Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Teorema do Gancho e Aplicações

por

Josefa Itailma da Rocha †

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

O Teorema do Gancho e Aplicações

por

Josefa Itailma da Rocha

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Alexei Krassilnilkov - UnB

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2011

Resumo

Neste trabalho usamos a Teoria de Young para representações dos grupos simétricos no estudo de PI-álgebras. Amitai Regev (1972) introduziu os conceitos de codimensão e cocaracter de uma PI-álgebra, os quais foram as principais ferramentas desse estudo. Apresentamos inicialmente o Teorema do Gancho, que foi demonstrado por Amitsur e Regev em 1982. Esse teorema refere-se ao comportamento da sequência de cocaracteres de uma PI-álgebra, dando condições para que um caracter irredutível do grupo S_n apareça com multiplicidade não nula na decomposição do n-ésimo cocaracter dessa PI-álgebra. Apresentamos também três aplicações desse teorema, entre elas o Teorema de Amitsur, que garante que toda PI-álgebra satisfaz uma potência de algum polinômio standard. Por fim, estudamos resultados de Amitsur e Regev de 1982 sobre um tipo de identidade que generaliza as identidades de Capelli.

Palavras-chave: Identidades polinomiais, representação de grupo, codimensão, cocaracter, cotamanho.

Abstract

In this work we use Young's Theory for representations of the symmetric groups in the study of PI-algebras. Amitai Regev (1972) introduced the concepts of codimension and cocharacter of PI-algebras, which are the main tools in this study. We first present the Hook Theorem, which was proved by Amitsur and Regev in 1982. This theorem refers to the behavior of the sequence of cocharacters of a PI-algebra, giving conditions for an irreducible character of the group S_n to appear with nonzero multiplicity in the decomposition of the cocharacter of this PI-algebra. We also present three applications of this theorem, including the Amitsur's theorem, which ensures that all PI-algebra satisfies a power of a standard polynomial. Finally, we study the results of Amitsur and Regev (1982) about a type identity that generalizes the Capelli identities.

Keywords: Polynomial identities, representation of groups, codimensions, cocharacters, colength.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me da força pra chegar até aqui.

Aos meus pais e irmãs pelo amor, apoio e dedicação.

Aos professores do departamento de matemática da UFRN, em especial a Viviane Simiolli e a Ronaldo Freire pelos ensinamentos e apoio para fazer o mestrado.

Aos professores do programa de pós-graduação em matemática da UFCG que contribuíram para minha formação, em especial a Claudianor, Bráulio, Henrique e Diogo.

Ao meu orientador, professor Brandão, não apenas pela orientação, mas também pela amizade dedicada durante esses dois anos de muito estudo.

Aos professores da banca examinadora pelas sugestões que contribuíram para melhoria do nosso trabalho.

Aos colegas de pós-graduação, em especial a Sirlene e Nancy pelas maravilhosas horas de estudos e amizade dedicada; a Ailton, Romildo e Rodrigo, que estão comigo desde a graduação na UFRN; e a Aline e Fabiana pelos ótimos momentos de lazer.

A Joelson por todo amor, apoio e compreensão.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais, Antônio e Isaura,
as minhas irmãs, Zinha e Gabi, e
ao meu Bem, Joelson.

Sumário

Introdução **1**

1 Conceitos Básicos **5**

1.1 Álgebras 5

1.2 Identidades Polinomiais, T-ideais e Variedades 13

1.3 Polinômios Multihomogêneos e Multilineares 18

1.4 Módulos Sobre Álgebras 21

1.5 Superálgebra e Supervariedade 26

1.6 Representações de Grupos 29

2 Representações do Grupo Simétrico e PI-álgebras **40**

2.1 Representações do Grupo Simétrico 40

2.2 Codimensão e Cocaracter 48

2.3 Codimensões e Cocaracteres de algumas álgebras 56

3 O Teorema do Gancho **67**

3.1 O Teorema do Gancho 67

3.2 O Teorema de Amitsur 71

3.3 Superálgebras Finitamente Geradas 73

3.4 Crescimento de Cotamanhos 79

4 O Teorema de Amitsur e Regev **84**

4.1 Preliminares 84

4.2 O Teorema de Amitsur e Regev 87

Bibliografia **93**

Introdução

A PI-teoria é a subárea da Teoria de Aneis que estuda as PI-álgebras. Um polinômio $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ em variáveis não comutativas é uma identidade polinomial para uma álgebra A se f se anula para qualquer substituição das variáveis por elementos de A. Uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não nula é chamada de PI-álgebra. Todo álgebra comutativa é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade polinomial $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. As álgebras nilpotentes e as álgebras de dimensão finita também são exemplos de PI-álgebras.

O estudo da PI-teoria teve inicio com os trabalhos de matemáticos N. Jacobson [16], Kaplansky [19] e Levitzki [26] que estudaram a estrutura de álgebras e anéis que satisfazem uma identidade polinomial. Esse estudo ganhou força a partir de 1950 com o artigo de Amitsur e Levitzki [1] onde provou-se, por métodos combinatórios, que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade para álgebra das matrizes quadradas $M_n(K)$. A partir deste trabalho a PI-teoria passou a ter como principal foco a descrição das identidades polinomiais de uma PI-álgebra.

O conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma PI-álgebra associativa A é um T-ideal, ou seja, um ideal de $K_0 \langle X \rangle$ a álgebra associativa livre de posto enumerável, que é invariante por todos os endomorfismos de $K_0 \langle X \rangle$. Assim para descrever as identidades polinomiais de uma PI-álgebra é suficiente encontrar um conjunto que gera $T(A)$ como um T-ideal. Tal conjunto é chamado de base para as identidades de A. Em 1950 Specht conjecturou que toda álgebra associativa sobre um corpo de característica zero possui uma base finita para suas identidades. Este problema foi resolvido apenas em 1987 por Kemer (Ver [20] e [21]), que deu uma resposta afirmativa para a conjectura de Specht. Entretanto, o trabalho de Kemer não mostra como determinar tal base finita e a descrição do T-ideal de uma álgebra continua sendo, em geral, um problema difícil, resolvido apenas para algumas álgebras importantes (no primeiro capítulo serão citados alguns trabalhos importantes de descrição de identidades polinomiais).

Nas últimas décadas os principais resultados da PI-teoria sobre corpos de característica zero têm sido obtidos através da Teoria de Young para representações do grupo simétrico. Esse estudo começou com um importante trabalho de Amitai Regev [29] de 1972 onde foram introduzidos os conceitos de codimensão e cocaracter de uma PI-álgebra. Considerando P_n o espaço vetorial dos polinômios (associativos) multilineares de grau n como um S_n-módulo, e sendo A uma PI-álgebra e $T(A)$ o T-ideal das suas identidades polinomiais, definimos a n-ésima *codimensão* de A, denotada por $c_n(A)$, como sendo a dimensão do S_n-módulo quociente $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$ e o seu n-ésimo *cocaracter*, denotado por $\chi_n(A)$, como sendo o caracter de $P_n(A)$.

Um importante resultado obtido através da aplicação da Teoria de Young a PI-teoria deve-se a Regev e Latyshev (ver [29] e [25]) que estabeleceram que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A é limitada exponencialmente. Este resultado motivou o estudo do limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$, e em 1998 e 1999 Giambruno e Zaicev (ver [12] e [13]) provaram que este limite existe e é um número inteiro não negativo, chamado de *expoente de A.* Outro resultado que destacaremos deve-se a Olsson e Regev [27] em 1976 onde caracterizam-se as sequências limitadas de codimensões. Posteriormente, em 1979, Regev [30] caracterizou as álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli através da sua sequência de cocaracteres.

Em 1982, Amitsur e Regev [3] provaram o conhecido Teorema do Gancho, o qual apresenta uma interessante propriedade das sequências de cocaracteres, e é o principal assunto deste trabalho. Em 2000, também através da sequência de cocaracteres de uma álgebra, Giambruno e Zaicev [14], caracterizaram as álgebras com crescimento polinomial das suas codimensões.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos os conceitos básicos, como identidades polinomiais, T-ideais, variedades, superálgebras, polinômios multilineares e multihomogêneos, módulos e representações de grupos. Esses conceitos serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Além disso apresentaremos alguns exemplos importantes como a álgebra de grupo KG e a álgebra de Grassmann. Os principais resultados desse capítulo dizem respeito a relação entre os KG-módulos e as K-representações lineares de um grupo finito G. Ainda neste capítulo é feito um estudo sobre caracteres.

No capítulo 2 apresentamos a Teoria Young para representações do grupo simétrico, definindo partição de um número natural n, diagrama e tabela de Young, destacando as tabelas standard que têm uma importante ligação com as dimensões dos S_n-módulos irredutíveis. Considerando K um corpo de característica zero, estabelecemos uma relação biunívoca entre as partições de n e os S_n-módulos irredutíveis. Apresentamos também resultados importantes sobre codimensão e cocaracter de uma PI-álgebra e sobre a decomposição dos S_n-módulos. Definimos o gancho infinito $H(d,l)$ e mostramos sua representação gráfica. Ainda nesse capítulo, baseado no artigo de A. Giambruno e D. La Mattina de 2005 [11], calculamos as codimensões, o cocaracteres e os cotamanhos das álgebras

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\},\ B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\} \text{ e}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K \right\}$$

No capítulo 3 vamos mostrar uma propriedade relacionada com a idéia de gancho infinito das sequências de cocaracteres de PI-álgebras. O resultado que da essa propriedade é o conhecido Teorema do Gancho e foi demonstrado por Amitsur e Regev [3] em 1982. A prova que apresentamos nesse capítulo é diferente da original (a qual é apresentada no capítulo 4) e pode ser encontrada em [15]. Também nesse capítulo serão apresentadas três de suas consequências. Uma delas é o teorema de Amitsur, que garante que toda PI-álgebra satisfaz uma potência de algum polinômio standard. Esse resultado foi demonstrado primeiramente em 1953, e sua demonstração original pode ser encontrada em [2]. Como uma segunda consequência mostraremos que dada uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$ existe uma superálgebra finitamente gerada tal que sua envoltória de Grassmann gera $\mathcal{V}$. Esse resultado deve-se a Kemer [20]. Por fim estudaremos o crescimento de cotamanhos e mostraremos que a sequência de cotamanhos de uma variedade não-trivial é polinomialmente limitada.

No capítulo 4 apresentamos resultados de Amitsur e Regev [3] de 1982 sobre a existência de identidades do tipo $f^*(x;y) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \dots y_{n-1} x_{\sigma(n)}$. Generalizando o resultado de Regev [30] de 1979 que caracteriza as álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli, apresentamos o resultado que caracteriza as álgebras que satisfazem uma identidade do tipo $e_{\lambda}^{*}(x;y) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{\lambda}(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 .... y_{n-1} x_{\sigma(n)}$, da qual as identidades de Capelli são um caso particular.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos e resultados importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho. Em todo esse capítulo K denotará um corpo e, a menos de menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre K.

1.1 Álgebras

Definição 1.1. *Uma K-álgebra é uma par $(A, *)$, onde A é um K-espaço vetorial e $* : A \times A \longrightarrow A$ uma aplicação bilinear, ou seja, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$, temos:*

i) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

ii) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

Por simplicidade iremos denotar a K-álgebra $(A, *)$ por A e o produto $a * b$ por ab, para $a, b \in A$. Usaremos também a expressão álgebra ao invés de K-álgebra. Definimos $a_1a_2a_3$ como sendo o produto $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, $a_1a_2...a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2...a_{n-1})a_n$, para $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n \in A$. Dizemos que um conjunto β é uma base da álgebra A se β é uma base do espaço vetorial A, e definimos a dimensão de A como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.

Definição 1.2. *Dizemos que uma álgebra A é:*

i) Associativa se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$;

ii) Comutativa se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;

iii) Unitária se existe $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$ para qualquer $a \in A$.

Em todo esse trabalho, a menos de menção contrária, todas as álgebras serão associativas.

Exemplo 1.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere o espaço vetorial $M_n(K)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K. Munido do produto usual de matrizes $M_n(K)$ é uma álgebra associativa com unidade. Considerando as matrizes unitárias E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, onde a única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e na j-ésima coluna, vê-se facilmente que essas matrizes formam uma base de $M_n(K)$ e assim a dimensão de $M_n(K)$ é n^2. Mais geralmente, se A é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. Munido do produto análogo ao das matrizes com entradas em K, $M_n(A)$ tem uma estrutura de álgebra.*

Exemplo 1.4. *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V, denotada por E, como sendo a álgebra com base $\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} | i_1 < i_2 < ... < i_k, k \geq 1\}$ cuja multiplicação é definido pelas relações*

$$e_i^2 = 0 \quad e \quad e_ie_j = -e_je_i$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Considere em E os subespaços vetoriais $E^{(0)}$, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m} \mid m \text{ é par}\}$, e $E^{(1)}$, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid k \text{ é ímpar}\}$. Claramente $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ como espaço vetorial. Observe que de $e_ie_j = -e_je_i$ temos que

$$(e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}e_{j_2}...e_{j_k})(e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m})$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$. Daí podemos concluir que $ax = xa$ para todo $a \in E^{(0)}$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E^{(1)}$.

Tomando agora E' como sendo a álgebra com base $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k;\ k \geq 1\}$, temos que E' não tem unidade e é chamada de álgebra de Grassmann sem unidade.

Observação 1.5. *Não é difícil ver que se A é uma álgebra e S é um conjunto gerador de A (como espaço vetorial), valem:*

i) A *é associativa se , e somente se,* $(uv)w = u(vw)$ *para quaisquer* $u, v, w \in S$*;*

ii) A *é comutativa se, e somente se,* $uv = vu$ *para quaisquer* $u, v \in S$*;*

iii) A *possui unidade se, e somente se, existe* $1 \in A$ *tal que* $1u = u1 = 1$ *para todo* $u \in S$*.*

Proposição 1.6. *Sejam* A *um espaço vetorial e* β *uma base de* A*. Então, dada uma função* $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$*, existe uma única aplicação bilinear* $* : A \times A \longrightarrow A$ *estendendo* f*.*

Demonstração. Dado $a \in A$ temos que $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, onde $\alpha_u \in K$ e o conjunto $\{u \in \beta \mid \alpha_u \neq 0\}$ é finito. Assim, dados $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, $b = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \in A$, defina $* : A \times A \longrightarrow A$ da seguinte maneira

$$a * b = \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v)$$

Observe que $*$ está bem definida pois se $\sum_{v \in \beta} \gamma_v v = \sum_{v \in \beta} \gamma_v^{'} v$, com $\gamma_v, \gamma_v^{'} \in K$, então $\gamma_v = \gamma_v^{'}$ para todo $v \in \beta$. Tomando agora $\mu \in K$ e $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, $a_1 = \sum_{u \in \beta} \alpha_u^{'} u$, $b = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \in A$, temos

$$\begin{aligned}
(a + a_1) * b &= \sum_{u \in \beta} (\alpha_u + \alpha_u^{'}) u * \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \\
&= \sum_{u,v \in \beta} (\alpha_u + \alpha_u^{'}) \lambda_v f(u, v) \\
&= \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) + \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u^{'} \lambda_v f(u, v) \\
&= (a * b) + (a_1 * b)
\end{aligned}$$

e

$$\mu(a * b) = \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) = \sum_{u \in \beta} (\mu \alpha_u) u * \sum_{v \in \beta} \lambda_v v = (\mu a) * b$$

Analogamente mostra-se que $\mu(a * b) = a * (\mu b)$ e que $a * (b_1 + b_2) = (a + b_1) * (a + b_2)$, para quaisquer $b_1, b_2 \in A$. Logo, $*$ é bilinear. Considerando agora $u_1, u_2 \in \beta$, temos que $u_1 = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, onde $\alpha_u = 1$ se $u = u_1$, e $\alpha_u = 0$ se $u \neq u_1$. Analogamente, $u_2 = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v$ onde $\lambda_v = 1$ se $v = u_2$, e $\lambda_v = 0$ se $v \neq u_2$. Daí

$$u_1 * u_2 = \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_u f(u, v) = \alpha_{u_1} \lambda_{u_2} f(u, v) = f(u, v),$$

donde temos que $*$ estende f. Resta mostrar que $*$ é a única com essa propriedade. Para isso, suponha que existe $*_1 : A \times A \longrightarrow A$ estendendo f. Daí devemos ter

$$a *_1 b = \sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v (u *_1 v) = \sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v f(u,v) = a * b,$$

donde $*$ é igual a $*_1$ e o resultado está demonstrado. ■

Exemplo 1.7. *Seja S um conjunto não vazio e considere o conjunto KS de todas as somas formais do tipo $\sum_{s\in S} \alpha_s s$, onde $\alpha_s \in K$ e $\{s \in S|\ \alpha_s \neq 0\}$ é finito. Dizemos que $\sum_{s\in S} \alpha_s s = \sum_{s\in S} \beta_s s$ em KS se $\alpha_s = \beta_s$ para todo $s \in S$. Definimos a soma e o produto por escalar em KS da seguinte maneira:*

$$\sum_{s\in S} \alpha_s s + \sum_{s\in S} \beta_s s = \sum_{s\in S} (\alpha_s + \beta_s) s$$

e para $\lambda \in K$

$$\lambda \sum_{s\in S} \alpha_s s = \sum_{s\in S} (\lambda \alpha_s) s.$$

Temos que KS, munido dessas operações, é um K-espaço vetorial. Podemos escrever

$$\sum_{s\in S} \alpha_s s = \alpha_{s_1} s_1 + \alpha_{s_2} s_2 + ... + \alpha_{s_n} s_n,$$

onde $\{s \in S|\alpha_s \neq 0\} = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Assim se identificarmos $s_0 \in S$ com o elemento $\sum_{s\in S} \alpha_s s$, onde

$$\alpha_s = \begin{cases} 1, & se \quad s = s_0 \\ 0, & se \quad s \neq s_0 \end{cases}$$

temos que S é base de KS e por isso chamamos KS de espaço vetorial com base S. Se $*$ é uma operação em S, pela Proposição 1.6, temos que $*$ se estende a uma única aplicação bilinear em KS, a qual também chamaremos de $*$. Desta forma $(KS, *)$ é uma K-álgebra. Pela Observação 1.5 temos que se $*$ é associativa em S (resp. comutativa), então $(KS, *)$ é associativa (resp. comutativa). Ainda pela Observação 1.5 temos que se $*$ possui elemento neutro em S, então este elemento funciona como unidade na álgebra $(KS, *)$.

Um caso particular do exemplo anterior aparece quando $S = G$ é um grupo (com notação multiplicativa). Considerando no espaço vetorial KG o produto induzido pela multiplicação de G, temos que KG é uma álgebra, chamada de *álgebra de grupo.* Observe que KG é uma álgebra associativa com unidade e que KG é comutativa se, e somente se, G é abeliano.

Sendo A uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o comutador $[a, b]$ como sendo

$$[a, b] = ab - ba$$

Definimos o comutador de comprimento n como sendo $[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n]$ para $a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in A$. Um cálculo simples nos dá que, para $a, b, c \in A$

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \tag{1.1}$$

Usando indução sobre (1.1) é possível mostrar que

$$[a_1a_2...a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1...a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1}...a_n.$$

Definição 1.8. *Seja A uma álgebra. Dizemos que:*

i) Um elemento $a \in A$ é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$;

ii) A é uma álgebra nil se todo elemento de A é nilpotente;

iii) A é uma álgebra nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$, ou seja, $a_1a_2...a_n = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

Exemplo 1.9. *Considere a álgebra* $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in K \right\}$, *cuja multiplicação é o produto usual de matrizes. Se $x = aE_{12} \in A$, então $x^2 = (aE_{12})(aE_{12}) = a^2(E_{12}E_{12}) = 0$; assim qualquer elemento da forma aE_{12} é nilpotente.*

Exemplo 1.10. *A K-álgebra*

$$\mathcal{N}_3(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ a, b, c \in K \right\}$$

é nilpotente.

Exemplo 1.11. *Considere a álgebra de Grassmann sem unidade E'. Dado $n \in N$, temos que $e_1e_2...e_n \neq 0$ e assim E' não é nilpotente. Dado $a \in E'$, sejam $x_0 \in E^{(0)}$*

e $x_1 \in E^{(1)}$ tais que $a = x_0 + x_1$. Pelo que foi visto no Exemplo 1.4, pode-se mostrar que $x_1^2 = 0$. Além disso, na base de E' que foi apresentada no mesmo exemplo todos os elementos têm quadrado nulo. Logo, x_0 é uma combinação linear de elementos nilpotentes que comutam, pois produtos de e_i's de tamanho par comutam com todos os elementos de E'. Assim x_0 e x_1 são nilpotentes e comutam, e consequentemente a é nilpotente. Portanto E' é uma álgebra nil.

Definição 1.12. *Seja A uma álgebra. Dizemos que:*

i) Um subespaço vetorial B é uma subálgebra de A se B é multiplicativamente fechado, ou seja, se para quaisquer $b_1, b_2 \in B$ temos $b_1b_2 \in B$.

ii) Um subespaço vetorial I de A é um ideal à direita (resp. à esquerda) de A se $xa \in I$ (resp. $ax \in I$) para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$.

iii) Um subespaço vetorial I é um ideal bilateral de A se é um ideal à direita e à esquerda simultaneamente.

Observação 1.13.

i) Observe na definição que toda subálgebra B é também uma álgebra, cuja a multiplicação é a restrição da multiplicação de A.

ii) Definimos ideal nil e ideal nilpotente da mesma forma que definimos álgebra nil e álgebra nilpotente.

Exemplo 1.14. *Sejam A a álgebra do exemplo anterior e*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda \in K \right\} = KE_{12}$$

Claramente I é um subespaço de A. Além disso, dados $a = k_1E_{12} + k_2E_{22} \in A$ e $x = \lambda E_{12} \in I$, temos

$$ax = (k_1E_{12} + k_2E_{22})\lambda E_{12} = 0 \quad e \quad xa = \lambda E_{12}(k_1E_{12} + k_2E_{22}) = \lambda k_2 E_{12}$$

Assim, $xa, ax \in I$. Logo, I é um ideal de A. Além disso, pelo Exemplo 1.9 temos que cada elemento de I é nilpotente. Portanto, I é um ideal nil de A.

Exemplo 1.15. *Sendo A uma álgebra, o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A | ax = xa \text{ para todo } x \in A\}$$

é chamado de centro de A. Observe que $Z(A)$ é um subespaço vetorial de A. Sendo A associativa temos que $Z(A)$ é uma subálgebra de A. É um fato bem conhecido que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} | \lambda \in K\}$. Pelo visto no Exemplo 1.4 temos que $Z(E) = E^{(0)}$.

Exemplo 1.16. *Seja G um grupo finito e KG a álgebra de grupo definida no Exemplo 1.7. Considere $Cl_1, Cl_2, ..., Cl_h$ as distintas classes de conjugação de G. Então os elementos $v_j = \sum_{g\in Cl_j} g$, para $j = 1, 2, ..., h$, formam uma base do centro de KG.*

Não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer de subálgebras (respectivamente ideais) de uma álgebra A ainda é uma subálgebra (respectivamente ideal) de A. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 1.17. *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A. Definimos:*

a) A subálgebra de A gerada por S, que denotaremos por $K\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S (e 1, no caso de A possuir unidade);

b) O ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais de A que contêm S.

Segue da definição acima que a subálgebra de A gerada por S é a menor subálgebra que contém S ($S \cup \{1\}$, se A possuir unidade), no sentido que se B é uma subálgebra de A e $S \subseteq B$ ($S \cup \{1\} \subseteq B$, se A possuir unidade), então $K\langle S\rangle$ também está contida em B. Analogamente temos que o ideal de A gerado por S é o menor ideal de A que contém S.

Também não é difícil ver que $K\langle S\rangle$ coincide com o subespaço de A gerado por $\{s_1s_2..s_k \mid k \in N,\ s_i \in S\}$, ou gerado por $\{1, s_1s_2..s_k \mid k \in N,\ s_i \in S\}$, se A possuir unidade. Além disso, o ideal gerado por S coincide com o subespaço gerado por $\{asb \mid s \in S,\ a, b \in A\}$.

Dizemos que uma álgebra A é *finitamente gerada* se existe subconjunto finito S de A tal que S gera A como álgebra, ou seja, $K\langle S\rangle = A$.

Definição 1.18. *Sejam A e B álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para quaisquer $a, b \in A$. Se A e B possuem unidades, então também exigimos $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Dizemos que φ é um *monomorfismo* se é injetivo, e que é um *isomorfismo* se é bijetivo. Um *endomorfismo* de uma álgebra A é um homomorfismo de A em A e um *automorfismo* é um endomorfismo bijetor. Denotaremos por $End(A)$ o conjunto de todos os endomorfismos de uma álgebra A.

Definição 1.19. *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathcal{B}$ é uma álgebra livre na classe $\mathcal{B}$ se existe um conjunto X que gera F (como álgebra) e para cada álgebra $A \in \mathcal{B}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow A$ que estende h. Nestas condições dizemos que F é livremente gerada por X na classe $\mathcal{B}$.*

Vamos agora construir uma álgebra que é livre na classe de todas as álgebras associativas e com unidade. Para isto considere $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ um conjunto não vazio e enumerável, cujos elementos vamos chamar de *variáveis*. Uma palavra em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_{i_j} \in X$. Se $n = 0$ temos a palavra vazia, que denotaremos por 1. Seja $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X. Dizemos que as palavras $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_n = j_n$.

Considere $K\langle X\rangle$ como sendo o espaço vetorial com base $S(X)$ (Veja o Exemplo 1.7). Vamos chamar os elementos de $K\langle X\rangle$ de *polinômios*. Assim um polinômio é uma soma formal de *monômios*, que são produtos formais de um escalar por uma palavra em X. Sendo $\alpha x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$, $\alpha \neq 0$, um monômio em $K\langle X\rangle$, definimos o seu *grau* como sendo n. Neste caso a palavra vazia tem grau 0. Definimos o grau de um polinômio não nulo $f \in K\langle X\rangle$ como sendo o máximo dos graus de seus monômios.

Considere em $S(X)$ a operação de concatenação, definida por:

$$(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$$

Observe que essa operação é associativa e que tem a palavra vazia como seu elemento neutro. Assim, $K\langle X\rangle$, munido da operação bilinear induzida por ela, é uma álgebra associativa com unidade.

Proposição 1.20. *$K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade e livremente gerada por X.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}$ a classe das álgebras associativas com unidade e $A \in \mathcal{B}$. Considere uma aplicação $g : X \longrightarrow A$ arbitrária, definida por $g(x_i) = a_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Então existe uma única aplicação linear $\varphi_g : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_g(1) = 1_A$ e $\varphi_g(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$. Temos que φ_g é um homomorfismo de álgebras e é o único que estende g. Portanto, $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade e livremente gerada por X. ■

Se $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$, então vamos denotar por $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ a imagem de f por φ_g. Note que $f(a_1, ..., a_n)$ é um elemento de A obtido pela substituição de x_i por a_i em f.

Sendo $S_0(X) = S(X) - \{1\}$, o subespaço $K_0\langle X\rangle$ gerado por $S_0(X)$ é uma subálgebra (sem unidade) de $K\langle X\rangle$. De modo análogo à proposição acima, temos que $K_0\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por X, na classe de *todas* as álgebras associativas. Observe que

$$K\langle X\rangle = K_0\langle X\rangle \oplus \langle 1\rangle$$

onde $\langle 1\rangle$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por 1.

1.2 Identidades Polinomiais, T-ideais e Variedades

Definição 1.21. *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para A se $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.*

Se $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma identidade polinomial para A, também dizemos que A satisfaz a identidade $f = 0$. Observe que $f = f(x_1, x_2, .., x_n)$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K_0\langle X\rangle$ em A.

Observação 1.22. *Se A é uma álgebra unitária e $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial para A, então $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda 1 + f_0(x_1, x_2, ..., x_n)$, onde $\lambda \in K$ e $f_0(x_1, x_2, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$, e*

$$0 = \lambda 1_A + f_0(0, 0, ..., 0)$$

Como $f_0(0, 0, ..., 0) = 0$, devemos ter $\lambda = 0$ e portanto $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K_0\langle X\rangle$.

Como o polinômio nulo é uma identidade polinomial para qualquer álgebra, vamos estabelecer a seguinte definição.

Definição 1.23. *Se A satisfaz uma identidade polinomial não nula, então A é dita uma PI-álgebra (ou álgebra com identidade polinomial).*

Exemplo 1.24. *Se A é uma álgebra comutativa, então A satisfaz a identidade polinomial $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$. Logo, A é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.25. *Se A é uma álgebra nilpotente, então A é uma PI-álgebra. De fato, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$, e assim o polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2...x_n$ é uma identidade polinomial para A.*

Exemplo 1.26. *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra. De fato, não é difícil ver que $[a, b] \in E^{(0)} = Z(E)$ para quaisquer $a, b \in E$, e assim o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para E.*

Exemplo 1.27. *O polinômio*

$$s_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$$

onde $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação σ, é chamado polinômio standard de grau n. Em 1950, Amitsur e Levitzki provaram em [1] que o polinômio $s_{2n}(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ é uma identidade de $M_n(K)$. Este resultado ficou conhecido como o Teorema de Amitsur e Levitzki.

Provaremos no capítulo 3 que toda PI-álgebra satisfaz uma potência de algum polinômio standard. Esse resultado é conhecido como Teorema de Amitsur.

Outro polinômio que será importante em nosso trabalho é o polinômio de Capelli.

Exemplo 1.28. *O polinômio*

$$d_m(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_{m-1}) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2...y_{m-1}x_{\sigma(m)}$$

é chamado de polinômio de Capelli de altura m. Se K é um corpo de característica diferente de 2 e A é uma K-álgebra de dimensão finita m, então d_{m+1} é uma identidade polinomial para A.

Observe que

$$d_m(x_1, x_2, ..., x_m, 1, 1, ..., 1) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(m)} = s_m(x_1, x_2, ..., x_m)$$

Em particular, temos que $s_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_{m+1})$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra de dimensão finita igual a m.

Dada uma álgebra A consideremos o conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de A. Claramente $T(A)$ é um ideal bilateral de $K_0\langle X\rangle$. Além disso, se $\varphi \in \text{End}K_0\langle X\rangle$, então $\varphi(T(A)) \subseteq T(A)$, ou seja, $T(A)$ é fechado por endomorfismos de $K_0\langle X\rangle$. De fato, sejam $f = f(x_1, x_2, .., x_n) \in T(A)$ e $\psi : K_0\langle X\rangle \longrightarrow A$ um homomorfismo. Então $\psi \circ \varphi : K_0\langle X\rangle \longrightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras. Sendo f uma identidade polinomial de A então $f \in \ker(\psi \circ \varphi)$. Assim, $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$. Logo, $\varphi(f) \in \ker \psi$. Como ψ é arbitrário, temos que $\varphi(f) \in T(A)$.

Os ideais de $K_0\langle X\rangle$ que satisfazem essa propriedade são chamados de *T-ideais*, como definiremos a seguir.

Definição 1.29. *Um ideal I de $K_0\langle X\rangle$ é chamado de T-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo $\varphi \in$ End $K_0\langle X\rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, g_2, ..., g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$ e $g_1, g_2, ..., g_n \in K_0\langle X\rangle$.*

Como foi visto acima o conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$. A proposição a seguir mostrar que todo T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ é o conjunto das identidades de alguma álgebra.

Proposição 1.30. *Se I é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$, então $I = T(B)$ para alguma álgebra B.*

Demonstração. Sendo $B = \dfrac{K_0\langle X\rangle}{I}$, vamos mostrar que $I = T(B)$. Considerando $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T(B)$, temos

$$\overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \overline{0}$$

Daí, $f \in I$ e assim $T(B) \subseteq I$. Considere agora $g(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$ e $\overline{g}_1, \overline{g}_2, ..., \overline{g}_n \in B$. Como I é um T-ideal temos $g(g_1, g_2, ..., g_n) \in I$, e assim

$$g(\overline{g}_1, \overline{g}_2, ..., \overline{g}_n) = \overline{g(g_1, g_2, ..., g_n)} = \overline{0}$$

Donde $g \in T(B)$ e assim $I \subseteq T(B)$. Portanto, $I = T(B)$. ■

Não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer T-ideais ainda é um T-ideal de $K_0\langle X\rangle$, e com isso podemos definir o T-ideal gerado por um subconjunto $S \subset K_0\langle X\rangle$ da seguinte maneira.

Definição 1.31. *Seja S um subconjuto de $K_0\langle X\rangle$. O T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ gerado S, denotado por $\langle S\rangle^T$, é a interseção de todos os T-ideais de $K_0\langle X\rangle$ que contêm S.*

Segue da definição que $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal de $K_0\langle X\rangle$ que contém S. Do ponto de vista prático $\langle S\rangle^T$ coincide com o subespaço de $K_0\langle X\rangle$ gerado por

$$\{h_1 f(g_1, g_2, ..., g_n)h_2 \mid f \in S, g_1, ..., g_n \in K_0\langle X\rangle, h_1, h_2 \in K\langle X\rangle\}$$

Se $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \langle S\rangle^T$ dizemos que f é consequência de S. Dizemos também que $f, g \in K_0\langle X\rangle$ são equivalentes se $f \in \langle g\rangle^T$ e $g \in \langle f\rangle^T$. Se A é uma álgebra tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$, então S é chamado de *base das identidades de A*.

Observação 1.32. *As definições de T-ideal e T-ideal gerado por um subconjunto de $K\langle X\rangle$ são análogas às apresentadas para $K_0\langle X\rangle$, assim como as propriedades já citadas. Observe também que se A possui unidade, $T(A)$ é um T-ideal em $K\langle X\rangle$.*

A. Kemer [21] mostrou em 1987 que se A é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero, então $T(A)$ possui base finita. Os próximos exemplos mostram a descrição dos T-ideais de algumas álgebras.

Exemplo 1.33. *Se K é um corpo infinito e A é uma K-álgebra comutativa e unitária qualquer, então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$.*

Exemplo 1.34. *Em 1973 Razmyslov [28] mostrou um conjunto com 9 identidades que geram o T-ideal da álgebra $M_2(K)$, para char$K = 0$. Já em 1981, Drensky [7] mostrou que se char$K = 0$ então $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle^T$. Em 2001 Koshlukov [22] generalizou este resultado de Drensky para K infinito e de característica diferente de 2 e 3. Se char$K = 3$ é necessário uma terceira identidade para gerar $T(M_2(K))$ (veja [5]). Para char$K = 2$ o problema ainda está em aberto.*

Exemplo 1.35. *Sendo E a álgebra de Grassmann e K um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$ (Veja [10] e [23]).*

Definição 1.36. *Seja S um subconjunto não vazio de $K_0\langle X\rangle$. A classe de todas as álgebras A tais que $f \in T(A)$, para todo $f \in S$, é chamada de variedade de álgebras determinada por S, e denotada por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$.*

Definimos

$$T(\mathcal{V}) = \bigcap_{A\in\mathcal{V}} T(A)$$

Se A é uma álgebra tal que $T(A) = T(\mathcal{V})$ dizemos que $\mathcal{V}$ é *gerada por A* e escrevemos $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$.

Exemplo 1.37. *A classe de todas as álgebras comutativas é a variedade definida por $S = \{[x_1, x_2]\}$.*

Definição 1.38. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Uma álgebra F é uma álgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$ se existe um conjunto $Y \subset F$ tal que F é livre na classe $\mathcal{V}$ e livremente gerada por Y.*

O próximo resultado nos garante que dada uma variedade $\mathcal{V}$ sempre existe uma álgebra B tal que B é uma álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$.

Proposição 1.39. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras definida pelo conjunto*

$$S = \{f_i(x_1, ..., x_{n_i}) \mid i \in I\} \subset K_0\langle X\rangle$$

Se Y é um conjunto não vazio e J é o T-ideal de $K_0\langle Y\rangle$ gerado por $\{f_i(y_1, ..., y_{n_i}) \mid y_j \in Y, i \in I\}$, então $B = \dfrac{K_0\langle Y\rangle}{J}$ é relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$, livremente gerada por

$$\overline{Y} = \{\bar{y} = y + J \mid y \in Y\}.$$

Demonstração. Sejam $i \in I$ e $\overline{g_1}, \overline{g_2}, ..., \overline{g_{n_i}} \in B$, como $f_i(g_1, ..., g_{n_i}) \in J$, temos

$$f_i(\overline{g_1}, ..., \overline{g_{n_i}}) = \overline{f_i(g_1, ..., g_{n_i})} = \overline{0}$$

Logo, f_i é uma identidade para B para todo $i \in I$ e assim $B \in \mathcal{V}$.

Tome agora $A \in \mathcal{V}$ e uma aplicação $\phi : \overline{Y} \longrightarrow A$. Considere então a aplicação $\theta : Y \longrightarrow A$ definida por $\theta(y) = \phi(\overline{y})$. Como $K_0\langle Y\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas e livremente gerada por Y, existe um homomorfismo $\theta_1 : K_0\langle Y\rangle \longrightarrow A$ que estende θ. Daí,

$$\begin{aligned} \theta_1(f_i(y_1, ..., y_{n_i})) &= f_i(\theta_1(y_1), ..., \theta_1(y_{n_i})) \\ &= f_i(\theta(y_1), ..., \theta(y_{n_i})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois $f_i \in T(A)$ e $\theta(y_1), ..., \theta(y_{n_i}) \in A$, e assim $J \subseteq ker(\theta_1)$. Logo a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \overline{\theta_1} : & \dfrac{K_0\langle Y\rangle}{J} & \longrightarrow & A \\ & \overline{g} & \longmapsto & \overline{\theta_1}(\overline{g}) = \theta_1(g) \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Além disso,

$$\overline{\theta_1}(\overline{y}) = \theta_1(y) = \theta(y) = \phi(\overline{y})$$

ou seja, $\overline{\theta_1}$ estende ϕ.

Suponha que existe outro homomorfismo $\varphi : \dfrac{K_0\langle Y\rangle}{J} \longrightarrow A$ que estende ψ. Então, φ e $\overline{\theta}_1$ coincide em $\overline{Y}$ que é um conjunto gerador de B. Portanto, φ é igual a $\overline{\theta}_1$. ■

1.3 Polinômios Multihomogêneos e Multilineares

Nessa seção vamos definir polinômios multihomogêneos e multilineares e veremos que tais polinômios tem um papel importante na descrição do T-ideal das identidades de uma álgebra.

Definição 1.40. *Sejam $m \in K\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$ uma variável. Definimos o grau de m em x_i, de forma indutiva, denotado por $deg_{x_i}m$, como sendo*

$$deg_{x_i}m = \begin{cases} 1, & se \;\; m = x_i \\ 0, & se \;\; m = x_j, \;\; com \;\; i \neq j \\ deg_{x_i}m_1 + deg_{x_i}m_2, & se \;\; m = m_1m_2 \end{cases}$$

Na prática $deg_{x_i}m$ é o número de vezes que x_i aparece no monômio m. Sendo $f \in K\langle X\rangle$, dizemos que f é *homogêneo* em x_i se todos os monômios de f têm o mesmo grau em x_i. Dizemos que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é *multihomogêneo* se f é homogêneo nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Seja $m = m(x_1, x_2, ..., x_n)$ um monômio em $K\langle X\rangle$. Definimos o *multigrau* *de* m como sendo a n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$, onde $a_i = deg_{x_i} m$ para $i = 1, 2, ..., n$. A soma de todos os monômios de f que possuem o mesmo multigrau é chamado de *componente multihomogênea de* f.

Proposição 1.41. *Sejam* I *um* T*-ideal de* $K\langle X\rangle$ *(ou de* $K_0\langle X\rangle$*) e* $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$. *Se* K *é infinito, então cada componente multihomogênea de* f *pertence a* I.

Demonstração. Fixado t, com $1 \leq t \leq n$, seja m o maior grau em x_t dos monômios de f. Podemos decompor f da seguinte maneira

$$f = \sum_{i=0}^{m} f_i$$

onde f_i é a soma de todos os monômios de f que têm grau i em x_t. Por um argumento indutivo sobre n é suficiente mostrar que, para cada variável x_t, $f_i \in I$ para todo $i \geq 0$. Como K é infinito podemos escolher $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m \in K$ distintos. Para $j = 0, ..., m$ temos que $g_j = f(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) \in I$. Como cada monômio de f_i tem grau i em x_t, vale $f_i(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) = \alpha_j^i f_i(x_1, ..., x_t, ..., x_n)$. Logo, para todo $j = 0, 1, ..., m$,

$$g_j = f(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_j^i f_i(x_1, ..., x_n)$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \cdots & \alpha_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

Como a primeira matriz acima é inversível, pois é uma matriz de Vandermonde, e $g_0, g_2, ..., g_m \in I$ temos que $f_0, f_1, ..., f_m \in I$. ■

Uma consequência importante do teorema acima é dada a seguir.

Corolário 1.42. *Se* K *é infinito e* I *é um* T*-ideal de* $K\langle X\rangle$ *(ou de* $K_0\langle X\rangle$*), então* I *é gerado pelos seus polinômios multihomogêneos.*

Um tipo particular e muito importante de polinômios multihomogêneos são os polinômios multilineares, que definiremos a seguir.

Definição 1.43. *Seja* $f \in K\langle X\rangle$ *um polinômio multihomogêneo. Se* f *tem grau* 1 *em cada variável dizemos que* f *é multilinear.*

Dessa forma $f \in K\langle X\rangle$ é multilinear se é multihomogêneo de multigrau $(1, 1, ..., 1)$. Assim um polinômio multilinear nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é da forma

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}, \qquad \alpha_\sigma \in K.$$

Denote por P_n o subespaço dos polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$ nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Então P_n é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado por $\{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$, e assim $\dim P_n = n!$.

Observação 1.44. *Sejam A uma álgebra e $f \in P_n$ tal que $f \notin T(A)$. Então existe um monômio multilinear $m_\sigma(x_1, ..., x_n) = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$ em P_n tal que $m_\sigma \notin T(A)$. De fato, suponha que para todo monômio multilinear m_σ tenhamos $m_\sigma \in T(A)$. Dado $f \in P_n$ temos que $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_n$ e assim $f \in T(A)$, o que é uma contradição.*

Proposição 1.45. *Sejam K um corpo de característica 0 e I um T-ideal de $K\langle X\rangle$ (ou de $K_0\langle X\rangle$). Então I é gerado pelos seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Como $char K = 0$, temos K infinito e segue do Corolário 1.42 que I é gerado pelos seus polinômios multihomogêneos. Considere $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$ multihomogêneo e $k = deg_{x_1} f$. Sejam $y_1, y_2 \in X$ variáveis diferentes de $x_1, x_2, ..., x_n$ e considere o polinômio $h(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n)$. Sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, ..., x_n)$ a componente homogênea de h de grau 1 em y_1, temos que h_1 é uma consequência de h e

$$h_1(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = kf(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Como $char K = 0$ então f é consequência de h_1. Observe agora que $deg_{y_2} h_1 = k - 1$. Se necessário, repetimos o processo para as variáveis $y_2, x_2, ..., x_n$ de h_1. Como isso vamos obter um polinômio multilinear do qual f é consequência. Portanto o teorema está demonstrado. ∎

1.4 Módulos Sobre Álgebras

Definição 1.46. *Seja A uma álgebra unitária. Definimos um A-módulo, ou módulo sobre A (à esquerda), como sendo um espaço vetorial M munido de um produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

que é bilinear e satisfaz:

i) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$;

ii) $1_A \cdot m = m$.

para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $m \in M$.

Exemplo 1.47. *Se A é uma álgebra, então A é naturalmente um módulo sobre si mesma, cujo produto é a multiplicação da álgebra. Vamos denotar esse A-módulo por ${}_AA$.*

Exemplo 1.48. *Seja P_n o subespaço dos polinômios multilineares de $K\langle X \rangle$ nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Como visto na Seção 1.4, $\beta = \{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n. Considere a aplicação bilinear $\cdot : KS_n \times P_n \longrightarrow P_n$ que satisfaz*

$$\sigma \cdot (x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} x_{\sigma(i_2)} ... x_{\sigma(i_n)}$$

onde $\sigma \in S_n$ e $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n} \in \beta$, com $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., n\}$. Munido desse produto temos que P_n é um KS_n-módulo, ou simplesmente um S_n-módulo.

Definição 1.49. *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Dizemos que:*

a) Um subespaço vetorial N de M é um submódulo de M se $a \cdot n \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$.

b) Um submódulo N de M é minimal se $N \neq \{0\}$ e não existe submódulo N_1 de M tal que $N_1 \neq 0$ e $N_1 \subsetneq N$.

c) M é um A-módulo irredutível ou simples se seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M.

Exemplo 1.50. *Seja A uma álgebra e consideremos o A-módulo ${}_AA$. Então os submódulos de ${}_AA$ são exatamente os ideais à esquerda da álgebra A.*

Se M é um A-módulo, temos que os submódulos minimais de M são exatamente aqueles que são A-módulos irredutíveis. Assim, se N e N_1 são submódulos de M, sendo N minimal, então $N \cap N_1 = \{0\}$ ou $N \subset N_1$.

Observe que se M tem dimensão finita, como espaço vetorial, então M necessariamente possui algum submódulo minimal.

Definição 1.51. *Sejam A uma álgebra e M_1 e M_2 A-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um homomorfismo de A-módulos se $\varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)$ para quaisquer $a \in A$ e $m \in M_1$. Se φ é bijetivo, dizemos que φ é um isomorfismo de A-módulos e que M_1 e M_2 são A-módulos isomorfos (em símbolos, $M_1 \simeq M_2$).*

Não é difícil ver que o núcleo de um homomorfismo de A-módulos é um submódulo do domínio e que a imagem é um submódulo do contra-domínio.

Exemplo 1.52. *Conside KS_n como um S_n-módulo e a aplicação $\varphi : KS_n \longrightarrow P_n$ definida por*

$$\varphi\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

Claramente φ é um isomorfismo de S_n-módulos e portanto KS_n e P_n são isomorfos como S_n-módulos.

Sejam A uma álgebra, M um A-módulo e N um submódulo de M. Considere o espaço vetorial $\dfrac{M}{N}$ munido do produto

$$\begin{aligned} \cdot : A \times \frac{M}{N} &\longrightarrow \frac{M}{N} \\ (a, \overline{m}) &\longmapsto a \cdot \overline{m} = \overline{a \cdot m} \end{aligned}$$

Com este produto, $\dfrac{M}{N}$ é um A-módulo, chamado de *módulo quociente de M por N.*

Teorema 1.53 (Teorema Fundamental do Homomorfismo)**.** *Sejam A uma álgebra, M e N A-módulos e $\varphi : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de módulos. Então*

$$\frac{M}{ker\varphi} \simeq Im\varphi$$

Como consequência do teorema anterior, também conhecido como 1º Teorema de Isomorfismo, temos o seguinte corolário, que é conhecido com 2º Teorema de Isomorfismo.

Corolário 1.54. *Sejam A uma álgebra, M um A-módulo e N_1 e N_2 submódulos de M. Então*

$$\frac{N_1 + N_2}{N_2} \simeq \frac{N_1}{N_1 \cap N_2}.$$

Vamos agora construir o produto tensorial de módulos. Para isso precisaremos da ideia de módulo à direita. Análogo à Definição 1.46 se A é uma álgebra unitária, definimos um módulo à direita como sendo um espaço vetorial N munido de um produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & N \times A & \longrightarrow & N \\ & (n, a) & \longmapsto & n \cdot a \end{array}$$

que é bilinear e satisfaz:

i) $(n \cdot a_1) \cdot a_2 = n \cdot (a_1 a_2)$

ii) $n \cdot 1_A = n.$

para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $n \in N$.

Sejam A uma álgebra unitária, M um A-módulo à esquerda e N um A-módulo à direita. Definimos o *produto tensorial* de N por M, denotado por $N \otimes_A M$, como sendo o espaço vetorial gerado por $\{n \otimes_A m \mid n \in N, m \in M\}$ (por simplicidade, vamos usar a notação $n \otimes m$), onde os elementos satisfazem

$$(n_1 + n_1) \otimes m = (n_1 \otimes m) + (n_2 \otimes m)$$

$$n \otimes (m_1 + m_2) = (n \otimes m_1) + (n \otimes m_2)$$

$$(\lambda n) \otimes m = \lambda(n \otimes m)$$

$$n \otimes (\lambda m) = \lambda(n \otimes m)$$

$$na \otimes m = n \otimes am$$

onde $n, n_1, n_2 \in N$, $m, m_1, m_2 \in M$, $\lambda \in K$ e $a \in A$. Assim, os elementos de $N \otimes_A M$ são da forma $\sum_i n_i \otimes m_i$, $n_i \in N, m_i \in M$.

Proposição 1.55 (Propriedade Universal)**.** *Sejam V um espaço vetorial e $f : N \times M \longrightarrow V$ uma aplicação bilinear que satisfaz $f(na, m) = f(n, am)$ para quaisquer $n \in N$, $a \in A$ e $m \in M$. Então existe uma única transformação linear $T_f : N \otimes_A M \longrightarrow V$ que satisfaz $T_f(n \otimes_A m) = f(n, m)$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 12.3, página 61. ∎

Um caso particular, porém muito importante, é o de produto tensorial de espaços vetoriais. Sejam V e W K-espaços vetoriais. Considerando K como uma K-álgebra podemos ver W como um K-módulo à esquerda. Considerando em V um produto por escalar de K definido por $v \cdot \lambda = \lambda v$, para $v \in V$ e $\lambda \in K$, temos que " $\cdot$ " é bilinear e que, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e $v \in V$

$$\begin{aligned}(v \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_2 &= \lambda_2(v \cdot \lambda_1) = \lambda_2(\lambda_1 v) = (\lambda_2\lambda_1)v \\ &= (\lambda_1\lambda_2)v = v \cdot (\lambda_1\lambda_2).\end{aligned}$$

Assim V é um K-módulo à direita e então podemos construir o espaço vetorial $V \otimes_K W$. Observe que se U é um espaço vetorial e $f : V \times W \longrightarrow U$ é uma aplicação bilinear, então para quaisquer $\lambda \in K, v \in V$ e $w \in W$, temos

$$f(v\lambda, w) = f(\lambda v, w) = f(v, \lambda w).$$

Logo, pela propriedade universal, existe uma única transformação linear $T : V \otimes W \longrightarrow U$ tal que $T(v \otimes w) = f(v, w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

Proposição 1.56. *Sejam V e W espaços vetoriais.*

a) Se $\beta_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ e $\beta_2 = \{w_j \mid j \in J\}$ são bases de V e W, respectivamente, então $\beta = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é uma base de $V \otimes W$. Consequentemente, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, então $\dim(V \otimes W) = nm$.

b) Se $v_0 \in V$ e $w_0 \in W$ vetores não nulos, então $v_0 \otimes w_0 \neq 0$ em $V \otimes W$.

Demonstração. Os itens *a*) e *b*) podem ser demonstrados usando-se a propriedade universal e argumentos básicos de álgebra linear. Vejamos a demonstração do item *b*). Considere $f : V \times W \longrightarrow K$ bilinear tal que $f(v_0, w_0) \neq 0$ (a existência de f segue de um argumento análogo , no sentido mais geral , à Proposição 1.6). Pela propriedade universal existe uma transformação linear $T : V \otimes W \longrightarrow K$ tal que $T(v \otimes w) = f(v, w)$. Assim, $T(v_0 \otimes w_0) = f(v_0, w_0) \neq 0$. Logo, devemos ter $v_0 \otimes w_0 \neq 0$.

∎

Considere agora A e B K-álgebras. Fixados $a \in A$ e $b \in B$ quaisquer, a aplicação $f_{a,b} : A \times B \longrightarrow A \otimes B$, definida por $f_{a,b}(x, y) = ax \otimes by$ é bilinear, e assim pela propriedade universal existe uma transformação linear $T_{a,b} : A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$ tal que $T_{a,b}(x \otimes y) = ax \otimes by$. Considere $\mathcal{L}(A \otimes B)$ o espaço vetorial dos operadores lineares de $A \otimes B$ e a aplicação bilinear

$$T : A \times B \longrightarrow \mathcal{L}(A \otimes B) \text{ definida por } T(a, b) = T_{a,b}$$

Novamente pela propriedade universal existe uma transformação linear $F : A \otimes B \longrightarrow \mathcal{L}(A \otimes B)$ tal que $F(a \otimes b) = T_{a,b}$. Logo, o produto

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & (A \otimes B) \times (A \otimes B) & \longrightarrow & A \otimes B \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \cdot \beta = F(\alpha)(\beta) \end{array}$$

é bilinear e satisfaz

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = F(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = T_{a_1,b_1}(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. O espaço vetorial $A \otimes B$, munido deste produto, é uma álgebra, chamada de *produto tensorial das álgebras A e B.*

Exemplo 1.57. *Sendo K um corpo, então K é naturalmente uma álgebra sobre si mesma. Além disso, a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & K \otimes K & \longrightarrow & K \\ & \lambda_1 \otimes \lambda_2 & \longmapsto & \varphi(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = \lambda_1 \lambda_2 \end{array}$$

é um isomorfismo de K-álgebras, ou seja, $K \otimes K \simeq K$. Mais geralmente, se A é uma álgebra qualquer, então a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi : & K \otimes A & \longrightarrow & A \\ & \lambda_1 \otimes a & \longmapsto & \psi(\lambda_1 \otimes a) = \lambda_1 a \end{array}$$

é um isomorfismo de K-álgebra, e portanto $K \otimes A \simeq A$.

Outro isomorfo de álgebras importante é dado no exemplo abaixo.

Exemplo 1.58. *Se A é uma K-álgebra. A transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T : & M_n(K) \otimes A & \longrightarrow & M_n(A) \\ & E_{ij} \otimes a & \longmapsto & T(M_n(K) \otimes A) = E_{ij}(a) \end{array}$$

onde $E_{ij}(a)$ é a matriz que tem a na entrada ij e 0 nas demais, é um isomorfismo. Logo, $M_n(K) \otimes A \simeq M_n(A)$ como K-álgebras.

Exemplo 1.59. *Sejam V um K-espaço vetorial e L uma extensão do corpo K, e considere o espaço vetorial $L \otimes_K V$. Para cada $\alpha \in L$ defina a aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rccl} f_\alpha: & L \times V & \longrightarrow & L \otimes_K V \\ & (x, v) & \longmapsto & f_\alpha(x, v) = \alpha x \otimes v \end{array}$$

Pela propriedade universal existe uma única transformação linear $T_\alpha : L \otimes_K V \longrightarrow L \otimes_K V$ tal que $T_\alpha(x \otimes v) = \alpha x \otimes v$. Logo, munido do produto bilinear

$$\cdot : L \times (L \otimes_K V) \longrightarrow L \otimes_K V$$

que satisfaz $\alpha \cdot (x \otimes v) = \alpha x \otimes v$, temos que $L \otimes_K V$ é um L-espaço vetorial, o qual denotamos por V_L.

1.5 Superálgebra e Supervariedade

Nesta seção vamos apresentar uma classe de álgebras que satisfaz uma propriedade especial, as superálgebras ou álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Vamos também definir, no contexto das superálgebras, os análogos a identidades, T-ideal e variedades, como foi feito para álgebras ordinárias na Seção 1.3. Consideraremos a partir de agora o grupo aditivo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Definição 1.60. *Dizemos que uma álgebra A é $\mathbb{Z}_2$-graduada se existem subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que*

$$A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \quad e \quad A^{(i)}A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$$

para $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada é também chamada de superálgebra.

O par $(A^{(0)}, A^{(1)})$ é chamado de $\mathbb{Z}_2$-graduação e os subconjuntos $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamados de componentes homogêneas de grau 0 e de grau 1, respectivamente, e seus elementos são chamados de elementos homogêneos de grau 0 e de grau 1, respectivamente.

Exemplo 1.61. *A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural: $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, onde $E^{(0)}$ é o subespaço dos elementos par e $E^{(1)}$ é o subespaço dos elementos ímpares (Veja o Exemplo 1.4).*

Exemplo 1.62. *Considere a álgebra $M_2(K)$ e os subespaços*

$$M_2(K)^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a, d \in K \right\} \quad e \quad M_2(K)^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ; b, c \in K \right\}$$

Temos que $M_2(K) = M_2(K)^{(0)} \oplus M_2(K)^{(1)}$. Observe agora que $M_2(K)^{(0)} = \langle E_{11}, E_{22} \rangle$ e $M_2(K)^{(1)} = \langle E_{12}, E_{21} \rangle$. Como o produto de matrizes unitárias satisfaz

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & se \;\; j = k \\ 0, & se \;\; j \neq k \end{cases}$$

devemos ter $M_2(K)^{(i)}M_2(k)^{(j)} \subseteq M_2(K)^{(i+j)}$, para $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Logo, $M_2(K)$ é uma superálgebra.

Exemplo 1.63. *A álgebra $E \otimes E$ também admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por*

$$E \otimes E = (E \otimes E)^{(0)} \oplus (E \otimes E)^{(1)}$$

onde a componente homogênea de grau 0 é dada por $(E \otimes E)^{(0)} = (E^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (E^{(1)} \otimes E^{(1)})$ e a componente homogênea de grau 1 por $(E \otimes E)^{(1)} = (E^{(1)} \otimes E^{(0)}) \oplus (E^{(0)} \otimes E^{(1)})$.

Definição 1.64. *Sejam A e B álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \longrightarrow B$ é dito um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado se $\varphi(A^{(i)}) \subseteq B^{(i)}$, para $i \in \mathbb{Z}_2$.*

Vamos agora tratar de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas. Para isso precisamos do conceito de álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. Para defini-la vamos considerar os conjuntos $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ e $Z = \{z_1, z_2, ...\}$ enumeráveis e disjuntos. Os elementos de Y serão chamados de *variáveis pares* e os de Z de *variáveis ímpares*. Tome $X = Y \cup Z$ e considere a álgebra associativa livre $K_0 \langle X \rangle = K_0 \langle Y, Z \rangle$. Defina

$$\alpha(x_1 x_2 ... x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + ... + \alpha(x_m)$$

onde $\alpha(x_i) = 0$ se $x_i \in Y$, e $\alpha(x_i) = 1$ se $x_i \in Z$. Sendo então m um monômio de $K_0 \langle X \rangle$, dizemos que $\alpha(m)$ é o $\mathbb{Z}_2$-grau de m. Considere os seguintes conjuntos

$$K_0 \langle X \rangle^{(0)} = \langle m \mid m \text{ é um monômio de } K \langle X \rangle, \alpha(m) = 0 \rangle$$

e

$$K_0 \langle X \rangle^{(1)} = \langle m \mid m \text{ é um monômio de } K \langle X \rangle, \alpha(m) = 1 \rangle$$

Então

$$K_0\langle X\rangle = K_0\langle X\rangle^{(0)} \oplus K_0\langle X\rangle^{(1)} \quad \text{e} \quad K_0\langle X\rangle^{(i)} K_0\langle X\rangle^{(j)} \subseteq K_0\langle X\rangle^{(i+j)}$$

para $i, j = 0, 1$, ou seja, $K_0\langle X\rangle$ é uma superálgebra. Além disso, para qualquer superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ e qualquer aplicação $h : Y \cup Z \longrightarrow A$ tal que $h(y_i) \in A^{(0)}$ e $h(z_j) \in A^{(1)}$ para todo $y_i \in Y$ e $z_j \in Z$, existe um único homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado $\varphi : K_0\langle Y, Z\rangle \longrightarrow A$ que estende h. Por isso chamaremos $K_0\langle X\rangle$ de *superálgebra (associativa) livre*. Se $f \in K_0\langle X\rangle^{(i)}$, dizemos que f é $\mathbb{Z}_2$-homogêneo de grau i e usamos a notação $\alpha(f) = i$, para $i = 0, 1$.

Definição 1.65. *Dada uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ um polinômio $f(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m) \in K_0\langle Y, Z\rangle$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada, ou uma superidentidade, de A se*

$$f(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) = 0$$

para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A^{(0)}$ e $b_1, ..., b_m \in A^{(1)}$.

Exemplo 1.66. *Considere a álgebra de Grassmann E com a $\mathbb{Z}_2$-graduação dada no Exemplo 1.61. Como $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in E^{(1)}$, temos que $f(z_1, z_2) = z_1z_2 + z_2z_1$, onde z_1, z_2 são variáveis ímpares, é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E.*

Se A é uma PI-álgebra, então A satisfaz alguma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada não nula. Por outro lado, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.67. *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra e suponha que $A^{(0)}$ satisfaz uma identidade polinomial ordinária não-trivial. Então A também é uma PI-álgebra.*

Demonstração. [15], Teorema 4.3.3, página 100. ∎

Vimos na Seção 1.3 que o conceito de T-ideal tem um papel fundamental no estudo de identidades ordinárias. Para o caso de superidentidades temos um conceito análogo que é o de T_2-ideal, como definiremos a seguir.

Definição 1.68. *Seja $K_0\langle Y, Z\rangle$ a superálgebra associativa livre unitária. Um ideal I de $K_0\langle Y, Z\rangle$ é dito um T_2-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de $K_0\langle Y, Z\rangle$.*

É fácil ver que um ideal I é um T_2-ideal se, e somente se, $f(g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m) \in I$ para quaisquer $g_i \in K_0\langle X\rangle^{(0)}$, $h_j \in K_0\langle X\rangle^{(1)}$ e $f(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m) \in I$. Considerando $T_2(A)$ o conjunto de todas as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de uma superálgebra A, temos que $T_2(A)$ é um T_2-ideal de $K_0\langle Y, Z\rangle$.

A ideia de T_2-ideal gerado por um subconjunto $S \subseteq K_0\langle X, Y\rangle$ é análoga a de T-ideal gerado. Vamos denotar por $\langle S\rangle^{T_2}$ o T_2-ideal gerado por S. Além disso, todo T_2-ideal de $K_0\langle Y, Z\rangle$ é gerado pelos seus polinômios multilineares se $char K = 0$, e pelos seus polinômios multihomogêneos se K for infinito (a demonstração desse fato é a mesma dada na Seção 1.4 no caso em que I é um T-ideal).

Igualmente às álgebras ordinárias, um subconjunto não vazio $S \subseteq K_0\langle Y, Z\rangle$ de elementos define uma variedade de superálgebras.

Definição 1.69. *Dado um conjunto não vazio $S \subset K_0\langle Y, Z\rangle$, a classe de todas as superálgebras $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tal que f é uma identidade de A, para todo $f \in S$, é chamado de supervariedade determinada por S.*

Sejam K um corpo infinito, $S \subseteq K_0\langle Y, Z\rangle$ um subconjunto não vazio e $I = \langle S\rangle^{T_2}$ o T_2-ideal gerado por S. Considerando $I^{(0)} = I \cap K_0\langle Y, Z\rangle^{(0)}$ e $I^{(1)} = I \cap K_0\langle Y, Z\rangle^{(1)}$, então $I = I^{(0)} \oplus I^{(1)}$ uma vez que I é homogêneo. Sendo $L = \dfrac{K_0\langle Y, Z\rangle}{I}$, então $L = L^{(0)} \oplus L^{(1)}$, onde

$$L^{(0)} = \frac{K_0\langle Y, Z\rangle^{(0)} + I}{I} \quad \text{e} \quad L^{(1)} = \frac{K_0\langle Y, Z\rangle^{(1)} + I}{I},$$

é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de L. Assim, L é uma superálgebra. Sejam $\overline{Y} = \{u_1, u_2, ...\}$, onde $u_i = \overline{y}_i$, para cada $y_i \in Y$, e $\overline{Z} = \{w_1, w_2, ...\}$, onde $w_j = \overline{z}_j$ para cada $z_j \in Z$. Análogo à Proposição 1.39, temos que L é livre na supervariedade $\mathcal{V}$ determinada por S com geradores livres $\overline{X} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$. Sendo $L_1 = L(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l)$ a subálgebra de L gerada por $u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l$, temos que L_1 é uma superálgebra relativamente livre na supervariedade $\mathcal{V}$ com k geradores pares e l geradores ímpares.

1.6 Representações de Grupos

Em toda esta seção consideremos G um grupo finito, K um corpo e V um espaço vetorial sobre K. Denotamos por $GL(V)$ o grupo dos operadores lineares inversíveis de V. Se dim$V = n$, podemos identificar o grupo $GL(V)$ com o grupo $GL_n(K)$ das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas em K.

Definição 1.70. *Definimos uma representação linear do G em V como sendo um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array}$$

Quando queremos deixar explícito que estamos considerando o corpo K, usaremos o termo K-representação linear ou representação linear sobre K, ou denotaremos a representação por ρ^K.

Definimos o grau da representação ρ como sendo a dimensão do espaço vetorial V. Se $\dim V = n$ é finita, pelo visto acima, podemos ver uma representação linear de G em V como sendo um homomorfismo $\rho : G \longrightarrow GL_n(K)$. Todas as representações deste trabalho terão grau finito.

A representação ρ é dita *fiel* se $ker\rho = \{1_G\}$ e ρ é *trivial* se $ker\rho = G$, ou seja, se $\rho(g) = Id$, para toda $g \in G$.

Definição 1.71. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Dizemos que um subespaço W de V é ρ-invariante se $\rho_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$.*

Sendo W um subespaço ρ-invariante de V e $g \in G$, podemos definir a restrição de ρ_g a W:

$$\begin{array}{rccc} \rho_g|_W: & W & \longrightarrow & W \\ & w & \longmapsto & \rho_g(w) \end{array}$$

Como $\rho_g(W) \subseteq W$ e $\rho_{g^{-1}}(W) \subseteq W$, então $\rho_g(W) = W$. Como ρ_g é injetora, temos que $\rho_g|_W \in GL(W)$. Definimos então a *subrepresentação* ρ_W, que é a restrição de ρ a W, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \rho_W: & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & g & \longmapsto & \rho_W(g) = \rho_g|_W \end{array}.$$

Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de G em V. Considere o produto $\cdot : KG \times V \longrightarrow V$ definido por

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g \rho_g(v)$$

Temos que V, munido desse produto, é um KG-módulo. Sendo W um subespaço ρ-invariante de V, então $\rho_g(w) \in W$, ou seja, $g \cdot w \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Assim, W é um submódulo de V.

Por outro lado, considere V um KG-módulo. Dado $g \in G$, defina

$$\begin{array}{rccc} \rho_g: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & \rho_g(v) = g \cdot v \end{array}.$$

Temos que $\rho_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \rho_{g_2}$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, e que $\rho_{1_G} = Id_V$ (onde 1_G é o elemento neutro de G). Temos então que $\rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \rho_{g^{-1}} \circ \rho_g = Id_V$ e assim $\rho_g \in GL(V)$. Portanto a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \rho_g \end{array}$$

é uma representação linear de G em V. Observe que se W é um submódulo do KG-módulo V, então $\alpha \cdot w \in W$ para quaisquer $\alpha \in KG$ e $w \in W$. Em particular, $g \cdot w \in W$, ou seja, $\rho_g(w) \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Logo, W é um subespaço ρ-invariante de ρ.

Assim, existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas de KG-módulos de V e as representações lineares de G em V. Além disso, os subespaços ρ-invariantes de V correspondem aos submódulos do KG-módulo V associado a ρ.

Definição 1.72. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de G. Dizemos que ρ é irredutível se o correspondente KG-módulo V é irredutível.*

Segue da definição acima que uma representação linear ρ é irredutível se seus únicos subespaços ρ-invariantes são $\{0\}$ e V.

Definição 1.73. *Sejam $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações de um grupo G. Dizemos que ρ e ψ são representações equivalentes se existe uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ bijetora tal que $\rho_g \circ T = T \circ \psi_g$ para todo $g \in G$.*

Segue imediatamente da definição acima que representações equivalentes têm o mesmo grau.

Teorema 1.74. *Sejam $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações de G. Então ρ e ψ são equivalentes se, e somente se, os respectivos KG-módulos V e W são isomorfos.*

Demonstração. Suponha que ρ e ψ são equivalentes. Então existe uma transformação linear bijetora $T : V \longrightarrow W$ tal que $\rho_g T = T\psi_g$ para todo $g \in G$. Considerando os KG-módulos V e W correspondentes temos

$$T(g \cdot v) = T(\rho_g(v)) = \psi_g(T(v)) = g \cdot T(v)$$

para quaisquer $g \in G$ e $v \in V$. Como T é linear e G é uma base de KG, temos que $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$ para quaisquer $\alpha \in KG$ e $v \in V$. Assim, T é um isomorfismo de KG-módulos.

Suponha agora que $F : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo de KG-módulos, ou seja, F é uma transformação linear bijetora que satisfaz $F(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot F(v)$, para todo $\alpha \in KG$ e $v \in V$. Logo,

$$(F\rho_g)(v) = F(\rho_g(v)) = F(g \cdot v) = g \cdot F(v) = \psi_g(F(v)) = (\psi_g F)(v)$$

Assim, $F\rho_g = \psi_g F$ para todo $g \in G$, e portanto, ρ e ψ são equivalentes. ■

Exemplo 1.75. *Considere o grupo S_n. As representações*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & S_n & \longrightarrow & K^* \\ & \sigma & \longmapsto & \rho(\sigma) = 1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \psi: & S_n & \longrightarrow & K^* \\ & \sigma & \longmapsto & \psi(\sigma) = (-1)^\sigma \end{array}$$

têm grau 1 *e daí são ambas irredutíveis, mas ρ e ψ não são equivalentes. A representação ρ é a representação trivial de grau* 1 *e ψ é chamada de representação sinal.*

Definição 1.76. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Dizemos que ρ é completamente redutível, ou semi-simples, se existem $W_1, W_2, ..., W_n$ subespaços de V ρ-invariantes tais que:*
i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$
ii) As restrições de ρ aos $W_i's$ são todas irredutíveis.

Teorema 1.77 (Maschke)**.** *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível por $charK$. Se $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de grau finito e W é um subespaço ρ-invariante de V, então existe W_1 subespaço ρ-invariante de V tal que $V = W \oplus W_1$. Consequentemente, ρ é completamente redutível.*

Demonstração. Ver [17], Seção 5.2, página 253. ■

Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma K-representação linear onde $charK$ não divide $|G|$ e considere o KG-módulo V. Segue do Teorema de Maschke que V é uma soma de KG-submódulos irredutíveis, ou seja,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$$

A proposição a seguir garante que essa decomposição é única, a menos da ordem dos subespaços e equivalência das subrepresentações.

Proposição 1.78. *Sejam A uma álgebra e M e N A-módulos isomorfos. Se*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n \quad e \quad N = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$$

onde M_i e N_j são submódulos minimais de M e N, respectivamente, então $m = n$ e $M_i \simeq N_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ (reodernando os $N_j's$, se necessário).

Demonstração. Ver [17], Seção 3.4, página 115. ■

Exemplo 1.79. *Considere o espaço vetorial KG. Para cada $g \in G$ defina $\rho_g : KG \longrightarrow KG$ por $\rho_g(\alpha) = g\alpha$. A representação*

$$\begin{array}{rccl} \rho : & G & \longrightarrow & GL(KG) \\ & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array}$$

é chamada representação regular à esquerda *e o correspondente KG-módulo é ${}_{KG}KG$.*

Observe então que os subespaços ρ-invariantes de KG são exatamente os ideais à esquerda de KG. Se $charK$ não divide $|G|$, então segue do Teorema de Maschke que se W é um ideal à esquerda de KG, então existe W_1 também ideal à esquerda de KG tal que

$$KG = W \oplus W_1 \tag{1.2}$$

Como os ideais minimais à esquerda de KG correspondem às subrepresentações irredutíveis de ρ, então, pelo Teorema Maschke, KG é uma soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais à esquerda.

Teorema 1.80. *Se char$K$ não divide $|G|$, então todo KG-módulo irredutível é isomorfo (como KG-módulo) a um ideal minimal à esquerda de KG. Em outras palavras, toda representação linear irredutível de G é equivalente à uma sub-representação da representação regular à esquerda.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 25.10, página 166. ∎

Pelo Teorema 1.80 e pela Proposição 1.78, temos que o número de representações irredutíveis de G, a menos de equivalência, é finito.

Considere m o número de K-representações irredutíveis (a menos de equivalência) de G e I_1, I_2,...,I_m ideais minimais à esquerda de KG dois a dois não isomorfos como KG-módulos. Pelo Teorema 1.80, temos que todo ideal minimal à esquerda de KG é isomorfo, como KG-módulo, a exatamente um deles. Considerando então os ideais bilaterais $J_j = I_jKG$, $j = 1, 2, ..., m$, temos:

Teorema 1.81. *J_j é a soma de todos os ideais minimais à esquerda de KG isomorfos a I_j e $KG = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_m$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 25.10, página 168. ∎

Podemos estimar (ou determinar precisamente no caso de K ser algebricamente fechado) o número m de representações irredutíveis de G pelo número de classes de conjugação de G.

Proposição 1.82. *Seja K um corpo cuja característica não divide a ordem de G. Então o número de K-representações irredutíveis de G, a menos de equivalência, é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G. Se K é algebricamente fechado, então vale a igualdade.*

Demonstração. Ver [17], Teorema 5.6, página 261. ∎

Definição 1.83. *Sejam V um espaço de dimensão finita e $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Definimos o caracter de ρ como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \chi_\rho : & G & \longrightarrow & K \\ & g & \longmapsto & \chi_\rho(g) = tr\rho_g \end{array}$$

Dizemos que χ_ρ é um caracter irredutível de G se ρ é uma representação irredutível.

Seja M um KG-módulo com $\dim_K M$ finita. Definimos o caracter de M como sendo o caracter da representação associada a M.

Segue da definição que se $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ são K-representações equivalentes então $\chi_\rho = \chi_\psi$. Além disso, se $char K = 0$, então vale a recíproca, ou seja, se $\chi_\rho = \chi_\psi$, então ρ é equivalente a ψ. Temos então a seguinte proposição.

Proposição 1.84. *Seja K um corpo de característica 0. Então duas K-representações lineares de um grupo G têm o mesmo caracter se, e somente se, são equivalentes. Ou equivalentemente, os correspondentes KG-módulos possuem o mesmo caracter se, e somente se, são isomorfos.*

Demonstração. Ver [31], Teorema 8.3.7, página 230. ∎

Sendo $\chi : G \longrightarrow K$ um caracter da representação $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, definimos $\dim V = deg\chi$ como sendo o grau de caracter χ. Se 1_G denota o elemento neutro de G, então $\chi(1_G) = \dim V$. Também não é difícil ver que χ é uma *função de classe* de G em K, no sentido de que se g_1 e g_2 são elementos conjugados de G, então $\chi(g_1) = \chi(g_2)$.

Exemplo 1.85. *Seja $\rho : G \longrightarrow K$ uma representação de grau 1. Então $\chi_\rho(g) = \rho(g)$, para todo $g \in G$. Em particular, se ρ e ψ são como no Exemplo 1.75, então $\chi_\rho(\sigma) = 1$ e $\chi_\psi(\sigma) = (-1)^\sigma$, para toda $\sigma \in S_n$.*

Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação completamente redutível e $W_1, W_2, ..., W_n$ subespaços ρ-invariante de V tais que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ e $\rho_i = \rho|_{W_i}$ irredutível, para $i = 1, 2, ..., n$. Neste caso dizemos que ρ é *soma direta das representações* $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ e denotamos $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_n$. Além disso dizemos que a representação ρ contém as representações $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$. Segue da Proposição 1.78 que essa decomposição em soma de representações irredutíveis é única a menos da ordem e de equivalência das representações.

Sendo β_i uma base de W_i para $i = 1, 2, ..., n$, então $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup ... \cup \beta_n$ é uma base de V e a matriz de ρ_g na base β é

$$[\rho_g]_\beta = \begin{pmatrix} [(\rho_1)_g]_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [(\rho_2)_g]_{\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [(\rho_n)_g]_{\beta_n} \end{pmatrix}$$

Assim, $\chi_\rho(g) = \chi_{\rho_1}(g) + \chi_{\rho_2}(g) + \cdots + \chi_{\rho_n}(g)$, para todo $g \in G$.

Segue então do Teorema do Maschke e do que foi visto acima o seguinte resultado.

Teorema 1.86. *Se $charK$ não divide $|G|$, então todo caracter de um grupo G é uma soma de caracteres irredutíveis.*

Sejam $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n$ os distintos caracteres irredutíveis de G sobre K. Segue do teorema acima que dado um caracter χ qualquer de G existem $m_1, m_2, ..., m_n$, inteiros não negativos, tais que

$$\chi \quad = \quad m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + ... + m_n\chi_n$$

O número m_j, para $j = 1, 2, ..., n$, é chamado de *multiplicidade de χ_j em χ*.

Considere o K-espaço vetorial $\mathcal{F}(G, K)$ de todas as funções de G em K. Suponha $|G|$ não divisível por $charK$. A aplicação $\langle , \rangle_G : \mathcal{F}(G, K) \times \mathcal{F}(G, K) \longrightarrow K$ definida por

$$\langle f, h \rangle_G = |G|^{-1} \sum_{x \in G} f(x^{-1})h(x)$$

é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre $\mathcal{F}(G, K)$

Teorema 1.87. *Sejam $\rho_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ e $\rho_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ K-representações irredutíveis de G com caracteres χ_1 e χ_2, respectivamente. Então:*

i) Se K é algebricamente fechado e $charK$ não divide $|G|$, então $\langle \chi_1, \chi_1 \rangle_G = 1$.

ii) Se ρ_1 e ρ_2 são não equivalentes, então $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_G = 0$.

iii) Se $charK = 0$ então $\langle \chi_1, \chi_1 \rangle_G = q$ para algum inteiro positivo $q \in K$.

Demonstração. Ver [31], Teorema 8.3.5, página 229. ∎

Sejam H um subgrupo de G e M um G-módulo. Claramente M pode ser considerado como um H-módulo, o qual vamos denotar por $M|_H$. Sendo χ o caracter do G-módulo M, vamos denotar por $\chi|_H$ sua restrição a H, que é o caracter de $M|_H$.

Agora se M é um H-módulo, considerando KG como um H-módulo à direita, podemos construir o espaço vetorial $KG \otimes_{KH} M$. Usando a Propriedade Universal podemos definir o produto bilinear

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & KG \times (KG \otimes_{KH} M) & \longrightarrow & KG \otimes_{KH} M \\ & (\beta, \alpha \otimes m) & \longmapsto & \beta \cdot (\alpha \otimes m) = \beta\alpha \otimes m \end{array}.$$

Este produto faz de $KG \otimes_{KH} M$ um KG-módulo, chamado de *módulo induzido* e denotado por M^G. A representação de G associada a M^G é chamada de *representação induzida* e denotada por ρ^G, onde ρ é a representação de H associada ao H-módulo M. Além disso, pode-se mostrar que

$$\dim M^G = (\dim M)|G : H|$$

onde $|G : H|$ denota o índice de H em G (para maiores detalhes veja [6], página 74).

Se ψ denota o caracter do H-módulo M, então ψ^G denotará o caracter do G-módulo M^G. O próximo teorema mostra como o caracter da representação induzida pode ser calculado.

Teorema 1.88. *Sejam H um subgrupo de G e K um corpo cuja característica não divide a ordem de H. Se $\rho : H \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de H e χ é o seu caracter, então o caracter da representação induzida é dado por*

$$\chi^G(g) = |H|^{-1} \sum_{x \in G} \chi(xgx^{-1})$$

onde consideramos que $\chi(y) = 0$ para $y \in G - H$.

Demonstração. Ver [31], Teorema 8.4.3, página 238. ∎

O próximo teorema é uma ferramenta importante para o estudo das representações induzidas.

Teorema 1.89 (Reciprocidade de Frobenius)**.** *Sejam H um subgrupo de G e K um corpo cuja característica não divide a ordem de G. Se χ é um caracter de G e ψ é um* *caracter de H, então*

$$\langle \chi|_H, \psi \rangle_H = \left\langle \chi, \psi^G \right\rangle_G .$$

Demonstração. Vamos denotar a ordem de G por m e a ordem de H por l. Pelo Teorema 1.88, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^G, \chi \right\rangle_G &= m^{-1} \sum_{x \in G} \psi^G(x)\chi(x^{-1}) \\
&= m^{-1} \sum_{x \in G} \left(l^{-1} \sum_{y \in G} \psi(yxy^{-1}) \right) \chi(x^{-1}) \\
&= (ml)^{-1} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \psi(yxy^{-1})\chi(x^{-1})
\end{aligned}$$

Como $\chi(x^{-1}) = \chi(yx^{-1}y^{-1})$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^G, \chi \right\rangle_G &= \frac{1}{lm} \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} \psi(yxy^{-1})\chi(yx^{-1}y^{-1}) \\
&= \frac{1}{lm} \sum_{y \in G} \sum_{z \in G} \psi(z)\chi(z^{-1}) \\
&= \frac{1}{lm} m \sum_{z \in G} \psi(z)\chi(z^{-1}) \\
&= \frac{1}{l} \sum_{z \in G} \psi(z)\chi(z^{-1})
\end{aligned}$$

Como ψ se anula em $G - H$ (veja o enunciado do Teorema anterior), segue portanto da última igualdade que

$$\left\langle \psi^G, \chi \right\rangle_G = \frac{1}{l} \sum_{z \in H} \psi(z)\chi(z^{-1}) = \langle \psi, \chi|_H \rangle_H$$

■

Sejam

$$\begin{aligned}
\rho : \ G &\longrightarrow GL(V) \\
g &\longmapsto \rho(g) = \rho_g
\end{aligned}$$

uma K-representação linear de G, L uma extensão de K e considere o L-espaço vetorial $V_L = L \otimes V$ (veja Exemplo 1.59). Para cada $g \in G$, considere $\rho_g^L \in \mathcal{L}(V_L)$ dada por

$$\rho_g^L(x \otimes v) = x \otimes \rho_g(v)$$

Pela propriedade universal temos que ρ_g^L está bem definida. Não é difícil ver que ρ_g^L é bijetiva. Como $\rho_{g_1 g_2} = \rho_{g_1} \circ \rho_{g_2}$, para todo $g_1, g_2 \in G$, temos

$$\rho_{g_1 g_2}^L(x \otimes v) = x \otimes \rho_{g_1 g_2}(v) = x \otimes (\rho_{g_1} \circ \rho_{g_2})(v)$$

Por outro lado,

$$(\rho_{g_1}^L \circ \rho_{g_2}^L)(x \otimes v) = \rho_{g_1}^L(x \otimes \rho_g(v)) = x \otimes \rho_{g_1}(\rho_{g_2}(v)) = x \otimes (\rho_{g_1} \circ \rho_{g_2})(v)$$

Logo, $\rho_{g_1 g_2}^L = \rho_{g_1}^L \circ \rho_{g_2}^L$, para todo $g_1, g_2 \in G$, e portanto

$$\begin{array}{rccl} \rho^L : & G & \longrightarrow & GL(V_L) \\ & g & \longmapsto & \rho^L(g) = \rho_g^L \end{array}$$

é uma representação linear de G em V_L, chamada de *representação obtida de ρ pela extensão do corpo base para L.*

Definição 1.90. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma K-representação de G. Dizemos que ρ é absolutamente irredutível se a representação ρ^L é irredutível para toda extensão L de K.*

O próximo teorema dá uma condição para que uma representação seja absolutamente irredutível.

Teorema 1.91. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma K-representação de G onde $charK \nmid |G|$. Então ρ é absolutamente irredutível se, e somente se, $End_{KG}V = \{\alpha Id \mid \alpha \in K\}$.*

Demonstração. Ver [17], Teorema 5.7, página 264. ∎

Um corpo K é chamado de *corpo de decomposição de um grupo G* se toda representação irredutível de G sobre K é absolutamente irredutível.

Teorema 1.92. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma K-representação de G com caracter χ, onde K é um corpo de decomposição de G tal que $charK = 0$. Então ρ é irredutível se, e somente se, $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 31.15, página 221. ∎

Capítulo 2

Representações do Grupo Simétrico e PI-álgebras

Neste capítulo apresentaremos a teoria de Young para representações do grupo simétrico S_n. Esta teoria é uma ferramenta muito importante para o estudo das PI-álgebras. Apresentaremos também aplicações a PI-álgebras e com isso teremos os conceitos fundamentais que utilizaremos em nosso trabalho que são os de codimensão, cocaracter e cotamanho de uma PI-álgebra A.

Em todo este capítulo K denotará um corpo de característica zero.

2.1 Representações do Grupo Simétrico

Vamos denotar por I_n o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n, ou seja, $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ (estamos considerando $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$).

Definição 2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos uma partição de n como sendo uma r-upla $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r)$ de números naturais tais que $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_r$ e $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$. O número $h(\lambda) = r$ é chamado de altura de λ.*

Se $r = 1$, então $n_1 = n$ e escrevemos $\lambda = (n)$. Para a partição λ de n onde $n_1 = n_2 = ... = n_n = 1$ usaremos a notação $\lambda = (1^n)$. De maneira geral, escrevemos $\lambda = (k^d)$ para a partição $\lambda = (\underbrace{k, k, ..., k}_{d-vezes})$, onde $n = kd$. Usaremos a notação $(n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ para dizer que $(n_1, n_2, ..., n_r)$ é uma partição de n e $p(n)$ para o número de partições de n.

Definição 2.2. *Sendo $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$, definimos o diagrama de Young D_λ da partição λ como sendo o conjunto $D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}$.*

Representamos D_λ por n quadrados (células) dispostas em r filas horizontais (linhas) onde a i-ésima linha é composta por n_i quadrados. Da esquerda para a direita os primeiros quadrados de cada linha aparecem em uma mesma fila vertical (coluna). Nesta representação gráfica de D_λ, a célula correspondente ao elemento $(i,j) \in D_\lambda$ está na i-ésima linha e j-ésima coluna. Assim, vamos identificar o elemento (i,j) com a correspondente célula. Por exemplo, considere $\lambda = (3,2,2,1)$ uma partição do número 8. O diagrama de Young D_λ é

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Observação 2.3. *Sejam n e m inteiros positivos, com $n \geq m$, $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ e $\mu = (m_1, m_2, ..., m_s) \vdash m$. Dizemos que $\lambda \geq \mu$ se $r \geq s$ e $n_1 \geq m_1, ..., n_s \geq m_s$. Em termos de diagramas de Young, temos que $\lambda \geq \mu$ se, e somente se, $D_\mu \subseteq D_\lambda$.*

Definição 2.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$. Definimos uma tabela de Young do diagrama D_λ como sendo uma função bijetora $T : D_\lambda \longrightarrow I_n$. Dizemos que uma tabela de Young T é standard se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$T(i,j) < T(i,j+1)$ para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j < n_i$;*

2. *$T(i,j) < T(i+1,j)$ para $1 \leq j \leq n_1$ e $1 \leq i < c_j$, onde c_j é o número de células na j-ésima coluna.*

Assim, T é standard se os números em cada linha e em cada coluna de T crescem da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente.

Exemplo 2.5. *Dada $\lambda = (3,3,1) \vdash 7$, considere a seguinte tabela de Young associada ao diagrama D_λ*

$$T_{(3,3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 7 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Observe que esta é uma tabela standard. Considerando agora $\mu = (4,3,1) \vdash 8$ e a tabela dada por

$$T_{(4,3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 7 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 8 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

temos que $T_{(4,3,1)}$ não é standard.

Para cada $\lambda \vdash n$ existem $n!$ tabelas distintas associadas ao diagrama de Young D_λ, e entre elas as tabelas standard têm um papel importante em nosso estudo, como veremos adiante. Por isso é importante saber quantas tabelas standard existem. Uma forma de calcular esse número é através da fórmula do gancho.

Definição 2.6. *Para qualquer célula $(i_0, j_0) \in D_\lambda$, definimos o gancho de (i_0, j_0) como sendo o conjunto*

$$\{(i_0, j); j_0 \leq j \leq n_{i_0}\} \cup \{(i, j_0); i_0 \leq i \leq c_{j_0}\}$$

Observe que o gancho (i_0, j_0) do diagrama D_λ é exatamente o conjunto das células da linha i_0 que estão à direita da célula (i_0, j_0) (incluindo a célula (i_0, j_0)) e as células da coluna j_0 que estão abaixo da célula (i_0, j_0). A figura abaixo representa o gancho (2,2) do diagrama D_λ, onde $\lambda = (4,3,3,2,1) \vdash 13$.

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & \text{X} & \text{X} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} & \text{X} & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} & \text{X} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Considerando $h_{i_0 j_0}$ como sendo o número de células, ou *tamanho*, do gancho (i_0, j_0), não é difícil ver que

$$h_{i_0 j_0} = n_{i_0} - (j_0 - 1) + c_{j_0} - (i_0 - 1) - 1 = n_{i_0} + c_{j_0} - i_0 - j_0 + 1 \tag{2.1}$$

Teorema 2.7 (Fórmula do Gancho). *Sendo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r)$ uma partição de n e $ST(\lambda)$ o número de tabelas standard do diagrama D_λ, temos*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{(i,j) \in D_\lambda} h_{ij}}.$$

Demonstração. [4], Capítulo VI, §3, página 211. ■

Definição 2.8. *Sejam* $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ *e* $T_\lambda = (a_{ij})_{(i,j)\in D_\lambda}$ *uma tabela de Young associada a* λ. *Definimos:*

i) o estabilizador-linha de T_λ *como sendo o grupo*

$$R_{T_\lambda} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(L) = L \text{ para toda linha } L \text{ de } T\}$$

ii) o estabilizador-coluna de T_λ *como sendo o grupo*

$$C_{T_\lambda} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(C) = C \text{ para toda linha } C \text{ de } T\}$$

Dessa forma R_{T_λ} é o subgrupo de S_n de todas as permutações que estabilizam as linhas de T_λ. Analogamente, C_{T_λ} é o subgrupo de S_n de todas as permutações que estabilizam as colunas de T_λ.

Denotaremos por $S_k(a_1, a_2, ..., a_k)$ o grupo simétrico S_k sobre o conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Assim, sendo $T_\lambda = (a_{ij})_{(i,j)\in D_\lambda}$ uma tabela de Young associada a partição λ. Para $1 \leq l \leq r$, considere

$$H_l = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(a_{ij}) = a_{ij}, \text{ para } i \neq l\}.$$

Então $H_l \simeq S_{n_l}(a_{l1}, a_{l2}, ..., a_{ln_l})$ e

$$R_{T_\lambda} = H_1H_2...H_r \simeq S_{n_1}(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n_1}) \times ... \times S_{n_r}(a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{rn_r}).$$

Analogamente, para $1 \leq t \leq n_1$ considere

$$K_t = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(a_{ij}) = a_{ij}, \quad \text{para } j \neq t\}.$$

Então $K_t \simeq S_{c_t}(a_{1t}, a_{2t}, ..., a_{c_t t})$ e

$$C_{T_\lambda} = K_1K_2...K_{n_1} \simeq S_{c_1}(a_{11}, a_{21}, ..., a_{c_1 1}) \times ... \times S_{c_s}(a_{1c_s}, a_{2c_s}, ..., a_{c_s s}).$$

Definição 2.9. *Para cada tabela de Young* T_λ *definimos*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma\in R_{T_\lambda} \\ \gamma\in C_{T_\lambda}}} (-1)^\gamma \sigma\gamma \in KS_n.$$

Lema 2.10. *Sejam $\lambda \vdash n$, T uma tabela de Young associada a λ e $\alpha \in KS_n$, então existe $\gamma \in K$ tal que $e_T \alpha e_T = \gamma e_T$.*

Demonstração. Ver [4], Cap IV, §2. ■

Segue deste lema que e_{T_λ} é um idempotente essencial de KS_n, ou seja, $e_{T_\lambda}^2 = ae_{T_\lambda}$ com $a \in K$. Além disso, mostra-se que $a \neq 0$ (veja [6], página 195).

Sendo $\sigma \in S_n$, definimos σT como sendo a composta $\sigma \circ T : D_\lambda \longrightarrow I_n$, que é também uma tabela de Young do diagrama D_λ. Observe que dadas tabelas de Young T_1 e T_2 do mesmo diagrama D_λ, então existe $\sigma \in S_n$ tal que $T_2 = \sigma T_1$. Por exemplo, considere as tabelas de Young

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 7 & 8 \\ \hline 6 & 10 & 9 \\ \cline{1-3} 1 & 5 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{e} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \cline{1-3} 9 & 10 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Então $\sigma = (1\ 9\ 7\ 3\ 4)(2\ 8)(5\ 10\ 6) \in S_{10}$ é tal que $T_2 = \sigma T_1$.

Observação 2.11. *Sejam T uma tabela de Young associada à partição λ de n e $\sigma \in S_n$. É fácil mostrar que $R_{\sigma T} = \sigma R_T \sigma^{-1}$ e $C_{\sigma T} = \sigma C_T \sigma^{-1}$, e assim $e_{\sigma T} = \sigma e_T \sigma^{-1}$.*

Para cada tabela de Young T defina

$$M_T = KS_n e_T = \{\alpha e_T \mid \alpha \in KS_n\}.$$

Claramente M_T é um ideal à esquerda de KS_n e assim é um submódulo de KS_n, visto como um S_n-módulo.

Exemplo 2.12. *Considere $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e as tabelas de Young*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \dots & n \\ \hline\end{array} \quad e \quad T_2 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}.$$

Temos $R_{T_1} = C_{T_2} = S_n$ e $C_{T_1} = R_{T_2} = \{Id\}$ e assim

$$e_{T_1} = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \quad e \quad e_{T_2} = \sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\mu} \mu$$

Dado $\alpha \in S_n$, temos

$$\alpha e_{T_1} = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha\sigma = e_{T_1}$$

e

$$\alpha e_{T_2} = \alpha \sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\mu} = \sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\mu} \alpha\mu = (-1)^{\alpha} \sum_{\mu \in S_n} (-1)^{\alpha}(-1)^{\mu} \alpha\mu = (-1)^{\alpha} e_{T_2}$$

Assim, $M_{T_1} = \langle e_{T_1} \rangle$ e $M_{T_2} = \langle e_{T_2} \rangle$, ou seja, M_{T_1} e M_{T_2} têm dimensão 1. Além disso, M_{T_1} é o S_n-módulo correspondente à representação trivial de grau 1 e M_{T_2} é o S_n-módulo correspondente à representação sinal.

Proposição 2.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ e T, T_1, T_2 tabelas de Young dos diagramas $D_{\lambda}, D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}$, respectivamente. Então:*
a) M_T é um S_n-módulo irredutível.
b) M_{T_1} e M_{T_2} são isomorfos se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Demonstração. Ver [4], Teoremas 3.1 e 3.2, Cap. IV, §3. ∎

Segue da proposição acima que o número de K-representações irredutíveis não equivalentes de S_n é maior ou igual a $p(n)$. Mas, pela Proposição 1.82, temos que o número de K-representações irredutíveis não equivalentes de S_n é menor ou igual $p(n)$. Como o número de classes de conjugação do grupo S_n é igual a $p(n)$, temos portanto que o número de K-representações irredutíveis não equivalentes de S_n, e consequentemente o número de submódulos irredutíveis de KS_n, a menos de isomorfismo, é igual a $p(n)$.

Desta maneira, podemos indexar os S_n-módulos irredutíveis não isomorfos pelas partições de n. Seja M_{λ} o S_n-módulo irredutível correspondente à partição λ de n. Vamos denotar por χ_{λ} o seu caracter e $d_{\lambda} = \chi_{\lambda}(1)$ o seu grau.

Pelo Teorema 1.80 temos que todo S_n-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal a esquerda de KS_n. Para cada $\lambda \vdash n$ denotamos por I_{λ} a soma de todos os ideais minimais à esquerda de KS_n isomorfos (como S_n-módulos) a M_{λ}. Sendo T uma tabela de Young do diagrama D_{λ} temos $I_{\lambda} = M_T KS_n$.

Proposição 2.14. *Sejam K um corpo de característica zero e $n \geq 1$. Então I_λ é um ideal bilateral minimal de KS_n e*

$$KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda.$$

Além disso, $I_\lambda = KS_n e_\lambda$, onde $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$.

Demonstração. Veja o Teorema 1.81. Para a última afirmação, veja [24], Proposição 8.15, página 127. ∎

A proposição a seguir relaciona o grau de χ_λ como o número de tabelas standard associadas à partição λ e expressa o ideal bilateral I_λ como soma direta de ideais minimais à esquerda de KS_n.

Proposição 2.15. *Sejam λ uma partição de n e $T_1, T_2, ..., T_{ST(\lambda)}$ as tabelas de Young standard associadas a λ. Então, $d_\lambda = ST(\lambda)$ e o ideal bilateral minimal de KS_n correspondente a λ tem a seguinte decomposição*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} KS_n e_{T_i}.$$

Demonstração. Ver [4], Teorema 4.6, página 121. ∎

Segue então da fórmula do gancho e da Proposição 2.15 que

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in D_\lambda} h_{ij}}. \tag{2.2}$$

Além disso, pelas Proposições 2.14 e 2.15, temos

$$KS_n = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ T_\lambda \ standard}} KS_n e_{T_\lambda}. \tag{2.3}$$

Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_1, T_2, ..., T_{d_\lambda}$ as distintas tabelas standard associadas a λ. Pela Proposição 2.13, temos

$$M_\lambda \simeq KS_n e_{T_1} \simeq KS_n e_{T_2} \simeq ... \simeq KS_n e_{T_{d_\lambda}}.$$

Então $I_\lambda \simeq d_\lambda M_\lambda = \underbrace{M_\lambda \oplus M_\lambda \oplus ... \oplus M_\lambda}_{d_\lambda \text{vezes}}$ e assim, por (2.3), $KS_n \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} d_\lambda M_\lambda$. Portanto,

$$\chi_{KS_n} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda. \tag{2.4}$$

Observação 2.16. *Seja M um S_n-módulo e considere $M \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} t_\lambda M_\lambda$ uma decomposição de M em soma de submódulos irredutíveis. Se M_1 e M_2 são submódulos de M tais que $M = M_1 \oplus M_2$ e $M_1 \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} n_\lambda M_\lambda$ e $M_2 \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} l_\lambda M_\lambda$, então pela Proposição 1.78 devemos ter $t_\lambda = n_\lambda + l_\lambda$. Particularmente, se $M = KS_n$, então $n_\lambda + l_\lambda = d_\lambda$.*

Se M_1 não possui submódulo minimal isomorfo a M_λ, ou equivalentemente, se $n_\lambda = 0$, então M_2 contém todos os submódulos minimais de M isomorfos a M_λ. De fato, seja N um submódulo irredutível arbitrário isomorfo a M_λ e suponha que $N \nsubseteq M_2$. Então $M_2 \cap N = \{0\}$ e daí $N \oplus M_2$ é um submódulo de M. Tomando M_3 um submódulo de M tal que $M = (N \oplus M_2) \oplus M_3$, temos um absurdo, pois a multiplicidade de χ_λ em $\chi_{N \oplus M_2} = t_\lambda + 1$. Logo, $N \subseteq M_2$.

Sejam $\lambda \vdash n$, ρ_λ a representação irredutível de S_n associada a λ e $M_\lambda = \{\alpha e_T \mid \alpha \in KS_n\}$ (onde T é uma tabela de Young associada a λ) um S_n-módulo irredutível associado a ρ_λ. Considere $End_{KS_n} M_\lambda$ o conjunto de todos os KS_n-endomorfismos de M_λ. Sabemos que $\gamma Id_{M_\lambda} \in End_{KS_n}$, para todo $\gamma \in K$. Sendo agora $\varphi \in End_{KS_n} M_\lambda$ e $\alpha \in KS_n$ tal que $\varphi(e_T) = \alpha e_T$, temos

$$\varphi(e_T) = \varphi(e_T e_T) = e_T \varphi(e_T) = e_T \alpha e_T = \gamma e_T$$

para algum $\gamma \in K$, pelo Lema 2.10. Assim, dado $x = \beta e_T \in M_\lambda$, para algum $\beta \in KS_n$, temos

$$\varphi(x) = \varphi(\beta e_T) = \beta \varphi(e_T) = \gamma \beta e_T = \gamma x$$

Logo, $\varphi = \gamma Id_{M_\lambda}$. Portanto, $End_{KS_n} M_\lambda = \{\gamma Id_{M_\lambda} \mid \gamma \in K\}$. Segue então do Teorema 1.91 que toda representação irredutível de S_n sobre um corpo de característica 0 é absolutamente irredutível. Ou seja, todo corpo de característica 0 é um corpo de decomposição de S_n.

Teorema 2.17. *Sejam χ um caracter de S_n e $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_m$ os K-caracteres irredutíveis de S_n. Considere a decomposição de χ em soma de caracteres irredutíveis*

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + ... + n_m\chi_m.$$

Então, $\langle \chi, \chi_i \rangle_{S_n} = n_i$.

Demonstração. Pelos Teoremas 1.87 e 1.92, temos que

$$\langle \chi_i, \chi_i \rangle_{S_n} = 1 \quad \text{e} \quad \langle \chi_i, \chi_j \rangle_{S_n} = 0 \text{ para } i \neq j$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \chi_i \rangle_{S_n} &= \langle n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + ... + n_m\chi_m, \chi_i \rangle_{S_n} \\
&= n_1 \langle \chi_1, \chi_i \rangle_{S_n} + n_2 \langle \chi_2, \chi_i \rangle_{S_n} + ... + n_m \langle \chi_m, \chi_i \rangle_{S_n} \\
&= n_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle_{S_n} = n_i
\end{aligned}$$

■

2.2 Codimensão e Cocaracter

Como foi visto na Seção 1.3, o espaço P_n dos polinômios multilineares em n variáveis pode ser visto como um S_n-módulo através do produto definido em (1.2). Além disso, pelo Exemplo 1.52, P_n é isomorfo, como S_n-módulo, a KS_n, e assim a representação linear associada ao S_n-módulo P_n é equivalente à representação regular à esquerda. Temos então que o caracter de P_n é dado por

$$\chi_{P_n} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda.$$

Considere A uma álgebra associativa e $T(A)$ o T-ideal das suas identidades polinomiais. Dados $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_n \cap T(A)$ e $\sigma \in S_n$ então

$$\sigma \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) \in P_n \cap T(A)$$

ou seja, $P_n \cap T(A)$ é um submódulo do S_n-módulo P_n. Assim, podemos construir o módulo quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}.$$

Definição 2.18. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a n-ésima codimensão de A, denotada por $c_n(A)$, como sendo a dimensão (como K-espaço vetorial) do módulo quociente $P_n(A)$, ou seja,*

$$c_n(A) = dim P_n(A) = dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}.$$

A sequência $(c_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ é chamada de sequência de codimensões de A.

Como $\dim(P_n \cap T(A)) = n! - c_n(A)$ segue que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$ para algum $n > 1$.

Exemplo 2.19. *Sejam A uma álgebra nilpotente e $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = 0$. Então $x_1 x_2 ... x_m = 0$ é uma identidade para A. Assim, todo polinômio multilinear com grau maior ou igual a m é uma identidade para A. Logo, $P_n \cap T(A) = P_n$ para todo $n \geq m$, e daí $c_n(A) = 0$ para $n \geq m$.*

Exemplo 2.20. *Se A é uma álgebra comutativa, então $c_n(A) \leq 1$ para todo $n \geq 1$. De fato, como vimos no Exemplo 1.24, $[x_1, x_2] \in T(A)$. Como $x_{i_1} x_{i_2} = x_{i_2} x_{i_1} + [x_{i_1}, x_{i_2}]$, então $x_{i_1} x_{i_2} \equiv x_{i_2} x_{i_1} (mod \;\; P_n \cap T(A))$. Assim, para todo $\sigma \in S_n$, temos que*

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \equiv x_1 x_2 ... x_n (mod \;\; P_n \cap T(A))$$

Dado $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \in P_n$, temos

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \lambda x_1 x_2 ... x_n (mod \;\; P_n \cap T(A)), \quad com \;\; \lambda \in K$$

Logo, $\overline{x_1 x_2 ... x_n}$ gera $P_n(A)$ como espaço vetorial. Portanto,

$$c_n(A) = dim P_n(A) \leq 1$$

Se A é unitária, então $x_1 x_2 ... x_n \notin T(A)$. Assim, $\overline{x_1 x_2 ... x_n} \neq 0$ em $P_n(A)$ e daí, $c_n(A) = 1$.

Exemplo 2.21. *([15], Teorema 4.1.5) Sendo E a álgebra de Grassmann, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$c_n(E) = 2^{n-1}.$$

Exemplo 2.22. *([8], Teorema 5.1.2) A álgebra $U_2(K)$ das matrizes triangulares superiores sobre o corpo K tem a sequência de codimensões dada por*

$$c_n(U_2(K)) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

Um resultado importante no estudo das codimensões de uma PI-álgebra deve-se a Regev e a Latyshev. Em 1972, Regev [29] demonstrou que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A é exponencialmente limitada, ou seja, se A satisfaz uma identidade de grau d, então $c_n(A) \leq (3 \cdot 4^{d-3})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Posteriormente, Latyshev [25] melhorou essa estimativa com o seguinte resultado:

Teorema 2.23 (Regev - Latyshev)**.** *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Ver [15], página 95. ∎

Definição 2.24. *O caracter do S_n-módulo $P_n(A)$ é chamado de n-ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$. A sequência $(\chi_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de sequência de cocaracteres de A.*

Denotando por χ_λ o S_n-caracter irredutível associado à partição λ de n, temos

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{2.5}$$

onde m_λ é a multiplicidade do caracter χ_λ em $\chi_n(A)$, que é exatamente o número de S_n-módulos irredutíveis isomorfos a M_λ na decomposição de $P_n(A)$. Assim, a n-ésima codimensão de A é dada por

$$c_n(A) = \dim P_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda. \tag{2.6}$$

Definição 2.25. *O número*

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

é chamado de n-ésimo cotamanho de A.

Em outras palavras, $l_n(A)$ conta o número de S_n-módulos irredutíveis que aparecem na decomposição de $P_n(A)$.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade e A uma álgebra tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, definimos

$$c_n(\mathcal{V}) = c_n(A), \quad \chi_n(\mathcal{V}) = \chi_n(A) \quad \text{e} \quad l_n(\mathcal{V}) = l_n(A).$$

Sejam $\lambda \vdash n$ e T_λ uma tabela de Young associada a λ. O próximo lema garante que qualquer S_n-módulo irredutível cujo caracter é χ_λ é gerado por um elemento do tipo $e_{T_\lambda} m$, para $m \in M$. Essa caracterização será muito importante para os próximos resultados dessa seção.

Lema 2.26. *Sejam $\mu \vdash n$ e M um S_n-módulo irredutível tal que $\chi_M = \chi_\mu$. Então existe algum $m \in M$ e alguma tabela de Young T_1 associada à partição μ tal que $M = KS_n e_{T_1} m$. Além disso, para qualquer tabela T_μ associada a μ, existe $m' \in M$ tal que $M = KS_n e_{T_\mu} m'$.*

Demonstração. Por (2.3) temos que $KS_n = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ T_\lambda \ standard}} KS_n e_{T_\lambda}$. Sendo M um S_n-módulo temos que $KS_n M = M$. Daí, devemos ter $e_{T_1} \cdot m \neq 0$ para algum $m \in M$ e alguma tabela de Young T_1 associada a alguma partição λ de n. Como $KS_n e_{T_1} \cdot m \neq \{0\}$ é um submódulo de M e M é irredutível, devemos ter $KS_n e_{T_1} \cdot m = M$.

Defina agora a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & KS_n e_{T_1} & \longrightarrow & M \\ & \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \alpha m. \end{array}$$

Claramente φ é um homomorfismo não nulo de S_n-módulos. Segue da irredutibilidade de M e $KS_n e_{T_1}$ que φ é um isomorfismo. Pela Proposição 1.84 devemos ter

$$\chi_\lambda = \chi_{KS_n e_{T_1}} = \chi_M = \chi_\mu$$

Portanto, $\lambda = \mu$.

Seja agora T_μ uma tabela de Young associada a μ. Considere $\sigma \in KS_n$ tal que $T_1 = \sigma T_\mu$. Pela Observação 2.11 temos que $e_{T_1} = \sigma e_{T_\mu} \sigma^{-1}$. Tomando $m' = \sigma^{-1} m$, temos que $M = KS_n e_{T_\mu} m'$. ∎

Como uma consequência imediata do lema anterior obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.27. *Para todo $f \in P_n$ existe um conjunto finito de polinômios multilineares $g_1, g_2, ..., g_r \in P_n$ e partições $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ de n tais que*

$$KS_n f = KS_n e_{T_{\lambda_1}} g_1 + ... + KS_n e_{T_{\lambda_r}} g_r$$

Demonstração. Considere o S_n-módulo $M = KS_n f$ e sua decomposição em S_n-módulos irredutíveis, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_r$. Pelo Lema 2.26 existem $g_1 \in M_1, ...,$ $g_r \in M_r$ e tabelas de Young $T_{\lambda_1}, ..., T_{\lambda_r}$ tais que $M_1 = KS_n e_{T_{\lambda_1}} g_1, ..., M_r = KS_n e_{T_{\lambda_r}} g_r$. Portanto, $KS_n f = KS_n e_{T_{\lambda_1}} g_1 + ... + KS_n e_{T_{\lambda_r}} g_r$. ∎

Vamos agora apresentar dois resultados que ajudam a determinar a multiplicidade m_λ em (2.5).

Sejam $X = \{x_1, x_2, ...\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ conjuntos enumeráveis de variáveis e A uma PI-álgebra. Considere o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & K\langle X\rangle & \longrightarrow & \dfrac{K\langle Y\rangle}{T(A)} \\ & x_i & \longmapsto & \Phi(x_i) = \overline{y_i} \end{array}$$

Se $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T(A)$, então

$$\Phi(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = f(\overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_n}) = \overline{f(y_1, y_2, ..., y_n)} = \overline{0}.$$

Logo, $T(A) \subseteq Ker\Phi$ e portanto Φ induz o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \dfrac{K\langle X\rangle}{T(A)} & \longrightarrow & \dfrac{K\langle Y\rangle}{T(A)} \\ & \overline{x}_i & \longmapsto & \varphi(\overline{x}_i) = \Phi(x_i) = \overline{y_i} \end{array}.$$

Observe agora que pelo Segundo Teorema de Isomorfismo temos

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)} \simeq \frac{P_n + T(A)}{T(A)} \subset \frac{K\langle X\rangle}{T(A)}$$

Sendo ψ o isomorfismo natural entre $P_n(A)$ e $\dfrac{P_n + T(A)}{T(A)}$, então $\psi(P_n(A)) \subset \dfrac{K\langle X\rangle}{T(A)}$. Por simplicidade de notação, vamos identificar $P_n(A)$ com $\psi(P_n(A))$.

Escrevendo $P_n(A)$ como soma direta de submódulos irredutíveis, temos que nesta decomposição aparecem exatamente m_λ submódulos isomorfos a M_λ. Considerando então o submódulo $W_\lambda \simeq m_\lambda M_\lambda$ de $P_n(A)$, temos que o caracter de W_λ é dado por $\chi_{W_\lambda} = m_\lambda \chi_\lambda$.

Teorema 2.28. *Seja A uma PI-álgebra com n-ésimo cocaracter dado em (2.5). Sejam $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_k) \vdash n$ e W_λ um S_n-submódulo de $P_n(A)$ com caracter $\chi_{W_\lambda} = m_\lambda \chi_\lambda$. Se*

$$\varphi: \frac{K\langle X\rangle}{T(A)} \longrightarrow \frac{K\langle Y\rangle}{T(A)}$$

é um homomorfismo tal que

$$\varphi(\overline{x}_1) = ... = \varphi(\overline{x}_{n_1}) = \overline{y}_1$$

$$\varphi(\overline{x}_{n_1+1}) = ... = \varphi(\overline{x}_{n_1+n_2}) = \overline{y}_2$$

$$\vdots$$

$$\varphi(\overline{x}_{n_1+...+n_{k-1}+1}) = ... = \varphi(\overline{x}_n) = \overline{y}_k$$

onde $\overline{x}_i = x_i + T(A)$ *e* $\overline{y}_i = y_i + T(A)$, $i = 1, 2, ..., k$, *então* $m_\lambda = dim\varphi(W'_\lambda)$, *onde* $W'_\lambda = \psi(W_\lambda)$.

Demonstração. [15], Teorema 2.4.4, pag 54. ■

Antes de apresentarmos o segundo resultado, precisaremos da seguinte observação que nos dá uma decomposição do S_n-módulo P_n.

Observação 2.29. *Sendo A uma PI-álgebra, já vimos que* $P_n \cap T(A)$ *um submódulo de* P_n *e assim, pelo Teorema de Maschke, existe um submódulo J de* P_n *tal que*

$$P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J.$$

Além disso, por $(P_n \cap T(A)) \cap J = \{0\}$ *e pelo Segundo Teorema de Isomorfismo, temos*

$$P_n(A) = \frac{(P_n \cap T(A)) + J}{P_n \cap T(A)} \simeq \frac{J}{(P_n(A) \cap T(A)) \cap J} \simeq J,$$

e assim $\chi_n(A) = \chi_J$.

Teorema 2.30. *Sejam A uma PI-álgebra,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\mu \vdash n$. *Considere*

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda.$$

São equivalentes:

i) $m_\mu = 0$;

ii) $e_T f \in T(A)$ *para quaisquer* $f \in P_n$ *e T tabela de Young associada à partição* μ.

Demonstração. Seja J um submódulo de P_n tal que $P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J$. Pela Observação 2.29, J é isomorfo a $P_n(A)$ e assim $\chi_J = \chi_n(A)$. Se $m_\mu = 0$, então J não possui nenhum submódulo isomorfo a $KS_n e_T$, onde T é alguma tabela de Young associada a partição μ.

Supondo agora que $e_T \cdot h \neq 0$ para algum $h \in J$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & KS_n e_T & \longrightarrow & KS_n e_T \cdot h \\ & \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \alpha \cdot h \end{array}$$

é um isomorfismo de S_n-módulos, o que é um absurdo pois $KS_ne_T \cdot h \subset J$. Logo, $e_T \cdot h = 0$, para todo $h \in J$. Considerando agora $f \in P_n$, temos $f = g + h$, com $g \in (P_n \cap T(A))$ e $h \in J$. Daí,

$$e_T f = e_T g + e_T h = e_T g \in P_n \cap T(A)$$

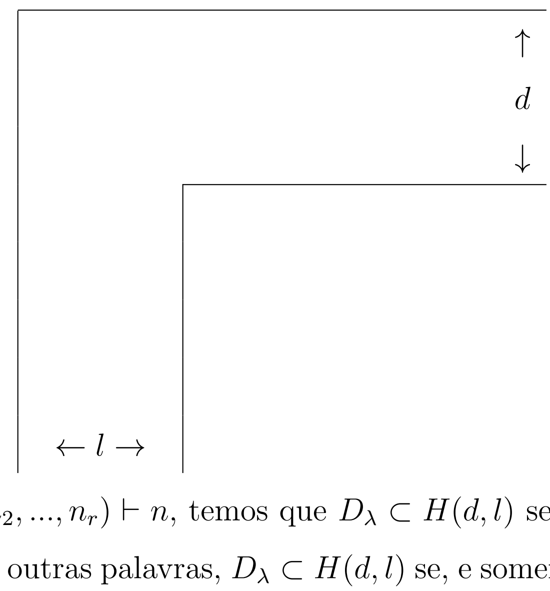
e portanto $e_T f \in T(A)$ para qualquer $f \in P_n$.

Suponha agora que $m_\mu \neq 0$. Então J possui algum submódulo minimal N com caracter $\chi_N = \chi_\mu$. Pelo Lema 2.26, existe $f \in N$ tal que $N = KS_ne_T f$ para alguma tabela de Young T associada à partição μ. Como $N \neq 0$, temos $e_T f \neq 0$, e por $(P_n(A) \cap T(A)) \cap J = \{0\}$ devemos ter $e_T f \notin (P_n(A) \cap T(A)) \cap J$. Portanto, $e_T f \notin T(A)$. ■

Definição 2.31. *Dados inteiros $l, d \geq 0$ definimos o gancho infinito $H(d,l)$ como sendo*

$$H(d,l) = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; i \leq d \ \ ou \ \ j \leq l\}$$

$H(d,l)$ tem a seguinte representação gráfica



Sendo $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$, temos que $D_\lambda \subset H(d,l)$ se, e somente se, a célula $(d+1, l+1) \notin D_\lambda$. Em outras palavras, $D_\lambda \subset H(d,l)$ se, e somente se, $D_{((l+1)^{d+1})} \nsubseteq D_\lambda$, ou seja, D_λ não contem um diagrama retangular $(d+1) \times (l+1)$.

Dizemos que uma partição λ *pertence* a $H(d,l)$, e escrevemos $\lambda \in H(d,l)$, se o diagrama de Young D_λ associado a λ está contido em $H(d,l)$. Se M é um S_n-módulo com caracter $\chi_M = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, escrevemos $\chi_M \subseteq H(d,l)$ se $\lambda \in H(d,l)$ para toda partição λ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Definição 2.32. *Sendo $f = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_k)$, dizemos que:*

i) f é alternado no conjunto de variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ se

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n, y_1, ..., y_k) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n, y_1, ..., y_k)$$

para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ com $i \neq j$. Se f é alternado em todas as variáveis diremos apenas que f é alternado.

ii) f é simétrico no conjunto de variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ se

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n, y_1, ..., y_k) = f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n, y_1, ..., y_k)$$

para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Se f é simétrico em todas as variáveis diremos apenas que f é simétrico.

Exemplo 2.33. *O polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é alternado. Mais geralmente, o polinômio standard $s_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$ é alternado.*

O lema a seguir traz um resultado bastante técnico que será usado nas próximas seções.

Lema 2.34. *Sejam $\lambda \vdash n, T_\lambda$ uma tabela de Young associada a λ e $f = e_{T_\lambda} g$ onde $g = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ é um polinômio multilinear nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Se $\lambda \in H(d, l)$, então existem uma decomposição de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ em uma união disjunta*

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} = X_1 \cup ... \cup X_{d'} \cup Y_1 \cup ... \cup Y_{l'} \tag{2.7}$$

com $d' \leq d, l' \leq l$, e um polinômio multilinear $f' = f'(x_1, ..., x_n)$ tais que

i) f' é simétrico em cada conjunto de variáveis $X_i, 1 \leq i \leq d'$;

ii) f' é alternado em cada conjunto de variáveis $Y_j, 1 \leq j \leq l'$;

iii) $KS_n f = KS_n f'$;

iv) os inteiros $d', l', |X_1|, ..., |X_{d'}|, |Y_1|, ..., |Y_{l'}|$ são unicamente determinados por λ e não dependem da escolha da tabela T_λ;

v) a decomposição em (2.7) é unicamente definida por T_λ e não depende de g.

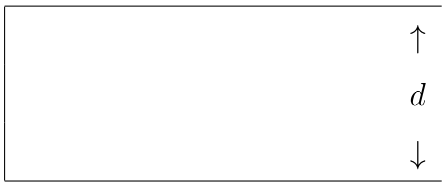
Demonstração. Ver [15], Lema 2.5.6, página 60. ■

A condição (iii) do teorema anterior garante que os polinômios f e $f^{'}$ são equivalentes como identidades, ou seja, $f \in \langle f' \rangle^T$ e $f' \in \langle f \rangle^T$. De fato, se $KS_n f = KS_n f'$, então existem $\alpha, \beta \in KS_n$ tais que $f = \alpha f'$ e $f' = \beta f$. Donde, $f \in \langle f' \rangle^T$ e $f' \in \langle f \rangle^T$.

Definição 2.35. *Seja A uma PI-álgebra. Dizemos que a sequência de cocaracteres de A tem altura limitada por d se o n-ésimo cocaracter de A é dado por*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq d}} m_\lambda \chi_\lambda$$

Isto equivale a dizer que $\chi_n(A) \subseteq H(d, 0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que $H(d, 0)$ é representado graficamente por uma faixa horizontal de altura d como na figura abaixo:



Exemplo 2.36. *Se A é uma álgebra que satisfaz a identidade de Capelli de altura m, então a sequência de cocaracteres de A tem altura limitada por $m - 1$. Um justificativa para esse fato, demonstrado primeiramente por Regev [30] em* 1979*, será vista no capítulo* 4*.*

Como vimos no Capítulo 1, se A é uma álgebra de dimensão finita igual a k, então A satisfaz a identidade de Capelli de altura $k+1$, e assim, pelo exemplo anterior, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.37. *Seja A uma álgebra de dimensão finita igual a k, então A tem sequência de cocaracteres de altura limitada por k, ou seja, seu n-ésimo cocaracter é dado por*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq k}} m_\lambda \chi_\lambda .$$

2.3 Codimensões e Cocaracteres de algumas álgebras

Usando os resultados apresentados nesse capítulo vamos calcular as codimensões, cocaracteres e os cotamanhos de algumas álgebras. Os cálculos apresentados aqui foram baseados no artigo [11] de Giambruno e La Mattina (2005). No final dessa seção observaremos uma propriedade satisfeita pelos cocaracteres calculados que em sua generalidade é o Teorema do Gancho , que será apresentado no próximo capítulo.

Exemplo 2.38. *Seja* $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \ ; \ a, b \in K \right\}$. *Então para todo* $n > 1$ *temos:*

a) $T(\mathcal{A}) = \langle x[y,z] \rangle^T$;

b) $c_n(\mathcal{A}) = n$;

c) $\chi_n(\mathcal{A}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$;

d) $l_n(\mathcal{A}) = 2$.

Sejam $Q = \langle x[y,z] \rangle^T$. *Observando que* $[A_1, A_2] = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *com* $c \in K$, *temos* $A_1[A_2, A_3] = 0$ *para quaisquer* $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$, *ou seja,* $x[y,z]$ *é uma identidade de* $\mathcal{A}$. *Assim,* $Q \subseteq T(\mathcal{A})$.

Considere β *o conjunto dos monômios multilineares*

$$m_i = x_i x_{i_2} \ldots x_{i_{n-1}} \in P_n, \text{ com } i_1 < \ldots < i_{n-1}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vamos mostrar que β *é uma base de* P_n *módulo* $T(A) \cap P_n$, *ou seja, que* $\overline{\beta} = \{\overline{m_i} \in P_n(\mathcal{A}) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ *é uma base de* $P_n(\mathcal{A})$. *Como* $x_i x_j = x_j x_i + [x_i, x_j]$, *então para cada* $\sigma \in S_n$

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} = x_i x_{i_2} \ldots x_{i_n} \ (mod\ P_n \cap Q)$$

onde $\sigma(1) = i$ *e* $i_2 < \ldots < i_n$. *Assim, dado* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} \in P_n$, *tem-se*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \ (mod\ P_n \cap Q),$$

ou seja, β *gera* P_n *modulo* $P_n \cap Q$, *donde* $\dim(P_n \cap Q) \geq n! - n$.

Considere agora uma combinação linear em $P_n(\mathcal{A})$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{m_i} = \overline{0}.$$

Assim,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \in T(\mathcal{A})$$

Fixando k e substituindo $x_k = E_{12}$ e $x_i = E_{22}$, para $i \neq k$, temos $m_k = E_{12}$ e $m_i = 0$, donde

$$g(E_{12}, E_{22}, ..., E_{22}) = \alpha_k E_{12} = 0$$

Assim devemos ter $\alpha_k = 0$, para $k = 1, 2, ..., n$. Logo, β é L.I. em P_n módulo $P_n \cap T(\mathcal{A})$, donde $\dim(P_n \cap T(\mathcal{A})) \leq n! - n \leq \dim(P_n \cap Q)$. Como $P_n \cap Q \subseteq P_n \cap T(\mathcal{A})$, temos $P_n \cap Q = P_n \cap T(\mathcal{A})$ e assim $T(\mathcal{A}) = Q$ (lembrando que char$K = 0$). Assim, β gera P_n módulo $P_n \cap T(\mathcal{A})$ e portanto $\overline{\beta}$ é uma base de $P_n(\mathcal{A})$. Como o número total de polinômios em β é n temos,

$$c_n(\mathcal{A}) = dim \frac{P_n}{P_n \cap T(\mathcal{A})} = n$$

Considere

$$\chi_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \tag{2.8}$$

Vamos mostrar que $m_{(n)}$ e $m_{(n-1,1)}$ são não nulos em (2.8).

Se $n = 2$, então $P_n \cap T(\mathcal{A}) = 0$ e assim, pela Observação 2.29, temos $P_n \simeq P_n(\mathcal{A})$. Como $d_{(2)} = d_{(1,1)} = 1$ temos

$$\chi_2(\mathcal{A}) = \chi_{(2)} + \chi_{(1,1)}$$

Consideremos então $n \geq 3$. Seja $(n) \vdash n$ e a tabela standard

$$T_{(n)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

Temos $R_{T_{(n)}} = S_n$ e $C_{T_{(n)}} = \{Id\}$, e assim

$$e_{T_{(n)}} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_{(n)}} \\ \mu \in C_{T_{(n)}}}} (-1)^\mu \sigma\mu = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= e_{T_{(n)}}(x_1 x_2 ... x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x_1 x_2 ... x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

Substituindo agora $x_1 = E_{12}$ e $x_2 = x_3 = ... = x_n = E_{22}$, temos

$$f(E_{12}, E_{22}, ..., E_{22}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} E_{12}E_{22}...E_{22} = (n-1)!E_{12}.$$

Assim, $e_{T_{(n)}}(x_1x_2...x_n) \notin T(\mathcal{A})$ e, pelo Teorema 2.30, temos que $m_{(n)} = 1$ em (2.8).

Considere agora $(n-1, 1) \vdash n$ e a tabela standard

$$T_{(n-1,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline n \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Temos $R_{T_{(n-1,1)}} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} = S_{n-1}$ e $C_{T_{(n-1,1)}} = \{Id, (1\ n)\}$, e assim

$$\begin{aligned} e_{T_{(n-1,1)}} &= \left(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma\right)(Id - (1\ n)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma - \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma(1\ n) \end{aligned}$$

Observe agora que se $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & n \end{pmatrix} \in R_{T_{(n-1,1)}}$, então

$$\sigma(1\ n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_1 \end{pmatrix}$$

ou seja, para cada $\sigma \in R_{T_{(n-1,1)}}$, temos $\sigma(1\ n) = \mu$, onde $\mu(1) = n$. Considere então $H = \{\mu \in S_n \mid \mu(1) = n\}$. Assim

$$e_{T_{(n-1,1)}} = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma - \sum_{\mu \in H} \mu$$

E daí, considerando o monômio $x_1x_2...x_n \in P_n$, temos

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= e_{T_{(n-1,1)}}(x_1x_2...x_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma - \sum_{\mu \in H} \mu\right)(x_1x_2...x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma(x_1x_2...x_n) - \sum_{\mu \in H} \mu(x_1x_2...x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n-1)}x_n - \sum_{\mu \in H} x_nx_{\mu(2)}...x_{\mu(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \left(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n-1)}x_n - x_nx_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n-1)}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} [x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n-1)}, x_n] \end{aligned}$$

Substituindo agora $x_1 = E_{12}$ *e* $x_2 = x_3 = ... = x_n = E_{22}$*, temos*

$$\begin{aligned} g_1(E_{12}, E_{22}, ..., E_{22}) &= \sum_{\substack{\sigma \in S_{n-1} \\ \sigma(1)=1}} [E_{12}E_{22}...E_{22}, E_{22}] \\ &= (n-2)![E_{12}, E_{22}] \\ &= (n-2)!E_{12} \neq 0 \end{aligned}$$

Assim, $e_{T_{(n-1,1)}}(x_1x_2...x_n) \notin T(\mathcal{A})$ *e, pelo Teorema 2.30, temos que* $m_{(n-1,1)} \geq 1$ *em (2.8).*

Usando a fórmula do gancho obtemos que

$$d_{(n-1,1)} = \frac{n!}{n \cdot (n-2) \cdots 1 \cdot 1} = n - 1.$$

Por (2.6), $c_n(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda$ *e daí*

$$n = c_n(\mathcal{A}) \geq m_{(n)}d_{(n)} + m_{(n-1,1)}d_{(n-1,1)} \geq 1 + (n-1) = n$$

Logo, $m_{(n)} = m_{(n-1,1)} = 1$ *e* $m_\lambda = 0$*, para* λ *diferente de* (n) *e* $(n-1,1)$*. Portanto,*

$$\chi_n(\mathcal{A}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)} \quad e \quad l_n(\mathcal{A}) = 2.$$

Os cálculos do exemplo a seguir são feitos de modo análogo ao do exemplo anterior.

Exemplo 2.39. *Seja* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ a, b \in K \right\}$*. Então para todo* $n > 1$ *temos:*

a) $T(\mathcal{B}) = \langle [x, y]z \rangle^T$*;*

b) $c_n(\mathcal{B}) = n$*;*

c) $\chi_n(\mathcal{B}) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$*;*

d) $l_n(\mathcal{B}) = 2$*.*

Exemplo 2.40. *Seja* $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c, d \in K \right\}$*. Então para cada* $n > 3$*, temos:*

a) $T(\mathcal{N}) = \langle [x, y]zw \rangle^T$*;*

b) $c_n(\mathcal{N}) = n(n-1)$;

c) $\chi_n(\mathcal{N}) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-2,1,1)}$;

d) $l_n(\mathcal{N}) = 5$.

Dados $N_i \in \mathcal{N}$, *para* $i = 1, 2, 3, 4$, *temos*

$$[N_1, N_2] = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad com\ a, b \in K,$$

e daí $[N_1, N_2]N_3 = cE_{13}$, *com* $c \in K$. *Assim,* $[N_1, N_2]N_3N_4 = 0_{\mathcal{N}}$. *Logo,* $[x, y]zw$ *é uma identidade de* $\mathcal{N}$. *Considerando* $\mathcal{V}$ *a variedade determinada pela identidade* $[x, y]zw$, *temos* $\mathcal{N} \in \mathcal{V}$ *e* $T(\mathcal{V}) = \langle [x, y]zw \rangle^T$. *De modo análogo ao exemplo 2.38, temos que os monômios*

$$m_{ij} = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{n-2}}x_ix_j \in P_n, \ \ com\ i_1 < i_2 < ... < i_{n-2}, \tag{2.9}$$

para $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ $(i \neq j)$, *geram* $P_n(\mathcal{V})$. *Como o número total de monômios em (2.9) é* $n(n-1)$, *segue que*

$$c_n(\mathcal{V}) = dim \frac{P_n}{P_n \cap T(\mathcal{V})} \leq n(n-1)$$

Assim, como $\mathcal{N} \in \mathcal{V}$, *temos* $c_n(\mathcal{N}) \leq c_n(\mathcal{V}) \leq n(n-1)$.

Considere as partições $(n), (n-1, 1), (n-2, 2)$ *e* $(n-2, 1, 1)$ *de* n. *Vamos mostrar que suas multiplicidades são não nulas na decomposição do n-ésimo cocaracter de* $\mathcal{N}$. *Considere a partição* (n) *e a tabela standard*

$$T_{(n)} = \boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid n}$$

Pelo Exemplo 2.38, temos que

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = e_{T_{(n)}}(x_1x_2...x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}.$$

Substituindo cada x_i *por* E_{11}, *temos*

$$f(E_{11}, E_{11}, ..., E_{11}) = \sum_{\sigma \in S_n} E_{11}E_{11}...E_{11} = n!E_{11} \neq 0$$

Assim, $e_{T_{(n)}}(x_1x_2...x_n)$ *não é uma identidade de* $\mathcal{N}$ *e daí* $m_{(n)} = 1$.

Considere agora a partição $\lambda = (n-1, 1)$ *e a tabela standard*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline n & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Conforme vimos no Exemplo 2.38, $e_{T_\lambda} = \left(\sum_{\sigma\in S_n} \sigma\right)(Id - (1\ n))$ *e*

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = e_{T_\lambda}(x_1x_2...x_n) = \sum_{\sigma\in S_{n-1}} [x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n-1)}, x_n]$$

Substituindo as variáveis $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ *por* y_1 *e* x_n *por* y_2 *em* $g_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, *obtemos o polinômio*

$$f_1(y_1, y_2) = (n-1)![y_1^{n-1}, y_2].$$

Substituindo $y_1 = E_{11}$ *e* $y_2 = E_{12}$, *temos*

$$f_1(E_{11}, E_{12}) = (n-1)!(E_{11}^{n-1}E_{12} - E_{12}E_{11}^{n-1}) = (n-1)!E_{12} \neq 0.$$

Assim f_1, *e consequentemente* $e_{T_{(n-1,1)}}(x_1x_2...x_n)$, *não é uma identidade para* $\mathcal{N}$.

Considere agora

$$\begin{aligned} g_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= e_{T_\lambda}(x_1x_2...x_{n-2}x_nx_{n-1}) \\ &= \left(\sum_{\sigma\in S_{n-1}}\right)(x_1x_2...x_{n-2}x_nx_{n-1} - x_nx_2...x_{n-2}x_1x_{n-1}). \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ *por* y_1 *e* x_n *por* y_2 *em* $g_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, *obtemos o polinômio*

$$f_2(y_1, y_2) = (n-1)!(y_1^{n-2}y_2y_1 - y_2y_1^{n-1})$$

Fazendo $y_1 = E_{11} + E_{23}$ *e* $y_2 = E_{12}$, *teremos* $y_1^n = E_{11}$, *para* $n > 1$, *e assim*

$$\begin{aligned} f_2(E_{11} + E_{23}, E_{12}) &= (n-1)![(E_{11} + E_{23})^{n-2}E_{12}(E_{11} + E_{23}) - E_{12}(E_{11} + E_{23})^{n-1}] \\ &= (n-1)![E_{11}E_{12}(E_{11} + E_{23}) - E_{12}E_{11}] \\ &= (n-1)!E_{13} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, $e_{T_{(n-1,1)}}(x_1x_2...x_{n-2}x_nx_{n-1})$ *não é uma identidade para* $\mathcal{N}$.

Seja M *o submódulo de* $P_n(\mathcal{N})$ *cujo caracter é* $\chi_M = m_\lambda\chi_\lambda$ *(veja o parágrafo anterior ao Teorema 2.28). Considerando* N *um submódulo de* P_n *tal que* $P_n = M \oplus N$, *então* $N \simeq \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ \mu \neq \lambda}} m_\mu M_\mu$. *Daí, a multiplicidade de* M_λ *em* N *é igual a* 0. *Logo, pela Observação 2.16, temos que qualquer submódulo com caracter* χ_λ *está contido em* M.

Sendo $M_1 = KS_n e_{T_\lambda}(x_1 x_2 ... x_n)$, *temos que* M_1 *é um* S_n*-módulo irredutível com caracter* $\chi_{M_1} = \chi_\lambda$. *Considere*

$$\overline{M_1} = \frac{M_1 + (P_n \cap T(\mathcal{N}))}{(P_n \cap T(\mathcal{N}))} \subset P_n(\mathcal{N}).$$

Como vimos acima, $e_{T_\lambda}(x_1 x_2 ... x_n) \notin T(\mathcal{N})$ *e assim* $M_1 \cap (P_n \cap T(\mathcal{N})) = \{0\}$. *Segue então do Segundo Teorema de Isomorfismo que*

$$\overline{M_1} \simeq \frac{M_1}{M_1 \cap (P_n \cap T(N))} \simeq M_1$$

Assim, $\chi_{\overline{M_1}} = \chi_\lambda$ *e portanto* $\overline{M_1} \subseteq M$.

Analogamente, considerando $M_2 = KS_n e_{T_\lambda}(x_1 x_2 ... x_{n-2} x_n x_{n-1})$, *temos*

$$\overline{M_2} = \frac{M_2 + (P_n \cap T(\mathcal{N}))}{(P_n \cap T(\mathcal{N}))} \subseteq M.$$

Considere então o homomorfismo

$$\varphi : \frac{K\langle X \rangle}{T(\mathcal{N})} \longrightarrow \frac{K\langle Y \rangle}{T(\mathcal{N})}$$

dado por

$$\varphi(\overline{x}_1) = ... = \varphi(\overline{x}_{n_1}) = \overline{y_1} \quad e \quad \varphi(\overline{x}_n) = \overline{y_2}$$

Então $\varphi(\overline{g}_1) = \overline{f}_1$ *e* $\varphi(\overline{g}_2) = \overline{f}_2$. *Além disso,* $\overline{f_1}$ *e* $\overline{f_2}$ *são linearmente independentes. De fato, considere a combinação linear*

$$\alpha_1 \overline{f}_1 + \alpha_2 \overline{f}_2 = \overline{0}$$

Então,

$$\alpha_1 f_1(y_1, y_2) + \alpha_2 f_2(y_1, y_2) \in T(\mathcal{N})$$

Fazendo $y_1 = E_{11}$ *e* $y_2 = E_{12}$, *temos*

$$\alpha_1 f(E_{11}, E_{12}) + \alpha_2 f(E_{11}, E_{12}) = 0$$

ou seja,

$$\alpha_1 (n-1)!(E_{11}^{n-1} E_{12} - E_{12} E_{11}^{n-1}) + \alpha_2 (n-1)!(E_{11}^{n-2} E_{12} E_{11} - E_{12} E_{11}^{n-1}) = 0$$

Logo, $\alpha_1(n-1)!E_{12} = 0$ *e portanto* $\alpha_1 = 0$*. Além disso, por (2.10), temos* $\bar{f}_2 \neq 0$ *e daí* $\alpha_2 = 0$*. Segue então do Teorema 2.28 que* $m_{(n-1,1)} \geq 2$.

Para a partição $(n-2,2)$ *vamos considerar a tabela standard*

$$T_{(n-2,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \hline n-1 & n & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \quad .$$

Temos $R_{T_{(n-2,2)}} = S_{n-2}$ *e* $C_{T_{(n-2,2)}} = \{Id, (1\ n-1), (2\ n), (1\ n-1)(2\ n)\}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} h(x_1, ..., x_n) &= e_{T_{(n-2,2)}}(x_1x_2...x_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma\in S_{n-2}} \sigma\right)(Id - (1\ n-1) - (2\ n) + (1\ n-1)(2\ n))\,(x_1x_2...x_n) \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis $x_1, x_2, ..., x_{n-2}$ *por* y_1 *e* x_{n-1} *e* x_n *por* y_2 *em* $h(x_1, x_2, ..., x_n)$*, obtemos o polinômio*

$$h_1(y_1, y_2) = (n-2)!(y_1^{n-2}y_2^2 - y_2y_1^{n-2}y_2 - y_1y_2y_1^{n-4}y_2y_1 + y_2^2y_1^{n-2}).$$

Fazendo $y_1 = E_{11}$ *e* $y_2 = E_{12} + E_{23}$*, temos*

$$h_1(E_{11}, E_{12} + E_{23}) = (n-2)!E_{12} \neq 0$$

Logo, $e_{T_{(n-2,2)}}(x_1x_2...x_n)$ *não é uma identidade de* $\mathcal{N}$ *e assim* $m_{(n-2,2)} \geq 1$.

Finalmente, para a partição $(n-2,1,1)$ *considere a tabela standard*

$$T_{(n-2,1,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \hline n-1 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} n & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Temos $R_{T_{(n-2,1,1)}} = S_{n-2}$ *e* $C_{T_{(n-2,1,1)}} = S_{\{1,n-1,n\}}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} t(x_1, x_2, ..., x_n) &= e_{T_{(n-2,1,1)}}(x_1x_2...x_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma\in S_{n-2}} \sigma\right)\left(\sum_{\mu\in S_{\{1,n-1,n\}}} (-1)^{\mu}\mu\right)(x_1x_2...x_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma\in S_{n-2}} \sigma\right)\left(\sum_{\mu\in S_{\{1,n-1,n\}}} (-1)^{\mu}x_{\mu(1)}x_2...x_{n-2}x_{\mu(n-1)}x_{\mu(n)}\right) \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis $x_2, ..., x_{n-2}$ por y_1 em $t(x_1, x_2, .., x_n)$, obtemos o polinômio

$$h(y_1, x_1, x_{n-1}, x_n) = (n-3)! \sum_{\mu \in S_{\{1,n-1,n\}}} (-1)^{\mu} x_{\mu(1)} y_1^{n-3} x_{\mu(n-1)} x_{\mu(n)}$$

Fazendo então $y_1 = x_1 = E_{11}, x_{n-1} = E_{12}$ e $x_n = E_{23}$, temos

$$h(E_{11}, E_{11}, E_{12}, E_{23}) = (n-3)! E_{13} \neq 0,$$

donde $m_{(n-2,1,1)} \geq 1$.

Usando a fórmula do gancho obtemos

- $d_{(n)} = 1$;
- $d_{(n-1,1)} = \dfrac{n!}{n \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1} = (n-1)$;
- $d_{(n-2,1,1)} = \dfrac{n!}{n \cdot (n-3) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$;
- $d_{(n-2,2)} = \dfrac{n!}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} c_n(\mathcal{N}) &= \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \\ &\geq d_{(n)} + 2d_{(n-1,1)} + d_{(n-2,1,1)} + d_{(n-2,2)} \\ &= 1 + 2(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{n(n-3)}{2} \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

Segue portanto que $c_n(\mathcal{N}) = n(n-1)$ e $var(\mathcal{N}) = \mathcal{V}$, donde $T(\mathcal{N}) = \langle [x,y]zw \rangle^T$. Além disso

$$\chi_n(\mathcal{N}) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-2,1,1)} \quad e \quad l_n(\mathcal{N}) = 5.$$

Exemplo 2.41. *Seja E a álgebra de Grassmann. Então para todo $n > 1$ temos:*

a) $c_n(E) = 2^{n-1}$;

b) $\chi_n(E) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(1,1)}} \chi_\lambda$;

c) $l_n(E) = n$.

Os cálculos para a obtenção dos itens $(a), (b)$ *e* (c) *podem ser encontrados em [15], Teorema* 4.1.8 *(página 90).*

Observe que as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ possuem sequência de cocaracteres de altura limitada por 2, e assim seus cocaracteres estão contidos na faixa horizontal de altura 2. Além disso, observando a decomposição destes cocaracteres, também é possível ver que os mesmos estão contidos no gancho $H(1,1)$. Pelo item (b) do Exemplo 2.41 também temos que $\chi_n(E) \subset H(1,1)$.

Observando agora a decomposição dos cocaracteres de $\mathcal{N}$ vemos que

$$\chi_n(\mathcal{N}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(1,2)}} m_\lambda \chi_\lambda$$

e assim $\chi_n(\mathcal{N}) \subseteq H(1,2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

O Teorema do Gancho

Neste capítulo vamos demonstrar o principal resultado desse trabalho, o conhecido Teorema do Gancho. Este teorema nos dá uma restrição sobre os diagramas de Young para que os S_n-caracteres irredutíveis correspondentes apareçam com multiplicidade não nula na decomposição dos cocarateres de uma PI-álgebra. Este resultado foi demonstrado por Amitsur e Regev [3] em 1982. A prova apresentada aqui é diferente da original e pode ser encontrada em [15]. A prova original será apresentada apenas no capítulo 4. Também neste capítulo apresentaremos três consequências deste teorema, entre elas o Teorema de Amitsur sobre potências do polinômio standard.

Em todo este capítulo, K denotará um corpo de característica zero e todas as álgebras serão consideradas sobre K.

3.1 O Teorema do Gancho

Antes de demonstrar o Teorema do Gancho precisaremos de alguns resultados técnicos sobre a ação do grupo simétrico sobre o espaço dos polinômios multilineares. Para demonstrar o primeiro lema vamos precisar da seguinte desigualdade válida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{3.1}$$

Sua demonstração pode ser feita através de argumentos analíticos e geométricos (para maiores detalhes veja [9], Seção 2.3).

Lema 3.1. *Sejam d um número real positivo e $n = m^2 > e^4d^2$, onde e é a base dos logaritmos naturais. Se $\lambda = (m^m) \vdash n$ é uma partição quadrada de n, então $deg\chi_\lambda > d^n$.*

Demonstração. Sendo $\lambda = (m^m)$, então D_λ é o diagrama quadrado $m \times m$, ou seja, D_λ possui m linhas com m células cada. Para cada célula $(i_0, j_0) \in D_\lambda$ temos que $c_{j_0} = n_{i_0} = m$ e assim, por (2.1), o tamanho do gancho (i_0, j_0) é dado por

$$h_{i_0j_0} = 2m - i_0 - j_0 + 1 < 2m$$

Sendo $p = \prod_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}$ e $m = \sqrt{n}$, então

$$p < (2m)^n = 2^n m^n = 2^n(\sqrt{n})^n = 2^n n^{\frac{1}{2}n}$$

Logo, pela fórmula do gancho e por (3.1) temos

$$deg\chi_\lambda = \frac{n!}{p} > \frac{n^n}{e^n 2^n n^{\frac{1}{2}n}} = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{e^n 2^n}$$

Como, por hipótese, $n > e^4d^2$, temos

$$n^{\frac{n}{2}} > (e^4d^2)^{\frac{n}{2}} = e^{2n}d^n$$

e portanto

$$deg\chi_\lambda > \frac{e^{2n}d^n}{e^n 2^n} = \frac{e^n}{2^n}d^n = \left(\frac{e}{2}\right)^n d^n > d^n.$$

■

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, com $m < n$, é imediato que o grupo S_m é isomorfo ao subgrupo

$$H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i,\ m < i \leq n\}$$

de S_n. Existe então existe uma inclusão natural do grupo S_m no grupo S_n. Assim, dado um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_m) \in P_m$, então em P_n esse polinômio corresponde a $f(x_1, x_2, ..., x_m)x_{m+1}...x_n$. Nesse caso faz sentido falar no produto $\alpha f(x_1, x_2, ..., x_m)$, para $\alpha \in KS_n$ e $f \in P_m$. É nesse sentido que enunciamos o próximo lema.

Lema 3.2. *Sejam $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$, onde $m \leq n$, e suponha que $\lambda \geq \mu$. Considere uma Tabela de Young T_λ tal que os inteiros $1, 2, ..., m$ são colocados na subtabela T_μ, ou seja, $T_\mu : D_\mu \longrightarrow I_m$ e T_μ é a restrição de T_λ a D_μ. Então na álgebra de grupo KS_n, tem-se*

$$e_{T_\lambda} = a e_{T_\mu} b$$

com $a, b \in KS_n$.

Demonstração. Vimos na Seção 2.1 que R_{T_λ} e C_{T_λ} são subgrupos de S_n formados pelas permutações que estabilizam as linhas e as colunas de T_λ, respectivamente. A partir de T_μ construímos os análogos subgrupos R_{T_μ} e C_{T_μ} de S_m. Claramente temos que R_{T_μ} é subgrupo de R_{T_λ} e C_{T_μ} é subgrupo de C_{T_λ}. Considere as decomposições de R_{T_λ} e C_{T_λ} em classes laterais à esquerda e à direita de R_{T_μ} e C_{T_μ}, respectivamente,

$$R_{T_\lambda} = \bigcup_i \tau_i R_{T_\mu} \quad \text{e} \quad C_{T_\lambda} = \bigcup_j C_{T_\mu} \sigma_j$$

Então,

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} &= \left(\sum_{\tau \in R_{T_\lambda}} \tau \right) \left(\sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} (-1)^\sigma \sigma \right) \\ &= \left(\sum_i \tau_i \right) \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\mu}} \tau \right) \left(\sum_{\sigma \in C_{T_\mu}} (-1)^\sigma \sigma \right) \left(\sum_j (-1)^{\sigma_j} \sigma_j \right) \end{aligned}$$

Como

$$e_{T_\mu} = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\mu}} \tau \right) \left(\sum_{\sigma \in C_{T_\mu}} (-1)^\sigma \sigma \right)$$

temos

$$e_{T_\lambda} = a e_{T_\mu} b$$

onde $a = \sum\limits_i \tau_i$ e $b = \sum\limits_j (-1)^{\sigma_j} \sigma_j$. ■

Passaremos agora para o principal resultado deste trabalho.

Teorema 3.3 (Teorema do gancho). *Se A é uma PI-álgebra, então existem inteiros $d, l \geq 0$ tais que*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ D_\lambda \subseteq H(d,l)}} m_\lambda \chi_\lambda$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja A uma PI-álgebra. Pelo Teorema 2.23 existe um inteiro positivo d tal que $c_n(A) \leq d^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando $q = d^3$ e m tal que $e^2 q + 2 \geq m \geq e^2 q + 1$, onde e denota a base dos logaritmos naturais, vamos provar que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o n-ésimo cocaracter de A está contido no gancho $H(m, m)$.

Suponha por absurdo que existe $n \geq 1$ tal que

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \tag{3.2}$$

e $m_\mu \neq 0$ para alguma partição $\mu \notin H(m,m)$. Como μ não pertence a $H(m,m)$, isto é, o diagrama de Young D_μ não está contido no gancho $H(m,m)$, então D_μ contém o diagrama quadrado D_ν, onde $\nu = (m^m) \vdash m^2$. Temos que $\mu \geq \nu$. Sendo $m_\mu \neq 0$, segue do Teorema 2.30 que existe uma tabela T_μ e um polinômio $f \in P_n$ tal que $e_{T_\mu} f$ não é uma identidade de A. Pela Observação 1.44 podemos supor que existe algum monômio multilinear $m_1 = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n}$ tal que $e_{T_\mu} m_1 \notin T(A)$.

Considere $\sigma \in S_n$ tal que a tabela σT_μ tem as entradas de 1 a m^2 nas posições do diagrama quadrado D_ν. Pela Observação 2.11 temos $e_{\sigma T_\mu} = \sigma e_{T_\mu} \sigma^{-1}$ e assim $\sigma^{-1} e_{\sigma T_\mu} \sigma m_1 = e_{T_\mu} m_1 \notin T(A)$. Sendo $m_1' = \sigma m_1$, temos $\sigma^{-1} e_{\sigma T_\mu} m_1' \notin T(A)$ e daí $e_{\sigma T_\mu} m_1' \notin T(A)$. Segue então do Lema 3.2 que $e_{\sigma T_\mu} m_1' = a e_{T_\nu} b m_1'$, onde $a, b \in KS_n$. Dessa forma, $e_{T_\nu} b m_1'$ não é uma identidade para A. Como $b m_1' \in P_n$, segue novamente da Observação 1.44 que existe um monômio $m_2 = m_2(x_1, ..., x_n) = x_{j_1} ... x_{j_n}$ tal que o polinômio multilinear $e_{T_\nu} m_2$ não é uma identidade para A. Podemos escrever m_2 como

$$m_2 = u_0 x_{i_1} u_1 x_{i_2} u_2 ... u_{k-1} x_{i_k} u_k$$

onde $k = m^2$, $\{i_1, i_2, ..., i_k\} = \{1, 2, ..., m^2\}$ e $u_0, u_1, ..., u_k$ não dependem das variáveis $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$. Substituindo agora que cada $u_j's$, $0 \leq j \leq k$, não vazio que aparece em m_2 por uma variável, obtemos um novo monômio m_2' cujo grau é no mínimo m^2 (caso todos os $u_j's$ sejam vazios) e no máximo $2m^2 + 1$ (caso todos os $u_j's$ sejam não vazios). Como $e_{T_\nu} m_2$ não é identidade de A, segue que existem um inteiro $m^2 \leq t \leq 2m^2 + 1$ e um monômio multilinear $w = w(x_1, ..., x_t)$ (do qual m_2' é consequência) tal que $e_{T_\nu} w \notin T(A)$.

Vamos considerar o S_t-módulo P_t como um S_{m^2}-módulo deixando o S_{m^2} agir sobre as m^2 variáveis $x_1, x_2, ..., x_{m^2}$ e fixando as demais. Seja M o S_{m^2}-módulo gerado por $e_{T_\nu} w$. Como vimos, M é irredutível e $M \cap (P_t \cap T(A))$ é um S_{m^2}-submódulo de M. Daí,

$$M \cap (P_t \cap T(A)) = 0 \quad \text{ou} \quad M \cap (P_t \cap T(A)) = M$$

Mas, como $e_{T_\nu} w \in M$ e $e_{T_\nu} w \notin T(A)$, então $M \cap (P_t \cap T(A)) \neq M$ e assim devemos ter $M \cap (P_t \cap T(A)) = 0$. Segue da última igualdade e do fato de que $M + (P_t \cap T(A))$

é um subespaço de P_t que

$$\dim P_t \geq \dim(M + (P_t \cap T(A)))$$

ou seja,

$$t! \geq \dim M + \dim(P_t \cap T(A))$$

Como $c_t(A) = t! - \dim(P_t \cap T(A))$, segue que

$$\dim M + \dim(P_t \cap T(A)) \leq t! = c_t(A) + \dim(P_t \cap T(A))$$

e assim, $c_t(A) \geq \dim M = deg\chi_\nu$.

Como $\nu \vdash m^2$ e $m^2 \geq (e^2q+1)^2 > e^4q^2$, segue do Lema 3.1 que

$$c_t(A) \geq deg\chi_\nu > q^{m^2}.$$

Além disso, por $2m^2 + 1 \geq t$ temos $m^2 \geq \dfrac{t-1}{2}$ e, lembrando que $q = d^3$,

$$c_t(A) > (d^3)^{\frac{t-1}{2}}$$

Como $t > 3$, temos $\frac{3t-3}{2} > t$ e assim

$$c_t(A) > (d^3)^{\frac{t-1}{2}} > d^t$$

o que é um absurdo, pois $c_n(A) \leq d^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, em (3.2) todas as multiplicidades m_μ, com $\mu \notin H(m,m)$, são iguais a zero. ■

3.2 O Teorema de Amitsur

Como uma primeira consequência do Teorema do Gancho vamos nessa seção demonstrar o conhecido Teorema de Amitsur que garante que toda PI-álgebra satisfaz uma potência de um polinômio standard.

Lema 3.4. *Seja $\lambda \vdash (m^k)$ uma partição de $n = km$ e seja T a tabela de Young standard associada a λ dada abaixo*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & k+1 & \cdots & (m-1)k+1 \\ \hline 2 & k+2 & \cdots & (m-1)k+2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline k & 2k & \cdots & mk \\ \hline \end{array}\,.$$

Considere $f(x_1, x_2, ..., x_{km}) = e_T(x_1x_2...x_{km}) \in P_{km}$. *Então*

$$w(x_1, ..., x_k) = f(x_1, .., x_k, x_1, ..., x_k, ..., x_1, ..., x_k)$$

obtido pela substituição $x_{k+i} = x_{2k+i} = ... = x_{(m-1)k+i} = x_i$, $i = 1, 2, ..., k$, *é igual a*

$$(m!)^k \cdot s_k^m(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Demonstração. Como $C_T = K_1K_2...K_m$, onde

$$K_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i, \ \forall\ i \in I_n - \{(j-1)k+1, ..., jk\}\} \simeq S_k$$

(veja Definição 2.8 e os comentários subsequentes), temos

$$\left(\sum_{\mu \in C_T} (-1)^\mu \mu\right)(x_1x_2...x_n) \ = \ \sum_{\mu_1 \in K_1} ... \sum_{\mu_m \in K_m} (-1)^{\mu_1}...(-1)^{\mu_m}\mu_1...\mu_m(x_1x_2...x_n)$$

$$= \sum_{\mu_1 \in K_1} ... \sum_{\mu_{m-1} \in K_{m-1}} (-1)^{\mu_1}...(-1)^{\mu_{m-1}}\mu_1...\mu_{m-1}\left(\sum_{\mu \in K_m}(-1)^{\mu_m}\mu_m(x_1x_2...x_n)\right)$$

$$= \sum_{\mu_1 \in K_1} ... \sum_{\mu_{m-1} \in K_{m-1}} (-1)^{\mu_1}...(-1)^{\mu_{m-1}}\mu_1...\mu_{m-1}\left(x_1x_2...x_{(m-1)k}s_k(x_{(m-1)k+1}, ..., x_n)\right)$$

$$\vdots$$

$$= s_k(x_1, ..., x_k) \cdot s_k(x_{k+1}, ..., x_{2k}) \cdot ... \cdot s_k(x_{(m-1)k+1}, ..., x_{mk})$$

Observe agora que $R_T = H_1H_2...H_k$, onde

$$H_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i, \ \forall\ i \in I_n - \{j, k+j, ..., (m-1)k+j\}\} \simeq S_m.$$

Então,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = e_T(x_1x_2...x_n) = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma\left(\sum_{\mu \in C_T}(-1)^\mu\mu(x_1x_2...x_n)\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in R_T} \sigma(s_k(x_1, ..., x_k) \cdot s_k(x_{k+1}, ..., x_{2k}) \cdot ... \cdot s_k(x_{(m-1)k+1}, ..., x_{mk}))$$

$$= \sum_{\sigma \in C_T} s_k(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) \cdot s_k(x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(2k)}) \cdot ... \cdot s_k(x_{\sigma(m-1)k+1}, ..., x_{\sigma(mk)})$$

Logo,

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, ..., x_k) &= f(x_1, x_2, ..., x_k, x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_1, x_2, ..., x_k) \\ &= \sum_{\sigma \in R_T} s_k(x_1, ..., x_k)^m \\ &= (m!)^k \cdot s_k^m(x_1, x_2, ..., x_m) \end{aligned}$$

pois $|R_T| = (m!)^k$.

■

Teorema 3.5 (Amitsur). *Para qualquer PI-álgebra A existem inteiros k e m tais que A satisfaz a identidade $s_k^m(x_1, ..., x_k) = 0$.*

Demonstração. Seja

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

Pelo Teorema do Gancho existem $d, l \geq 0$ tais que $m_\lambda = 0$ se $D_\lambda \nsubseteq H(d, l)$. Tomando então $k = d + 1$, $m = l + 1$ e $\mu = (m^k)$ uma partição de mk, temos que $D_\mu \nsubseteq H(d, l)$ e assim $m_\mu = 0$. Considere a tabela T dada no lema anterior. Como $m_\mu = 0$, segue do Teorema 2.30 que

$$f(x_1, x_2, ..., x_{mk}) = e_T(x_1 x_2 ... x_{mk}) \in T(A)$$

e assim

$$w(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, x_1, ..., x_k, ..., x_1, ..., x_k) \in T(A)$$

Mas, pelo lema anterior,

$$w(x_1, x_2, ..., x_k) = (m!)^k \cdot s_k^m(x_1, x_2, ..., x_k),$$

e portanto, como $char K = 0$,

$$s_k^m(x_1, x_2, ..., x_k) \in T(A).$$

■

3.3 Superálgebras Finitamente Geradas

Dada uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ podemos, a partir dela, definir uma nova superálgebra, chamada de *envoltória de Grassmann de A*, como segue.

Definição 3.6. *Sejam E a álgebra de Grassmann e $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra. A álgebra*

$$G(A) = (A^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes E^{(1)})$$

é chamada de envoltória de Grassmann de A.

Considerando $G(A)^{(0)} = A^{(0)} \otimes E^{(0)}$ e $G(A)^{(1)} = A^{(1)} \otimes E^{(1)}$, temos que

$$G(A) = G(A)^{(0)} \oplus G(A)^{(1)}.$$

Além disso, como $A^{(i)}A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$ e $E^{(i)}E^{(j)} \subseteq E^{(i+j)}$, para $i, j \in \mathbb{Z}_2$ temos que

$$G(A)^{(i)}G(A)^{(j)} = A^{(i)}A^{(j)} \otimes E^{(i)}E^{(j)} \subseteq A^{(i+j)} \otimes E^{(i+j)} = G(A)^{(i+j)}$$

para $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Assim, $G(A)$ é de fato uma superálgebra.

Nesta seção usaremos o Teorema do Gancho para mostrar que dada uma variedade (ordinária) não trivial de álgebras, existe uma superálgebra finitamente gerada $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tal que $\mathcal{V}$ é gerada pela envoltória de Grassmann de A. Esse resultado foi mostrado por Kemer [20] em 1984.

Exemplo 3.7. *Considere a álgebra $M_2(K)$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação dada no Exemplo 1.62. Como*

$$M_2(K)^{(0)} \otimes E^{(0)} \simeq M_2(E)^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in E^{(0)} \right\}$$

$$M_2(K)^{(1)} \otimes E^{(1)} \simeq M_2(E)^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in E^{(1)} \right\}$$

Temos que

$$\begin{aligned} G(M_2(K)) &= (M_2(K)^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (M_2(K)^{(1)} \otimes E^{(1)}) \\ &\simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, d \in E^{(0)} \text{ e } b, c \in E^{(1)} \right\} \end{aligned}$$

Esta última é uma importante PI-álgebra, normalmente denotada por $M_{1,1}(E)$.

Seja $K\langle Y, Z\rangle$ a superálgebra associativa livre. Vamos denotar por $P_{k,m}$ o espaço dos polinômios multilineares de $K\langle Y, Z\rangle$ nas variáveis $y_1, ..., y_k \in Y$ e $z_1, ..., z_m \in Z$.

Considere $\sim: P_{k,m} \longrightarrow P_{k,m}$ o isomorfismo linear definido pela seguinte relação: dado $f \in P_{k,m}$, escrevendo f na forma

$$f = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ W=(w_0,w_1,...,w_m)}} \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 ... w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

onde $w_0, w_1, ..., w_m$ são monômios em $y_1, y_2, ..., y_k$ e $\alpha_{\sigma,W} \in K$, tomamos

$$\tilde{f} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ W=(w_0,w_1,...,w_m)}} (-1)^{\sigma} \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 ... w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

Claramente temos $\tilde{\tilde{f}} = f$.

Lema 3.8. *Sejam A e B álgebras, $b_1, b_2, ..., b_n \in B$ elementos que comutam entre si, $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ e $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$ um polinômio multilinear. Então*

$$f(a_1 \otimes b_1, ..., a_n \otimes b_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n) \otimes b_1 b_2 ... b_n$$

Demonstração. De fato, como os elementos $b_1, b_2, ..., b_n$ são comutativos, temos que $b_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} ... b_{\sigma(n)} = b_1 b_2 ... b_n$, para toda $\sigma \in S_n$. Logo,

$$\begin{aligned} f(a_1 \otimes b_1, ..., a_n \otimes b_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \otimes b_{\sigma(1)})(a_{\sigma(2)} \otimes b_{\sigma(2)}) ... (a_{\sigma(n)} \otimes b_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(n)} \otimes b_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} ... b_{\sigma(n)}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(n)} \right) \otimes b_1 b_2 ... b_n \\ &= f(a_1, a_2, ..., a_n) \otimes b_1 b_2 ... b_n \end{aligned}$$

■

A proposição a seguir dá uma relação entre as identidades graduadas de A e de $G(A)$.

Proposição 3.9. *Seja $f \in P_{k,m}$. Então f é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $G(A)$ se, e somente se, $\tilde{f}$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de A.*

Demonstração. Considere $\overline{y_1}, ..., \overline{y_k} \in A^{(0)}$, $\overline{z_1}, ..., \overline{z_m} \in A^{(1)}$ elementos homogêneos arbitrários A e $g_1, ..., g_k \in E^{(0)}$, $h_1, ..., h_m \in E^{(1)}$ elementos homogêneos arbitrários de E. Fixe um monômio

$$w = w(y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_m) = a_0(y_1, ..., y_k) z_{\sigma(1)} ... a_{m-1}(y_1, ..., y_k) z_{\sigma(m)} a_m(y_1, ..., y_k)$$

e considere $\overline{w}$ o monômio w avaliado em $\overline{y_1}\otimes g_1,...,\overline{y_k}\otimes g_k,\overline{z_1}\otimes h_1,...,\overline{z_m}\otimes h_m$. Como $g_1,...,g_k\in Z(E)$ e $h_1,...,h_m$ são anti-simétricos em E, temos, pelo Lema 3.8, que

$$\begin{aligned}\overline{w} &= a_0(\overline{y_1}\otimes g_1,...,\overline{y_k}\otimes g_k)(\overline{z}_{\sigma(1)}\otimes h_{\sigma(1)})...(\overline{z}_{\sigma(m)}\otimes h_{\sigma(m)})a_m(\overline{y_1}\otimes g_1,...,\overline{y_k}\otimes g_k)\\ &= (a_0(\overline{y_1},...,\overline{y_k})\overline{z}_{\sigma(1)}a_1(\overline{y}_1,...,\overline{y}_k)...\overline{z}_{\sigma(m)}a_m(\overline{y_1},...,\overline{y_k}))\otimes g_1...g_kh_{\sigma(1)}...h_{\sigma(m)}\\ &= (-1)^{\sigma}a_0(\overline{y_1},...,\overline{y_k})\overline{z}_{\sigma(1)}a_1(\overline{y}_1,...,\overline{y}_k)...\overline{z}_{\sigma(m)}a_m(\overline{y_1},...,\overline{y_k})\otimes g_1...g_kh_1...h_m\end{aligned}$$

Daí,

$$f(\overline{y_1}\otimes g_1,...,\overline{y}_k\otimes g_k,\overline{z_1}\otimes h_1,...,\overline{z_m}\otimes h_m)=\tilde{f}(\overline{y_1},...,\overline{y}_k,\overline{z_1},...,\overline{z_m})\otimes g_1...g_kh_1...h_m$$

e portanto f é uma identidade graduada para $G(A)$ se, e somente se, $\tilde{f}$ é uma identidade graduada para A. ∎

Observação 3.10. *Sejam $f=f(x_1,x_2,...,x_n)$ um polinômio multilinear, $K\langle Y,Z\rangle$ a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada e $\alpha_i=(i_1,i_2,...,i_n)\in\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times...\times\mathbb{Z}_2}_{n\ vezes}$. Para cada $1\leq i\leq 2^n$ podemos construir o polinômio $f_i\in K\langle Y,Z\rangle$ substituindo em $f=f(x_1,x_2,...,x_n)$ a variável x_j por y_j, se a j-ésima coordenada de α_i for 0, ou por z_j, se a j-ésima coordenada de α_i for 1.*

Sendo $A=A^{(0)}\oplus A^{(1)}$ uma superálgebra e $a_1,a_2,...,a_n\in A$, temos $a_i=a_i^{(0)}+a_i^{(1)}$, com $a_i^{(0)}\in A^{(0)}$ e $a_i^{(1)}\in A^{(1)}$. Daí,

$$f(a_1,a_2,...,a_n)=\sum_{i=1}^{2^n}f(a_1^{(i_1)},a_2^{(i_2)},...,a_n^{(i_n)})$$

onde $\alpha_i=(i_1,i_2,...,i_n)$. Observe que se $f_i\in T_2(A)$, para $i=1,2,3,...,2^n$, então $f(a_1^{(i_1)},a_2^{(i_2)},...,a_n^{(i_n)})=0$ e assim $f(a_1,a_2,...,a_n)=0$.

Sendo $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras, vamos denotar por $\mathcal{V}^*$ a classe de todas as superálgebras $A=A^{(0)}\oplus A^{(1)}$ tais que $G(A)\in\mathcal{V}$.

Teorema 3.11. *Para toda variedade de álgebras $\mathcal{V}$ a classe $\mathcal{V}^*$ é uma supervariedade.*

Demonstração. Denote por S o conjunto de todas as identidades multilineares de $T(\mathcal{V})$. Como *char*K=0, uma álgebra B pertence a $\mathcal{V}$ se, e somente se, g é uma identidade ordinária de B, para todo $g\in S$. Sejam $A=A^{(0)}\oplus A^{(1)}$ uma superálgebra e $B = G(A)$ a envoltória de Grassmann de A. Como vimos B é uma superálgebra onde $B^{(0)} = A^{(0)} \otimes E^{(0)}$ e $B^{(1)} = A^{(1)} \otimes E^{(1)}$. Pela Observação 3.10, temos que B satisfaz uma identidade multilinear ordinária $g = 0$ de grau n se, e somente se, B satisfaz um família de 2^n identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas onde cada uma delas é obtida de g substituindo-se algumas k variáveis, com $0 \leq k \leq n$, por variáveis de grau par e as outras $n-k$ por variáveis de grau ímpar. Pela Proposição 3.9, temos que $B = G(A)$ satisfaz uma identidade graduada multilinear $f = 0$ se, e somente se, A satisfaz a identidade graduada $\tilde{f} = 0$.

Sendo então $g \in S$, considere $W_g = \{\tilde{fg_i}; i = 1, 2, 3, ..., 2^n\}$ e $W = \cup_{g \in S} W_g$, onde os $g_i's$ são obtidos de g como na Observação 3.10. Então $B = G(A) \in \mathcal{V}$ se, e somente se, h é uma identidade graduada de A para todo $h \in W$. Logo, $A \in \mathcal{V}^*$ se, e somente se, $W \subseteq T_2(A)$. Portanto, $\mathcal{V}^*$ é a supervariedade determinada por W. ∎

Vimos na Seção 1.3 que toda supervariedade $\mathcal{V}$ possui uma superálgebra relativamente livre. Pelo teorema acima, temos que $\mathcal{V}^*$ é uma supervariedade e assim podemos falar de superálgebra relativamente livre de $\mathcal{V}^*$.

Lema 3.12. *Seja*

$$f = f(y_1^1, ..., y_1^{m_1}, ..., y_k^1, ..., y_k^{m_k}, z_1^1, ..., z_1^{r_1}, ..., z_l^1, ..., z_l^{r_l})$$

um polinômio multilinear nas variáveis $y_1^1, ..., y_k^{m_k}, z_1^1, ..., z_l^{r_l}$ *tal que* f *é simétrico em cada conjunto de variáveis* $\{y_i^1, ..., y_i^{m_i}; 1 \leq i \leq k\}$ *e é alternado em cada conjunto* $\{z_j^1, ..., z_j^{r_j}; 1 \leq j \leq l\}$. *Dada uma variedade* $\mathcal{V}$, *denote por* $L = L(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l)$ *a superálgebra relativamente livre da supervariedade* $\mathcal{V}^*$, *com* k *geradores livres pares* $u_1, ..., u_k$ *e* l *geradores livres ímpares* $w_1, ..., w_l$. *Considerando todos os* y_i^j*'s como variáveis pares e todos os* z_i^j*'s como variáveis ímpares, consideremos o polinômio multilinear* $\mathbb{Z}_2$*-graduado* $\tilde{f}$. *Então se*

$$\tilde{f}(\underbrace{u_1, ..., u_1}_{m_1}, ..., \underbrace{u_k, ..., u_k}_{m_k}, \underbrace{w_1, ..., w_1}_{r_1}, ..., \underbrace{w_l, ..., w_l}_{r_l}) = 0$$

em L, *então* f *é uma identidade ordinária de* $\mathcal{V}$.

Demonstração. Ver [15], Lema 4.8.1, página 110. ∎

Finalmente provaremos o resultado principal dessa seção.

Teorema 3.13. *Para qualquer variedade ordinária não trivial $\mathcal{V}$ existe uma superálgebra finitamente gerada $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tal que $\mathcal{V} = var(G(A))$. Além disso, como uma álgebra ordinária, A satisfaz uma identidade polinomial não-trivial.*

Demonstração. Pelo Teorema do Gancho existem inteiros não negativos k, l tais que

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} m_\lambda \chi_\lambda \tag{3.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere a supervariedade $\mathcal{V}^*$ e a superálgebra relativamente livre $L = L(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l)$ em $\mathcal{V}^*$ com geradores pares $u_1, ..., u_k$ e geradores ímpares $w_1, ..., w_l$. Vamos mostrar que $\mathcal{V}$ é gerada por $G(L)$, ou seja, $T(\mathcal{V}) = T(G(L))$.

Como $L \in \mathcal{V}^*$, por definição, $G(L) \in \mathcal{V}$, e assim $T(\mathcal{V}) \subset T(G(L))$. Vamos agora mostrar que $T(G(L)) \subset T(\mathcal{V})$. Seja $f \in P_n \cap T(G(L))$. Pela Proposição 2.27, f é equivalente a um sistema finito de identidades do tipo

$$e_{T_\lambda} g \equiv 0 \tag{3.4}$$

onde $g = g(x_1, ..., x_n) \in P_n$, λ é uma partição de n e T_λ é uma tabela de Young associada a λ. Assim, é suficiente mostrar que se $f \in P_n \cap T(G(L))$ é do tipo (3.4), então f é uma identidade de $\mathcal{V}$.

Se $\lambda \notin H(k,l)$, então $m_\lambda = 0$ em (3.3), e pelo Teorema 2.30 temos que $f = e_{T_\lambda} g$ é uma identidade de $\mathcal{V}$. Seja agora $\lambda \in H(k,l)$. Pelo Lema 2.34 podemos assumir que f depende de k' (com $k' \leq k$) conjuntos de variáveis $\{y_i^1, ..., y_i^{m_i}\}$, $1 \leq i \leq k'$, nos quais f é simétrico, e de l' (com $l' \leq l$) conjuntos de variáveis $\{z_j^1, ..., z_j^{r_j}\}$, $1 \leq j \leq l'$, nos quais é alternado. Considere $L_1 = L_1(u_1, ..., u_{k'}, w_1, ..., w_{l'})$ a superálgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}^*$ com geradores pares $u_1, ..., u_{k'}$ e geradores ímpares $w_1, ..., w_{l'}$. Temos que L_1 é a subálgebra de L gerada por $\{u_1, ..., u_{k'}, w_1, ..., w_{l'}\}$, $L_1^{(0)} \subseteq L^{(0)}$ e $L_1^{(1)} \subseteq L^{(1)}$. Daí,

$$L_1^{(0)} \otimes E^{(0)} \subseteq L^{(0)} \otimes E^{(0)} \quad \text{e} \quad L_1^{(1)} \otimes E^{(1)} \subseteq L^{(1)} \otimes E^{(1)}$$

ou seja, $G(L_1)^{(0)} \subseteq G(L)^{(0)}$ e $G(L_1)^{(1)} \subseteq G(L)^{(1)}$. Assim, $G(L_1) \subseteq G(L)$, e como $f \in T(G(L))$, temos $f \in T(G(L_1))$.

Vamos então considerar o polinômio

$$f = f(y_1^1, ..., y_1^{m_1}, ..., y_{k'}^1, ..., y_{k'}^{m_{k'}}, z_1^1, ..., z_1^{r_1}, ..., z_{l'}^1, ..., z_{l'}^{r_{l'}})$$

sendo os y_i^j's variáveis pares e os z_i^j's variáveis ímpares. Como $f \in T(G(L_1))$ podemos considerar f como uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $G(L_1)$. Segue então da Proposição 3.9 que a superálgebra L_1 satisfaz a identidade graduada $\tilde{f}$, e em particular,

$$\tilde{f}(\underbrace{u_1, ..., u_1}_{m_1 vezes}, ..., \underbrace{u_k, ..., u_{k'}}_{m_{k'} vezes}, \underbrace{w_1, ..., w_1}_{r_1 vezes}, ..., \underbrace{w_l, ..., w_{l'}}_{r_{l'} vezes}) = 0$$

em L_1. Segue então do Lema 3.12 que f é um identidade para $\mathcal{V}$. Logo, $T(\mathcal{V}) = T(G(L))$ e assim $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(L))$.

Resta mostrar que $G(L)$ satisfaz uma identidade ordinária. Como $G(L) = (L^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (L^{(1)} \otimes E^{(1)})$ é uma PI-álgebra, pois $T(G(L)) = T(\mathcal{V})$, segue que $L^{(0)} \otimes E^{(0)}$ também é uma PI-álgebra, pois é uma subálgebra de $G(L)$. Observe agora que $L^{(0)} \otimes 1 = \{a \otimes 1 \mid a \in L^{(0)}\}$ é uma subálgebra de $L^{(0)} \otimes E^{(0)}$ isomorfa a $L^{(0)}$. Logo, $L^{(0)}$ é uma PI-álgebra. Portanto, pela Proposição 1.67, temos que L é uma PI-álgebra.

■

3.4 Crescimento de Cotamanhos

Nesta seção vamos provar que dada uma variedade não trivial $\mathcal{V}$ a sequência de cotamanhos $(l_n(\mathcal{V}))_{n \in \mathbb{N}}$ é polinomialmente limitada. Este resultado deve-se a Berele e Regev e foi demonstrado primeiramente em 1983. A demonstração que apresentaremos aqui foi feita em [15].

Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade e

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \tag{3.5}$$

o seu n-ésimo cocaracter. Pelo Teorema do Gancho, existe um gancho infinito $H(k, l)$ tal que $\chi_n(\mathcal{V}) \subseteq H(k, l)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O próximo lema nos da uma limitação para o número de partições λ de n para as quais m_λ é diferente de zero em (3.5). Antes faremos uma observação que será importante para sua demonstração.

Observação 3.14. *Seja $\lambda \vdash n$ tal que $D_\lambda \subset H(k, l)$. Então λ está unicamente determinada pelos números de células nas k primeiras linhas e os números de células nas l primeiras colunas de D_λ. Assim, se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \vdash n$ e $\lambda \in H(k, l)$, então a*

$(k+l)$-upla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, c_1, c_2, ..., c_l)$, onde c_j denota o número de células na j-ésima coluna de D_λ, determina λ unicamente. Nesta $(k+l)$-upla estamos considerando $c_j = 0$, se $j > n_1$ e $n_i = 0$, se $i > r$,

Lema 3.15. *Sejam k e l inteiros não negativos. Então valem:*

a) Se $n \in \mathbb{N}$, então o número de partições $\lambda \vdash n$ tais que $D_\lambda \in H(k,l)$ é menor ou igual a $(n+1)^{k+l}$.

b) Se $\mathcal{V}$ é uma variedade não trivial tal que $\chi_n(\mathcal{V}) \subset H(k,l)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então o número de partições $\lambda \vdash n$ tais que $m_\lambda \neq 0$ é menor ou igual a $(n+1)^{k+l}$.

Demonstração.

a) Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $H_n(k,l) = \{\lambda \vdash n \mid \lambda \in H(k,l)\}$. Considere $U_n = \{0, 1, 2, ..., n\}$ e $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \in H_n(k,l)$. Defina a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & H_n(k,l) & \longrightarrow & U_n^{k+l} = \underbrace{U_n \times U_n \times ... \times U_n}_{k+l \ vezes} \\ & \lambda & \longmapsto & \varphi(\lambda) = (n_1, n_2, ..., n_k, c_1, c_2, ..., c_l) \end{array}$$

onde c_j denota o número de células na j-ésima coluna de D_λ (consideramos $c_j = 0$, se $j > n_1$ e $n_i = 0$, se $i > r$). Pela Observação 3.14, temos que φ é injetiva. Assim

$$|(H_n(k,l))| \leq |(U_n^{k+l})| = (n+1)^{k+l}$$

b) Segue imediatamente do item *a)*.

■

Considere a supervariedade $\mathcal{V}^*$ correspondente à variedade $\mathcal{V}$ e $L = L(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l)$ uma superálgebra relativamente livre de $\mathcal{V}^*$, onde $u_1, ..., u_k$ são os geradores pares e $w_1, ..., w_l$ os geradores ímpares. Segue do Teorema 3.13 que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(L))$ e L é uma PI-álgebra finitamente gerada. Considere L_n o subespaço de L definido por

$$L_n = \langle v_1 ... v_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle \qquad \text{(subespaço gerado)}$$

onde $v_1, ..., v_i \in \{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l\}$. Um fato importante sobre a dimensão de L_n é que existem constantes a e T tais que

$$\dim L_n \leq an^T. \tag{3.6}$$

Para maiores detalhes ver [15], Seção 4.9.

O próximo resultado dá uma limitação para as multiplicidades m_λ em (3.5).

Lema 3.16. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade (ordinária) não trivial. Então existem constantes a e T tais que a multiplicidade m_λ em* (3.5) *satisfaz a desigualdade*

$$m_\lambda \leq an^T$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda $\lambda \vdash n$.

Demonstração. Seja $H(k, l)$ um gancho infinito tal que $\chi_n(\mathcal{V}) \subset H(k, l)$ para todo n. Considere $L = L(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l)$ uma superálgebra relativamente livre da supervariedade $\mathcal{V}^*$, onde $u_1, u_2, ..., u_k$ são geradores pares e $w_1, w_2, ..., w_l$ são geradores ímpares, e constantes a e T com em (3.6).

Supondo que existem n e $\lambda \vdash n$ tais que $m_\lambda > an^T \geq \dim L_n$ (L_n como acima), temos $\lambda \in H(k, l)$, pois $m_\lambda > 0$. Pela Observação 2.29 temos que

$$P_n = (P_n \cap T(\mathcal{V})) \oplus J \tag{3.7}$$

onde J é um submódulo de P_n e $J \simeq P_n(\mathcal{V})$. Daí $\chi_J = \chi_n(\mathcal{V})$. Como $m_\lambda > an^T$, então o S_n-módulo $P_n(\mathcal{V})$, e consequentemente J, possui um submódulo do tipo

$$M_1 \oplus ... \oplus M_q$$

onde cada M_i é irredutível, isomorfo a M_λ (e consequentemente com caracter χ_λ), e $q > an^T$. Segue de (3.7) que o S_n-módulo P_n possui um submódulo

$$M_1 \oplus ... \oplus M_q \oplus (P_n \cap T(\mathcal{V})) \tag{3.8}$$

Pelo Lema 2.26, existe uma tabela de Young T_λ associada à partição λ tal que cada módulo M_i, $i = 1, 2, ..., q$ é gerado por um polinômio não nulo do tipo $f_i = e_{T_\lambda} m_i$, onde $m_i \in M_i$ é multilinear. Pelo Lema 2.34 temos que para cada polinômio f_i, com $i = 1, 2, ..., q$, existe um polinômio multilinear h_i onde $M_i = KS_n f_i = KS_n h_i$, assim

f_i e h_i são identidades equivalentes. Ainda pelo Lema 2.34 o conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ pode ser decomposto em uma união disjunta

$$Y_1 \cup ... \cup Y_{k'} \cup Z_1 \cup ... \cup Z_{l'} \tag{3.9}$$

onde $k' \leq k$ e $l' \leq l$, tal que cada h_i, com $i = 1, 2, ..., q$, é simétrico em cada conjunto de variáveis Y_j e alternado em cada conjunto de variáveis Z_j, e a decomposição em (3.9) depende apenas da tabela T_λ. Adicionando alguns conjuntos vazios, se necessário, podemos supor que $k = k'$ e $l = l'$. Vamos denotar por s_i a cardinalidade do conjunto Y_i, $i = 1, 2, ..., k$, e por r_j a cardinalidade do conjunto Z_j, $j = 1, 2, ..., l$, ou seja,

$$s_1 = |Y_1|, ..., s_k = |Y_k|, r_1 = |Z_1|, ..., r_l = |Z_l|.$$

Por (3.8) temos que $(M_1 \oplus ... \oplus M_q) \cap (P_n \cap T(\mathcal{V})) = \{0\}$, e como $h_i \in M_i$, para $i = 1, ..., q$, então o conjunto $\{h_1, ..., h_q\}$ é linearmente independente. Assim, para quaisquer escalares não todos nulos $\alpha_1, ..., \alpha_q \in K$, temos $\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_q h_q \neq 0$ em $M_1 \oplus ... \oplus M_q$, donde

$$\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_q h_q \notin T(\mathcal{V}) \tag{3.10}$$

Observe agora que o polinômio multilinear $\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_q h_q$ é também simétrico em cada um dos conjuntos de variáveis $Y_1, ..., Y_k$ e alternado em cada conjunto $Z_1, ..., Z_l$. Considere então o polinômio

$$g_i = g_i(y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_l) = \tilde{h}_i(\underbrace{y_1, ..., y_1}_{s_1}, ..., \underbrace{y_k, ..., y_k}_{s_k}, \underbrace{z_1, ..., z_1}_{r_1}, ..., \underbrace{z_l, ..., z_l}_{r_l})$$

$i = 1, 2, ..., q$, onde $\tilde{h}_i$ é obtido de h_i (veja seção a anterior), sobre o pressuposto que as variáveis de $Y_1 \cup ... \cup Y_k$ são variáveis pares e as variáveis de $Z_1 \cup ... \cup Z_l$ são ímpares.

Como o grau total de cada g_i é igual a $n = s_1 + ... + s_k + r_1 + ... + r_l$, temos que

$$\bar{g}_i = g_i(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l) \in L_n$$

Como $\dim L_n < q$ então $\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_q$ são L.D em L_n, e assim existem escalares, não todos nulos, $\alpha_1, ..., \alpha_q$ tais que

$$\alpha_1 \bar{g}_1 + ... + \alpha_q \bar{g}_q = 0 \tag{3.11}$$

em L_n, e consequentemente em L. Considerando então o polinômio multilinear $f = \alpha_1 h_1 + ... + \alpha_q h_q$, temos que f simétrico em cada um dos conjuntos de variáveis $Y_1, ..., Y_k$ e alternado em cada conjunto $Z_1, ..., Z_l$. Observe também que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_l) &= \tilde{f}(\underbrace{y_1, ..., y_1}_{s_1}, ..., \underbrace{y_k, ..., y_k}_{s_k}, \underbrace{z_1, ..., z_1}_{r_1}, ..., \underbrace{z_l, ..., z_l}_{r_l}) \\ &= \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_q g_q \end{aligned}$$

e por (3.11)

$$\tilde{f}_1(u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_l) = \alpha_1 \bar{g}_1 + ... + \alpha_q \bar{g}_q = 0$$

em L. Logo, f satisfaz a hipótese do Lema 3.12 e portanto $f \equiv 0$ é um identidade de $\mathcal{V}$ e $\alpha_1 h_1 + ... + \alpha_q h_q \in T(\mathcal{V})$. Temos então uma contradição por (3.10), e o teorema está demonstrado. ■

Como consequência dos Lemas 3.15 e 3.16, vamos mostrar o resultado principal dessa seção, o qual diz que a sequência de cotamanhos é polinomialmente limitada.

Teorema 3.17. *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade não-trivial, então a sequência de cotamanhos de $\mathcal{V}$ é polinomialmente limitada, isto é, existem constantes C e k tais que*

$$l_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \leq C n^k$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Considere um gancho infinito $H(k,l)$ tal que $\chi_n(\mathcal{V}) \subset H(k,l)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue do Lema 3.15 que o número de partições $\lambda \vdash n$ tais que $m_\lambda \neq 0$ é menor ou igual a $(n+1)^s$ (com $s = k + l$), e pelo Lema 3.16 existem constantes a e T tais que cada m_λ é menor ou igual a an^T. Daí,

$$\begin{aligned} l_n(\mathcal{V}) &= \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \leq (n+1)^s a n^T \\ &\leq 2n^s a n^T \\ &= C n^k \end{aligned}$$

onde $C = 2a$ e $k = T + s$. ■

Capítulo 4

O Teorema de Amitsur e Regev

Neste capítulo apresentaremos os resultados de Amitsur e Regev em [3] a respeito da existência de identidades do tipo

$$f^*(x;y) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 ... y_{n-2} x_{\sigma(n-1)} y_{n-1} x_{\sigma(n)}$$

para alguma PI-álgebra. Para isto veremos algumas propriedades importantes satisfeitas pelos ideais bilaterais de KS_n. A partir destes resultados obteremos novamente o Teorema do Gancho.

Em todo este capítulo, K denotará um corpo de característica zero.

4.1 Preliminares

Sejam S_n o grupo simétrico e KS_n a álgebra de grupo. Como $char K = 0$, pelo visto na Seção 2.1 existe uma correspondência biunívoca entre as partições de n, os ideais bilaterais minimais de KS_n e as K-representações irredutíveis de S_n. Para $\lambda \vdash n$ a representação irredutível ρ_λ associada a λ será chamada de *λ-representação de S_n*. Lembramos que d_λ denota o grau de ρ_λ, ou seja, $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$, onde χ_λ é o caracter de ρ_λ e 1 denota a identidade de S_n.

Seja $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_k)$ uma partição de n. Uma cota inferior para d_λ é dada por

$$d_\lambda \geq \left(\frac{2}{e} \frac{n^2}{\sum (n_i^2 + c_j^2)} \right)^n$$

onde e denota a base dos logaritmos naturais, c_j denota o número de células na j-ésima coluna e o somatório varia sobre todas as linhas e colunas do diagrama de Young D_λ.

Em particular, se $\lambda = (k^l)$ é uma partição retangular de n, então $n_i = k$ e $c_j = l$, para quaisquer i e j, e assim

$$d_\lambda \geq \left(\frac{2}{e}\frac{kl}{k+l}\right)^{kl}. \tag{4.1}$$

Uma demonstração para essa estimativa pode ser encontrada em [32], Lema 6.2.21.

Lembramos que P_n munido do produto

$$\sigma(x_1x_2...x_n) = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$$

é um S_n-módulo isomorfo a KS_n. Assim, os ideais à esquerda de KS_n correspondem aos S_n-submódulos de P_n. Pelo visto na Seção 2.2, sendo A uma álgebra, $(P_n \cap T(A))$ é um submódulo de P_n e assim corresponde a um ideal à esquerda de KS_n.

Neste capítulo, quando não houver confusão, f denotará tanto o polinômio multilinear $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)} \in P_n$ quanto sua pré-imagem $f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \in KS_n$ pelo isomorfismo φ definido no Exemplo 1.52.

Vamos agora definir uma ação à direita de S_n sobre P_n com a qual trabalharemos em todo esse capítulo. Sejam $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)} \in P_n$ e $\tau \in S_n$. Definimos uma ação à direita do grupo S_n sobre P_n da seguinte maneira

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)\tau = f\tau \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma\tau(1)}x_{\sigma\tau(2)}...x_{\sigma\tau(n)} \tag{4.2}$$

Essa ação consiste em mudar as variáveis $x_i's$ do monômio $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$ de acordo com a permutação τ^{-1}, ou seja, a variável $x_{\sigma(1)}$ aparece na posição $\tau^{-1}(1)$ do novo monômio, a variável $x_{\sigma(2)}$ aparece na posição $\tau^{-1}(2)$ e assim por diante.

Seja I_λ o ideal bilateral de KS_n associado à partição λ de n. Como vimos na Seção 2.1, I_λ é gerado como ideal bilateral por $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$, ou seja, $I_\lambda = KS_n e_\lambda$. Mas, como $e_\lambda \in Z(KS_n)$, temos $I_\lambda = e_\lambda KS_n$. Vamos identificar o ideal I_λ pela sua imagem em P_n. Um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in I_\lambda$ será chamado de *λ-polinômio*. Então, pela Proposição 2.14, todo λ-polinômio é da forma fe_λ, para $f \in KS_n$.

Exemplo 4.1. *Considere a partição $\lambda = (1^n)$ de n. Vimos no Exemplo 2.12 que a S_n-representação ρ_λ é a representação sinal, e assim $\chi_\lambda(\sigma) = (-1)^\sigma$ para toda $\sigma \in S_n$. Logo,*

$$e_\lambda(x_1x_2...x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma(x_1x_2...x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$$

ou seja, $e_\lambda(x_1x_2...x_n)$ é o polinômio standard de grau n.

Uma propriedade importante satisfeita pelos ideais I_λ é dada no lema a seguir.

Lema 4.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash n$ e A uma PI-álgebra que satisfaz uma identidade de grau d. Se $d_\lambda > (d-1)^{2n}$, então $I_\lambda \subseteq P_n \cap T(A)$.*

Demonstração. Pela Observação 2.29 existe um ideal à esquerda J de KS_n tal que $J \simeq P_n(A)$ e $KS_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J$. Assim, $\dim J = c_n(A)$ e pelo Teorema 2.23 temos $\dim J \leq (d-1)^{2n}$. Sendo M um submódulo irredutível qualquer de P_n com caracter χ_λ, então $\dim M = d_\lambda > (d-1)^{2n}$. Assim, $M \nsubseteq J$. Pela Observação 2.16 temos $M \subset P_n \cap T(A)$. Como I_λ é a soma de todos os ideais minimais à esquerda de KS_n com caracter χ_λ, temos $I_\lambda \subseteq P_n \cap T(A)$. ■

Lembrando que se m e n são dois números naturais tais que $n \leq m$, então existe uma inclusão natural de S_n em S_m, onde S_n permuta apenas os primeiros n elementos de $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ e deixa os outros $m-n$ elementos fixos. Assim podemos identificar o polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_n$ com o polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n)x_{n+1}...x_m \in P_m$.

Teorema 4.3 (Teorema Branching)**.** *Seja $\lambda \vdash n$. Então*

$$M_\lambda^{S_{n+1}} \simeq \bigoplus_{\substack{\mu \vdash n+1 \\ \mu \geq \lambda}} M_\mu \quad e \quad M_\lambda|_{S_{n-1}} \simeq \bigoplus_{\substack{\theta \vdash n-1 \\ \theta \leq \lambda}} M_\theta$$

Demonstração. Ver [18], Teorema 2.4.3, página 59. ■

Como consequência do Teorema acima temos o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $m \geq n$. Então o ideal bilateral de KS_m gerado por $I_\lambda \in S_n$ é $\bigoplus I_\mu$, onde μ corre sobre todas as partições de m tais que $\mu \geq \lambda$.*

Sejam ρ a λ-representação de S_n e $m \geq n$. Pelo Teorema Branching, a representação induzida ρ^{S_m} contém em sua decomposição todas as μ-representações de S_m com $\mu \geq \lambda$. Denotando por χ o caracter de ρ e por χ_μ o caracter da μ-representação de S_m, pelo Teorema 2.17 temos

$$\left\langle \chi^{S_m}, \chi_\mu \right\rangle_{S_m} \neq 0.$$

Pelo Teorema da Reciprocidade de Frobenius, temos

$$\langle \chi_\mu|_{S_n}, \chi \rangle_{S_n} = \left\langle \chi^{S_m}, \chi_\mu \right\rangle_{S_m} \neq 0$$

Logo, as μ-representações de S_m, quando restritas a S_n, contêm as λ-representações de S_n, com $\lambda \leq \mu$. Com isso, e observando que $\chi_\mu|_{S_n}$ tem o mesmo grau que χ_μ (ou seja, tem grau d_μ), temos o seguinte teorema:

Teorema 4.5. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\mu \vdash m$ e $\lambda \vdash n$ com $\mu \geq \lambda$. Então, $d_\mu \geq d_\lambda$, onde d_μ e d_λ são os graus da λ-representação de S_n e da μ-representação de S_m, respectivamente.*

4.2 O Teorema de Amitsur e Regev

Lema 4.6. *Sejam $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \in P_n$ e $p_0, p_1, ..., p_n$ monômios tais que $p_0 p_1 ... p_n$ é multilinear nas variáveis $x_{n+1}, ..., x_m$. Então existe uma permutação $\tau \in S_m$ tal que*

$$(f(x_1, ..., x_n) x_{n+1} ... x_m)\tau = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma p_0 x_{\sigma(1)} p_1 x_{\sigma(2)} ... p_{n-1} x_{\sigma(n)} p_n \qquad (4.3)$$

Demonstração. Seja $\tau \in S_m$ tal que

$$(x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} ... x_m)\tau = p_0 x_1 p_1 x_2 ... p_{n-1} x_n p_n$$

Então para toda $\sigma \in S_n$,

$$\sigma(x_1 ... x_n x_{n+1} ... x_m)\tau = p_0 x_{\sigma(1)} p_1 x_{\sigma(2)} ... p_{n-1} x_{\sigma(n)} p_n$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
(f(x_1, ..., x_n) x_{n+1} ... x_m)\tau &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \right) \tau \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma(x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} ... x_m)\tau \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma(p_0 x_1 p_1 x_2 ... p_{n-1} x_n p_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma p_0 x_{\sigma(1)} p_1 x_{\sigma(2)} ... p_{n-1} x_{\sigma(n)} p_n
\end{aligned}$$

■

Observação 4.7. *Sejam* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \in P_n$ *e*

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \\ 1 & n+1 & 2 & n+2 & 3 & \cdots & 2n-1 & n \end{pmatrix} \in S_{2n-1}$$

Substituindo x_{n+i} *por* y_i *obtemos que*

$$f(x_1, ..., x_n)\tau = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 ... y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

Vamos denotar o polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n)\tau$ *por* $f^*(x; y)$, *ou seja,*

$$f^*(x; y) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 ... y_{n-2} x_{\sigma(n-1)} y_{n-1} x_{\sigma(n)}. \tag{4.4}$$

Temos o seguinte resultado demonstrado por Amitsur e Regev em 1982.

Teorema 4.8. *Seja* A *uma PI-álgebra que satisfaz as identidades de um ideal bilateral* $I \subseteq KS_n$ *e todas as identidades de* $(KS_m)I(KS_m)$ *para* $2n > m \geq n$. *Então para todo polinômio multilinear* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$ *de* I, A *também satisfaz a identidade*

$$f^*(x; y) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n-1)} y_{n-1} x_{\sigma(n)}$$

e todas as identidades obtidas retirando-se alguns $y_i's$ *de* $f^*(x; y)$. *Além disso, quando* A *for unitária, é suficiente que* A *satisfaça as identidades de* I, *de* $(KS_n)I(KS_n)$ *e de* $(KS_{2n-1})I(KS_{2n-1})$.

Demonstração. Pela Observação 4.7, temos $f^* = f\tau$. Assim, $f^* \in (KS_{2n-1})I(KS_{2n-1})$ e portanto f^* é uma identidade de A. Denote por $f^*_{i_1, i_2, ..., i_k}$ o polinômio obtido de f^* suprimindo-se as variáveis $y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k}$, onde $1 \leq k \leq n-1$. Considerando $m = 2n - k - 1$ e aplicando o Lema 4.6 com os monômios $p_0, p_n, p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}$ vazios e $p_{i_j} = x_{n+j-k} = y_{j-k}$ para $j \in \{k+1, k+2, ..., n-1\}$, existe $\tau \in S_{2n-k-1}$ tal que $f^*_{i_1, i_2, ..., i_k}$ é obtido de $f\tau$ através da substituição de y_j por $y_{i_{j+k}}$ para $j = \{1, 2, ..., n-k-1\}$. Como $f\tau \in T(A)$, temos $f^*_{i_1, i_2, ..., i_k} \in T(A)$.

Se A possui unidade e f^* é uma identidade de A, então qualquer polinômio obtido de f^* substituindo-se uma variável y_i por 1 também é uma identidade de A. Neste caso, precisamos apenas que A satisfaça as identidades de $(KS_n)I(KS_n)$ e de

$(KS_{2n-1})I(KS_{2n-1})$. ■

A recíproca do teorema anterior é dada como segue:

Teorema 4.9. *Seja I um ideal bilateral de KS_n, com $I \subset P_n \cap T(A)$, e suponha que para todo $f \in I$ a álgebra A satisfaz também $f^*(x; y) = 0$ (com a possibilidade de $y_i = 1$). Então para todo $m \geq n$, A também satisfaz a identidade $g = 0$, para todo $g \in (KS_m)I(KS_m)$.*

Demonstração. Como $P_n \cap T(A)$ é um ideal à esquerda de KS_n é suficiente mostrar que $g = f\tau \in T(A)$ para $f \in I$ e $\tau \in S_m$.

Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \in I$. Então por (4.3)

$$\begin{aligned} g(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m) &= f\tau(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m) \\ &= f(x_1, ..., x_n)\tau \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} x_{n+1} ... x_m)\tau \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma p_0 x_{\sigma(i_1)} p_1 x_{\sigma(i_2)} p_2 ... p_{n-1} x_{\sigma(i_n)} p_n \end{aligned}$$

onde os p_j são monômios tais que $p_0 p_1 p_2 ... p_n$ é multilinear nas variáveis $x_{n+1}, ..., x_m$ (com algum p_j podendo ser igual a 1), $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., n\}$ e $i_k = \tau(j_k)$ com $j_1 < j_2 < ... < j_n$.

Seja $\mu \in S_n$ definida por $\mu(k) = \tau(j_k)$, para $1 \leq k \leq n$. Então

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)\mu = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma\mu(1)} x_{\sigma\mu(2)} ... x_{\sigma\mu(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(i_1)} x_{\sigma(i_2)} ... x_{\sigma(i_n)}$$

e assim

$$(f\mu)^*(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(i_1)} p_1 x_{\sigma(i_2)} p_2 ... p_{n-1} x_{\sigma(i_n)}.$$

Dessa forma o polinômio g tem a seguinte forma

$$g(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m) = p_0[(f\mu)^*(x_1, x_2, ..., x_n; p_1, p_2, ..., p_{n-1})]p_n$$

Como I é um ideal bilateral, então $f\mu \in I$, e assim, por hipótese, temos que $(f\mu)^*(x; y)$ é uma identidade de A. Então, substituindo y_i por p_i em $(f\mu)^*(x; y)$, para $i = 1, ..., n$, e multiplicando por p_0 à esquerda e por p_n à direita, concluímos que g é uma identidade de A. ■

Considere a identidade de Capelli de altura m

$$d_m(x;y) = \sum_{\sigma\in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2....y_{m-1}x_{\sigma(m)}.$$

De acordo com a notação estabelecida em (4.4) e pelo Exemplo 4.1, temos que

$$d_m(x;y) = e^*_\lambda(x;y)$$

onde $\lambda = (1^m)$. Assim, a identidade de Capelli é um caso particular do polinômio $e^*_\lambda(x;y)$.

O teorema a seguir caracteriza as álgebras que satisfazem uma identidade de Capelli e sua demonstração pode ser encontrada em [30].

Teorema 4.10. *Se A satisfaz a identidade de Capelli de altura m, então A satisfaz todas as λ-identidades com $h(\lambda) \geq m$, ou seja, para todo $\lambda \geq (1^m)$, temos $I_\lambda \subseteq T(A)$.*

Como $I_\lambda \subseteq T(A)$, para $\lambda \geq (1^m)$, então o n-ésimo cocaracter de A tem a seguinte decomposição

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ h(\lambda)<m}} m_\lambda\chi_\lambda$$

ou seja, A tem sequência de cocaracteres de altura limitada. Assim, o n-ésimo cocaracter de A está contido na faixa horizontal de altura m.

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 4.10, no sentido de que caracteriza as álgebras que satisfazem uma identidade do tipo $e^*_\lambda(x;y)$.

Teorema 4.11. *Uma PI-álgebra A (com unidade) satisfaz a identidade $e^*_\lambda(x;y)$ se, e somente se, A satisfaz todas as μ-identidades para toda $\mu \geq \lambda$.*

Demonstração. Seja I_λ o ideal bilateral de KS_n associado à partição λ de n. Suponha primeiramente que $e^*_\lambda(x;y)$ é uma identidade de A. Como A tem unidade então $e_\lambda(x_1x_2...x_n)$ também é uma identidade de A. Sendo g um λ-polinômio, temos $g = fe_\lambda$, onde $f \in KS_n$. Como $P_n \cap T(A)$ é um ideal à esquerda de KS_n, então

$g = fe_\lambda \in P_n \cap T(A)$, logo, $I_\lambda \subseteq P_n \cap T(A)$. Além disso, temos que $g^*(x;y) = g\tau$, onde τ é dada na Observação 4.7. Temos

$$g^*(x;y) = g\tau = (fe_\lambda)\tau = f(e_\lambda \tau) = fe^*_\lambda(x;y).$$

Como $e^*_\lambda(x;y) \in T(A)$, temos $g^*(x;y) \in T(A)$. Segue então do Teorema 4.9 que para $m \geq n$, vale $(KS_m)I_\lambda(KS_m) \subseteq P_m \cap T(A)$. Pelo Corolário 4.4, temos que

$$(KS_m)I_\lambda(KS_m) = \bigoplus_{\substack{\mu \vdash m \\ \mu \geq \lambda}} I_\mu.$$

Portanto, $I_\mu \subseteq P_m \cap T(A)$ e assim A satisfaz todas as μ-identidades para toda $\mu \geq \lambda$.

Suponha agora que $I_\mu \subseteq (P_m \cap T(A))$ para toda $\mu \geq \lambda$, com $\mu \vdash m$. Então

$$\sum_{\substack{\mu \vdash m \\ \mu \geq \lambda}} I_\mu \subseteq (P_m \cap T(A)).$$

Pelo Corolário 4.4 temos

$$\sum_{\substack{\mu \vdash m \\ \mu \geq \lambda}} I_\mu = (KS_m)I_\lambda(KS_m)$$

para $m \geq n$, e assim $(KS_m)I_\lambda(KS_m) \subseteq P_m \cap T(A)$. Segue então do Teorema 4.8 que, para todo $f \in I_\lambda$, A também satisfaz a identidade $f^*(x;y)$. Como $e_\lambda(x_1x_2...x_n) \in I_\lambda$, temos que $e^*_\lambda(x;y)$ é uma identidade de A. ■

Teorema 4.12. *Se A satisfaz uma identidade de grau d, então A satisfaz todas as λ-identidades tais que o diagrama de Young D_λ contém um retângulo $k \times l$ onde*

$$\frac{kl}{k+l} > \frac{e(d-1)^4}{2}.$$

Demonstração. Sejam k e l satisfazendo a condição acima. Considere $n = kl$ e a partição $\mu = (l^k)$ de n. Devemos mostrar que A satisfaz todas as λ-identidades para $\lambda \geq \mu$. Temos por (4.1) que

$$d_\mu \geq \left(\frac{2}{e}\frac{kl}{k+l}\right)^n > (d-1)^{4n} \geq (d-1)^{2n}.$$

Assim, pelo Lema 4.2, temos $I_\mu \subseteq P_n \cap T(A)$. Consequentemente, $e_\mu(x_1x_2...x_n)$ é uma identidade de A. Sendo $n \leq m \leq 2n-1$ e $\lambda \vdash m$ tal que $\lambda \geq \mu$, pelo Teorema 4.5 temos

$$d_\lambda \geq d_\mu > (d-1)^{4n} \geq (d-1)^{2m}$$

Novamente pelo Lema 4.2 temos $I_\lambda \subseteq P_m \cap T(A)$. Assim, pelo Corolário 4.4, temos

$$(KS_m)I_\mu(KS_m) = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash m \\ \lambda \geq \mu}} I_\lambda \subseteq P_m \cap T(A)$$

Logo, pelo teorema 4.8, temos que para todo $f \in I_\mu$, A satisfaz a identidade $f^*(x;y)$ e todas as identidades obtidas de $f^*(x;y)$ retirando-se alguns $y_i's$. Como $I_\mu \subseteq P_n \cap T(A)$, segue do Teorema 4.9 que $(KS_m)I_\mu(KS_m) \subset T(A)$, para todo $m \geq n$. Para $m \geq n$ e $\lambda \vdash m$, com $\lambda \geq \mu$, temos, pelo Corolário 4.4,

$$I_\lambda \subseteq (KS_m)I_\mu(KS_m)$$

Portanto, A satisfaz todas as λ-identidades para $\lambda \geq \mu$.

■

Como uma consequência do teorema anterior obtemos novamente o Teorema do Gancho.

Corolário 4.13 (Teorema do Gancho)**.** *Seja A uma PI-álgebra. Então o n-ésimo cocaracter de A é dado por*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ D_\lambda \subset H(k-1,l-1)}} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde k e l satisfazem o Teorema 4.12.

Demonstração. Seja J um ideal à esquerda de KS_n tal que $KS_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J$. Como vimos na Observação 2.29, J é isomorfo a $P_n(A)$ e assim $\chi_J = \chi_n(A)$. Pelo Teorema 4.12 temos que $I_\lambda \subseteq P_n \cap T(A)$ para $\lambda \geq (l^k)$. Sendo $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, temos, pelo Teorema 2.30, que $m_\lambda = 0$ para $\lambda \geq (l^k)$. Observe que $\lambda \ngeq (l^k)$ equivale a dizer que D_λ não possui a célula (k,l), ou seja, $D_\lambda \subset H(k-1,l-1)$. Portanto,

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ D_\lambda \subset H(k-1,l-1)}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebra*, Proc. Amer. Math. Soc **1**, 449 - 463 (1950).

[2] S. A. Amitsur, *The identities of PI-rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 27 - 34 (1953).

[3] S. A. Amitsur, A. Regev, *PI-algebras and their cocharacters*, J. Algebra **78**, 248 - 254 (1982).

[4] H. Boerner, *Representations of groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[5] J. Colombo, P. Koshlukov, *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p*, Israel J. Math. **146**, 337 - 355 (2005).

[6] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[7] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20 (3)**, 188 - 194 (1981).

[8] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[9] D. G. Figueiredo, *Análise I*, 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[10] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic* $p > 0$, Israel J. Math. **122**, 305 - 316 (2001).

[11] A. Giambruno, D. La Mattina, *PI-algebra with slow codimension growth*, J. Algebra **284**, 371-391 (2005).

[12] A. Giambruno, M. Zaicev, *On codimension growth of finitely generated associative algebras*, Adv. Math. **140**, 145 - 155 (1998).

[13] A. Giambruno, M. Zaicev, *Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate*, Adv. Math. **142**, 221 - 243 (1999).

[14] A. Giambruno, M. Zaicev, *A characterization of algebras with polinomial growth of the codimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **129**, 59 - 67 (2000).

[15] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomials Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs 122, Amer. Math. Soc., 2005.

[16] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. **46**, 695 - 707 (1945).

[17] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, 2ª Edição, Dover, New York, 2009.

[18] G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Volume 16, Addison - Wesley, 1981.

[19] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575 - 580 (1948).

[20] A. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebra*, Math USSR, Izv **25**, $359-374$ (1985).

[21] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, $362-397$ (1987).

[22] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra **241**, 410 - 434 (2001).

[23] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 429-438 (1973).

[24] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.

[25] V. N. Latyshev, *On Regev's theorem on identities in tensor product of PI-algebras* (Russo), Ups. Mat. Nauk. **27**, 213 - 214 (1973).

[26] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1033 - 1035 (1946).

[27] J. B. Olsson, *A. Regev, An application of representation theory to PI-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **55**, 253 - 257 (1976).

[28] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47-63 (1973).

[29] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$,* Israel J. Math. **11**, 131-152 (1972).

[30] A. Regev, *Algebras satisfying a Capelli identity*, Israel J. Math. **33**, 149 - 154 (1979).

[31] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995.

[32] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York, 1980.