $\lambda_2 = 0$  nos vértices  $W$ ,  $O$  e  $G$  do triângulo de saturações e  $\lambda_2$  cresce a partir dos mesmos ao longo das curvas integrais - 2, ver Figura A.4. Daí, só é possível conectar  $P$  a  $M$  por uma onda de rarefação - 2, se  $M$  for um estado que jaz ao longo do próprio lado  $[W, O]$ , e desde que  $\lambda_2$  seja crescente de  $M$  para  $P$ . Assim, se o estado intermediário  $M$  estiver no interior do triângulo de saturações só resta a possibilidade de  $P$  ser conectado à  $M$  através de uma onda de choque, desde, obviamente, que  $M \in \mathcal{H}(P)$ .

Como consequência do que acabamos de discutir, para cada  $P$  fixado devemos estudar em detalhes a curva de Hugoniot por  $P$ , com relação a sua geometria e a admissibilidade dos choques de um estado arbitrário  $M \in \mathcal{H}(P)$  para  $P$ , utilizando o critério de entropia de viscosidade. Feito isto, devemos ainda analisar a possibilidade de atingir  $P$  por ondas compostas, isto é, determinar e analisar os pontos em  $\mathcal{H}(P)$  caracterizados pelo Teorema de Bethe-Wendroff (1.1.14).

As discontinuidades admissíveis são determinadas através do plano de fase do sistema de EDO's (1.13) obtido para a discontinuidade em questão, com a matriz de viscosidade  $\mathcal{B}(U)$  sendo a matriz identidade. Estas discontinuidades são denotadas tanto nas figuras como na sequência de ondas que compõe a solução, da seguinte forma: choque - 1 por  $S_1$ , choque - 2 por  $S_2$ , choque transicional por  $S_X$ , choque compressivo por  $S_C$ , como visto na Tabela da Seção 1.1.1. Com relação as rarefações, denotaremos a rarefação - 1 por  $R_1$  e a rarefação - 2 por  $R_2$ .

Resumindo, a metodologia utilizada para determinar a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, para cada estado  $P$  fixado no lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, é a seguinte:

- (i) inicialmente determinamos a geometria da curva de Hugoniot por  $P$  no lado  $[W, O]$ , obtida explicitamente no Capítulo 3;
- (ii) determinamos os choques - 2 de  $M \in \mathcal{H}(P)$  para  $P$ , que satisfaça a condição de entropia de viscosidade, através do plano de fase do sistema de EDO's correspondente;
- (iii) a partir de cada estado  $M$  da extensão - 2 de  $P$ , isto é, com  $\lambda_2(M) = \sigma(M; P)$  tal que o choque de  $M$  para  $P$  seja admissível, determinamos a curva integral - 2 correspondente aos estados que podem ser conectados à  $M \in \mathcal{H}(P)$  por uma onda de rarefação - 2;
- (iv) a partir das informações dos itens (ii) e (iii), determinamos os estados genéricos  $M$  que podem ser conectados à  $P$  por um choque - 2 ou por uma composta - 2 (do tipo rarefação/choque). Tais pontos são representados geometricamente através da curva de onda - 2 reversa por  $P$ , que é denotada por  $\mathcal{W}_-^2(P)$ ;
- (v) fixado um estado de injeção  $I$  no lado  $[G, W]$ , determinamos o estado  $M$ , se existir, definido pela intersecção de  $\mathcal{W}^1(I)$  com  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , sendo  $\mathcal{W}^1(I)$  obtida no Capítulo 4;
- (vi) para um estado de injeção  $I$  fixado, caso não haja intersecção entre  $\mathcal{W}^1(I)$  e  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , procuramos um estado  $K$  numa possível intersecção de  $\mathcal{W}^1(I)$  com o segmento da curva de onda transicional pelo estado  $D$  de  $\mathcal{H}(P)$ , cuja descontinuidade entre  $D$  e  $P$  seja admissível e tal que  $\sigma(K; D) \leq \sigma(D; P)$ ;
- (vii) baseados nos passos anteriores, descrevemos a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann (5.1) - (5.2), para cada estado de produção  $P$  fixado e de injeção  $I$  arbitrário, levando-se em conta a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades das ondas que fazem parte da sequencia.

Caso o passo (v) seja viável, a solução do problema de Riemann consistirá de no máximo 2 ondas e um estado intermediário  $M$ , sendo uma onda - 1 de  $I$  para  $M$  e uma onda - 2 de  $M$  para  $P$ , a não ser que  $M$  coincida com  $P$  ou  $M$  coincida com  $I$ .

Caso seja necessário o passo (vi), então a sequencia de ondas que determina a solução poderá consistir de até 3 ondas e 2 estados intermediários,  $K$  e  $D$ , sendo que

genericamente a sequencia consistirá de uma onda - 1 conectando  $I$  a  $K$ , de uma onda transicional conectando  $K$  a  $D$  e de uma onda - 2 conectando  $D$  a  $P$ .

## 5.2 Definição de alguns Estados Especiais

Lembremos que a condição de Rankine-Hugoniot, relacionando uma descontinuidade entre  $U_-$  e  $U_+$ , que se propaga com velocidade  $\sigma$ , para o sistema (5.1) é dada por

$$\sigma(s_w^- - s_w^+) = f_w^- - f_w^+, \quad (5.9)$$

$$\sigma(s_o^- - s_o^+) = f_o^- - f_o^+, \quad (5.10)$$

$$\sigma(s_g^- - s_g^+) = f_g^- - f_g^+. \quad (5.11)$$

Baseados na metodologia geral apresentada inicialmente, vamos fixar os estados especiais de produção ao longo do lado  $[W, O]$  que determinam construções de solução distintas. Um destes estados especiais é o estado  $D$  correspondente à intersecção da reta de bifurcação secundária, pelos pontos  $G$  e  $\bar{U}$ , com o lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações.

Queremos saber se, além deste estado  $D$ , existem outros estados que determinam construções distintas de soluções do problema de Riemann com  $P$  no lado  $[W, O]$ . Estados o quais devem estar relacionados aos estados  $D$  e  $T^D$  (que é a extensão - 1 de  $D$  definida em (3.26)) através da regra do Choque Triplo, determinando assim limites para a perda de compatibilidade geométrica das velocidades.

Considere o estado  $T^D$  da extensão - 1 da fronteira  $[W, O]$ , que por definição é tal que  $\sigma(T^D; D) = \lambda_1(T^D)$ . Daí, como  $T^D$  e  $D$  estão no mesmo ramo  $[G, D]$  de  $\mathcal{H}(D)$ , podemos usar a redução obtida em (3.45) para determinar a velocidade de choque entre  $T^D$  e  $D$ . Daí,

$$\sigma(T^D; D) = \frac{f(T^D) - f(D)}{s_{wo}^{T^D} - s_{wo}^D}, \quad (5.12)$$

em que  $f$  é a função de fluxo fracionário para a equação de Buckley-Leverett ao longo do ramo  $[G, D]$ , dada por (3.45) e aplicada aos pontos  $T^D$  e  $D$ , cujas coordenadas são dadas em (3.26) e (3.19), respectivamente,  $s_{wo}^{T^D}$  é a soma das coordenadas  $s_w$  e  $s_o$  do

ponto  $T^D$  e  $s_{wo}^D$  é a soma das coordenadas  $s_w$  e  $s_o$  do ponto  $D$ . Assim, calculando  $f(T^D)$ , obtemos

$$f(T^D) = \frac{\mu_{wo}}{\mu_{wo} + 4\mu_g}, \quad (5.13)$$

onde  $\mu_{wo} = \mu_w + \mu_o$  foi definido em (3.38). Por outro lado, temos que

$$f(D) = 1. \quad (5.14)$$

Substituindo (5.13) e (5.14) em (5.12), obtemos

$$\sigma := \sigma(T^D; D) = \frac{2\mu_{wo} + 4\mu_g}{\mu_{wo} + 4\mu_g}. \quad (5.15)$$

Observe que poderíamos utilizar qualquer relação em (5.9)-(5.11) com  $U_+ = D$  e  $U_- = T^D$  para se obter a fórmula em (5.15).

Queremos determinar estados  $P = (s_w, s_o, 0)$  no lado  $[W, O]$  tais que a regra do choque triplo com  $T^D$  e  $D$  seja verificada, isto é, pontos  $P$  no ramo  $[W, O]$  da curva de Hugoniot por  $D$ , tais que

$$\sigma := \sigma(T^D; D) = \sigma(P; D). \quad (5.16)$$

Como  $D$  e  $P$  devem estar no lado  $[W, O]$ , é conveniente calcular a velocidade de choque entre  $P$  e  $D$ , via a função de fluxo fracionário do óleo restrita ao lado  $[W, O]$ , usando a variável  $s_o$ . Portanto,

$$\sigma(P; D) = \frac{f_o(P) - f_o(D)}{s_o^P - s_o^D}, \quad (5.17)$$

em que  $s_o^P$  é a coordenada  $s_o$  do ponto  $P$  e  $s_o^D$  é a coordenada  $s_o$  do ponto  $D$ .

Substituindo (5.17) em (5.16), usando a expressão de  $f_o$  dada em (5.4) e as coordenadas de  $D$  dadas em (3.19), obtemos após algumas manipulações algébricas o seguinte polinômio de terceiro grau na variável  $s_o$ :

$$\begin{aligned} & \sigma\mu_{wo}s_o^3 + (\mu_o - 3\mu_o\sigma - \mu_w)s_o^2 + \\ & + \left( \mu_o\sigma - 2\frac{\mu_o^2}{\mu_{wo}}(1 - \sigma) \right) s_o + \frac{\mu_o^2}{\mu_{wo}}(1 - \sigma) = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde o valor de  $\sigma$  é dado em (5.15).

Note que a coordenada  $s_o$  de  $D$ , dada por  $s_o = \frac{\mu_o}{\mu_{wo}}$  é raiz de (5.18). Usando este fato, podemos decompor (5.18) da seguinte maneira,

$$\left( s_o - \frac{\mu_o}{\mu_{wo}} \right) (\sigma\mu_{wo}s_o^2 + (\mu_o - 2\mu_o\sigma - \mu_w)s_o + \mu_o(\sigma - 1)) = 0. \quad (5.19)$$

Após alguns cálculos, encontramos as outras duas raízes de (5.19), dadas a seguir

$$\bar{s}_o = \frac{\mu_o(2\sigma - 1) + \mu_w + \sqrt{\Delta_*}}{2\sigma\mu_{wo}}, \text{ e,} \quad (5.20)$$

$$\bar{\bar{s}}_o = \frac{\mu_o(2\sigma - 1) + \mu_w - \sqrt{\Delta_*}}{2\sigma\mu_{wo}}. \quad (5.21)$$

em que  $\Delta_* = (\mu_w - \mu_o)^2 + 4\mu_w\mu_o\sigma(2 - \sigma) > 0$ , já que de (5.15) temos  $0 < \sigma < 2$ . Dessa maneira, encontramos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  na reta contendo o lado  $[W, O]$ , onde vale a regra do choque triplo com os estados  $T^D$  e  $D$ , dados por

$$P_1 = (1 - \bar{s}_o, \bar{s}_o, 0), \quad (5.22)$$

$$P_2 = (1 - \bar{\bar{s}}_o, \bar{\bar{s}}_o, 0), \text{ e} \quad (5.23)$$

satisfazendo a seguinte cadeia de igualdades:

$$\lambda_i(T^D) = \sigma(T^D; D) = \sigma(T^D; P_1) = \sigma(T^D; P_2) = \sigma(D; P_1) = \sigma(D; P_2). \quad (5.24)$$

Substituído os valores de  $\mu_w$ ,  $\mu_o$ ,  $\mu_g$  e  $\sigma$ , utilizados, obtemos que  $P_1$  e  $P_2$  estão de fato no lado  $[W, O]$ .

Dessa forma os segmentos ao longo do lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações que representarão dados de produção  $P$  com construções de soluções distintas são:  $[O, P_1]$ ,  $(P_1, D]$ ,  $(D, P_2]$  e  $(P_2, W]$ . A seção a seguir trata da construção da solução do problema de Riemann para estados de produção representativos nesses segmentos.

### 5.3 Construção da Solução do Problema de Riemann

Esta seção é dedicada a construção da solução do problema de Riemann considerado. Iniciamos, então, variando  $P$  a partir de  $O$  na direção de  $W$  ao longo do lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações. A solução do problema de Riemann para o caso do estado de produção  $P = O$  foi descrito em [1], e está resumida na Figura B.1. Resumidamente foi visto que quando é injetado água pura, isto é  $I = W$ , a solução do problema de Riemann é a própria solução de Buckley-Leverett ao longo do lado



$[W, O]$ , a qual consiste de uma composta - 2 de  $W$  para  $O$ , constituída de uma onda de rarefação - 2 de  $W$  para  $W_*$ , seguida por um choque - 2 de  $W_*$  para  $O$ , característico em  $W_*$ , tal que  $\sigma(W_*; O) = \lambda_2(W_*)$ . Para a mistura de injeção correspondendo à  $I = B$ , a solução pode ser descrita de três maneiras no espaço de estados, porém representando uma única solução no espaço físico -  $xt$ . Este caso de injeção foi chamado em [1] de caso crítico, por separar geometrias distintas na sequencia de ondas que conectam  $I$  à  $O$  no espaço de estados. A solução crítica representa a mistura ótima de injeção que pode ser obtida por WAG, isto é por injeção alternada de água e gás. Uma das três soluções consiste de uma onda de rarefação - 1 de  $B$  para  $B_*$ , seguida de duas ondas de choque com mesma velocidade: choque - 1 de  $B_*$  para  $B_*^W$  e choque - 2 de  $B_*^W$  para  $O$ . A segunda solução consiste de uma onda de rarefação - 1 de  $B$  para  $B_*$ , seguida de choque compressivo de  $B_*$  para  $O$ . Enquanto que a terceira solução consiste de uma rarefação - 1 de  $B$  para  $B_*$  seguida de duas ondas de choque com mesma velocidade, choque - 1 de  $B_*$  para  $B_*^G$  e choque - 2 de  $B_*^G$  para  $O$ . Para os outros casos, discutidos em [1], com injeção entre  $B$  e  $W$  a construção da solução depende da curva de onda - 1 por  $I$  atingir o lado  $[W, O]$  acima ou abaixo de  $W_*$ . Para  $I$  no segmento  $[G, B]$  a construção é similar. Também em [1] foram definidos os termos “water dominated” para estados de injeção  $I \in (B, W]$ , porque o último estado intermediário a ser conectado a  $O$  está no lado  $[W, O]$  sem a presença da fase gás, e “gas dominated” para  $I \in [G, B)$ , porque o último estado intermediário está no lado  $[G, O]$  sem a presença da fase água. Para mais detalhes ver [1].

Utilizamos as notações  $(RS)_1$  para representar uma onda composta - 1,  $(RS)_2$  para uma onda composta - 2,  $(RS)_{1C}$  para uma onda composta formada por uma rarefação - 1 seguida de um choque compressivo e  $(RS)_{1X}$  para uma composta transicional formada por uma rarefação - 1 seguida de um choque transicional, além das notações para choques e rarefações já introduzidas.

### 5.3.1 Caso 1: Estados de Produção $P \in (O, P_1]$

Na Figura B.2 é exibida a curva de Hugoniot por  $P$ , obtida explicitamente na Seção 3.3. Após a análise do plano de fase, verificamos que a curva  $\mathcal{H}(P)$  possui os seguintes segmentos correspondentes à choques - 2 admissíveis que podem atingir  $P$ :  $[G_*, \bar{C}]$  no interior do triângulo de saturações, e  $[W_*, P]$  no lado  $[W, O]$  do triângulo.

Estes segmentos de choque - 2 foram determinados computacionalmente através de gráficos das velocidades características e da velocidade de choque.

Os estados  $C_*$  e  $G_*$ , na curva de Hugoniot por  $P$ , por definição correspondem à extensões do estado  $P$  com relação às famílias características 1 e 2, respectivamente. Portanto, são tais que  $\sigma(C_*; P) = \lambda_1(C_*)$  e  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ . O estado  $C_*^W$  no segmento  $[W^*, D]$  de choque - 2 no lado  $[W, O]$  é definido como sendo o ponto de  $\mathcal{H}(P)$  onde é satisfeita a regra do choque triplo com os estados  $P$  e  $C_*$ , e é tal que

$$\lambda_1(C_*) = \sigma(C_*; P) = \sigma(C_*; C_*^W) = \sigma(C_*^W; P).$$

Note que  $C_*$  é a extensão - 1 tanto de  $P$  como de  $C_*^W$ .

O estado  $C_*^G$  no segmento de choque - 2 de  $\mathcal{H}(P)$  com extremidade  $G_*$  também é definido pela regra do choque triplo com os estados  $P$  e  $C_*$  (e também com  $C_*^W$ ), o qual também foi determinado computacionalmente. Assim vale a seguinte cadeia de igualdades:

$$\lambda_1(C_*) = \sigma(C_*; P) = \sigma(C_*^G; P) = \sigma(C_*; C_*^G) = \sigma(C_*^W; P) = \sigma(C_*; C_*^W). \quad (5.25)$$

O estado  $W_* \in \mathcal{H}(P)$  é também uma extensão - 2 de  $P$ . Nele temos que  $\sigma(W_*; P) = \lambda_2(W_*)$  onde  $\lambda_2(W_*)$  pode ser obtido como a derivada da função de fluxo fracionária do óleo com relação a saturação do óleo, restrita ao lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, isto é,  $\lambda_2(W_*) = \frac{\partial f_o}{\partial s_o}(W_*) \big|_{[W, O]}$ .

A partir de  $G_*$  e de  $W_*$  temos os segmentos da curva de composta - 2 como parte da curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(P)$ :  $[G, G_*]$  e  $[W, W_*]$ . Além disto, temos que o segmento  $[O, P]$  de rarefação - 2 não é relevante para o problema de Riemann considerado, ver Figura B.2. Assim, a curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , relevante em nossa construção, é dada pelos segmentos  $[G, G_*]$  e  $[W, W_*]$  de composta - 2, e pelos segmentos  $[G_*, C_*^G]$  e  $[W_*, C_*^W]$  de choque - 2. Resumidamente, temos os seguintes estados especiais em  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , mostrados na Figura B.2:  $P$ ,  $C_*$ ,  $W_*$ ,  $C_*^W$ ,  $G_*$ , e  $C_*^G$ .

Agora, com base nos segmentos que constituem  $\mathcal{W}_-^2(P)$  e  $\mathcal{H}(P)$  determinamos os estados de injeção que separam segmentos no lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações com construções distintas para a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann.

Os estados de injeção  $C$ ,  $I^{W_*}$  e  $I^{G_*}$  são definidos como sendo os estados para os quais as curvas de onda - 1 por eles,  $\mathcal{W}^1(C)$ ,  $\mathcal{W}^1(I^{W_*})$  e  $\mathcal{W}^1(I^{G_*})$ , ver Capítulo 4,

atingem os pontos  $C_*^W$ ,  $W_*$  e  $G_*$ , respectivamente. Além disto, o ramo não local de  $\mathcal{W}^1(C)$  atinge o estado especial  $C_*^G$ .

Seguindo a metodologia descrita, passemos então à descrição da solução do problema de Riemann para o estado de produção  $P$  fixado no segmento  $(O, P_1)$  e o estado de injeção  $I$  nos segmentos do lado  $[G, W]$  determinados anteriormente. Por conveniencia, para facilitar a comparação com [1], vamos iniciar a descrição da solução do problema de Riemann pelo estado  $I = W$ , variando o estado de injeção  $I$  a partir de  $W$  para  $G$ . Dessa maneira, temos então as seguintes possibilidades de acordo com a localização do estado  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações. Cada caso pode ser acompanhado na Figura B.3.

- (a) Se  $I = W$ , ou seja, se for injetado apenas água, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo  $f_o$  restrita à fronteira  $[W, O]$  do triângulo de saturações. Portanto, a sequencia de ondas que compõe a solução é dada por uma onda de rarefação - 2 de  $W$  para  $W_*$ , seguida de uma onda de choque - 2, característico à esquerda, de  $W_*$  para  $P$ ;
- (b) Se  $I \in [I^{W_*}, W)$  então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(W, W_*)$  do lado  $[W, O]$ , seguida de uma composta - 2 de  $M$  para  $P$ . Como visto no Capítulo 4, a onda composta - 1 consiste de uma rarefação - 1 de  $I$  para o estado  $T$  no segmento  $(W, T^{W_*})$  da extensão - 1 do segmento  $(W, W_*)$  no lado  $[W, O]$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ , seguida de um choque - 1 de  $T$  para  $M$ . Já a composta - 2 consiste de uma rarefação - 2 de  $M$  para  $W_*$ , seguida de um choque - 2 de  $W_*$  para  $P$ , com  $\sigma(W_*; P) = \lambda_2(W_*)$ . Observamos que a composta - 2 também pode ser vista como a solução da equação de Buckley-Leverett para a função de fluxo fracionário  $f_o$  restrita ao lado  $[W, O]$  e com dados iniciais  $M$  e  $P$ . Observamos também que se  $I = I^{W_*}$  então  $T = T^{W_*}$  e  $M = W_*$ ;
- (c) Se  $I \in (C, I^{W_*})$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , onde  $M$  é um estado no segmento  $(W_*, C_*^W)$  do lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, seguida

de um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . Como no item (b) a composta - 1 consiste de uma onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T$  seguida de um choque - 1 de  $T$  para  $M$ , com  $T \in (T^{W*}, C_*)$  da extensão - 1 de  $(W_*, C_*^W)$  e  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ . Observe que para  $I$  entre  $B$  e  $I^{W*}$  a composta - 1 de  $I$  para  $M$  é local, enquanto que para  $I$  entre  $C$  e  $B$  a composta é não local, conforme visto no Capítulo 4;

(d) Caso crítico: se  $I = C$ , então como consequência da regra do choque triplo, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de três maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- $xt$ :

- (1) composta - 1 (não local) de  $C$  para  $C_*^W$ , seguida de um choque - 2 de  $C_*^W$  para  $P$ . A composta - 1 é constituída por uma onda de rarefação de  $C$  para  $C_*$ , seguida pelo choque - 1 de  $C_*$  para  $C_*^W$ , com  $\sigma(C_*; C_*^W) = \lambda_1(C_*)$ ;
- (2) composta - 1 não local de  $C$  para  $C_*^G$ , seguida de um choque - 2 de  $C_*^G$  para  $P$ . A composta - 1 é constituída pela onda de rarefação de  $C$  para  $C_*$ , seguida por um choque - 1 de  $C_*$  para  $C_*^G$ , com  $\sigma(C_*; C_*^G) = \lambda_1(C_*)$ ;
- (3) apenas uma onda composta de  $C$  para  $P$ , definida pelo segmento de rarefação  $[C, C_*]$  e pelo choque compressivo de  $C_*$  para  $P$ , com  $\sigma(C_*; P) = \lambda_1(C_*)$ . Como sabemos, o choque compressivo pode ser visto como uma sequência de um choque - 1 seguida de um choque - 2, ambos com a mesma velocidade. O que corresponde as mesmas soluções nos itens (1) e (2) no espaço físico- $xt$ .

Lembramos que, conforme visto anteriormente, devido a regra do choque triplo temos a seguinte cadeia de igualdades:

$$\lambda_1(C_*) = \sigma(C_*; C_*^W) = \sigma(C_*^W; P) = \sigma(C_*; P) = \sigma(C_*, C_*^G) = \sigma(C_*^G, P);$$

(e) Se  $I \in [I^{G*}, C)$  então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $[G_*, C_*^G]$  de composta - 2 da curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida de um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . De maneira análoga ao caso (c), conforme visto no Capítulo 4, a composta - 1 é constituída de uma onda de rarefação - 1 de  $I$  para

o estado  $T$  no segmento  $[T^{G_*}, C_*]$  da extensão - 1 do segmento  $[G_*, C_*^G]$  de choque - 2 de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , e segue de  $T$  para  $M$  por um choque - 1, com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ . Se  $I = I^{G_*}$ , então  $T = T^{G_*}$  e  $M = G_*$ ;

(f) Se  $I \in (G, I^{G_*})$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(G, G_*)$  de composta - 2 da curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida de uma composta - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 é constituída pela onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T$ , seguida pelo choque - 1 de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$  e  $T$  no segmento  $(G, T^{G_*})$  da extensão - 1 do segmento  $(G, G_*)$  de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ . A composta - 2 consiste de uma onda de rarefação - 2 de  $M$  para  $G_*$ , seguida pelo choque - 2 de  $G_*$  para  $P$ , com  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ;

(g) Se  $I = G$ , ou seja, se for injetado apenas gás, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann só consiste de uma composta - 2 de  $G$  para  $P$ . Esta composta consiste de uma onda de rarefação de  $G$  para  $G_*$ , seguida por um choque - 2 de  $G_*$  para  $P$ , com  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ . Veja que neste caso a solução é análoga à solução da equação de Buckley-Leverett para o caso  $I = W$ , a diferença é apenas que o segmento de  $\mathcal{W}_-^2(P)$  utilizado é interno ao triângulo de saturações. Portanto, este caso é análogo ao caso  $I = G$  de [1], sendo que como  $P$  está no segmento  $(O, P_1]$  do lado  $[W, O]$  a solução não envolve apenas uma mistura do tipo gás/óleo, e sim uma mistura das três componentes gás/óleo/água;

Em resumo, se o estado de produção  $P$  estiver no segmento  $(O, P_1]$  do lado  $[W, O]$ , então as sequencias de ondas que compõe as soluções do problema de Riemann para dados de injeção na fronteira  $[W, G]$  do triângulo de saturações podem ser representadas esquematicamente como a seguir (ver Figura B.3):

(a)  $I = W$ :  $W \xrightarrow{(RS)_2} P$ , (Buckley-Leverett ao longo de  $[W, O]$ );

(b)  $I \in [I^{W_*}, W)$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{(RS)_2} P$ ;

(c)  $I \in (C, I^{W_*})$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{S_2} P$ ;

(d)  $I = C$ , tem-se três sequencias no espaço de estados representando a mesma solução no espaço físico -  $xt$ :

$$(1) C \xrightarrow{(RS)_1} C_*^W \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(2) C \xrightarrow{(RS)_1} C_*^G \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(3) C \xrightarrow{(RS)_1 C} P;$$

$$(e) I \in [I^{G_*}, C): I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(f) I \in (G, I^{G_*}): I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{(RS)_2} P;$$

$$(g) I = G: G \xrightarrow{(RS)_2} P, \text{ (análogo à Buckley-Leverett).}$$

Comparando a Figura B.3 com a Figura B.1 (obtida em [1]) e fazendo  $P$  se aproximar de  $O$ , vemos que  $C_*^W$  (daqui) se aproxima de  $B_*^W$  (de lá) e o segmento de choque - 2  $[G_*, \overline{C}]$  (daqui) se aproxima do segmento  $[G_*, B_*^G]$  (de lá) no lado  $[G, O]$ , enquanto que o estado  $C$  (daqui) se aproxima de  $B$  (de lá).

**Observação: Caso limite  $P = P_1$**

Para o caso limite  $P = P_1$ , cuja curva de Hugoniot por  $P_1$  está exibida na Figura B.4, temos os seguintes fatos: os estados  $C_*^G$  e  $C_*$  colapsam e passam a coincidir com o estado  $T^D$ , assim como os estados  $C_*^W$  e  $D$  também colapsam. Logo, temos que  $C_*^G = C_* = T^D$  e  $C_*^W = D$ . Dessa maneira, os segmentos de choque - 2 da  $\mathcal{H}(P_1)$  anteriormente dados por  $[G_*, C_*^G]$  e  $[C, C_*]$  se tornam um único segmento de choque - 2 que vai de  $C$  até  $G_*$ . Portanto, os estados especiais de  $\mathcal{H}(P_1)$  passam a ser apenas  $P_1, T^D, D = C_*^W, G_*$  e  $W_*$ . Por consistência de notação, neste caso limite, também denotamos o estado  $C$  por  $I^D$ , já que  $C_*$  coincide com  $T^D$  e  $C_*^W$  coincide com  $D$ . Além disso, para o caso de injeção crítica  $C$ , a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann passa a ter duas, e não mais três, estruturas distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- $xt$ . As quais são dadas por:

- (1) composta - 1 de  $C = I^D$  para  $D = C_*^W$ , seguida de um choque - 2 de  $D = C_*^W$  para  $P_1$ . A composta - 1 é constituída de uma rarefação - 1 de  $C = I^D$  para  $T^D$ , seguida de um choque - 1 de  $T^D$  para  $D$ , com  $\sigma(T^D; D) = \lambda_1(T^D)$ ;

- (2) composta de  $C = I^D$  para  $P_1$ , consistindo de uma onda de rarefação - 1 de  $C = I^D$  para  $T^D$ , seguida de um choque compressivo de  $T^D$  para  $P_1$ , com  $\sigma(T^D; P_1) = \lambda_1(T^D)$ .

Esquemáticamente para o caso crítico, temos:

- (1)  $I^D \xrightarrow{(RS)_1} D \xrightarrow{S_2} P_1$ ;  
(2)  $I^D \xrightarrow{R_1} T^D \xrightarrow{S_C} P_1$ .

### 5.3.2 Caso 2: Estados de Produção $P \in (P_1, D)$

Considere um estado de produção  $P$  no segmento  $(P_1, D)$  do lado  $[W, O]$ . Para facilitar os argumentos, exibimos na Figura B.5 a curva de Hugoniot pelo estado  $P$  e parte da curva de Hugoniot por  $D$  correspondente ao ramo  $[G, D]$ . Observe que  $\mathcal{H}(P)$  possui os seguintes segmentos correspondentes a choques - 2 admissíveis que podem atingir  $P$ :  $[G_*, C_*]$  no interior do triângulo de saturações, ver a Figura B.6, e  $[W_*, P]$  no lado  $[W, O]$ . Enquanto que a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(D)$  exibe o segmento  $[G_*, T^D]$  no interior do triângulo correspondente a choques transicionais, sendo que apenas o segmento  $[C_*, T^D]$  será útil na construção da solução, ver Figura B.6. A necessidade do uso de choques transicionais se deve a existencia de estados  $I$  no lado  $[G, W]$  para os quais  $\mathcal{W}^1(I)$  não tem intersecção com  $\mathcal{W}_-^2(P)$ . Assim a sequencia de ondas que compõe a solução do Problema de Riemann passa a ter casos com a presença de três ondas, ao invés de apenas duas, sendo uma delas um choque transicional.

Os estados especiais de produção e interiores ao triângulo de saturações são análogos aos do caso limite  $P = P_1$  no Caso 5.3.1, tendo apenas a mudança no estado  $C_*$ , que neste caso é definido pela intersecção do segmento de choque - 2 de  $\mathcal{H}(P)$  com extremidade em  $G_*$  e do segmento de choque transicional de  $\mathcal{H}(D)$  ao longo do ramo  $[G, D]$ . O plano de fase exibido na Figura B.8 para o choque transicional entre  $C_*$  e  $D$  mostra que o mesmo é admissível. Para esse estado  $C_*$  vale a regra do choque triplo com  $D$  e  $P$ , isto é,  $\sigma(C_*; P) = \sigma(C_*; D) = \sigma(D; P)$ . Com isto apenas os choques - 2 de  $M$  para  $P$ , com  $M \in [G_*, C_*]$ , são admissíveis segundo o critério de viscosidade (com a matriz de viscosidade sendo a identidade), ver Figuras B.6 e B.7. De modo análogo ao

caso limite  $P = P_1$ , para este caso, o estado  $C_*^W$  coincide com o estado  $D$ , e o estado  $T^D$  é a extensão - 1 de  $D$ . Resumindo, temos os seguintes estados especiais para este caso:  $P, T^D, W_*, C_*, G_*$  e  $D = C_*^W$ .

Da mesma forma, a curva de onda - 2 reversa por  $P, \mathcal{W}_-(P)$ , é análoga aos casos anteriores, possuindo os seguintes segmentos relevantes:  $[G, G_*]$  de composta - 2, e  $[G_*, C_*]$  e  $[W_*, P]$  de choque - 2.

Os estados especiais de injeção que definem segmentos com construções distintas para a solução (ver Figura B.9) são análogos ao caso anterior, acrescido do estado  $I^D$ , definido como sendo a intersecção da curva integral - 1 por  $T^D$  com o lado  $[G, W]$ . Além disso, com relação ao caso anterior, o estado  $C$  agora está no segmento  $(I^{G_*}, I^D)$  do lado  $[G, W]$ .

Para os estados de injeção  $I \in (I^D, W]$  e  $I \in [G, I^{G_*})$  a construção da sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é análoga a do Caso 5.3.1. Diferenças relevantes na construção da solução são observadas para os casos de injeção  $I \in [I^{G_*}, I^D]$ , como veremos a seguir (ver Figura B.9):

- (a) Se  $I = W$ , ou seja, se for injetado apenas água, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo  $f_o$  restrita à fronteira  $[W, O]$  do triângulo de saturações, e é constituída por uma onda de rarefação - 2 de  $W$  para  $W_*$ , seguida de uma onda de choque - 2, característico à esquerda, de  $W_*$  para  $P$ ;
- (b) Se  $I \in [I^{W_*}, W)$  então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(W, W_*]$  do lado  $[W, O]$ , seguida de uma composta - 2 de  $M$  para  $P$ . Tanto a composta - 1 quanto a composta - 2 são construídas de maneira análoga ao item (b) do Caso 5.3.1;
- (c) Se  $I \in [I^D, I^{W_*})$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , onde  $M$  é um estado no segmento  $(W_*, D)$  do lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações, seguida de um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 é análoga ao item (c) do Caso 5.3.1.



Observe que para  $I$  entre  $B$  e  $I^{W*}$  a composta - 1 de  $I$  para  $M$  é local, e para  $I$  entre  $I^D$  e  $B$  a composta - 1 é não local, de acordo com o Capítulo 4;

(d) Se  $I \in (C, I^D)$ , então a sequencia que compõe a solução do problema de Riemann consiste de três ondas: rarefação - 1 de  $I$  para um estado  $K$ , com  $K$  pertencente ao segmento de choque transicional  $[C_*, T^D]$  de  $\mathcal{H}(D)$ , seguida de um choque transicional de  $K$  para  $D$ , que por sua vez é seguido de um choque - 2 de  $D$  para  $P$ , com  $\sigma(K; D) < \sigma(D; P)$ ;

(e) Caso crítico: se  $I = C$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de duas maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- $xt$ :

(1) composta transicional de  $C$  para  $D$ , seguida de um choque - 2 de  $D$  para  $P$ .

A composta transicional é constituída pela onda de rarefação - 1 de  $C$  para  $C_*$ , seguida pelo choque transicional de  $C_*$  para  $D$ , com  $\sigma(C_*; D) = \lambda_1(C_*)$ ;

(2) rarefação - 1 de  $C$  para  $C_*$ , seguida de um choque - 2 de  $C_*$  para  $P$ .

Neste caso a solução é a mesma no espaço- $xt$  pois, pela regra do choque triplo,  $\sigma(C_*; D) = \sigma(D; P) = \sigma(C_*; P)$ ;

(f) Se  $I \in [I^{G*}, C)$ , então a sequencia que compõe a solução do problema de Riemann volta a possuir apenas duas ondas como nos casos anteriores. Sendo constituída por uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(G_*, C_*)$  de choque - 2 da curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida de um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . Para  $I = I^{G*}$  temos que  $M = G_*$  e  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ;

(g) Se  $I \in (G, I^{G*})$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $[G, G_*]$  de composta - 2 de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida de uma composta - 2 de  $M$  para  $P$ . As ondas compostas 1 e 2 são definidas de modo totalmente análogo ao item (f) do Caso 5.3.1;

(h) Se  $I = G$ , ou seja, se for injetado apenas gás, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann consiste apenas de uma composta - 2 de  $G$  para  $P$ , análoga à solução de Buckley-Leverett para  $I = W$ .

Assim, se  $P \in (P_1, D)$  então as sequencias de ondas que compõe as soluções do problema de Riemann para dados de injeção na fronteira  $[W, G]$  do triângulo de saturações podem ser representadas esquematicamente como a seguir (ver Figura B.9):

$$(a) \ I = W: W \xrightarrow{(RS)_2} P, \text{ (Buckley-Leverett ao longo de } [W, O]);$$

$$(b) \ I \in [I^{W_*}, W): I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{(RS)_2} P;$$

$$(c) \ I \in [I^D, I^{W_*}): I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(d) \ I \in (C, I^D): I \xrightarrow{R_1} K \xrightarrow{S_X} D \xrightarrow{S_2} P;$$

(e)  $I = C$ , tem-se duas sequencias no espaço de estados representando a mesma solução no espaço físico -  $xt$ :

$$(1) \ C \xrightarrow{R_1} C_* \xrightarrow{S_X} D \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(2) \ C \xrightarrow{R_1} C_* \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(f) \ I \in (I^{G_*}, C): I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(g) \ I \in (G, I^{G_*}): I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{(RS)_2} P;$$

$$(h) \ I = G: G \xrightarrow{(RS)_2} P, \text{ (análogo à Buckley-Leverett).}$$

### 5.3.3 Caso 3: Estado de Produção $P = D$

Considere o estado de produção  $P = D$  no lado  $[W, O]$ , onde  $D$  é o extremo da reta de bifurcação secundária  $[G, D]$ . Notemos também que  $D$  é um ponto do conjunto de inflexão - 2. A Figura B.10 exhibe a curva de Hugoniot por  $D$ , a qual como provado na Seção 3.4, Eqs. (3.23-3.25), consiste do lado  $[W, O]$ , da reta  $[B, E]$  e da própria reta  $[G, D]$ . O segmento  $[G_*, T^D]$  de  $\mathcal{H}(D)$  corresponde à choques transicionais.

Como nos casos anteriores, os estados  $T^D$  e  $G_*$  na curva de Hugoniot por  $P = D$  são as extensões do estado  $D$  com relação às famílias características 1 e 2, respectivamente, isto é,  $\sigma(T^D; D) = \lambda_1(T^D)$  e  $\sigma(G_*; D) = \lambda_2(G_*)$ . Uma vez que o estado de produção  $P$  coincide com  $D$ , o qual é um ponto de inflexão - 2, observamos que o estado  $W_*$  não aparece para este caso. Assim, a curva de Hugoniot por  $P = D$

não possui nenhum segmento de choque - 2 admissível, mas apenas o segmento de choque transicional  $[G_*, T^D]$ , e o segmento de choque - 1  $[T^D, D]$ .

A curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(D)$  consiste dos segmentos de rarefação - 2  $[W, D]$  e  $[O, D]$  no lado  $[W, O]$ , já que  $D$  é um ponto de inflexão - 2, ver Figura B.10. A curva de onda reversa transicional  $\mathcal{W}_-^t(D)$  consiste do segmento de choque transicional  $[G_*, T^D]$  e do segmento de composta transicional  $[G, G_*]$ . Observemos também que todo o segmento  $[G, T^D]$  está no conjunto de inflexão - 1.

Em resumo, temos os seguintes pontos especiais em  $\mathcal{H}(P)$ , mostrados na Figura B.10:  $D$ ,  $G_*$  e  $T^D$ .

Os estados de injeção que separam segmentos no lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações com estruturas distintas das sequencias de ondas que compoem a solução do problema de Riemann são  $I^D$  e  $I^{G_*}$ , definidos pelas intersecções das curvas integrais - 1 por  $T^D$  e por  $G_*$  com o lado  $[G, W]$ , respectivamente.

Dessa maneira, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações (ver Figura B.11):

- (a) Para  $I = W$ , ou seja, se for injetado apenas água, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo  $f_o$  restrita à fronteira  $[W, O]$  do triângulo de saturações, e é constituída apenas por uma rarefação - 2 de  $W$  para  $D$ , uma vez que  $D$  é um ponto de inflexão - 2 ao longo do lado  $[W, O]$ ;
- (b) Se  $I \in (I^D, W)$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann consiste de uma composta - 1 de  $I$  para  $M$  no segmento  $(W, D)$  de  $\mathcal{W}_-^2(D)$ , seguida de uma rarefação - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 é constituída pela onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T$ , com  $T$  na extensão - 1 de  $(W, D)$ , seguida de um choque - 1 de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ ;
- (c) Se  $I = I^D$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é formada por uma composta transicional de  $I^D$  para  $D$ . Esta composta consiste de uma onda de rarefação - 1 de  $I^D$  para  $T^D$ , seguida do choque de  $T^D$  para  $D$ , sendo que este choque é o limite entre um choque - 1 e um choque transicional, com  $\sigma(T^D; D) = \lambda_1(T^D)$ ;

- (d) Se  $I \in [I^{G_*}, I^D)$ , então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída por uma rarefação - 1 de  $I$  para  $K$ , com  $K$  no segmento  $(G_*, T^D)$  de choque de  $\mathcal{W}_-^t(D)$ , seguida de um choque transicional de  $K$  para  $P$ , com  $\sigma(K, D) > \lambda_1(K)$ . Observemos que se  $I = I^{G_*}$ , então  $K = G_*$  e  $\sigma(G_*; D) = \lambda_2(G_*) > \lambda_1(G_*)$ , sendo este choque o limite entre um choque transicional e um choque - 2;
- (e) Se  $I \in (G, I^{G_*})$ , então a solução é dada por uma rarefação - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(G, G_*)$  de composta transicional de  $\mathcal{W}_-^t(D)$ , seguida de uma composta transicional de  $M$  para  $D$ . A onda composta é constituída de uma onda de rarefação - 2 de  $M$  para  $G_*$ , seguida do choque transicional de  $G_*$  para  $D$ , com  $\sigma(G_*; D) = \lambda_2(G_*)$ ;
- (f) Se  $I = G$ , ou seja, se for injetado apenas gás, então a solução é constituída por uma onda composta transicional de  $I$  para  $D$ . Esta composta consiste de uma onda de rarefação - 2 de  $G$  para  $G_*$ , seguida de um limite de choque transicional com choque - 2 de  $G_*$  para  $D$ , com  $\sigma(G_*; D) = \lambda_2(G_*)$ . Como mostrado na Seção 3.6 o sistema é reduzido à equação escalar ao longo da reta  $[G, D]$ . Assim a solução coincide com a solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo dada em (3.45) ao longo de  $[G, D]$ .

Assim, se  $P = D$  então as sequências de ondas que compõe as soluções do problema de Riemann para dados de injeção na fronteira  $[W, G]$  do triângulo de saturações são representadas esquematicamente como a seguir (ver Figura B.11):

- (a)  $I = W$ :  $W \xrightarrow{R_2} D$ , (Buckley-Leverett ao longo de  $[W, O]$ );
- (b)  $I \in (I^D, W)$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{R_2} D$ ;
- (c)  $I = I^D$ :  $I^D \xrightarrow{(RS)_{1X}} D$ ;
- (d)  $I \in [I^{G_*}, I^D)$ :  $I \xrightarrow{R_1} K \xrightarrow{S_X} D$ ;
- (e)  $I \in (G, I^{G_*})$ :  $I \xrightarrow{R_1} M \xrightarrow{(RS)_{2X}} D$ ;
- (f)  $I = G$ :  $G \xrightarrow{(RS)_{2X}} D$ , (Buckley-Leverett ao longo de  $[G, D]$ ).

### 5.3.4 Caso 4: Estados de Produção $P \in (D, P_2]$

Seja  $P$  um estado de produção arbitrário no segmento  $(D, P_2)$  do lado  $[W, O]$ . A curva de Hugoniot por este estado está exibida na Figura B.12. Através de análises dos planos de fase, observamos que a  $\mathcal{H}(P)$  possui os seguintes segmentos de choques admissíveis que podem atingir  $P$ :  $[G_*, C_*]$  no interior do triângulo de saturações e  $[W_*, P]$  no lado  $[W, O]$  ambos correspondendo à choques - 2, e o segmento  $[T^P, P]$  de choque - 1. O estado  $C_*$  é definido como sendo a intersecção do segmento de choque - 2 de  $\mathcal{H}(P)$  com extremidade em  $G_*$  e do segmento de choque transicional de  $\mathcal{H}(D)$  ao longo do ramo  $[G, D]$ .

A curva de onda - 2 reversa  $\mathcal{W}_-^2(P)$  é constituída pelos segmentos  $[G_*, C_*]$  e  $[W_*, P]$  de choque - 2, pelos segmentos  $[G, G_*]$  e  $[O, W_*]$  de composta - 2, além do segmento  $[W, P]$  de rarefação - 2.

Considerando o ramo  $[G, D]$  da curva de Hugoniot por  $D$ , como no Caso 5.3.2, temos também o segmento de choque transicional  $[C_*, T^D]$  na curva de onda transicional reversa  $\mathcal{W}_-^t(D)$ .

Neste caso, a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann também pode possuir três ondas, similarmente ao Caso 5.3.2.

Assim, os estados especiais no lado  $[W, O]$  e no interior do triângulo de saturações que definem segmentos cuja solução do problema de Riemann tem estruturas distintas são  $G_*$ ,  $C_*$ ,  $T^D$ ,  $D$  e  $P$ . O estado  $W_*$  e todo o segmento  $[O, D]$  não tem papel relevante, uma vez que as curvas de onda - 1 provenientes do lado  $[G, W]$ , para este caso, não os atinge.

Baseados nos estados especiais anteriores temos os seguintes estados no lado  $[G, W]$  que definem segmentos cujas soluções têm estruturas distintas. O estado  $I^P$  é definido como sendo o estado tal que a curva de onda - 1 por  $I^P$  atinja  $P$ . Os estados  $C$  e  $I^{G_*}$  são definidos pelas intersecções das curvas integrais - 1 por  $C_*$  e  $G_*$  com o lado  $[G, W]$ , respectivamente.

Assim, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações (ver Figura B.13):

- (a) Se  $I = W$ , ou seja, se for injetado apenas água, então a sequencia de ondas

que compõe a solução do problema de Riemann é constituída apenas por uma rarefação - 2 de  $W$  para  $P$ , correspondendo à solução da equação de Buckley-Leverett ao longo do lado  $[W, O]$ ;

- (b) Se  $I \in (I^P, W)$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma onda composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(W, P)$  do lado  $[W, O]$ , seguida de uma rarefação - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 consiste de uma rarefação - 1 de  $I$  para o estado  $T$  no segmento  $(W, T^P)$  da extensão - 1 do segmento  $(W, P)$  no lado  $[W, O]$ , seguida de um choque - 1 de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$ ;
- (c) Se  $I = I^P$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução é constituída apenas por uma onda composta - 1 de  $I$  para  $P$ . Esta composta - 1 consiste da onda de rarefação - 1 de  $I^P$  para  $T^P$ , seguida do choque - 1 de  $T^P$  para  $P$ , com  $\sigma(T^P; P) = \lambda_1(T^P)$ ;
- (d) Se  $I \in [I^D, I^P)$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma onda composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(P, D]$  do lado  $[W, O]$ , seguida de um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 consiste de uma onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T$ , com  $T$  no segmento  $(T^P, T^D]$  da extensão - 1 do segmento  $(P, D]$  no lado  $[W, O]$ , seguida de um choque - 1 de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ . Além disso, temos que  $\sigma(T; M) < \sigma(M; P)$ . No caso limite  $I = I^D$ , então  $T$  coincide com  $T^D$  e o choque de  $T^D$  para  $D$  é o limite entre um choque - 1 e um choque transicional, que define a extensão - 1 do estado  $D$ . Observe que se  $I$  estiver entre  $B$  e  $I^P$  então a composta - 1 de  $I$  para  $M$  é local, enquanto que se  $I$  estiver entre  $I^D$  e  $B$  então a composta - 1 é não local;
- (e) Se  $I \in (C, I^D)$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução é constituída de três ondas: rarefação - 1 de  $I$  para  $K$ , com  $K$  no segmento  $[C_*, T^D)$  de inflexão - 1 (ou de choque transicional), seguida de um choque transicional de  $K$  para  $D$ , que por sua vez é seguido por um choque - 2 de  $D$  para  $P$ , com  $\sigma(K; D) < \sigma(D; P)$ ;
- (f) Caso crítico: se  $I = C$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de duas maneiras distintas no espaço de

estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- $xt$ :

- (1) rarefação - 1 de  $C$  para  $C_*$ , seguida pelo choque transicional de  $C_*$  para  $D$ , que por sua vez é seguido de um choque - 2 de  $D$  para  $P$ , com  $\sigma(C_*; D) = \sigma(D; P)$ ;
  - (2) rarefação - 1 de  $C$  para  $C_*$ , seguida de um choque - 2 de  $C_*$  para  $P$ .
- (g) Se  $I \in [I^{G_*}, C)$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann volta a possuir duas ondas como nos casos anteriores. Sendo constituída por uma rarefação - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $[G_*, C_*)$  de choque - 2 de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida por um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . Para  $I = I^{G_*}$  temos que  $M = G_*$  e  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ;
- (h) Se  $I \in (G, I^{G_*})$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução é constituída por uma rarefação - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(G, G_*)$  de composta - 2 de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida de uma onda composta - 2 de  $M$  para  $P$ . Esta composta - 2 consiste de uma onda de rarefação - 2 de  $M$  para  $G_*$ , seguida de um choque - 2 de  $G_*$  para  $P$ , com  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ;
- (i) Se  $I = G$ , ou seja, se for injetado apenas gás, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída apenas por uma onda composta - 2 de  $G$  para  $P$ . Esta composta consiste de uma onda de rarefação - 2 de  $G$  para  $G_*$ , seguida de um choque - 2 de  $G_*$  para  $P$ , com  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ , a qual é análoga à solução da equação de Buckley-Leverett para  $I = W$ .

Em resumo, se  $P \in (D, P_2)$  então as sequencias de ondas que compõe a solução do problema de Riemann para dados de injeção no lado  $[W, G]$  do triângulo de saturações podem ser representadas esquematicamente como a seguir (ver Figura B.13):

- (a)  $I = W$ :  $W \xrightarrow{R_2} P$ , (Buckley-Leverett ao longo de  $[W, O]$ );
- (b)  $I \in (I^P, W)$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{R_2} P$ ;
- (c)  $I = I^P$ :  $I^P \xrightarrow{(RS)_1} P$ ;
- (d)  $I \in [I^D, I^P)$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{S_2} P$ ;

$$(e) I \in (C, I^D): I \xrightarrow{R_1} K \xrightarrow{S_X} D \xrightarrow{S_2} P;$$

(f)  $I = C$ , tem-se duas sequencias no espaço de estados representando a mesma solução no espaço físico -  $xt$ :

$$(1) C \xrightarrow{R_1} C_* \xrightarrow{S_X} D \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(2) C \xrightarrow{R_1} C_* \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(g) I \in [I^{G_*}, C): I \xrightarrow{R_1} M \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(h) I \in (G, I^{G_*}): I \xrightarrow{R_1} M \xrightarrow{(RS)_2} P;$$

$$(i) I = G: G \xrightarrow{(RS)_2} P, \text{ (análogo à Buckley-Leverett).}$$

### Caso limite $P = P_2$

No caso limite em que  $P = P_2$  cuja curva de Hugoniot por  $P_2$  está exibida na Figura B.14, temos as seguintes modificações. Analogamente ao caso  $P = P_1$ , o estado intermediário  $M$  passa a coincidir com o estado  $D$ , o estado  $C_*$  passa a coincidir com  $T^D$  e o estado de injeção crítico  $C$  passa a coincidir com  $I^D$ . Assim, a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(P_2)$  passa a possuir o seguinte segmento correspondente à choques - 2 admissível  $[G_*, T^D]$ , que anteriormente era apenas  $[G_*, C_*]$ , no interior do triângulo de saturações, desaparecendo o segmento  $[C_*, T^D]$  de choque transicional.

Dessa maneira os estados especiais que definem segmentos com estruturas distintas da solução do problema de Riemann passam a ser apenas:  $G_*$ ,  $C_* \equiv T^D$  e  $P_2$ . E, conseqüentemente, os estados especiais de injeção ao longo do lado  $[G, W]$  passam a ser apenas  $I^{G_*}$ ,  $C \equiv I^D$  e  $I^P$ . Logo, neste caso limite, há o desaparecimento do choque transicional na sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann, voltando a mesma a possuir apenas duas ondas.

Desta forma temos que a solução muda no caso crítico  $I = C$ , a qual passa a ser dada por duas sequencias de ondas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- $xt$ :

- (1) composta - 1 de  $C = I^D$  para  $D$ , seguida de um choque - 2 de  $D$  para  $P_2$ . Esta composta - 1 consiste de uma onda de rarefação - 1 de  $C = I^D$  para  $C_* \equiv T^D$ , seguida pelo choque - 1 de  $C_* = T^D$  para  $D$ , com  $\sigma(C_*; D) = \lambda_2(C_*)$ ;



- (2) composta de  $C = I^D$  para  $P_2$ . Neste caso, a composta é constituída de uma onda de rarefação - 1 de  $C = I^D$  para  $C_* \equiv T^D$ , seguida de um choque compressivo de  $C_* = T^D$  para  $P_2$ , com  $\sigma(C_*; P_2) = \lambda_1(C_*)$ ;

Esquemáticamente para o caso crítico, temos:

- (1)  $C \xrightarrow{(RS)_1} D \xrightarrow{S_2} P_2$ ;  
(2)  $C \xrightarrow{(RS)_{1C}} P_2$ .

### 5.3.5 Caso 5: Estados de Produção $P \in (P_2, W)$

Seja  $P$  um estado de produção arbitrário no segmento  $(P_2, W)$  do lado  $[W, O]$ . A Figura B.15 exhibe a curva de Hugoniot por esse estado  $P$ . Observe que  $\mathcal{H}(P)$  possui os seguintes segmentos de choques admissíveis que podem atingir  $P$ :  $[G_*, C_*]$  no interior do triângulo de saturações e  $[W_*, P]$  no lado  $[W, O]$  correspondente a choques - 2 e  $[P, T^P]$  de choque - 1. Como nos casos anteriores os estados  $G_*$ ,  $C_*$  e  $W_*$  são extensões tais que  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ,  $\sigma(C_*; P) = \lambda_1(C_*)$  e  $\sigma(W_*; P) = \lambda_2(W_*)$ .

Baseados nestas informações, temos que  $\mathcal{W}_-(P)$  é constituída dos segmentos  $[G, G_*]$  e  $[O, W_*]$  de composta - 2 e dos segmentos  $[W_*, P]$  e  $[G_*, C_*]$  de choque - 2, além do segmento  $[W, P]$  de rarefação - 2. O subsegmento  $[W_*, D)$  não tem papel relevante na construção da solução porque as curvas de onda - 1 provenientes dos estados de injeção ao longo do lado  $[G, W]$  não o atingem. Neste caso, devido a regra do choque triplo, voltamos a ter o estado  $C_*^W$  no lado  $[W, O]$ , tal que  $\lambda_1(C_*) = \sigma(C_*; C_*^W) = \sigma(C_*^W; P)$ . Observamos que não há relação entre as posições de  $C_*^W$  e  $P_2$  no lado  $[W, O]$ , pois se  $P$  se aproximar de  $P_2$  então  $C_*^W$  está entre  $P_2$  e  $D$ , porém se  $P$  se aproximar de  $W$  então  $C_*^W$  está entre  $P_2$  e  $W$ .

Assim, os estados especiais que definem construções distintas de soluções do problema de Riemann são  $G_*$ ,  $C_*$ ,  $C_*^W$  e  $P$ . A partir deles temos os seguintes estados no lado  $[G, W]$  determinando estruturas distintas nas sequencias de ondas que compõe as soluções:  $I^{G_*}$ ,  $C$  e  $I^P$ . Como nos casos anteriores,  $I^P$  é definido como sendo o estado tal que  $\mathcal{W}^1(I^P)$  atinge o estado  $P$ . Os estados  $I^{G_*}$  e  $C$  são definidos pelas intersecções das curvas integrais da família característica - 1 por  $G_*$  e  $C_*$  com o lado  $[G, W]$ , respectivamente.

Desta forma, temos as seguintes possibilidades de solução do problema de Riemann, de acordo com a localização do estado  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações (ver Figura B.16):

- (a) Se  $I = W$ , ou seja, se for injetado apenas água, então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída apenas por uma rarefação - 2 de  $W$  para  $P$ , coincidindo com a solução de Buckley-Leverett ao longo do lado  $[W, O]$ ;
- (b) Se  $I \in (I^P, W)$ , então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma onda composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(W, P)$  do lado  $[W, O]$ , seguida de uma rarefação - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 é constituída pela onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T$ , com  $T$  no segmento  $(W, T^P)$  da extensão - 1 de  $(W, P)$ , seguida de um choque - 1 de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T, M) = \lambda_1(T)$ ;
- (c) Se  $I = I^P$ , então a sequência de ondas que compõe a solução é constituída apenas por uma onda composta - 1 de  $I$  para  $P$ . Esta composta - 1 é constituída pela onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T^P$ , seguida do choque - 1 de  $T^P$  para  $P$ , com  $\sigma(T^P; P) = \lambda_1(T^P)$ ;
- (d) Se  $I \in (C, I^P)$  a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(P, C_*^W)$  do lado  $[W, O]$ , seguida de um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . A composta - 1 consiste da onda de rarefação - 1 de  $I$  para  $T$ , seguida do choque - 1 de  $T$  para  $M$ ;
- (e) Caso crítico: se  $I = C$ , como consequência da regra do choque triplo, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser obtida de duas maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico- $xt$ :
  - (1) composta - 1 de  $I$  para  $C_*^W$ , seguida de um choque - 2 de  $C_*^W$  para  $P$ . A composta - 1 consiste da onda de rarefação - 1 de  $C$  para  $C_*$ , seguida de um choque - 1 de  $C_*$  para  $C_*^W$ , com  $\sigma(C_*; C_*^W) = \lambda_1(C_*)$ ;

- (2) composta de  $C$  para  $P$ . Esta composta é constituída pela onda de rarefação - 1 de  $C$  para  $C_*$ , seguida pelo choque compressivo de  $C_*$  para  $P$ , com velocidade  $\sigma(C_*; P) = \lambda_1(C_*)$ ;
- (f) Se  $I \in [I^{G_*}, C)$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma rarefação - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $[G_*, C_*)$  de choque - 2 de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida por um choque - 2 de  $M$  para  $P$ . Para o caso limite  $I = I^{G_*}$  temos que  $M = G_*$  e  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ;
- (g) Se  $I \in (G, I^{G_*})$ , então a sequencia de ondas que compõe a solução é constituída por uma rarefação - 1 de  $I$  para  $M$ , com  $M$  no segmento  $(G, G_*)$  de composta - 2 de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ , seguida de uma onda composta - 2 de  $M$  para  $P$ . Esta composta - 2 é definida pela onda de rarefação - 2 de  $M$  para  $G_*$ , seguida de um choque - 2 de  $G_*$  para  $P$ , com  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ ;
- (h) Se  $I = G$ , ou seja, se for injetado apenas gás, então a solução é constituída por uma onda composta - 2 de  $G$  para  $P$ . Esta composta é definida pela onda de rarefação - 2 de  $G$  para  $G_*$  seguida de um choque - 2 de  $G_*$  para  $P$ , com  $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$ , a qual é análoga à solução da equação de Buckley-Leverett para  $I = W$ .

Em resumo, se  $P \in (P_2, W)$  então as sequencias de ondas que compõe a solução do problema de Riemann para dados de injeção na fronteira  $[W, G]$  do triângulo de saturações podem ser representadas esquematicamente como a seguir (ver Figura B.16):

- (a)  $I = W$ :  $W \xrightarrow{R_2} P$ , (Buckley-Leverett ao longo de  $[W, O]$ );
- (b)  $I \in (I^P, W)$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{R_2} P$ ;
- (c)  $I = P$ :  $P \xrightarrow{(RS)_1} P$ ;
- (d)  $I \in (C, I^P)$ :  $I \xrightarrow{(RS)_1} M \xrightarrow{S_2} P$ ;
- (e)  $I = C$ , tem-se duas sequencias no espaço de estados representando a mesma solução no espaço físico -  $xt$ :

$$(1) C \xrightarrow{(RS)_1} C_*^W \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(2) C \xrightarrow{(RS)1C} P;$$

$$(f) I \in [I^{G^*}, C]: I \xrightarrow{R_1} M \xrightarrow{S_2} P;$$

$$(g) I \in (G, I^{G^*}): I \xrightarrow{R_1} M \xrightarrow{(RS)2} P;$$

$$(h) I = G: G \xrightarrow{(RS)2} P, \text{ (análogo à Buckley-Leverett).}$$

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho foi construída a solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação modelando um escoamento em meio poroso com dados de produção sendo uma mistura de água e óleo e dados de injeção uma mistura de água e gás. Construída a solução para todos os dados de produção  $P$  representativos e todos os dados de injeção  $I$  possíveis concluímos que para cada estado  $P$  de produção fixado existem estados de injeção que separam construções distintas de soluções no espaço de estados. Além disso, com exceção do caso limite para o estado de produção  $P = D$ , sempre existe um caso crítico de injeção para cada dado de produção fixado. Neste caso crítico, sempre há duas ou três maneiras de escrever a solução no espaço de estados, mas representando a mesma solução no espaço físico -  $xt$ . Comparando os resultados vimos que para  $P$  próximo de  $O$  a solução aqui encontrada é também próxima daquela descrita em [1], mostrando assim a estabilidade da solução e dependência contínua com relação aos dados iniciais. Para estados de produção numa faixa bem definida, mostramos a presença de choques transicionais na sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann. Nestes casos, a sequência genérica passa de duas para três ondas, ou seja, obtemos uma construção não clássica. Para cada estado de produção  $P$  representativo acreditamos que o caso de injeção crítica corresponde à melhor estratégia de injeção, isto é, a que otimiza a recuperação do óleo residente no reservatório. Esta comparação é um dos objetivos imediatos para o prosseguimento deste trabalho.

# Apêndice **A**

## Figuras dos Capítulos 1,2,3 e 4

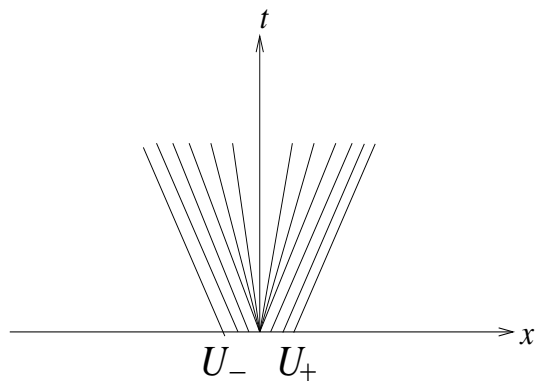


Figura A.1: Solução do problema de Riemann por uma rarefação

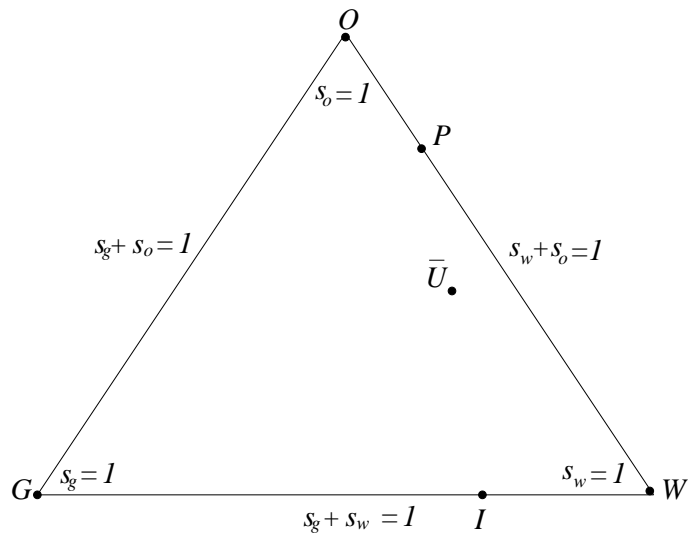


Figura A.2: Triângulo de saturações em coordenadas baricêntricas

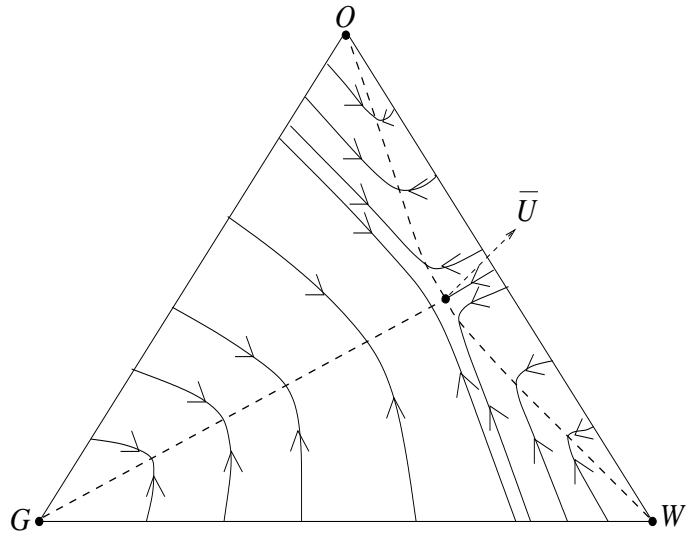


Figura A.3: Curvas integrais e conjunto de inflexão da família característica - 1. As linhas contínuas representam as curvas integrais - 1, sendo que as setas indicam o sentido de crescimento da velocidade característica - 1 ao longo das curvas integrais. As linhas tracejadas representam o conjunto de inflexão - 1.

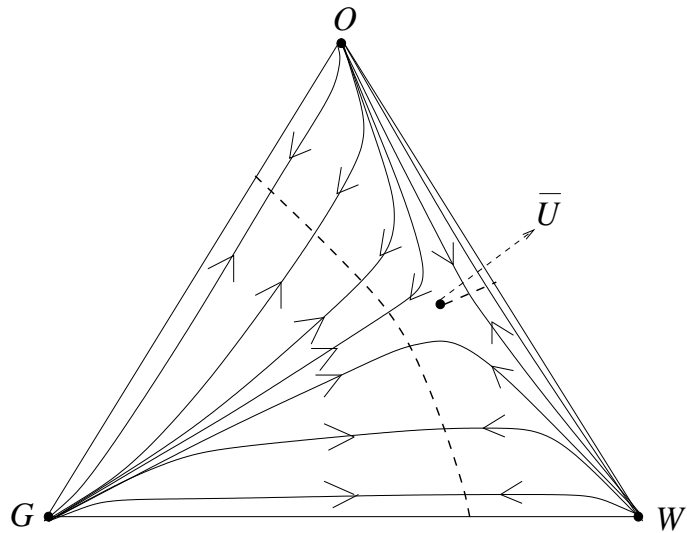


Figura A.4: Curvas integrais e conjunto de inflexão da família característica - 2. As linhas contínuas representam as curvas integrais - 2, sendo que as setas indicam o sentido de crescimento da velocidade característica - 2 ao longo das curvas integrais. As linhas tracejadas representam o conjunto de inflexão - 2.

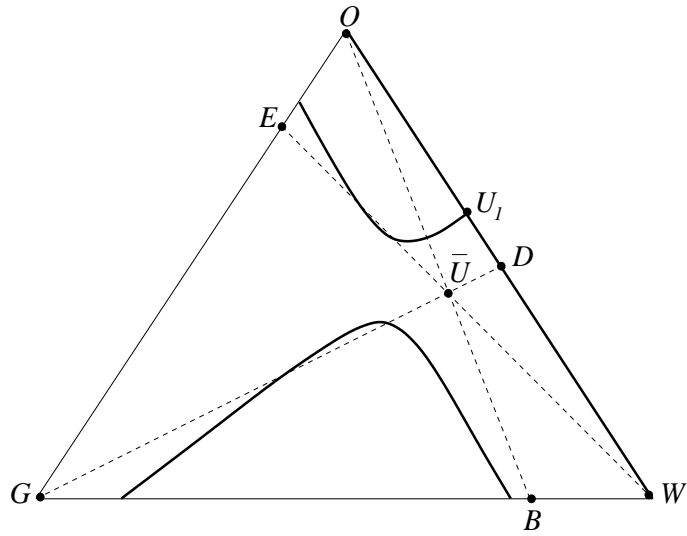


Figura A.5: Conjunto de bifurcação secundária e curva de Hugoniot por  $U_1$ . As linhas tracejadas  $[B, O]$ ,  $[G, D]$  e  $[W, E]$  representam o conjunto de bifurcação secundária, as linhas contínuas grossas representam a curva de Hugoniot por  $U_1$ .

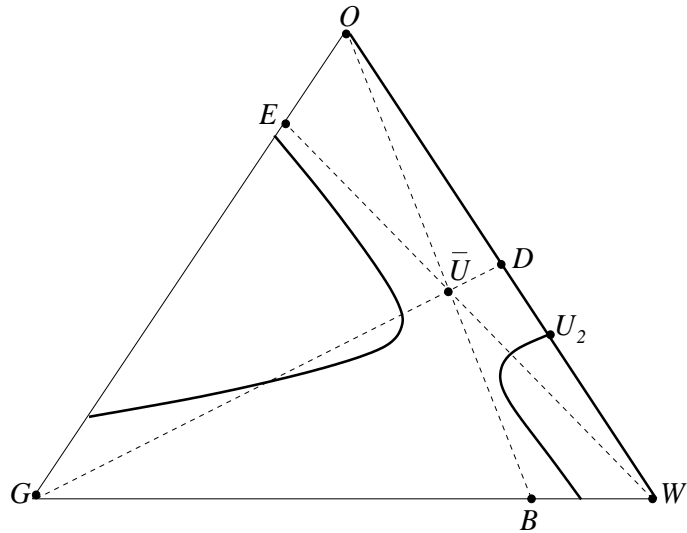


Figura A.6: Conjunto de bifurcação secundária e curva de Hugoniot por  $U_2$ . As linhas tracejadas  $[B, O]$ ,  $[G, D]$  e  $[W, E]$  representam o conjunto de bifurcação secundária, as linhas contínuas grossas representam a curva de Hugoniot por  $U_2$ .



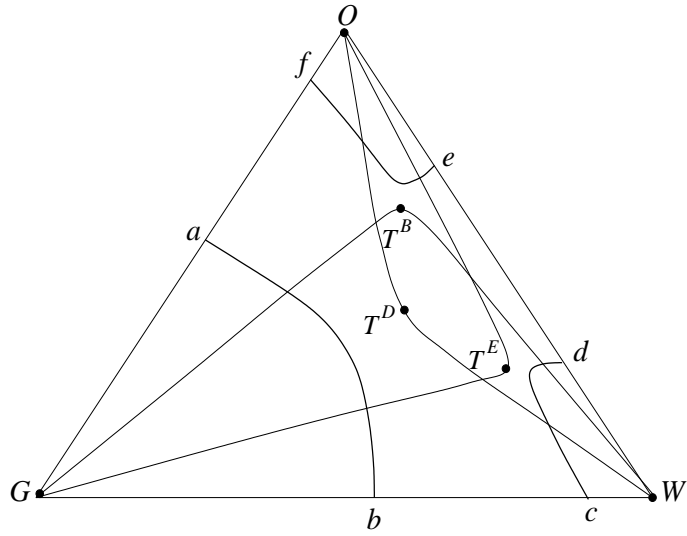


Figura A.7: Conjuntos de extensão de fronteiras associados às famílias características 1 e 2. As curvas  $[G, T^E, O]$ ,  $[W, T^D, O]$  e  $[G, T^B, W]$  representam as extensões - 1 dos lados  $[G, O]$ ,  $[W, O]$  e  $[G, W]$ , respectivamente. As curvas  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  e  $[e, f]$  representam as extensões - 2 dos lados  $[W, O]$ ,  $[G, O]$  e  $[G, W]$ , respectivamente.

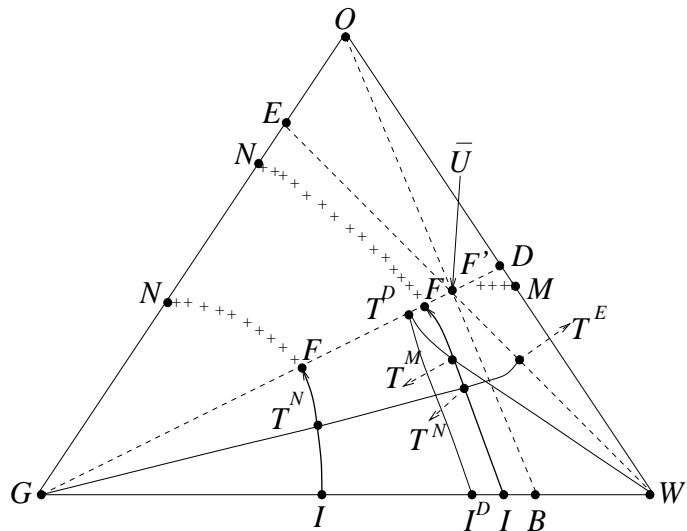


Figura A.8: Curvas de onda - 1 para estados de injeção representativos de cada um dos segmentos  $[G, I^D]$  e  $[I^D, B]$  no lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações.

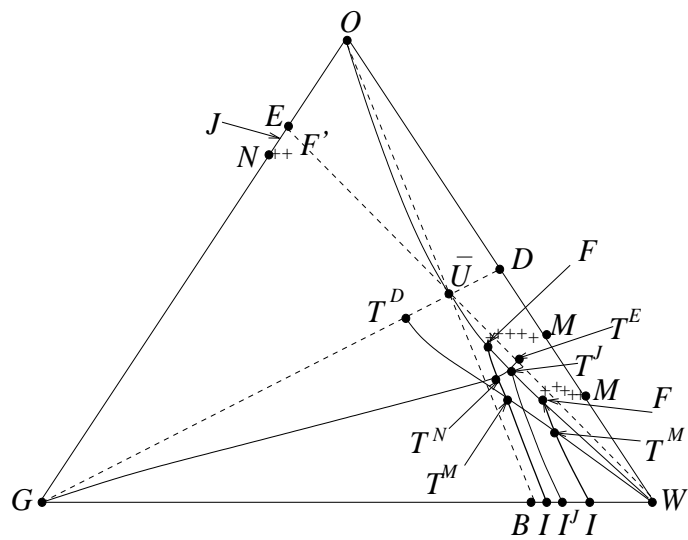


Figura A.9: Curvas de onda - 1 para estados de injeção representativos de cada um dos segmentos  $[B, I^J]$  e  $(I^J, W)$ , do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações.

# Apêndice B

## Figuras do Capítulo 5

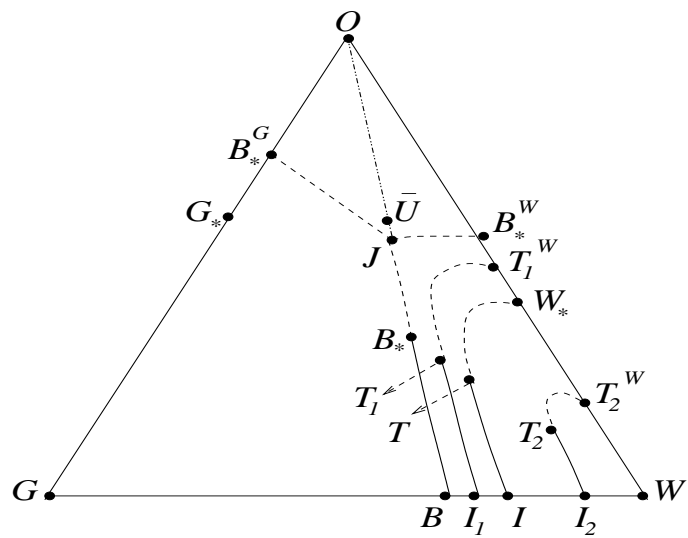


Figura B.1: Solução para o Caso  $P = O$ . Fonte: [1].

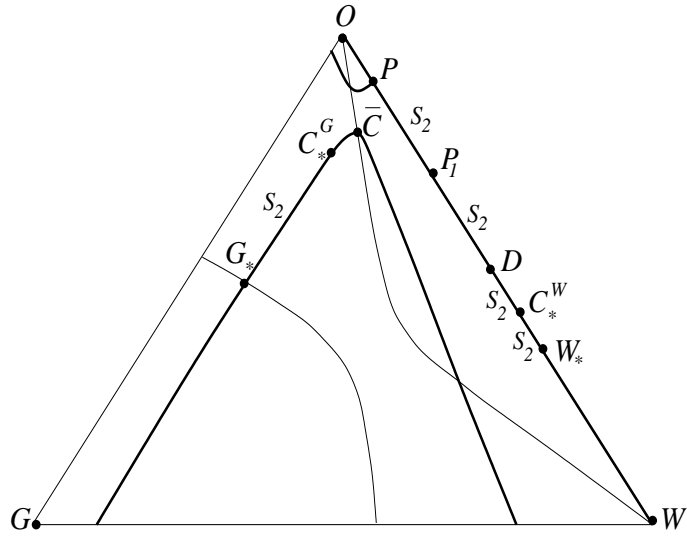


Figura B.2: Curva de Hugoniot pelo estado  $P = (0.1, 0.9, 0) \in (O, P_1)$  representada pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

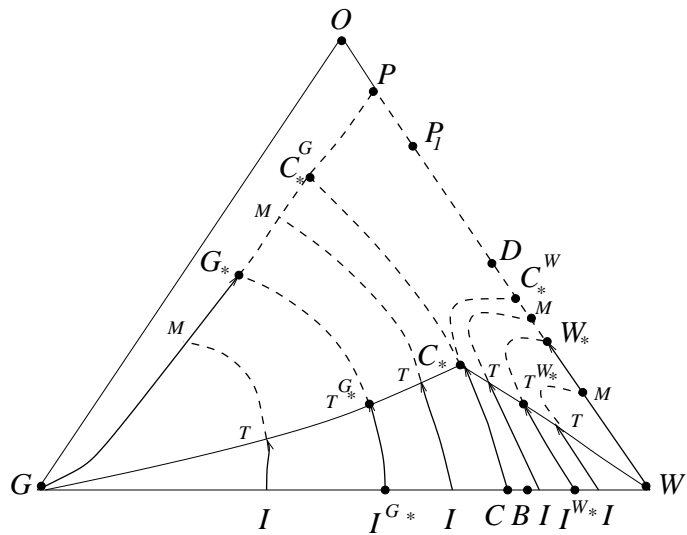


Figura B.3: Solução para o Caso 1:  $P \in (O, P_1]$ .

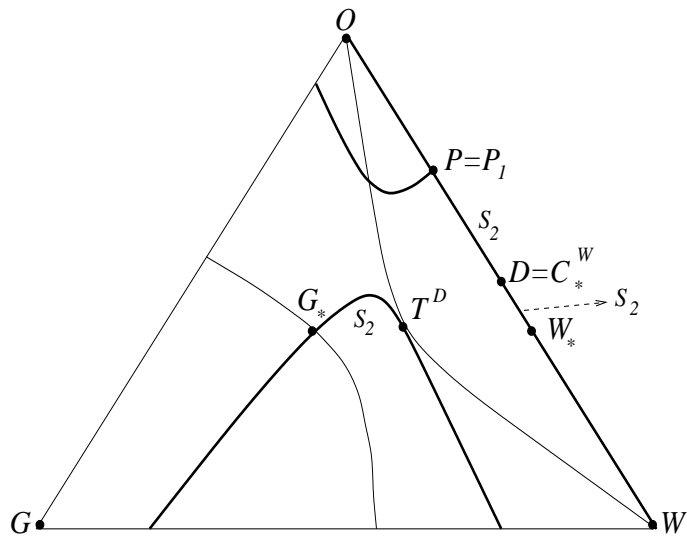


Figura B.4: Curva de Hugoniot pelo estado  $P = P_1 = (0.2764, 0.7236, 0)$  representada pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

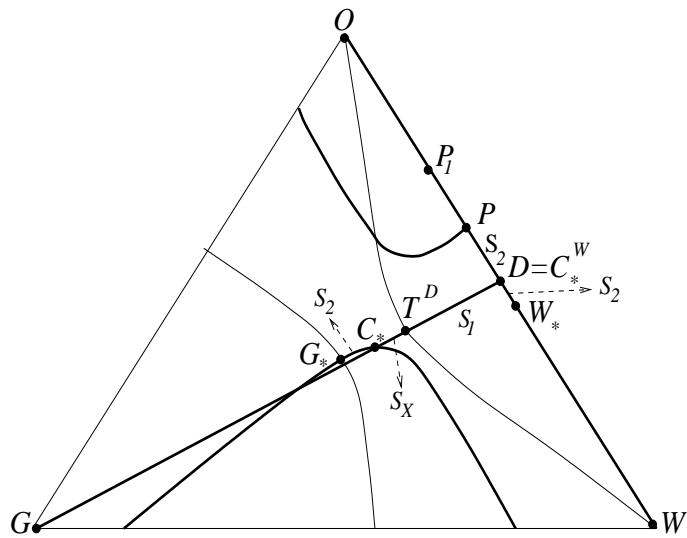


Figura B.5: Curva de Hugoniot pelo estado  $P \in (P_1, D)$ , com  $P = (0.4, 0.6, 0)$ , e o ramo  $[G, D]$  da curva de Hugoniot por  $D$  representados pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

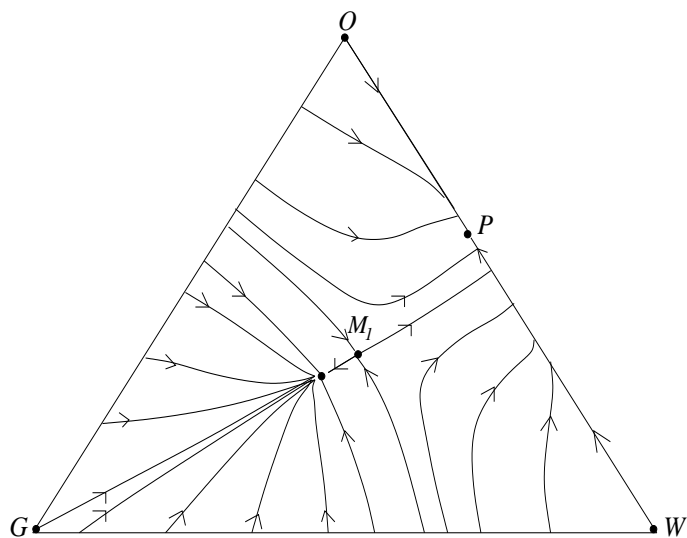


Figura B.6: Plano de fase para um estado  $M_1$  no segmento  $(G_*, C_*)$  da curva de Hugoniot por  $P$ , com  $P \in (P_1, D)$ .

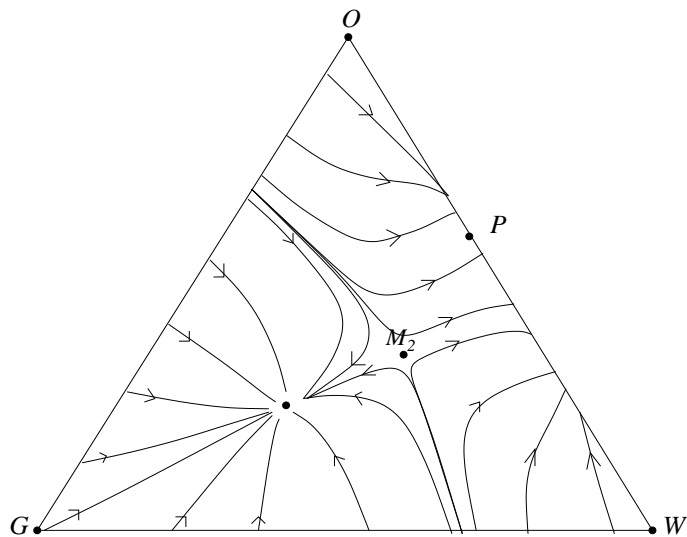


Figura B.7: Plano de fase para um estado  $M_2$  no segmento (de choque - 2 de Lax) da curva de Hugoniot por  $P$ , abaixo da reta de bifurcação secundária  $[G, D]$ , com  $P \in (P_1, D)$ .

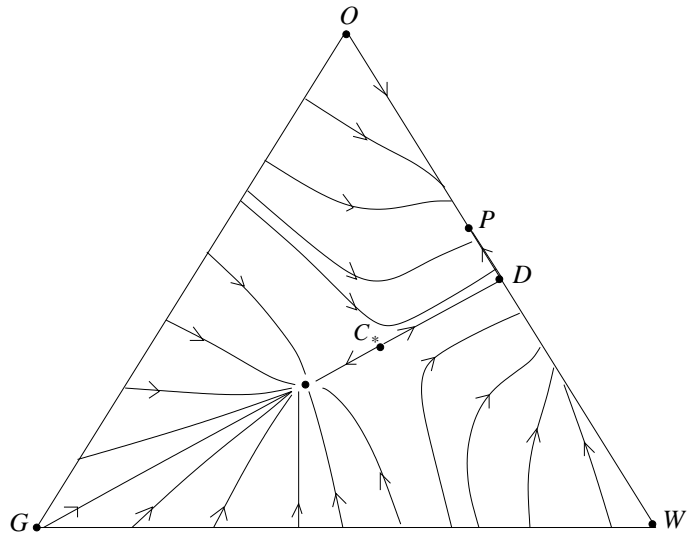


Figura B.8: Plano de fase para o estado  $C_*$  na intersecção da curva de Hugoniot por  $P$ ,  $P \in (P_1, D)$ , com a reta de bifurcação secundária  $[G, D]$ .

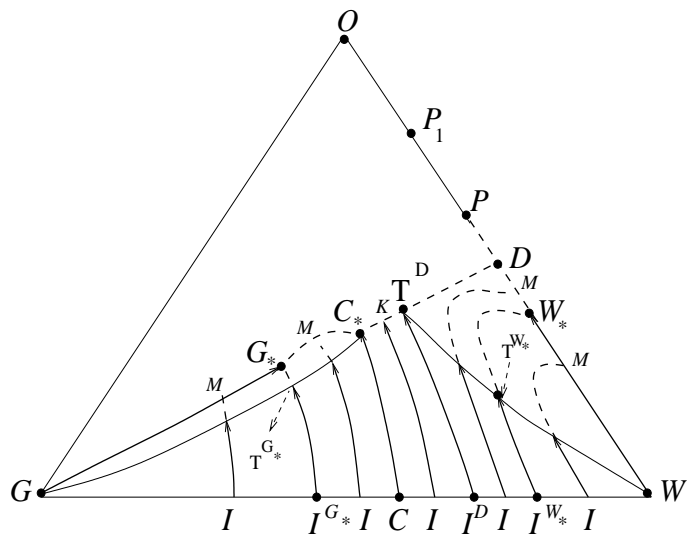


Figura B.9: Solução para o Caso 2:  $P \in (P_1, D)$ .

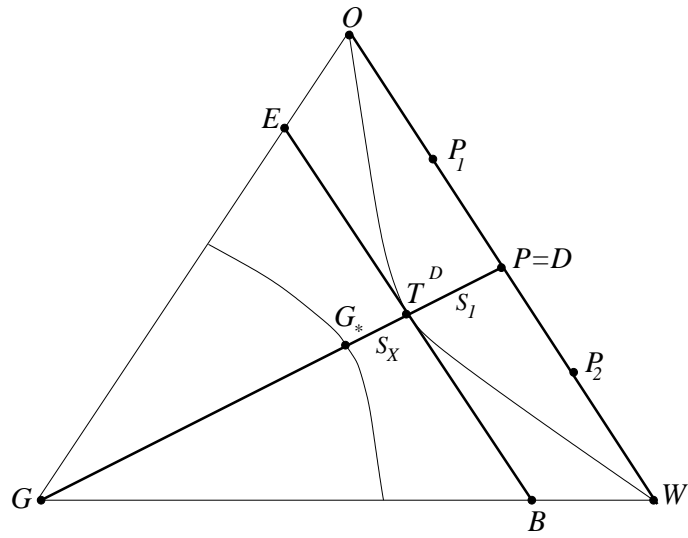


Figura B.10: Curva de Hugoniot pelo estado  $P = D = (0.5, 0.5, 0)$  representada pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

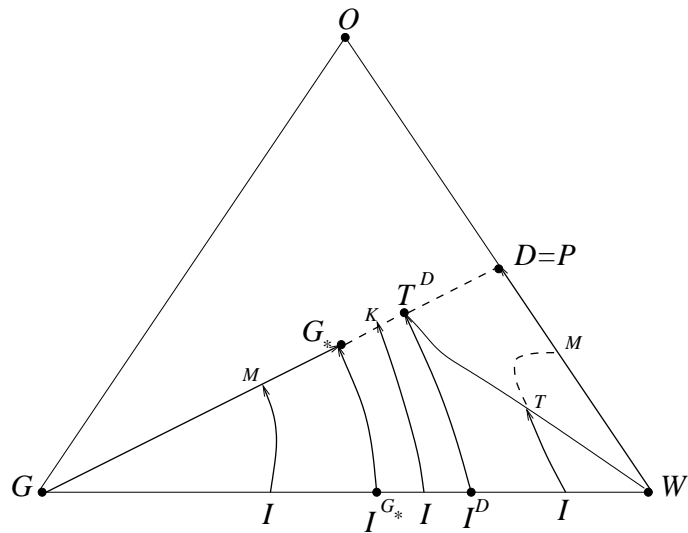


Figura B.11: Solução para o Caso 3:  $P = D$ .



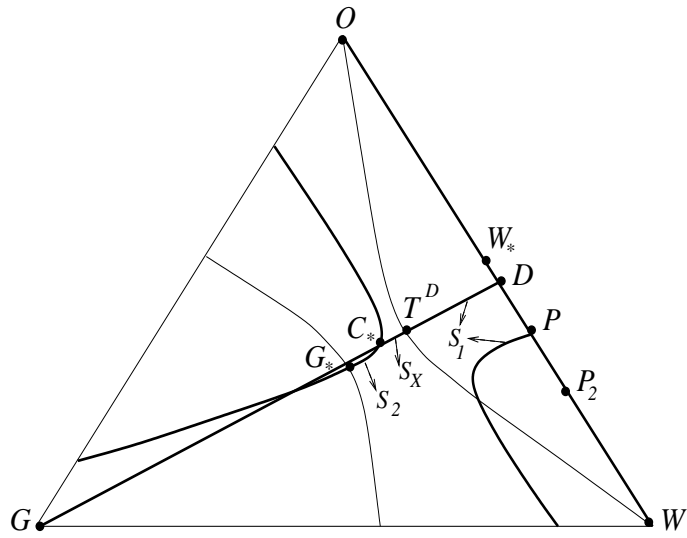


Figura B.12: Curva de Hugoniot pelo estado  $P = (0.6, 0.4, 0) \in (D, P_2)$  e o ramo  $[G, D]$  da curva de Hugoniot por  $D$  representados pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

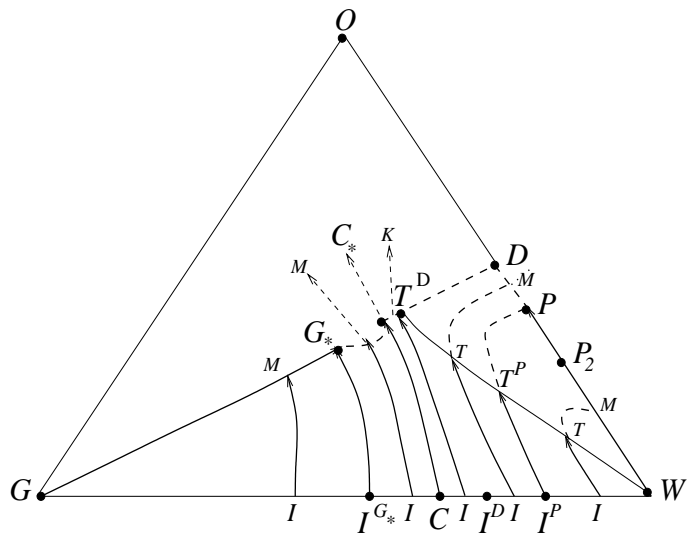


Figura B.13: Solução para o Caso 4:  $P \in (D, P_2]$ .

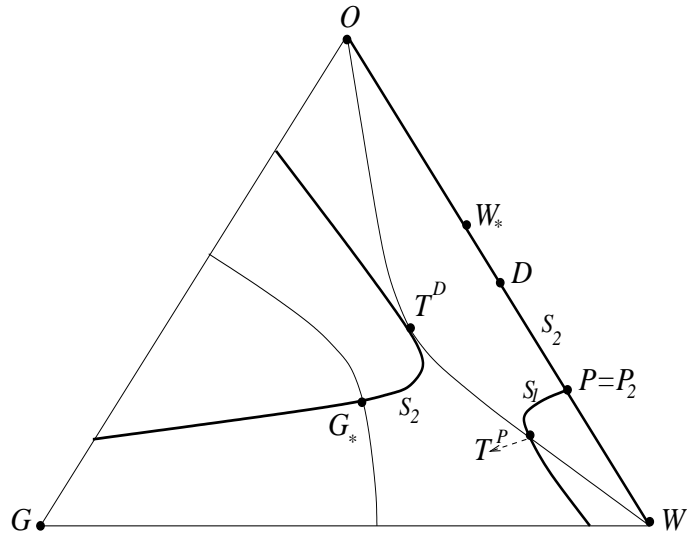


Figura B.14: Curva de Hugoniot pelo estado  $P = P_2 = (0.7236, 0.2764, 0)$  representada pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

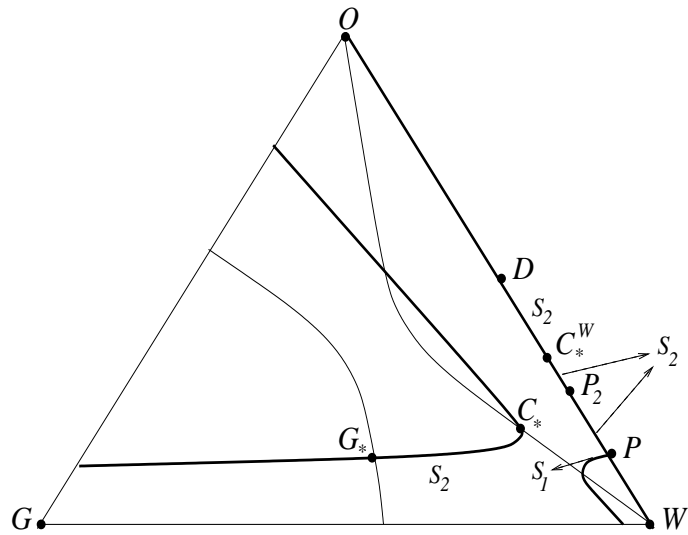


Figura B.15: Curva de Hugoniot pelo estado  $P = (0.85, 0.15, 0) \in (P_2, W)$  representada pelas linhas grossas. As linhas finas representam os conjuntos de extensão que influenciam na construção da solução.

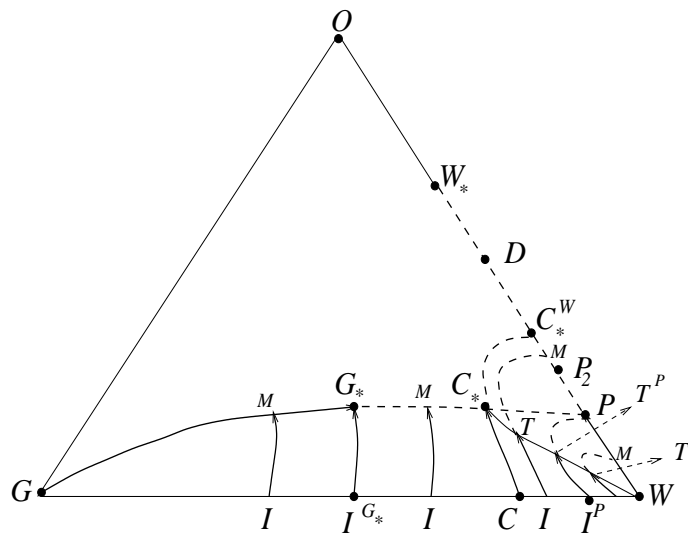


Figura B.16: Solução para o Caso 5:  $P \in (P_2, W)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] AZEVEDO, A. V.; SOUZA, A. J.; FURTADO, F.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. *The Riemann solution for three-phase flow in a porous medium. Proceedings of the 12th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications - HYP2008, Maryland USA, 2009.*
- [2] AZEVEDO, A. V.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B.; ZUMBRUN, K. *Capillary Instability in Models for Three-Phase Flow. Mathematics Subject Classification (2000).*
- [3] BELL, J. B.; TRANGENSTEIN, J. A.; SHUBIN, G. R. *Conservation Laws of Mixed Type Describing Three-Phase Flow in Porous Media. Exxon Production Reseach Co, 1985.*
- [4] CHAVENT, G.; JAFFRÉ J. *Mathematical Models and Finites Element Methods for Reservoir Simulation, Studies in Mathematics and its applications series. Vol. 17, North-Holland, 1986.*
- [5] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.*
- [6] GEL'FAND, I. M. *Some Problems in Theory of Quasilinear Equations. Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2, n° 29, p. 295 – 381, 1963.*
- [7] GOMES, M. E. S. *Problema de Riemann Singular para um Modelo de Quarta Ordem em Escoamento Multifásico. Tese de Doutorado, PUC-RIO, 1987.*
- [8] ISAACSON, E. L.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J.; TEMPLE, J. B. *Multiphase Flow Models with Singular Riemann Problems. Comput. Appl. Math, v.11, n° 2, p. 147 – 166, 1992.*
- [9] ISAACSON, E. L.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J. *Transitional Waves por Conservation Laws. Journal on Mathematical Analysis, 1990.*
- [10] ISAACSON, E. L.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J. *The Riemann Problems Near a Hyperbolic Singularity: The Classification of Quadratic Riemann Problems I. SIAM J. Appl. Math., 48, 1990.*

- [11] JUANES, R.; PATZEK, T. W. *Analytical Solution to the Riemann Problem of three-phase Flow in Porous Media. Transport in Porous Media*, 2002.
- [12] LAKE, L. W. *Enhanced Oil Recovery. PrenticeHall, Engelwood Cliffs, NY*, 1989.
- [13] LAX, P. D. *Hyperbolic Systems of Conservations Laws II. Comm. Pure Appl. Math*, 10, p. 537 – 556, 1957.
- [14] LIU, T. P. *The Riemann Problem for General Systems of Conservation Laws, J. Diff. Eq.*, vol. 18, 218 – 234, 1975.
- [15] LIU, T. P. *Existence and Uniqueness Theorems for Riemann Problems, Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 212, 375 – 382, 1975.
- [16] MENIKOFF, R.; PLOHR, B. J. *The Riemann Problem for Fluid Flow of Real Materials. Rev. Mod. Phys.*, 1989.
- [17] PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. Elsevier*, 1977.
- [18] ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; XAVIER, J. A. D. *Engenharia de reservatório de petróleo. Universidade Corporativa / Núcleo Bahia*, 2001.
- [19] SMOLLER, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag*, 1994.
- [20] SOUZA, A. J. *Stability of Singular Fundamental Solutions under Perturbations for Flow in Porous Media. Comput. Appl. Math*, v.11, no2, p. 73 – 115, 1992.
- [21] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. IMPA, Rio de Janeiro*, 1979.
- [22] SCHAEFFER, D. G.; SHEARER, M.; MARCHESIN, D.; PAES-LEME, P. J. *Solution of the Riemann Problem for a Prototype  $2 \times 2$  System of Non-Strictly Hyperbolic Conservation Laws. Ach. Rat. Mech. Anal*, 97, p. 299 – 320, 1987.
- [23] SERRE, D. *Systems of Conservation Laws - Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves. Cambridge*, 1999.
- [24] SOUZA, A. J. *Sistemas Singulares de três Leis de Conservação em Escoamento Multifásico. Tese de Doutorado, PUC-RIO*, 1989.
- [25] WENDROFF, B. *The Riemann Problem for Materials with Non Convex Equations of State II: General Flow. J. Math. Anal. Appl.*, 38, p. 640 – 658, 1972.