

# Resumo

Neste trabalho usamos métodos variacionais para mostrar a existência de solução fraca para dois tipos de problema. O primeiro trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$u''(t) + G'(u(t)) = f(t).$$

O segundo é referente ao sistema Hamiltoniano

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

# Abstract

In this work we use variational methods to show the existence of weak solutions for two types problems. The first, is related with a following Ordinary Differential Equations of the form

$$u''(t) + G'(u(t)) = f(t).$$

The second is relating at the Hamiltonian Systems

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Teoria dos Pontos Críticos e Sistemas Hamiltonianos

por

Leopoldo Maurício Tavares Barbosa <sup>†</sup>

sob orientação do

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Outubro de 2007

---

<sup>†</sup>O autor contou com apoio financeiro da Capes

# Teoria dos Pontos Críticos e Sistemas Hamiltonianos

por

Leopoldo Maurício Tavares Barbosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

---

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

---

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

---

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG  
Orientador

---

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG  
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro de 2007

# Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bênçãos e as graças alcançadas.
- Aos Professores José de Arimatéia e Claudianor Oliveira pela atenção e paciência durante a realização deste trabalho.
- Ao Professor Marco Aurélio pela atenção e auxílio dado durante todo o curso.
- Aos Professores Giovany e Angelo por terem aceitado me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.
- A todos que fazem parte da minha família, em especial a meu irmão Renato Maurício pelo apoio e confiança depositada em mim.
- Aos professores da Pós-Graduação: Daniel Cordeiro, Jaime, Marco Aurélio e Arimatéia pelas disciplinas lecionadas e que contribuíram para a formação do meu conhecimento.
- Aos professores: Vânio e Braulio pela confiança a mim atribuída.
- A todos os que fazem parte do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG.
- Aos colegas de curso pelo companherismo, motivação e que diretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.
- A Capes pelo apoio financeiro.
- Aos projetos Casadinho/CNPQ e Instituto do Milênio.

# Dedicatória

A minha família em especial a  
meu irmão Renato Maurício.

# Notações

- (1)  $(\cdot, \cdot)$  produto interno.
- (2) Se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função, usamos ao longo da dissertação as seguintes notações:
  - (i)  $\|v\|$  é referente a norma usual de  $v$  no  $\mathbb{R}^N$ .
  - (ii)  $|x|$  é o valor absoluto de  $x$ , se  $n = 1$ .
- (3) Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função com  $X$  e  $Y$  espaços de Banach, usamos as mesmas notações do item (2).
- (4)  $[\cdot]$  referência bibliográfica.
- (5)  $D'$  derivada no sentido das distribuições.
- (6)  $X^*$  espaço dual de  $X$ .
- (7)  $\rightharpoonup$  convergência fraca.
- (8) *q.t.p* quase todo ponto.
- (9)  $\phi^c = \{u \in X : \phi(u) \leq c\}$ .
- (10)  $K^c = \{u \in X : \phi(u) = c \text{ e } \phi'(u) = 0\}$ .
- (11)  $A_\delta = \{u \in X : \text{dist}(u, A) \leq \delta\}$ .
- (12)  $\mathbb{C}^k$  Espaço dos vetores com  $k$  coordenadas complexas.
- (13)  $\text{dist}(u, A) = \inf\{\|u - v\|; v \in A\}$  distância do ponto  $u$  ao conjunto  $A$ .
- (14)  $\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} = \left( \int_0^T \|v(t)\|^p dt + \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$  norma no Espaço  $W^{1,p}([0, T])$ .

# Conteúdo

Notações . . . . .	6
Introdução . . . . .	6
<b>1 Princípios de Minimax</b>	<b>9</b>
1.1 Pseudo - gradiente . . . . .	9
1.2 Lema de Deformação . . . . .	13
1.3 Condições de Compacidade . . . . .	21
<b>2 Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado</b>	<b>29</b>
2.1 A Desigualdade de Wirtinger . . . . .	30
2.2 Existência de Solução . . . . .	35
<b>3 A Transformada de Legendre</b>	<b>46</b>
3.1 Introdução . . . . .	46
3.2 Funções Convexas . . . . .	47
3.3 Função de Legendre . . . . .	49
3.4 Inequações . . . . .	59
3.5 Dual Hamiltoniano . . . . .	73
3.6 Soluções Periódicas para o Sistema Hamiltoniano Convexo . . . . .	78
3.7 Subharmônicas . . . . .	92
3.8 Oscilações Livres com Período Minimal Prescrito . . . . .	98
3.9 Oscilações Livres com Energia Prescrita . . . . .	102
<b>4 Pontos Críticos de Funcionais Invariantes</b>	<b>114</b>
4.1 $S^1$ -índice . . . . .	115



4.2	O Lema de Deformação . . . . .	115
4.3	Teorema da Multiplicidade . . . . .	130
4.4	Multiplicidade de Órbitas Hamiltonianas Periódicas em uma Superfície Convexa . . . . .	134
<b>A</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>144</b>
<b>B</b>	<b>Funcionais Diferenciáveis</b>	<b>147</b>
<b>C</b>	<b>Resultados Gerais</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>157</b>

# Introdução

Nesta dissertação nos baseamos principalmente em [12] que corresponde ao curso de Métodos de Minimax em Teoria de Pontos Críticos que foi ministrado na Universidade de Brasília em Janeiro e Fevereiro de 1983. Estamos interessados em usar métodos variacionais para determinar soluções fracas para os seguintes problemas. O primeiro trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária do tipo

$$u''(t) + G'(u(t)) = f(t). \quad (1)$$

Em particular, se considerarmos  $G(u) = -\cos u$ , obtemos a equação do pêndulo forçado

$$u''(t) + \operatorname{sen}(u(t)) = f(t).$$

A existência de solução  $T$ -periódica para a equação (1) é devido a Ambrosetti-Rabinowitz e consiste em determinar os pontos críticos do funcional energia definido por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt.$$

O segundo problema trata-se de encontrar soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u'(t) = J\nabla H(u(t))$$

onde  $J : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$  é tal que

$$J(x, y) = (-y, x)$$

e  $\nabla$  denota o gradiente com respeito a  $u$ .

No caso forçado é natural assumir que  $H$  é  $T$ -periódica com respeito a  $t$  e observar soluções  $T$ -periódicas ou soluções  $kT$ -periódicas para algum  $k \geq 2$ , o qual chamaremos posteriormente de soluções subharmônicas.

No caso livre é natural observar soluções periódicas não-constantes com período prescrito ou energia prescrita.

No **Capítulo 1** fizemos um breve estudo sobre Pseudo-gradiente, o qual é uma ferramenta importante para o desenvolvimento do Lema de Deformação que foi abordado neste capítulo. Além disso, definimos algumas condições de compacidade que são de grande importância para o desenvolvimento e o entendimento dos Lemas e os Teoremas abstratos que serão vistos no decorrer desta dissertação.

No **Capítulo 2** primeiramente mostramos algumas desigualdades, dentre as quais, a desigualdade de Wirtinger, as quais são muito importantes no estudo de soluções periódicas. Mostramos também que o espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é absolutamente contínua, } T\text{-periódica e } \int_0^T |u'(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno definido por

$$(u, v) = \int_0^T (u'v' + uv)dt,$$

e o funcional energia  $\phi$  associado a equação (1) satisfaz a condição Fraca de Palais-Smale ( $WPS$ ) definida no Capítulo 1. Além disso, verificamos a existência de solução  $T$ -periódica para a equação

$$u''(t) + G'(u(t)) = f(t),$$

onde  $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é uma função  $2\pi$ -periódica e  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é uma função  $T$ -periódica.

No **Capítulo 3** fizemos um breve estudo sobre função de Legendre e transformada de Legendre, os quais serão muito utilizados na procura de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano convexo. No primeiro momento nos preocupamos em encontrar soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t)).$$

Num segundo momento encontramos soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano livre

$$u'(t) = J\nabla H(u(t))$$

com período minimal prescrito e com energia prescrita.

No **Capítulo 4** fizemos um breve estudo sobre funcionais invariantes, subconjuntos invariantes e aplicações invariantes, que serão de muita importância para mostrarmos e entendermos uma forma mais geral do Lema de Deformação e o Teorema da Multiplicidade de pontos críticos que abordaremos neste capítulo. Além disso, vamos fazer um breve estudo sobre o número de órbitas Hamiltonianas periódicas em uma superfície convexa.

No **Apêndice A** fizemos uma breve revisão sobre as séries de Fourier.

No **Apêndice B** definimos a derivada de Fréchet e mostramos que os funcionais utilizados na dissertação são de classe  $C^1$ .

Finalmente no **Apêndice C** enunciamos alguns resultados da Análise funcional, Teoria da medida e Espaços de Sobolev que foram usados na dissertação.

# Capítulo 1

## Princípios de Minimax

Neste capítulo nosso objetivo é demonstrar o Lema de Deformação e alguns Teoremas abstratos, os quais serão de grande importância no desenvolvimento dos próximos capítulos, para tanto, usaremos o conceito de pseudo-gradiente e algumas condições de compacidade.

### 1.1 Pseudo - gradiente

**Definição 1.1** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$ . Um campo vetorial pseudo-gradiente para  $\phi$  em  $Y$  é uma aplicação contínua localmente Lipschitziana  $V : Y \rightarrow X$  tal que, para cada  $u \in Y$ ,*

$$\|V(u)\| \leq 2 \|\phi'(u)\|, \quad (1.1)$$

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2. \quad (1.2)$$

**Lema 1.1** *Sob as hipóteses da Definição 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente para  $\phi$  em  $Y$ .*

**Demonstração:**

Dado  $u \in Y$ , temos  $\phi'(u) \neq 0$  e

$$\|\phi'(u)\| = \sup \{ \langle \phi'(u), w \rangle : \|w\| = 1 \}.$$

Segue da definição de supremo que dado  $\epsilon = \frac{\|\phi'(u)\|}{3} > 0$ , existe  $w_u \in X$  com  $\|w_u\| = 1$  e

$$\langle \phi'(u), w_u \rangle > \|\phi'(u)\| - \epsilon$$

implicando

$$\langle \phi'(u), w_u \rangle > \frac{2}{3} \|\phi'(u)\|.$$

Considerando a função  $v : Y \rightarrow X$  dada por

$$v(u) = \frac{3}{2} \|\phi'(u)\| w_u$$

e denotando  $v = v(u)$ , temos

$$\|v\| = \frac{3}{2} \|\phi'(u)\| < 2 \|\phi'(u)\|. \quad (1.3)$$

Por outro lado,

$$\langle \phi'(u), v \rangle = \frac{3}{2} \|\phi'(u)\| \langle \phi'(u), w_u \rangle$$

de onde segue,

$$\langle \phi'(u), v \rangle > \frac{3}{2} \|\phi'(u)\| \frac{2}{3} \|\phi'(u)\|$$

logo,

$$\langle \phi'(u), v \rangle > \|\phi'(u)\|^2. \quad (1.4)$$

Visto que  $\phi'$  é contínua, existe uma vizinhança aberta  $N_u$  de  $u$  em  $Y$  tal que

$$\|v\| < 2 \|\phi'(w)\|, \forall w \in N_u \quad (1.5)$$

e

$$\langle \phi'(w), v \rangle > \|\phi'(w)\|^2, \forall w \in N_u. \quad (1.6)$$

Desde que a família  $\{N_u, u \in Y\}$  é uma cobertura aberta de  $Y$ , existe um refinamento localmente finito  $N_{u_i}$  de  $Y$  (Ver[10]).

No que segue, consideramos

$$\rho_i(u) = \text{dist}(u, (N_{u_i})^c), \forall u \in Y$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\sum_j \rho_j(u)} v_i, \forall u \in Y \quad (1.7)$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2} \|\phi'(u_i)\| w_{u_i}.$$

Sendo  $N_{u_i}$  localmente finita, cada  $u \in Y$  só pertence apenas a um número finito de  $N_{u_i}$  (Ver[10]). Logo as somas definidas em (1.7) são finitas, pois  $\rho_i$  se anula fora de  $N_{u_i}$ . Assim  $V(u)$  é uma combinação convexa dos  $v_i$ 's, que verificam

$$\|v_i\| < 2\|\phi'(u)\|, \forall u \in N_{u_i}$$

e

$$\langle \phi'(u), v_i \rangle > \|\phi'(u)\|^2, \forall u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado  $u \in Y$

$$V(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_i = \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_1 + \frac{\rho_2(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_2 + \dots + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_n$$

implicando que,

$$\|V(u)\| \leq \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_1\| + \frac{\rho_2(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_2\| + \dots + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_n\|$$

e portanto,

$$\|V(u)\| \leq \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\rho_i(u)}{n} \|v_i\|}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \sum_{i=1}^n \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada  $u$ , segue que

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|$$

e

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2.$$

Para mostrar que  $V$  é localmente lipschitziana, basta mostrar que cada parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_i\|$$

é localmente lipschitziana. Observando que para cada  $i$ ,  $\|v_i\|$  é constante, vamos mostrar que no caso de duas parcelas a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

é localmente lipschitziana. Para tanto considerando  $z$  arbitrário tal que  $u, v \in V_z$  temos,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)}$$

donde segue,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u) \rho_1(v) + \rho_1(u) \rho_2(v) - \rho_1(u) \rho_1(v) - \rho_1(v) \rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

o que implica,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u) \rho_2(v) - \rho_1(v) \rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]}.$$

Assim,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u) \rho_2(v) - \rho_1(v) \rho_2(v) + \rho_1(v) \rho_2(v) - \rho_1(v) \rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

de onde segue que,

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v) [\rho_1(u) - \rho_1(v)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]} + \frac{\rho_1(v) [\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &\leq \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]} |\rho_1(u) - \rho_1(v)| + \\ &\quad + \frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)] [\rho_1(v) + \rho_2(v)]} |\rho_2(v) - \rho_2(u)|. \end{aligned}$$

Sendo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  funções lipschitzianas, existem  $K_1$  e  $K_2$  tais que  $|\rho_1(u) - \rho_1(v)| \leq K_1 \|u - v\|$  e  $|\rho_2(v) - \rho_2(u)| \leq K_2 \|u - v\|$ , logo

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &\leq \frac{1}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]} \frac{\rho_2(v)}{[\rho_1(v) + \rho_2(v)]} K_1 \|u - v\| + \\ &\quad + \frac{1}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)]} \frac{\rho_1(v)}{[\rho_1(v) + \rho_2(v)]} K_2 \|u - v\|. \end{aligned}$$

Desde que  $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$ , existe  $a > 0$  tal que  $\rho_1(u) + \rho_2(u) > a > 0$  e como  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são funções contínuas, existe uma vizinhança  $V_z$  de  $u$  tal que

$$\rho_1(v) + \rho_2(v) > a, \forall v \in V_z.$$

Portanto,

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a} K_1 \|u - v\| + \frac{1}{a} K_2 \|u - v\|$$



pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1, \quad \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo,

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a} (K_1 + K_2) \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V_z$$

mostrando que  $g$  é localmente lipschitziana. Concluindo assim que  $V$  é um campo vetorial pseudo-gradiente para  $\phi$  em  $Y$ . ■

## 1.2 Lema de Deformação

Nesta subsecção iremos demonstrar alguns lemas de deformação, o primeiro deles é o lema de deformação de Clark.

Considerando  $X$  um Espaço de Banach, para  $S \subset X$  e  $\alpha > 0$  definamos

$$S_\alpha = \{u \in X : \text{dist}(u, S) \leq \alpha\}.$$

**Lema 1.2** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ ,  $S \subset X$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon, \delta > 0$  tais que, para todo  $u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ ,*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}. \tag{1.8}$$

*Então, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que*

- (i)  $\eta(0, u) = u, \forall u \in X$*
- (ii)  $\eta(t, u) = u, \forall u \in (\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta})^c, \forall t \in [0, 1]$*
- (iii)  $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$*
- (iv)  $\eta(t, \cdot)$  é um homeomorfismo para todo  $t \in [0, 1]$ .*

**Demonstração:**

No que segue denotamos por  $A, B \subset X$  os seguintes conjuntos

$$A = \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

e

$$B = \phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_\delta.$$

Pelo Lema 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente  $V$  para  $\phi$  em  $Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$ . Sendo  $A = \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ , segue que  $A \subset Y$ . De fato, por (1.8)

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} > 0, \forall u \in A$$

logo  $\phi'(u) \neq 0$ , mostrando que  $A \subset Y$ .

Considerando a função  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  localmente lipschitziana dada por

$$\psi(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

onde

$$\rho_1(u) = \text{dist}(u, \overline{A^c})$$

e

$$\rho_2(u) = \text{dist}(u, B)$$

tem-se,

$$\begin{cases} \psi(u) = 1 & \text{em } B \\ \psi(u) = 0 & \text{em } \overline{A^c} \\ 0 \leq \psi(u) \leq 1 & \text{em } X. \end{cases} \quad (1.9)$$

Se  $f : X \rightarrow X$  é o campo vetorial definido por

$$f(u) = \begin{cases} -\frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} V(u) & \text{em } A \\ 0 & \text{em } A^c \end{cases}$$

note que  $f$  é localmente lipschitziana, pois

$$f(u) - f(v) = \frac{\psi(v)}{\|V(v)\|} V(v) - \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} V(u)$$

daí,

$$f(u) - f(v) = \frac{\psi(v) \|V(u)\| V(v) - \psi(u) \|V(v)\| V(u)}{\|V(u)\| \|V(v)\|}$$

assim,

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= \frac{1}{\|V(u)\| \|V(v)\|} [\psi(v) \|V(u)\| V(v) - \psi(u) \|V(u)\| V(v) + \\ &+ \psi(u) \|V(u)\| V(v) - \psi(u) \|V(v)\| V(v) + \psi(u) \|V(v)\| V(v) - \psi(u) \|V(v)\| V(u)] \end{aligned}$$

consequentemente,

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\|V(u)\| \|V(v)\|} \{ \|V(u)\| V(v) (\psi(v) - \psi(u)) + \psi(u) \|V(v)\| (V(v) - V(u)) + \psi(u) V(v) (\|V(u)\| - \|V(v)\|) \}$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq |\psi(v) - \psi(u)| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} \|V(v) - V(u)\| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} \|V(u) - V(v)\|.$$

Sendo  $\psi$  e  $V$  localmente lipschitzianos, existem  $K_1, K_2 > 0$  e  $z$  arbitrário tal que  $u, v \in V_z$  satisfazendo

$$|\psi(v) - \psi(u)| \leq K_1 \|v - u\|, \quad \forall u, v \in V_z$$

e

$$\|V(v) - V(u)\| \leq K_2 \|v - u\|, \quad \forall u, v \in V_z$$

mostrando que,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K_1 \|v - u\| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\| + \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\|$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left( K_1 + 2 \frac{\psi(u)}{\|V(u)\|} K_2 \right) \|v - u\|.$$

Usando a continuidade das funções  $\psi$  e  $V$ , podemos concluir que  $f$  é localmente lipschitziana. Usando o fato que a função  $f$  é limitada e localmente lipschitziana, para cada  $u \in X$ , o problema de Cauchy, que denotaremos por  $(PC)$ ,

$$(PC) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dt}(t) = f(w(t)) \\ w(0) = u \end{cases}$$

possui uma única solução, a qual denotaremos por  $w(t, u)$ , sendo definida para todo  $t \geq 0$ .

No que segue, consideramos  $\eta : [0, 1] \times X \rightarrow X$  o campo vetorial dado por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$

Assim,

$$\eta(0, u) = w(0, u) = u$$

isto é,

$$\eta(0, u) = u$$

mostrando (i).

Seja  $u \in A^c$  e defina  $w_1(t) = u$ . Observe que

$$w_1'(t) = 0 = f(w_1(t))$$

pois, se  $u \in A^c$ , tem-se  $f(u) = 0$ . Desse modo

$$\begin{cases} w_1'(t) = f(w_1(t)) \\ w_1(0) = u. \end{cases}$$

Logo, pela unicidade de solução de (PC), devemos ter

$$w_1(t) = w(t, u) = u, \quad \forall u \in A^c \text{ e } \forall t \in [0, 1],$$

e conseqüentemente

$$\eta(t, u) = u, \quad \forall u \in A^c \text{ e } \forall t \in [0, 1]$$

o que mostra (ii).

Agora, observe que para  $t \geq 0$ ,

$$w(t, u) - w(0, u) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau, u)) d\tau$$

assim,

$$\|w(t, u) - w(0, u)\| = \left\| \int_0^t f(w(\tau, u)) d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau, u))\| d\tau$$

o que implica,

$$\|w(t, u) - u\| \leq \int_0^t \frac{|\psi(w(\tau, u))|}{\|V(w(\tau, u))\|} \|V(w(\tau, u))\| d\tau.$$

Usando (1.9)

$$\|w(t, u) - u\| \leq \int_0^t 1 d\tau = t \tag{1.10}$$

o que mostra que se  $u \in S$ , então  $w(t, u) \in S_t$ . De acordo com a igualdade

$$\frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) = \langle \phi'(w(t, u)), w'(t, u) \rangle$$

temos,

$$\frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) = \langle \phi'(w(t, u)), f(w(t, u)) \rangle$$

consequentemente,

$$\frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) = -\langle \phi'(w(t, u)), \frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|} V(w(t, u)) \rangle$$

logo,

$$\frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) = -\frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|} \langle \phi'(w(t, u)), V(w(t, u)) \rangle.$$

Sendo  $V$  um campo vetorial pseudo-gradiente para  $\phi$ , temos

$$\frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) \leq -\frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|} \|\phi'(w(t, u))\|^2 \leq 0.$$

Portanto, a aplicação

$$t \mapsto \phi(w(\cdot, u))$$

é não-crescente.

Se  $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$ , iremos considerar dois casos:

**(1) Para algum  $t \in [0, \delta]$ , temos  $\phi(w(t, u)) \leq c - \epsilon$ .**

Assim, como  $\phi(w(\cdot, u))$  é não-crescente,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(w(t, u)) \leq c - \epsilon$$

donde segue,

$$w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon}.$$

Por outro lado, de (1.10),

$$\|w(\delta, u) - u\| \leq \delta$$

assim,

$$w(\delta, u) \in S_\delta$$

implicando que

$$w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Segue da definição de  $\eta$ , que

$$\eta(1, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$$

e portanto,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

**(2) Para todo  $t \in [0, \delta]$ , temos  $\phi(w(t, u)) \geq c - \epsilon$ .**

Visto que  $\phi(w(\cdot, u))$  é não-crescente,

$$\phi(w(t, u)) \leq \phi(w(0, u)) = \phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Por (1.10),

$$\|w(t, u) - u\| \leq \delta$$

assim,

$$w(t, u) \in S_\delta,$$

portanto,

$$w(t, u) \in B = \phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_\delta.$$

Uma vez que,

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt} \phi(w(t, u)) dt$$

temos, por (PC)

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \langle \phi'(w(t, u)), f(w(t, u)) \rangle dt$$

isto é,

$$\phi(w(\delta, u)) = \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|} \langle \phi'(w(t, u)), V(w(t, u)) \rangle dt.$$

Usando o fato que  $V$  é um campo vetorial pseudo-gradiente para  $\phi$ ,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|} \|\phi'(w(t, u))\|^2 dt$$

ou ainda

$$\phi(w(\delta, u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{\psi(w(t, u))}{2} \|\phi'(w(t, u))\| dt.$$

Sendo  $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$  e  $w(t, u) \in B$ ,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - \int_0^\delta \frac{1}{2} \|\phi'(w(t, u))\| dt$$

e por (1.8),

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - \frac{1}{2} \int_0^\delta \frac{4\epsilon}{\delta} dt$$

logo,

$$\phi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon$$

portanto,

$$w(\delta, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Pela definição de  $\eta$ ,

$$\eta(1, u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Assim, em qualquer dos casos (1) ou (2), encontramos

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta,$$

O que prova (iii).

Finalmente, para mostrarmos (iv), consideramos as funções

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow X \\ u &\mapsto h(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ u &\mapsto g(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Observe que

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, g(u))$$

o que implica,

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Consequentemente,

$$(h \circ g)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u$$

isto é,

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Analogamente,

$$(g \circ h)(u) = u$$

mostrando assim que  $\eta$  é inversível.

Visto que,  $w(\delta t, u)$  é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais, temos de modo análogo que  $w(-\delta t, u)$  é contínua, assim concluímos que  $\eta$  é um homeomorfismo, para todo  $t \in [0, 1]$ . Mostrando (iv). ■

**Corolário 1.2** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  limitada inferiormente,  $v \in X$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $\phi(v) \leq \inf \phi + \epsilon$ . Então, para todo  $\delta > 0$  existe  $u \in X$  tal que  $\|u - v\| \leq 2\delta$ ,  $\phi(u) \leq \inf \phi + 2\epsilon$  e  $\|\phi'(u)\| < \frac{4\epsilon}{\delta}$ .*

**Demonstração:**

Sendo  $\phi$  limitado inferiormente, considere  $c = \inf \phi$ ,  $S = \{v\}$  e observe que

$$v \in \phi^{-1}([\inf \phi - \epsilon, \inf \phi + \epsilon]) \cap S. \quad (1.11)$$

Agora, suponha por contradição que existe  $\delta > 0$ , tal que para todo  $u \in X$  verificando

$$\|u - v\| \leq 2\delta \text{ e } \phi(u) \leq c + 2\epsilon$$

ou seja,

$$u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \quad (1.12)$$

tem-se,

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}.$$

Usando o item (iii) do Lema 1.2,

$$\eta(1, v) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta,$$

o que é um absurdo, pois  $\phi^{c-\epsilon} = \emptyset$ . ■



### 1.3 Condições de Compacidade

O Corolário 1.2 ainda não implica na existência de um ponto crítico para  $\phi$ . A fim de provar a existência de pontos críticos, veremos algumas condições de compacidade para  $\phi$ .

**Definição 1.3** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$ .*

*O funcional  $\phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), se toda sequência  $\{u_n\} \subset X$  tal que  $(\phi(u_n))$  é limitada e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$  tem uma subsequência convergente.*

*O funcional  $\phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale fraca (WPS) se toda sequência limitada  $\{u_n\} \subset X$  tal que  $(\phi(u_n))$  é limitada e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$  tem uma subsequência convergente.*

*O funcional  $\phi$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  se, quando  $\{u_n\} \subset X$  é tal que  $\phi(u_n) \rightarrow c$  e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ , então  $c$  é um valor crítico de  $\phi$ .*

**Lema 1.3** *A condição (PS) implica ao mesmo tempo em (WPS) e  $(PS)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:**

Primeiramente, vamos mostrar que a condição (PS) implica na condição (WPS)

De fato, seja  $(u_n)$  uma sequência limitada em  $X$  tal que  $(\phi(u_n))$  é limitada e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ , logo  $(\phi(u_n))$  é limitada e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ , como por hipótese  $(u_n)$  satisfaz (PS) segue que  $(u_n)$  tem uma subsequência convergente.

Portanto,  $(PS) \Rightarrow (WPS)$ .

Agora, mostraremos que a condição (PS) implica na condição  $(PS)_c$ .

Com efeito, considere uma sequência  $\{u_n\} \subset X$  tal que  $\phi(u_n) \rightarrow c$  e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ . Visto que por hipótese  $\phi$  satisfaz (PS), segue que existe uma subsequência  $(u_{n_j})$  de  $(u_n)$  tal que  $u_{n_j} \rightarrow u \in X$ . Sendo  $\phi \in C^1$  em  $X$ , temos

$$\phi'(u) = \phi'(\lim u_{n_j}) = \lim \phi'(u_{n_j}) = 0$$

e

$$\phi(u) = \phi(\lim u_{n_j}) = \lim \phi(u_{n_j}) = c$$

logo,

$$\phi(u) = c \quad e \quad \phi'(u) = 0$$

ou seja,  $c$  é um valor crítico de  $\phi$ . Portanto,  $(PS) \Rightarrow (PS)_c$ .

■

**Lema 1.4** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $d \in \mathbb{R}$ . Se  $\phi$  satisfaz  $(PS)_d$  e se  $d$  não é valor crítico de  $\phi$ , então para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que:*

(i)  $\eta(0, u) = u$  ,  $\forall u \in X$

(ii)  $\eta(t, u) = u$  ,  $\forall u \in (\phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon]))^c$ ,  $\forall t \in [0, 1]$

(iii)  $\eta(1, \phi^{d+\epsilon}) \subset \phi^{d-\epsilon}$

(iv)  $\eta(t, \cdot)$  é homeomorfismo para todo  $t \in [0, 1]$ .

### Demonstração:

Uma vez que por hipótese  $d$  não é valor crítico de  $\phi$ , existem  $\alpha, \beta > 0$  tais que, se  $u \in \phi^{-1}([d - 2\alpha, d + 2\alpha])$  então  $\|\phi'(u)\| \geq \beta$ .

Com efeito, pois caso contrário existiria uma sequência  $(u_n)$  verificando

$$u_n \in \phi^{-1}\left(\left[d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi'(u_n)\| < \frac{1}{n}$$

isto é,

$$\phi(u_n) \in \left(\left[d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi'(u_n)\| \rightarrow 0$$

ou ainda,

$$\phi(u_n) \rightarrow d \quad e \quad \|\phi'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Como por hipótese  $\phi$  satisfaz  $(PS)_d$ ,  $d$  seria um valor crítico de  $\phi$ , o que é um absurdo.

Portanto existem  $\alpha, \beta > 0$  tais que, se  $u \in \phi^{-1}([d - 2\alpha, d + 2\alpha])$  então  $\|\phi'(u)\| \geq \beta$ .

Considerando

$$\epsilon \in (0, \alpha] \quad , \quad S = X \quad e \quad \delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$$

para cada,

$$u \in \phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

temos,

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

logo, pelo Lema 1.2, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv). ■

**Teorema 1.4** *Seja  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  limitada inferiormente e seja  $c = \inf \phi$ . Se  $\phi$  satisfaz a condição  $(PS)_c$ , então  $c$  é um valor crítico (e o mínimo) de  $\phi$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos por contradição que  $c$  não é um valor crítico de  $\phi$ , então pelo Lema 1.4, existem  $\epsilon > 0$  e  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tais que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

o que é um absurdo, pois  $c = \inf \phi$ . ■

**Teorema 1.5** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ ,  $u \neq v \in X$ ,  $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t))$  e*

$\Gamma = \{g \in C([0, 1], X) : g(0) = u \text{ e } g(1) = v\}$ . *Se*

*(i)  $\phi$  satisfaz a condição  $(PS)_c$*

*(ii) Existem  $0 < R < \|u - v\|$  e  $b \in \mathbb{R}$  tais que se  $\|w - u\| = R$ , então  $\phi(w) \geq b > a = \max\{\phi(u), \phi(v)\}$ .*

*Então  $c \geq b$  e  $c$  é valor crítico de  $\phi$ .*

**Demonstração:**

Usando a condição (ii), para cada  $g \in \Gamma$ , pelo Teorema do Valor Intermediário (Ver [9]), existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que

$$\|g(t_0) - u\| = R$$

de onde encontramos,

$$\phi(g(t_0)) \geq b > a = \max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

e conseqüentemente,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \geq b$$

mostrando que,

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \geq b.$$

Suponhamos por contradição que  $c$  não é valor crítico de  $\phi$  e fixemos  $\epsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right)$ , então pelo Lema 1.4, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv).

Segue da definição de ínfimo que existe  $g \in \Gamma$  verificando

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \leq c + \epsilon. \quad (1.13)$$

Definindo,

$$h(t) = \eta(1, g(t))$$

temos,  $h(t) \in C([0, 1], X)$ , e como

$$a = \max\{\phi(u), \phi(v)\}$$

devemos ter

$$\phi(u) < c - 2\epsilon \quad e \quad \phi(v) < c - 2\epsilon$$

ou seja,

$$v, u \in (\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]))^c$$

pelo item (ii) do Lema 1.4, obtemos

$$h(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, u) = u$$

e

$$h(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, v) = v$$

isto é,

$$h(0) = u \quad e \quad h(1) = v$$

portanto,  $h \in \Gamma$ .

Por (iii) do Lema 1.4,

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

juntamente com (1.13), temos

$$g(t) \in \phi^{c+\epsilon}$$

assim,

$$\eta(1, g(t)) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

donde concluímos,

$$\phi(\eta(1, g(t))) \leq c - \epsilon$$

portanto,

$$\phi(h(t)) \leq c - \epsilon, \quad \forall t \in [0, 1]$$

mostrando que,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(h(t)) \leq c - \epsilon$$

o que é um absurdo, pois

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)).$$

■

**Teorema 1.6** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ ,  $u \neq v \in X$ ,  $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t))$  e*

$\Gamma = \{g \in C([0, 1], X) : g(0) = u \text{ e } g(1) = v\}$ . *Se*

(i)  *$\phi$  satisfaz as condições  $(PS)_c$  e  $(WPS)$*

(ii) *Existem  $0 < r < R < \|u - v\|$  tais que se  $r \leq \|w - v\| \leq R$ , então  $\phi(w) \geq a = \max\{\phi(u), \phi(v)\}$ .*

*Então,  $c \geq a$  é valor crítico de  $\phi$ . Além disso, se  $c = a$ , existe um ponto crítico  $w$  tal que  $\phi(w) = a$  e  $\|w - u\| = \frac{R+r}{2}$ .*

### Demonstração:

Observe que, se  $c > a$  é suficiente usar a prova do Teorema 1.5.

Agora, consideremos  $c = a$  e  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{R-r}{2}. \quad (1.14)$$

Segue da definição de  $c$ , que existe  $g \in \Gamma$  tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \phi(g(t)) \leq a + \frac{1}{n}$$

o que implica,

$$\phi(g(t)) \leq a + \frac{1}{n}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

e conseqüentemente,

$$g(t) \in \phi^{a+\frac{1}{n}}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Afirmação:** Para cada  $g \in \Gamma$ , existe  $t_n \in [0, 1]$  tal que  $\|g(t_n) - u\| = \frac{R+r}{2}$ .

De fato, considere a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(t) = \|g(t) - u\|, \quad g \in \Gamma.$$

Note que  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$  e

$$f(0) = \|g(0) - u\| = 0.$$

Além disso, sendo  $0 < r < R$ , temos

$$\frac{r}{2} < r < \frac{R+r}{2} < R.$$

Assim,

$$f(1) = \|g(1) - u\| = \|v - u\| > R > \frac{R+r}{2}$$

e

$$f(0) < \frac{R+r}{2} < f(1).$$

Sendo  $f$  contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário (ver[9]), existe  $t_n \in [0, 1]$  tal que

$$f(t_n) = \frac{R+r}{2}$$

e portanto,

$$\|g(t_n) - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Escrevendo,

$$u_n = g(t_n)$$

temos,

$$a \leq \phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n} \quad (1.15)$$

e

$$\|u_n - u\| = \frac{R+r}{2}.$$

Considere,

$$S = \{u_n\} \quad , \quad c = a \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{n} \quad , \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (1.16)$$

e suponhamos que, para todo

$$u \in \phi^{-1} \left( \left[ c - \frac{2}{n}, c + \frac{2}{n} \right] \right) \cap S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

temos

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Então, pelo Lema 1.2, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tal que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Por (1.15) e (1.16),

$$u_n \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$$

e

$$v_n = \eta(1, u_n) \in \phi^{a-\frac{1}{n}} \cap S_{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Assim,

$$\phi(v_n) \leq a - \frac{1}{n} < a \quad (1.17)$$

e

$$\|v_n - u\| \leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\|$$

implicando,

$$\|v_n - u\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2}.$$

Usando (1.14),

$$\|v_n - u\| \leq \frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2} = R$$

isto é,

$$\|v_n - u\| \leq R.$$

Por outro lado,

$$\|u_n - u\| \leq \|v_n - u\| + \|v_n - u_n\|$$

assim,

$$\|v_n - u\| \geq \|u_n - u\| - \|v_n - u_n\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e por (1.14),

$$\|v_n - u\| \geq \frac{R+r}{2} - \frac{R-r}{2} = r$$

logo,

$$r \leq \|v_n - u\| \leq R$$

implicando por (ii) que  $\phi(v_n) \geq a$ , o que é um absurdo com (1.17).

Portanto, existe

$$w_n \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \quad (1.18)$$

tal que,

$$\|w_n - u_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

e

$$\|\phi'(w_n)\| < \frac{4}{\sqrt{n}}. \quad (1.19)$$

Note que,

$$\|w_n - u\| \leq \|w_n - u_n\| + \|u_n - u\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq R - r + \frac{R+r}{2}$$

logo,

$$\|w_n - u\| \leq \frac{3R-r}{2}$$

assim,

$$\|w_n\| - \|u\| \leq \frac{3R - r}{2}$$

ou seja,

$$\|w_n\| \leq \frac{3R - r}{2} + \|u\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

isto é, a sequência  $(w_n)$  é limitada.

Uma vez que (1.18) e (1.19) implicam que

$$\phi(w_n) \longrightarrow c \quad e \quad \phi'(w_n) \longrightarrow 0.$$

Segue da hipótese que  $\phi$  satisfaz a condição  $(WPS)$ , que existe uma subsequência  $(w_{n_j})$  tal que

$$w_{n_j} \longrightarrow w \quad em \quad X.$$

Como  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ , segue

$$\phi(w) = \phi(\lim w_{n_j}) = \lim \phi(w_{n_j}) = c$$

e

$$\phi'(w) = \phi'(\lim w_{n_j}) = \lim \phi'(w_{n_j}) = 0$$

mostrando que  $c$  é um valor crítico de  $\phi$ .

Por outro lado,

$$\|u_{n_j} - w\| \leq \frac{2}{\sqrt{n_j}} + \|w_{n_j} - w\|$$

de onde concluímos que

$$\|u_{n_j} - w\| \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$u_{n_j} \longrightarrow w.$$

Desde que,

$$\|u_{n_j} - u\| = \frac{R + r}{2}$$

passando ao limite quando  $n \longrightarrow \infty$ , obtemos

$$\|w - u\| = \frac{R + r}{2}.$$

■



## Capítulo 2

# Soluções Periódicas da Equação do Pêndulo Forçado

Neste capítulo nosso objetivo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções  $T$ -periódicas para a equação

$$u''(t) + G'(u(t)) = f(t).$$

Em particular, considerando  $G(u(t)) = -\cos(u(t))$ , obtemos a equação do pêndulo forçado

$$u''(t) + \operatorname{sen}(u(t)) = f(t).$$

A garantia de solução  $T$ -periódica para  $u'' + G'(u) = f(t)$  é devido a Ambrosetti-Rabinowitz (Ver [1]) e consiste em determinar os pontos críticos do funcional energia dado por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt. \quad (2.1)$$

Começamos nosso estudo neste capítulo verificando algumas desigualdades elementares que são ferramentas básicas na teoria de soluções periódicas.

## 2.1 A Desigualdade de Wirtinger

**Proposição 2.1** *Seja  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  uma função  $T$ -periódica absolutamente contínua tal que  $\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt < \infty$ . Se  $\int_0^T u(t) dt = 0$ , então*

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \quad (\text{Desigualdade de Wirtinger})$$

e

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq \left(\frac{T}{12}\right) \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \quad (\text{Desigualdade de Sobolev})$$

### Demonstração:

Considere o seguinte resultado, se  $u$  contínua, com  $u' \in L^2([0, T])$  e  $u$   $T$ -periódica, então a série de Fourier gerada por  $u$  converge uniformemente a  $u$ . Além disso, vale a identidade de Parseval

$$\|c_k\|_2^2 = \sum_{k \neq 0} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt = \frac{1}{T} \|u\|_2^2.$$

Se

$$u \cong \sum_{k \neq 0} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

é a série de Fourier gerada por  $u$ , (Ver [Apêndice A]), a série de Fourier da sua derivada,  $u'$ , é dada por

$$u' \cong \sum_{k \neq 0} \frac{i2k\pi}{T} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}.$$

Pela identidade de Parseval,

$$\sum_{k \neq 0} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$$

e

$$\sum_{k \neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T^2} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt$$

ou seja,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.$$

Donde segue,

$$\sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{T} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt$$

desde que,

$$\sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 \geq \sum_{k \neq 0} |c_k|^2$$

obtemos

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{T} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt$$

logo,

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.$$

Além disso, note que

$$\|u(t)\|^2 \leq \left( \sum_{k \neq 0} |c_k| \right)^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

implicando

$$\|u(t)\|^2 \leq \left( \sum_{k \neq 0} \frac{T^{\frac{1}{2}}}{2\pi k} \cdot \frac{2\pi k}{T^{\frac{1}{2}}} |c_k| \right)^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Observando que

$$\left( \frac{T^{\frac{1}{2}}}{2\pi k} \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2 \quad e \quad \left( \frac{2\pi k}{T^{\frac{1}{2}}} |c_k| \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$$

tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|u(t)\|^2 \leq \left( \sum_{k \neq 0} \frac{T}{4\pi^2 k^2} \right) \left( \sum_{k \neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T} |c_k|^2 \right).$$

Desde que,

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

ficamos com

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{T}{12} \sum_{k \neq 0} \frac{4\pi^2 k^2}{T} |c_k|^2 = \frac{T}{12} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt$$

e conseqüentemente

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq \left( \frac{T}{12} \right) \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.$$

■

**Corolário 2.2** *Seja  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função contínua  $l$  - lipschitziana. Se  $u$  é uma solução não - constante  $T$ -periódica de  $u' = f(u)$ , então*

$$T \geq \frac{2\pi}{l}.$$

**Demonstração:**

Sendo  $u$  solução não - constante  $T$ -periódica de  $u'(t) = f(u(t))$ , devemos ter  $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ . Desse modo  $u'(t)$  tem derivada *q.t.p* em  $\mathbb{R}$ . Por definição

$$\frac{\|u'(t+h) - u'(t)\|}{h} = \frac{\|f(u(t+h)) - f(u(t))\|}{h}$$

Usando o fato que a função  $f$  é  $l$ -lipschitziana tem-se

$$\frac{\|u'(t+h) - u'(t)\|}{h} \leq l \frac{\|u(t+h) - u(t)\|}{h}$$

passando ao limite quando  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$\|u''(t)\| \leq l \|u'(t)\| \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}.$$

Desde que,

$$\int_0^T \|u''(t)\|^2 dt \leq l^2 \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt < \infty$$

pela Proposição 2.1, temos

$$\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u''(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T l^2 \|u'(t)\|^2 dt$$

donde segue,

$$\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \leq \frac{T^2 l^2}{4\pi^2} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.$$

Por hipótese,  $u$  é não constante, logo

$$\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt < \infty$$

desse modo,

$$1 \leq \frac{T^2 l^2}{4\pi^2}$$

portanto,

$$T \geq \frac{2\pi}{l}.$$

■

**Proposição 2.3** *Seja  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função  $T$ -periódica absolutamente contínua tal que  $\int_0^T \|u'(t)\|^p dt < \infty$  com  $p > 1$ . Se  $\int_0^T u(t) dt = 0$ , então*

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|u'(t)\|^p dt.$$

**Demonstração:**

Considere

$$M = \left\{ u \in H_T^{1,p}([0, T]); \int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1 \text{ e } \int_0^T u(t) dt = 0 \right\}$$

onde

$$H_T^{1,p}([0, T]) = \{u \in W^{1,p}([0, T]); u(0) = u(T)\}$$

e  $S : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$S(u) = \int_0^T \|u'(t)\|^p dt.$$

Sendo  $S$  limitado inferiormente, denotamos por  $C \geq 0$  o ínfimo de  $S$ , isto é,

$$\inf_{u \in M} S(u) = C.$$

**Afirmção 1:** O ínfimo  $C$  é atingido.

De fato, seja  $\{u_n\} \subset M$  uma sequência tal que

$$\int_0^T \|u'_n(t)\|^p dt \rightarrow C, \quad \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1 \text{ e } \int_0^T u_n(t) dt = 0.$$

Usando o fato de que,

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1,$$

segue que  $\|u_n\|_{L^p([0, T])}$  é limitada, daí  $\{u_n\} \subset H_T^{1,p}([0, T])$  é limitada. Visto que  $H_T^{1,p}([0, T])$  é reflexivo, existe uma subsequência, que denotaremos por  $(u_n)$  e  $u \in H_T^{1,p}([0, T])$  tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_T^{1,p}([0, T]).$$

Por imersões de Sobolev,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^p([0, T])$$

assim,

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt = \lim \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt.$$

Sendo

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p dt = 1$$

e

$$\int_0^T \|u_n(t)\| dt = 0$$

pelas imersões compactas de Sobolev

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1$$

e

$$\int_0^T \|u(t)\| dt = 0$$

mostrando que  $u \in M$ .

Visto que  $u \in M$ , devemos ter

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \geq C.$$

Por outro lado, da convergência fraca

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq \liminf \int_0^T \|u'_n(t)\|^p dt.$$

daí,

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq C.$$

Donde segue,

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt = C$$

ou seja, o ínfimo  $C$  é atingido.

Portanto,

$$\min_{u \in M} S(u) = C$$

**Afirmção 2:**  $C > 0$ .

Com efeito, suponhamos, por contradição, que  $C = 0$ , então

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt = 0$$

o que implicaria

$$\|u'(t)\|^p = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}$$

ou ainda

$$u'(t) = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R},$$

implicando que  $u$  é constante.

Uma vez que  $u \in M$ , a condição  $\int_0^T u(t) dt = 0$  implica  $u = 0$  q.t.p em  $\mathbb{R}$ , enquanto a condição  $\int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1$  implica que  $u \neq 0$ , chegando a um absurdo, portanto  $C > 0$ .

Sendo,

$$\min_{u \in M} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt = C.$$

segue que,

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p dt \geq C, \quad \forall u \in M.$$

Agora, dado  $u \in H_T^{1,p}([0, T]) \setminus \{0\}$  com

$$\int_0^T \|u(t)\| dt = 0$$

definamos

$$w = \frac{u}{\|u\|_{L^p([0, T])}}.$$

Observe que  $w \in M$ , pois

$$\int_0^T \|w(t)\|^p dt = \frac{1}{\|u\|_{L^p([0, T])}^p} \int_0^T \|u(t)\|^p dt = 1.$$

Portanto,

$$\int_0^T \|w'(t)\|^p dt \geq C$$

o que implica,

$$\frac{\int_0^T \|u'(t)\|^p dt}{\int_0^T \|u(t)\|^p dt} \geq C$$

ou seja,

$$\int_0^T \|u(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|u'(t)\|^p dt.$$

■

## 2.2 Existência de Solução

Sejam  $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uma função  $2\pi$ -periódica e  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uma função  $T$ -periódica. Consideremos a existência de soluções  $T$ -periódicas da equação

$$u'' + G'(u) = f(t). \quad (2.2)$$

Se  $u$  é solução da equação (2.2), então para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $u + 2\pi k$  também é solução de (2.2).

Denotemos, no que segue,  $H$  como sendo o seguinte espaço vetorial

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é absolutamente contínua, } T\text{-periódica e } \int_0^T |u'(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

com o produto interno

$$(u, v) = \int_0^T (u'v' + uv) dt,$$

e o funcional energia

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt, \quad \forall u \in H$$

o qual está bem definido sendo de classe  $C^1(H, \mathbb{R})$  (Ver [Apêndice B]). Além disso, os pontos críticos de  $\phi$  são soluções fracas de (2.2), com

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \int_0^T [u'h' - G'(u)h + fh] dt, \quad \forall h \in H. \quad (2.3)$$

**Lema 2.1** *O espaço  $H$  é Hilbert com relação ao produto interno dado por*

$$(u, v) = \int_0^T (u'v' + uv) dt.$$

**Demonstração:**

Seja  $\{u_n\} \subset H$  uma sequência de Cauchy, assim dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que

$$\|u_n - u_m\|_H < \epsilon \text{ para } m, n \geq n_0.$$

Observe que

$$\|u_n\|_H^2 = \|\widehat{u}_n\|_{H_T^1([0, T])}^2$$

onde

$$\widehat{u}_n = u_n|_{[0, T]}$$

e

$$H_T^1([0, T]) = \{u \in W_T^{1,2}([0, T]); u(0) = u(T)\}.$$

Usando fato que  $H_T^1([0, T])$  é Hilbert, existe  $\widehat{u} \in H_T^1([0, T])$  tal que

$$\widehat{u}_n \rightarrow \widehat{u} \in H_T^1([0, T]).$$

Considere  $u(t) = \widehat{u}(t); t \in [0, T]$  e defina

$$u(t) = \widehat{u}(t - kT) \text{ se } t \in [kT, (k+1)T]; k \in \mathbb{Z}.$$



Das imersões contínuas de Sobolev,

$$H_T^1([0, T]) \hookrightarrow C([0, T])$$

assim,

$$u_n(0) = \widehat{u}_n(0) \rightarrow \widehat{u}(0)$$

e

$$u_n(T) = \widehat{u}_n(T) \rightarrow \widehat{u}(T).$$

Segue do fato que a sequência  $\{u_n\} \subset H$  é  $T$ -periódica e da unicidade do limite que

$$\widehat{u}(0) = \widehat{u}(T).$$

Portanto, para cada  $k \in \mathbb{Z}$  temos

$$u(t + T) = \widehat{u}(t + T - kT) = u(t)$$

ou seja,

$$u(t + T) = u(t).$$

mostrando que  $u$  é  $T$ -periódica.

**Afirmção 1:**  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é absolutamente contínua, isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda sequência finita de intervalos disjuntos  $(a_i, b_i)$  de  $[0, T]$  temos:

$$\sum_{j=1}^n |b_j - a_j| < \delta \implies \sum_{j=1}^n |u(b_j) - u(a_j)| < \epsilon.$$

Considere ,

$$B = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n) \text{ em } [0, T] \text{ tal que } |b_j - a_j| < \frac{\delta}{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Usando o fato que a união é disjunta, segue

$$\mu(B) = \mu((a_1, b_1)) + \mu((a_2, b_2)) + \dots + \mu((a_n, b_n)),$$

onde  $\mu(B) :=$  medida de Lebesgue. Portanto,

$$\mu(B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \dots + |b_n - a_n| = \sum_{j=1}^n |b_j - a_j| < \delta.$$

Segue de (C.9) (Ver [Apêndice C]) e (C.10) (Ver [Apêndice C])

$$\sum_{j=1}^n |u(b_j) - u(a_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{a_j}^{b_j} u'(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |u'(t)| dt$$

o que implica,

$$\sum_{j=1}^n |u(b_j) - u(a_j)| \leq \int_{\cup_{j=1}^n (a_j, b_j)} |u'(t)| dt = \int_B |u'(t)| dt < \epsilon.$$

Segue deste argumento acima e do fato que  $u$  é  $T$ -periódica que  $u$  é absolutamente contínua.

Sendo  $u(t) = \widehat{u}(t)$ ,  $t \in [0, T]$  uma função  $T$ -periódica e absolutamente contínua com  $u_n \rightarrow u$  em  $H^1([0, T])$ , então

$$\|u_n - u\|_H^2 = \int_0^T |\widehat{u}_n - \widehat{u}|^2 = \|\widehat{u}_n - \widehat{u}\|_{H_T^1([0, T])}^2 \rightarrow 0$$

isto é,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H.$$

■

**Lema 2.2** *O funcional  $\phi$  satisfaz a condição (WPS).*

**Demonstração:**

Seja  $J : H \rightarrow H^*$  tal que,

$$\langle J(u), h \rangle = \int_0^T u' h' dt + \int_0^T u h dt, \quad \forall u, h \in H$$

e considere  $N : H \rightarrow H^*$  tal que,

$$\langle N(u), h \rangle = \int_0^T u h dt + \int_0^T G'(u) h dt - \int_0^T f h dt, \quad \forall h \in H$$

portanto,

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \langle J(u), h \rangle - \langle N(u), h \rangle, \quad \forall h \in H$$

isto é,

$$\phi'(u) = J(u) - N(u), \quad \forall u \in H.$$

**Afirmção 1:** Se  $u_k \rightarrow u$  em  $H$ , então  $N(u_k) \rightarrow N(u)$  em  $H^*$ .

Com efeito, seja  $\{u_k\} \subset H$  uma sequência limitada tal que  $\phi(u_k)$  é limitada e  $\phi'(u_k) \rightarrow 0$ . Note que,

$$\langle N(u_k) - N(u), h \rangle = \int_0^T \left( [u_k h + G'(u_k) h - f h] - [u h + G'(u) h - f h] \right) dt$$

assim,

$$\langle N(u_k) - N(u), h \rangle = \int_0^T \left( (u_k - u)h + (G'(u_k) - G'(u))h \right) dt$$

donde segue,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h \rangle| \leq \int_0^T \left( \|u_k - u\| \|h\| + |G'(u_k) - G'(u)| \|h\| \right) dt.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|\langle N(u_k) - N(u), h \rangle| \leq \|u_k - u\|_{L^2([0,T])} \|h\|_{L^2([0,T])} + \|G'(u_k) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|h\|_{L^2([0,T])}. \quad (2.4)$$

e pelas imersões contínuas de Sobolev

$$|\langle N(u_k) - N(u), h \rangle| \leq C \|u_k - u\|_{L^2([0,T])} \|h\|_H + C \|G'(u_k) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|h\|_H. \quad (2.5)$$

Portanto, usando a norma em  $H^*$ ,

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H^*} = \sup_{\|h\| \leq 1} |\langle N(u_k) - N(u), h \rangle|$$

ficamos com

$$\|N(u_k) - N(u)\|_{H^*} \leq C \|u_k - u\|_{L^2([0,T])} + C \|G'(u_k) - G'(u)\|_{L^2([0,T])}.$$

Usando as hipóteses sobre a sequência  $(u_k)$ , existe uma subsequência  $(u_{k_j})$  tal que

$$u_{k_j} \rightarrow u \text{ em } L^2([0, T]) \quad (2.6)$$

e

$$u_{k_j} \rightarrow u \text{ q.t.p em } [0, T].$$

Por outro lado, sendo  $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , segue

$$G'(u_{k_j}) \rightarrow G'(u) \text{ q.t.p em } [0, T]$$

logo,

$$|G'(u_{k_j}) - G'(u)| \rightarrow 0 \text{ q.t.p em } [0, T],$$

portanto,

$$|G'(u_{k_j}) - G'(u)|^2 \rightarrow 0 \text{ q.t.p em } [0, T].$$

Desde que,

$$|G'(t)| \leq K, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

obtemos,

$$|G'(u_{k_j}) - G'(u)|^2 \leq 4K^2 \in L^1([0, T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [2]), segue

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T |G'(u_{k_j}) - G'(u)|^2 dt = \int_0^T \lim_{j \rightarrow \infty} |G'(u_{k_j}) - G'(u)|^2 dt = 0,$$

ou seja,

$$G'(u_{k_j}) \rightarrow G'(u) \text{ em } L^2([0, T]). \quad (2.7)$$

Usando (2.6) e (2.7),

$$\|N(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} \rightarrow 0$$

ou equivalentemente

$$N(u_{k_j}) \rightarrow N(u) \text{ em } H^*$$

mostrando a Afirmação.

Por outro lado,

$$\phi'(u_{k_j}) = J(u_{k_j}) - N(u_{k_j}),$$

e desde que,

$$\phi'(u_{k_j}) \rightarrow 0 \text{ e } N(u_{k_j}) \rightarrow N(u),$$

segue,

$$J(u_{k_j}) \rightarrow N(u) \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Por outro lado,

$$\langle J(u_{k_j}), h \rangle = \int_0^T u'_{k_j} h' dt + \int_0^T u_{k_j} h dt, \quad \forall u, h \in H,$$

ou seja,

$$\langle J(u_{k_j}), h \rangle_{H^*} = (u_{k_j}, h)_H.$$

Logo pelo Teorema de Riesz-Fréchet (Ver[3]),

$$\|J(u_{k_j})\|_{H^*} = \|u_{k_j}\|_H.$$

Segue da definição de  $N$  e do Teorema de Riesz-Fréchet (Ver[3]) que existe  $w \in H$  tal que

$$\langle N(u), h \rangle_{H^*} = (w, h)_H$$

e

$$\|N(u)\|_{H^*} = \|w\|_H.$$

Assim,

$$\langle J(u_{k_j}) - N(u), h \rangle_{H^*} = (u_{k_j} - w, h)_H$$

usando novamente o Teorema de Riesz-Fréchet,

$$\|J(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} = \|u_{k_j} - w\|_H.$$

Usando o fato que,

$$\|J(u_{k_j}) - N(u)\|_{H^*} \rightarrow 0$$

segue,

$$\|u_{k_j} - w\|_H \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$u_{k_j} \rightarrow w \text{ em } H,$$

mostrando desse modo, que  $\phi$  satisfaz a condição (WPS). ■

**Teorema 2.4** *Se  $\int_0^T f(t)dt = 0$ , a equação (2.2) tem duas soluções  $T$ -periódicas que não diferem por multiplicidade  $2\pi$ .*

**Demonstração:**

Para cada  $u \in H$ , sejam

$$v(t) = u(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt$$

e

$$w = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt$$

assim,

$$u(t) = v(t) + w \tag{2.8}$$

e

$$u'(t) = v'(t). \tag{2.9}$$

Desde que,

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt$$

obtemos, de (2.8) e (2.9)

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{v'^2}{2} - G(v+w) + f \cdot (v+w) \right] dt.$$

Sendo,

$$\int_0^T f(t) dt = 0$$

segue que,

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{v'^2}{2} - G(v+w) + fv \right] dt.$$

**Afirmação 1:**  $\phi$  é limitado inferiormente.

De fato, seja  $\alpha = \max_{u \in \mathbb{R}} G(u)$ , logo

$$G(u) \leq \alpha, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver[3])

$$\phi(u) \geq \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \alpha T - \left( \int_0^T f^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T v^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e pela Proposição 2.1,

$$\phi(u) \geq \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \alpha T - \frac{T}{2\pi} \left( \int_0^T f^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |v'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

logo,

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2} \|v'\|_{L^2([0,T])}^2 - k_1 \|v'\|_{L^2([0,T])} - k_2, \quad (2.10)$$

isto é,  $\phi$  é limitada inferiormente.

**Afirmação 2:**  $\phi$  é  $2\pi$ -periódica, isto é,  $\phi(u + 2\pi) = \phi(u)$ .

Com efeito, usando (2.1), (2.8) e (2.9)

$$\phi(u + 2\pi) = \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \int_0^T G(v+w+2\pi) dt + \int_0^T f(v+w+2\pi) dt$$

assim,

$$\phi(u + 2\pi) = \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \int_0^T G(v+w+2\pi) dt + \int_0^T fv dt.$$

Desde que,

$$G(v+w+2\pi) = G(v+w)$$

temos

$$\phi(u + 2\pi) = \int_0^T \frac{v'^2}{2} dt - \int_0^T G(v+w) dt + \int_0^T fv dt = \phi(u)$$

ou seja,

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u)$$

mostrando a Afirmação 2.

**Afirmção 3:**  $\phi$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

De fato, seja  $\{u_k\} \subset H$  uma sequência tal que

$$\phi(u_k) \rightarrow c \text{ e } \phi'(u_k) \rightarrow 0.$$

Por (2.10) tem-se

$$\phi(u_k) \geq \frac{1}{2} \|v'_k\|_{L^2([0,T])}^2 - k_1 \|v'_k\|_{L^2([0,T])} - k_2$$

Por outro lado, sendo  $\phi(u_k)$  convergente, segue que  $\phi(u_k)$  é limitada, assim existe  $k_3 > 0$  tal que  $\phi(u_k) \leq k_3$  o que implica

$$\frac{1}{2} \|v'_k\|_{L^2([0,T])}^2 - k_1 \|v'_k\|_{L^2([0,T])} \leq k_3 + k_2$$

ou seja,  $(v'_k)$  é limitada em  $L^2([0, T])$ .

Por outro lado, temos

$$\int_0^T |v_k|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |v'_k|^2 dt,$$

ou ainda,

$$\|v_k\|_{L^2([0,T])}^2 \leq k_4 \|v'_k\|_{L^2([0,T])}^2.$$

Portanto, sendo  $(v'_k)$  limitada em  $L^2([0, T])$ , segue que existe  $k_5 > 0$  verificando

$$\|v_k\|_{L^2([0,T])}^2 \leq k_5, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

isto é,  $(v_k)$  é limitada em  $L^2([0, T])$ .

Por (2.8),

$$u_k = v_k + w_k,$$

pela periodicidade de  $\phi$ , deve existir  $\widehat{w}_k \in [0, 2\pi]$  verificando

$$\phi(u_k) = \phi(v_k + \widehat{w}_k).$$

Fazendo  $\widehat{u}_k = v_k + \widehat{w}_k$ , segue

$$\phi(\widehat{u}_k) \rightarrow c \text{ e } \phi'(\widehat{u}_k) \rightarrow 0.$$

Visto que,  $\widehat{w}_k \in [0, 2\pi]$ , temos

$$\|\widehat{w}_k\|_{L^2([0,T])}^2 \leq 4\pi^2 T$$

mostrando que  $(\widehat{w}_k)$  é limitada em  $L^2([0, T])$ . Portanto sendo  $(v_k)$  e  $(\widehat{w}_k)$  limitadas, segue que  $(\widehat{u}_k)$  é limitada em  $H$ .

Pelo Lema 2.2, existe  $(\widehat{u}_{k_j})$  tal que

$$\widehat{u}_{k_j} \rightarrow u \text{ em } H.$$

Sendo  $\phi \in C^1$ , segue

$$\phi(\widehat{u}_{k_j}) \rightarrow \phi(u) \text{ e } \phi'(\widehat{u}_{k_j}) \rightarrow \phi'(u),$$

pela unicidade do limite,

$$\phi(u) = c \text{ e } \phi'(u) = 0.$$

Logo,  $c$  é um valor crítico de  $\phi$ . Portanto  $\phi$  satisfaz a condição  $(PS)_c$ . Mostrando, desta forma, a Afirmação 3.

Pelas Afirmações 1, 3 e pelo Teorema 1.4, segue que  $\phi$  tem mínimo em algum ponto  $u \in H$ , ou seja,

$$\phi(u) = \min_H \phi.$$

Da Afirmação 2,

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u) = \min_H \phi.$$

Considere,  $v = u + 2\pi$ , assim

$$\|u - v\|_{L^2([0,T])}^2 = \int_0^T |u - v|^2 dt = 4\pi^2 T$$

ou seja,

$$\|u - v\|_{L^2([0,T])} = 2\pi\sqrt{T}.$$

Considere,  $0 < r < R < 2\pi\sqrt{T} = \|u - v\|$  e  $w \in X$  tal que  $r \leq \|w - u\| \leq R$ . Sendo

$$\phi(v) = \phi(u) = \min_H \phi$$

segue que,

$$\phi(w) \geq a = \max\{\phi(u), \phi(v)\}$$



logo, pelo Teorema 1.6, segue que  $c \geq a$ , onde  $c$  é o nível Minimax dado no Teorema 1.6, é valor crítico de  $\phi$ . Observe que

(i) Se  $c > a$  e  $u_1$  um ponto crítico com  $\phi(u_1) = c$  e sendo  $\phi(u) = a$ , segue

$$\phi(u_1) > \phi(u)$$

logo,

$$u_1 \neq u + 2k\pi,$$

de fato, caso contrário, teríamos em vista da periodicidade de  $\phi$  que  $\phi(u_1) = \phi(u)$ , o que é absurdo.

(ii) Se  $c = a$ , pelo Teorema 1.6, existe um ponto crítico  $u_1$  tal que

$$\phi(u_1) = a \quad \text{com} \quad \|u_1 - u\| = \frac{R+r}{2}. \quad (2.11)$$

Considere  $u_1 = u + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Assim

$$\|u_1 - u\|^2 = \int_0^T |u_1' - u'|^2 dt + \int_0^T (2k\pi)^2 dt$$

e usando o fato de que  $u_1' = u'$ , segue

$$\|u_1 - u\|^2 = 4k^2\pi^2T$$

donde segue,

$$\|u_1 - u\| = 2|k|\pi\sqrt{T}.$$

Sendo,

$$0 < r < R < 2\pi\sqrt{T} \leq 2|k|\pi\sqrt{T}$$

segue,

$$\frac{R+r}{2} < 2|k|\pi\sqrt{T} = \|u_1 - u\|$$

o que é um absurdo, por (2.11). Logo,  $u_1 \neq u + 2k\pi$ , para todo  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , mostrando que a equação (2.2) possui duas soluções que não diferem por multiplicidade  $2\pi$ . ■

# Capítulo 3

## A Transformada de Legendre

Nosso objetivo neste capítulo é usar métodos variacionais para mostrar a existência de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u'(t) = J\nabla H(u(t)).$$

Para tanto, faremos um breve estudo sobre função de Legendre e transformada de Legendre, as quais serão muito utilizadas na procura de soluções periódicas para um sistema Hamiltoniano convexo.

### 3.1 Introdução

**Definição 3.1** *A transformada de Legendre  $F^*$  de uma função  $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  é dada pela fórmula implícita*

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u), \end{aligned}$$

*quando  $\nabla F$  é invertível.*

## 3.2 Funções Convexas

Uma função  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se convexa se, para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^N$  e  $\lambda \in (0, 1)$ , tem-se

$$F((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)F(u) + \lambda F(v).$$

No caso em que acima vale a desigualdade estrita sempre que  $u \neq v$ , a função diz-se estritamente convexa.

**Proposição 3.2** *Se  $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $F$  é convexa

(ii)  $F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u)$ ,  $\forall u, w \in \mathbb{R}^N$ .

**Demonstração:**

(i)  $\implies$  (ii)

Supondo  $F$  convexa, para  $u, w \in \mathbb{R}^N$  temos

$$F((1 - \lambda)u + \lambda w) \leq (1 - \lambda)F(u) + \lambda F(w)$$

assim,

$$F((1 - \lambda)u + \lambda w) - F(u) \leq -\lambda F(u) + \lambda F(w)$$

logo para  $\lambda > 0$ ,

$$\frac{F(u + \lambda(w - u)) - F(u)}{\lambda} \leq F(w) - F(u).$$

Passando ao limite quando  $\lambda \rightarrow 0^+$  na última desigualdade, obtemos

$$(\nabla F(u), w - u) \leq F(w) - F(u)$$

o que implica,

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u). \quad (3.1)$$

(ii)  $\implies$  (i)

Sendo (ii) válida para quaisquer  $u, w \in \mathbb{R}^N$ , podemos escrever

$$F(u) \geq F(w) + (\nabla F(w), u - w) \quad (3.2)$$

e

$$F(v) \geq F(w) + (\nabla F(w), v - w). \quad (3.3)$$

Considerando  $w = (1 - \lambda)u + \lambda v$ , segue de (3.2) e (3.3),

$$F(u) \geq F((1 - \lambda)u + \lambda v) + (\nabla F((1 - \lambda)u + \lambda v), \lambda(u - v))$$

e

$$F(v) \geq F((1 - \lambda)u + \lambda v) + (\nabla F((1 - \lambda)u + \lambda v), (1 - \lambda)(v - u))$$

consequentemente

$$F(u) \geq F((1 - \lambda)u + \lambda v) + \lambda(\nabla F((1 - \lambda)u + \lambda v), u - v) \quad (3.4)$$

e

$$F(v) \geq F((1 - \lambda)u + \lambda v) - (1 - \lambda)(\nabla F((1 - \lambda)u + \lambda v), u - v). \quad (3.5)$$

Multiplicando (3.4) por  $(1 - \lambda)$  e (3.5) por  $\lambda$  e adicionando membro a membro as duas desigualdades, ficamos com

$$F((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)F(u) + \lambda F(v).$$

■

**Lema 3.1** *A função  $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  é convexa se, e somente se, o gradiente de  $F$ ,  $\nabla F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma aplicação monotônica, isto é,*

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N. \quad (3.6)$$

**Demonstração:**

Segue da Proposição 3.2

$$(\nabla F(u), v - u) \leq F(v) - F(u). \quad (3.7)$$

Analogamente,

$$(\nabla F(v), u - v) \leq F(u) - F(v)$$

logo,

$$-(\nabla F(v), v - u) \leq F(u) - F(v). \quad (3.8)$$

Somando (3.7) e (3.8) membro a membro, segue

$$(\nabla F(u), v - u) - (\nabla F(v), v - u) \leq 0$$

e portanto,

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) \geq 0.$$

Reciprocamente, segue do Teorema do Valor Médio aplicado a função  $g(t) = F(u + t(w - u))$  que existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$F(u + (w - u)) = F(u) + (\nabla F(u + \theta(w - u)), w - u). \quad (3.9)$$

Por outro lado, usando (3.6), obtemos

$$(\nabla F(u + \theta(w - u)) - \nabla F(u), \theta(w - u)) \geq 0$$

assim,

$$\theta (\nabla F(u + \theta(w - u)) - \nabla F(u), (w - u)) \geq 0$$

sendo  $\theta > 0$ , temos

$$(\nabla F(u + \theta(w - u)), (w - u)) \geq (\nabla F(u), (w - u)). \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.9), encontramos

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u), \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto pela Proposição ??, segue que  $F$  é convexa. ■

**Observação 3.1** *Pelo estudo feito acima, observa-se que a função  $F$  é estritamente convexa se, e somente se, o gradiente de  $F$ ,  $\nabla F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma aplicação estritamente monotônica, isto é,*

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) > 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N; u \neq v.$$

### 3.3 Função de Legendre

**Definição 3.3** *Uma função  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Legendre, se  $F$  satisfaz às seguintes condições:*

- (i)  $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
- (ii)  $F$  é estritamente convexa
- (iii)  $\frac{F(u)}{\|u\|} \rightarrow \infty$  quando  $\|u\| \rightarrow \infty$ .

**Proposição 3.4** *Se  $F$  é uma função de Legendre, então  $\nabla F$  é um homeomorfismo do  $\mathbb{R}^N$ .*

**Demonstração:**

Iremos dividir a nossa demonstração em alguns passos.

**Passo 1:  $\nabla F$  é injetivo.**

De fato, por hipótese  $F$  é estritamente convexa, logo pela Observação 3.1

$$(\nabla F(u) - \nabla F(v), u - v) > 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N, u \neq v. \quad (3.11)$$

De (3.11), segue que

$$u \neq v \Rightarrow \nabla F(u) \neq \nabla F(v)$$

mostrando que  $\nabla F$  é injetivo.

**Passo 2:  $\nabla F$  é sobrejetivo.**

Com efeito, dado  $v \in \mathbb{R}^N$  e supondo  $u \neq 0$ , temos

$$F(u) - (v, u) \geq F(u) - \|v\|\|u\| = \|u\| \left( \frac{F(u)}{\|u\|} - \|v\| \right).$$

Usando (iii) da Definição 3.3, temos

$$F(u) - (v, u) \rightarrow \infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Definamos a função  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(u) = F(u) - (v, u).$$

Por (3.12), segue

$$g(u) \rightarrow \infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty$$

assim, para todo  $M_1 > 0$ , existe  $C > 0$  tal que

$$g(u) > M_1 \text{ quando } \|u\| > C$$

isto é, se  $\|u\| > C$  então  $g$  é limitada inferiormente por  $M_1$ .

Agora consideremos  $\|u\| \leq C$ . Sendo  $g$  contínua, segue que  $g$  atinge um mínimo  $M_2$  em  $B_C(0)$ , ou seja

$$M_2 = \min_{\|u\| \leq c} g(u).$$

Considere

$$K = \min\{M_1, M_2\} = M_2.$$

Desse modo,

$$g(u) \geq K, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N$$

mostrando que  $g$  é limitada inferiormente. Considere

$$g_0 = \inf_{u \in \mathbb{R}^N} g(u)$$

e  $\{u_n\} \subset \mathbb{R}^N$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = g_0 < \infty.$$

Note que a sequência  $(u_n)$  é limitada, portanto existe  $(u_{n_j})$  e  $u_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$u_{n_j} \rightarrow u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Sendo  $g$  contínua,

$$g(u_{n_j}) \rightarrow g(u_0),$$

logo pela unicidade do limite,

$$g(u_0) = g_0,$$

ou seja,  $g$  atinge seu mínimo no ponto  $u_0 \in \mathbb{R}^N$  e portanto  $\nabla g(u_0) = 0$

Por outro lado,

$$\nabla g(u_0) = \nabla F(u_0) - v$$

logo

$$\nabla F(u_0) = v$$

mostrando que  $\nabla F$  é sobrejetivo.

**Passo 3:  $(\nabla F)^{-1}$  é contínua.**

De fato, primeiramente note que  $\nabla F$  é coercivo, pois sendo  $F$  convexa,

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u), \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$F(0) \geq F(u) + (\nabla F(u), -u) = F(u) - (\nabla F(u), u)$$

o que implica,

$$(\nabla F(u), u) \geq F(u) - F(0).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|\nabla F(u)\| \geq \frac{F(u) - F(0)}{\|u\|}.$$

Sendo  $F$  uma função de Legendre, temos que o lado direito da última desigualdade tende a infinito quando  $\|u\| \rightarrow \infty$ , logo

$$\|\nabla F(u)\| \rightarrow \infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty,$$

ou seja,  $\nabla F$  é coercivo.

Para mostrar que  $(\nabla F)^{-1}$  é contínua, basta verificar que

$$x_n \rightarrow x \text{ quando } \nabla F(x_n) \rightarrow \nabla F(x).$$

Supondo  $\nabla F(x_n) \rightarrow \nabla F(x)$ , sendo  $\nabla F$  coercivo,  $(x_n)$  é uma sequência limitada. Seja  $(x_{n_j})$  uma subsequência qualquer de  $(x_n)$ , assim  $(x_{n_j})$  é uma sequência limitada. Logo existe  $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$  tal que

$$x_{n_{j_k}} \rightarrow x_1 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Usando a continuidade de  $\nabla F$ , segue

$$\nabla F(x_{n_{j_k}}) \rightarrow \nabla F(x_1).$$

Por outro lado,

$$\nabla F(x_{n_{j_k}}) \rightarrow \nabla F(x)$$

logo pela unicidade do limite,

$$\nabla F(x) = \nabla F(x_1).$$

Usando o Passo 1, concluímos que  $x = x_1$ .

Portanto, para toda  $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ , existe  $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$  tal que

$$x_{n_{j_k}} \rightarrow x \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Suponhamos que,

$$x_n \not\rightarrow x$$

assim existe  $\epsilon_0 > 0$  e  $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ , tal que

$$\|x_{n_j} - x\| \geq \epsilon_0 \quad \forall n_j \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$



Por outro lado, existe  $(x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j})$  tal que

$$x_{n_{j_k}} \rightarrow x. \quad (3.14)$$

Usando (3.13) e (3.14),

$$\|x_{n_{j_k}} - x\| \geq \epsilon_0 \quad e \quad \|x_{n_{j_k}} - x\| \rightarrow 0$$

o que é um absurdo. Logo,

$$x_n \rightarrow x \quad em \quad \mathbb{R}^N$$

portanto,  $(\nabla F)^{-1}$  é contínua, mostrando o Passo 3. ■

**Lema 3.2** *Se  $F_1$  e  $F_2$  são funções de Legendre tais que  $F_1 \leq F_2$ , então  $F_1^* \geq F_2^*$ .*

**Demonstração:**

Sendo

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u) \end{aligned}$$

pela Proposição ??, temos

$$F(w) \geq F(u) + (\nabla F(u), w - u), \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^N$$

assim,

$$F(w) \geq F(u) + (v, w) - (v, u) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^N$$

implicando que

$$F^*(v) \geq (v, w) - F(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^N.$$

Em particular,

$$F^*(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^N} ((v, w) - F(w)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, sendo  $F_1 \leq F_2$ , devemos ter

$$F_1(w) - (v, w) \leq F_2(w) - (v, w)$$

o que implica,

$$(v, w) - F_1(w) \geq (v, w) - F_2(w)$$

logo,

$$(v, w) - F_2(w) \leq \sup_{w \in \mathbb{R}^N} ((v, w) - F_1(w))$$

portanto,

$$F_2^* = \sup_{w \in \mathbb{R}^N} ((v, w) - F_2(w)) \leq \sup_{w \in \mathbb{R}^N} ((v, w) - F_1(w)) = F_1^*$$

ou seja,  $F_1^* \geq F_2^*$ . ■

No que segue vamos demonstrar o seguinte Lema que será importante no decorrer deste trabalho.

**Lema 3.3** *Se  $F$  é uma função de Legendre, então  $F^*$  é Fréchet diferenciável.*

**Demonstração:**

Sejam  $u = (\nabla F)^{-1}(v)$  e  $u_t = (\nabla F)^{-1}(v + th)$ . Sendo,

$$F^*(v) = (v, u) - F(u) \quad e \quad F^*(v + th) = (v + th, u_t) - F(u_t)$$

para todo  $t > 0$ , tem-se que

$$\frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} = \frac{(v + th, u_t) - F(u_t) - (v, u) + F(u)}{t}$$

donde segue,

$$\frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} = \frac{(v, u_t) + t(h, u_t) - F(u_t) - (v, u) + F(u)}{t}.$$

Assim,

$$\frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} = (h, u_t) + \frac{(v, u_t - u) - F(u_t) + F(u)}{t}$$

e desde que,

$$F(u_t) \geq F(u) + (\nabla F(u), u_t - u),$$

segue,

$$(v, u_t - u) - F(u_t) + F(u) \leq 0$$

e portanto

$$\frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} \leq (h, u_t). \tag{3.15}$$

Por outro lado, usando o Lema 3.2

$$F^*(v + th) \geq (v + th, u) - F(u)$$

consequentemente

$$\frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} \geq \frac{(v + th, u) - F(u) - (v, u) + F(u)}{t}$$

ou ainda

$$\frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} \geq (h, u). \quad (3.16)$$

Portanto por (3.15) e (3.16),

$$(h, u) \leq \frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} \leq (h, u_t).$$

Passando ao limite quando  $t \rightarrow 0^+$ , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F^*(v + th) - F^*(v)}{t} = (h, u).$$

Por outro lado, note que

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) \geq 0,$$

pois

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) = F^*(v + h) - [(v, u) - F(u)] - (h, u)$$

e assim,

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) = F^*(v + h) - [(v + h, u) - F(u)]$$

pela definição de  $F^*(v + h)$  tem-se

$$F^*(v + h) - [(v + h, u) - F(u)] \geq 0$$

logo,

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) \geq 0.$$

Além disso,

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) \leq (h, (u_h - u)).$$

Com efeito, temos

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) = (v + h, u_h) - F(u_h) - (h, u) - F^*(v)$$

o que implica,

$$F^*(v + h) - F^*(v) - (h, u) = [(v, u_h) - F(u_h)] - F^*(v) + (h, (u_h - u))$$

usando a definição de  $F^*(v)$ , obtemos

$$[(v, u_h) - F(u_h)] - F^*(v) \leq 0$$

portanto,

$$F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u) \leq (h, (u_h - u)).$$

Assim,

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)|}{\|h\|} = \frac{F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)}{\|h\|} \leq \frac{(h, (u_h - u))}{\|h\|}$$

usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)|}{\|h\|} \leq \|u_h - u\|.$$

Por outro lado,

$$u_h = (\nabla F)^{-1}(v + th) \rightarrow (\nabla F)^{-1}(v) = u \text{ quando } h \rightarrow 0$$

isto é,

$$\|u_h - u\| \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0$$

e conseqüentemente

$$\frac{|F^*(v+h) - F^*(v) - (h, u)|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0$$

Mostrando que  $F^*$  é Fréchet diferenciável. ■

**Proposição 3.5** *Se  $F$  é uma função de Legendre, então*

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \rightarrow \infty \text{ quando } \|v\| \rightarrow \infty.$$

**Demonstração:**

Devemos mostrar que dado  $C > 0$  existe  $A > 0$  tal que

$$\|v\| > A \implies \frac{F^*(v)}{\|v\|} > C$$

ou equivalentemente,

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C \implies \|v\| \leq A.$$

Para cada  $C > 0$ , considere  $v \in \mathbb{R}^N$  satisfazendo

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C,$$

ou

$$F^*(v) \leq C\|v\|.$$

Definindo

$$M = \max_{\|w\|=2C} F(w)$$

desde que pelo Lema 3.2,

$$F^*(v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^N} ((v, w) - F(w))$$

fazendo  $w = \frac{2C}{\|v\|}v$ , obtemos

$$2C\|v\| = \left( v, \frac{2C}{\|v\|}v \right) \leq F^*(v) + F\left(\frac{2C}{\|v\|}v\right) \leq M + C\|v\|$$

logo,

$$C\|v\| \leq M$$

portanto,

$$\|v\| \leq \frac{M}{C}.$$

Assim, dado  $C > 0$ , considere  $A = \frac{m}{C}$  que teremos

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \leq C \implies \|v\| \leq A.$$

Portanto,

$$\frac{F^*(v)}{\|v\|} \rightarrow \infty \text{ quando } \|v\| \rightarrow \infty.$$

■

**Teorema 3.6** *Se  $F$  é uma função de Legendre, temos*

- (i)  $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$
- (ii)  $F^* \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ .

**Demonstração:**

Pelo Lema 3.3,  $F^*$  é Fréchet diferenciável e

$$(\nabla F^*(v), h) = (h, u).$$

Assim,

$$(\nabla F^*(v) - u, h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$$

o que implica,

$$\nabla F^*(v) = u.$$

Desde que pelo Lema 3.3,  $u = (\nabla F)^{-1}(v)$ , segue

$$\nabla F^*(v) = (\nabla F)^{-1}(v)$$

o que mostra (i).

Desde que  $(\nabla F)^{-1}$  é contínua e  $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$ , temos  $F^* \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ , mostrando (ii). ■

**Corolário 3.7** *Se  $F$  é uma função de Legendre, a função  $F^*$  é estritamente convexa.*

**Demonstração:**

Sendo  $F$  uma função de Legendre, por definição  $F$  é estritamente convexa e usando a Observação 3.1 podemos concluir que  $(\nabla F)^{-1}$  é estritamente monótono. Pelo Teorema 3.6,

$$\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$$

sendo  $(\nabla F)^{-1}$  estritamente monótono, segue que  $\nabla F^*$  é estritamente monótono, novamente usando a Observação 3.1, segue que  $F^*$  é estritamente convexa. ■

**Observação 3.2** *Se  $F$  é uma função de Legendre, segue dos resultados demonstrados que  $F^*$  é uma função de Legendre. Além disso,*

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u), \quad u = \nabla F^*(v) \end{aligned}$$

e

$$(F^*)^* = F.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} (F^*)^*(w) &= (w, v) - F^*(v) \\ w &= \nabla F^*(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F^*(v) &= (v, u) - F(u) \\ v &= \nabla F(u). \end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.4 temos  $u = (\nabla F)^{-1}(v)$  e pelo Teorema 3.6 podemos concluir que  $u = w$ . Logo,

$$(F^*)^*(u) = (u, v) - F^*(v) = (u, v) - (v, u) + F(u)$$

ou seja,

$$(F^*)^* = F.$$

### 3.4 Inequações

Nesta subseção, demonstraremos algumas desigualdades que são fundamentais no estudo de sistemas Hamiltonianos convexos.

**Lema 3.4** *Sejam  $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(u) = \gamma\|u\|^q + \alpha$ , com  $\gamma > 0$ ,  $q > 1$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3.17}$$

*temos que*

$$G^*(v) = \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha. \tag{3.18}$$

**Demonstração:**

Sendo  $G(u) = \gamma\|u\|^q + \alpha$ , é fácil verificar que  $G$  é uma função de Legendre. Além disso,

$$\nabla G(u) = \gamma q \|u\|^{q-2} u \quad e \quad \nabla G(0) = 0. \tag{3.19}$$

Considerando  $v = \nabla G(u)$ , segue do Teorema 3.6 que  $(\nabla G)^{-1}(v) = u$ . Observe que

$$\|v\| = \gamma q \|u\|^{q-1}$$

o que implica,

$$\|u\| = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

e por (3.17)

$$\|u\| = \left(\frac{\|v\|}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Desse modo,

$$(\nabla G)^{-1}(v) = \left( \frac{\|v\|}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{v}{\|v\|}$$

ou

$$(\nabla G)^{-1}(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p-1}{q}}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v.$$

Logo, por definição

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p-1}{q}}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} \|v\|^2 - G \left( \frac{\|v\|^{\frac{p-1}{q}}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v \right)$$

donde segue,

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^{\frac{p-1}{q}}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} \|v\|^2 - \gamma \left\| \frac{\|v\|^{\frac{p-1}{q}}}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} v \right\|^q - \alpha.$$

Usando (3.17),

$$G^*(v) = \frac{\|v\|^p}{(\gamma q)^{\frac{p}{q}}} - \gamma \left( \frac{\|v\|^p}{(\gamma q)^p} \right) - \alpha$$

mostrando que

$$G^*(v) = \left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \|v\|^p \left( 1 - \gamma \frac{1}{\gamma q} \right) - \alpha$$

ou seja,

$$G^*(v) = \left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \|v\|^p \left( 1 - \frac{1}{q} \right) - \alpha.$$

Usando novamente (3.17), temos

$$G^*(v) = \left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha.$$

■

**Proposição 3.8** *Seja  $F$  uma função de Legendre tal que*

$$n \leq F(u) \leq \gamma \|u\|^q + \alpha \tag{3.20}$$

*para algum  $\gamma > 0$ ,  $q > 1$ ,  $\alpha, n \in \mathbb{R}$ . Se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , tem-se*

$$\left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

**Demonstração:**

Fixando  $v = \nabla F(u)$ , segue do Lema 3.4 e de (3.20) que

$$F^*(v) \geq \left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha$$



ou equivalentemente

$$F^*(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} - \alpha. \quad (3.21)$$

Desde que

$$F^*(v) = (v, u) - F(u) \quad (3.22)$$

por (3.21) e (3.22),

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} - \alpha \leq (\nabla F(u), u) - F(u) \leq (\nabla F(u), u) - n$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

■

**Lema 3.5** *Supondo as hipóteses da Proposição 3.8, existem constantes  $C_2, C_3 > 0$  tais que*

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{q-1} + C_3.$$

**Demonstração:**

Com efeito, pela Proposição 3.8, temos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq (\nabla F(u), u) + \alpha - n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq \|\nabla F(u)\| \|u\| + \alpha - n. \quad (3.23)$$

Pela desigualdade de Young, existem  $\epsilon > 0$  e  $C_\epsilon > 0$  tais que

$$\|\nabla F(u)\| \|u\| \leq \epsilon \|\nabla F(u)\|^p + C_\epsilon \|u\|^q. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.23), obtemos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla F(u)\|^p}{p} \leq \epsilon \|\nabla F(u)\|^p + C_\epsilon \|u\|^q + \alpha - n.$$

Fixando  $0 < \epsilon < \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}}$  e  $C = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} - \epsilon > 0$ , ficamos com

$$C \|\nabla F(u)\|^p \leq C_\epsilon \|u\|^q + C_1, \quad \text{onde } C_1 = \alpha - n.$$

Assim,

$$\|\nabla F(u)\| \leq \left( \frac{C_\epsilon}{C} \|u\|^q + \frac{C_1}{C} \right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{\frac{q}{p}} + C_3$$

onde  $C_2 = \left( \frac{C_\epsilon}{C} \right)^{\frac{1}{p}}$  e  $C_3 = \left( \frac{C_1}{C} \right)^{\frac{1}{p}}$ . Usando (3.17), ficamos com

$$\|\nabla F(u)\| \leq C_2 \|u\|^{q-1} + C_3.$$

O Lema anterior nos diz que  $\nabla F$  pode crescer no máximo até a potência  $q - 1$ .

■

No que segue, vamos definir e verificar algumas propriedades de um funcional que será de grande importância na procura de soluções periódicas para um sistema Hamiltoniano convexo.

**Lema 3.6** *Considere a função  $J : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , dada por  $J(x, y) = (-y, x)$ .*

*Então para  $u, v \in \mathbb{R}^{2N}$  temos:*

(i)  $(Ju, u) = 0$

(ii)  $(u, Jv) = -(Ju, v)$

(iii)  $J^2u = -u$

(iv)  $\|Ju\| = \|u\|$

**Demonstração:**

Sejam  $u = (x, y)$ ,  $v = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^{2N}$ . Por definição

$$(J(x, y), (x, y)) = ((-y, x), (x, y)) = -(y, x) + (x, y) = 0$$

o que mostra (i).

Com relação a (ii), considere  $u = (x, y)$  e  $v = (x_1, y_1)$ . Então,

$$((x, y), J(x_1, y_1)) = ((x, y), (-y_1, x_1)) = -(x, y_1) + (y, x_1) = -[(x, y_1) - (y, x_1)]$$

portanto,

$$(u, J(v)) = -[(-y, x), (x_1, y_1)] = -(J(u), v),$$

mostrando (ii).

Note que

$$J(x, y) = (-y, x) \Rightarrow J^2(x, y) = J(-y, x)$$

o que implica,

$$J^2(x, y) = (-x, -y) = -(x, y)$$

mostrando a igualdade

$$J^2(u) = -u$$

mostrando (iii).

Finalmente,

$$\|J(u)\|^2 = (J(u), J(u)) = (-J^2(u), u) = (u, u) = \|u\|^2$$

logo,

$$\|J(u)\| = \|u\|$$

mostrando o item (iv). ■

**Proposição 3.9** *Sejam  $q > 1$  e*

$$X = \left\{ u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2N}; u \text{ é absolutamente contínua, } \int_0^T \|u'(t)\|^q dt < \infty \text{ e } u(0) = u(T) \right\}$$

com norma

$$\|u\|_X = \|u\|_{L^q([0, T])} + \|u'\|_{L^q([0, T])}.$$

Então

$$\min_{u \in X} \left\{ \int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt ; \int_0^T \|u'(t)\|^q dt = T \right\} = -\frac{T^2}{2\pi}.$$

**Demonstração:**

Primeiramente, consideremos os seguintes conjuntos

$$M = \left\{ u \in X; \int_0^T \|u'(t)\|^q dt = T \right\}$$

e

$$N = \left\{ u \in X; \int_0^T (u'(t), Ju(t)) dt = 1 \right\}.$$

Desse modo vamos dividir nossa demonstração em algumas etapas:

**Etapa 1:** O funcional  $u \mapsto \int_0^T (u'(t), Ju(t)) dt$  é limitado superiormente no conjunto  $M$ .

De fato, note que

$$\int_0^T (u'(t), Ju(t)) dt = - \int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt.$$

Para todo  $u \in X$ , considere

$$\widehat{u} = u - \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt.$$

**Afirmação:**  $\int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt = \int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt.$

De fato, para fixar as idéias, considere  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ . Por definição

$$\int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt = \int_0^T \left( (-u_2'(t), u_1'(t)), \left( u_1 - \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t) dt, u_2 - \frac{1}{T} \int_0^T u_2(t) dt \right) \right) dt$$

o que implica,

$$\begin{aligned} \int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt &= - \int_0^T u_2'(t) u_1(t) dt - \frac{1}{T} \left( \int_0^T u_1'(t) dt \right) \left( \int_0^T u_2(t) dt \right) + \int_0^T u_1'(t) u_2(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{T} \left( \int_0^T u_2'(t) dt \right) \left( \int_0^T u_1(t) dt \right). \end{aligned}$$

Sendo  $u_1(0) = u_1(T)$  e  $u_2(0) = u_2(T)$ , tem-se

$$\int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt = - \int_0^T u_2'(t) u_1(t) dt + \int_0^T u_1'(t) u_2(t) dt$$

ou seja,

$$\int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt = \int_0^T (u_1'(t) u_2(t) - u_2'(t) u_1(t)) dt$$

logo,

$$\int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt = \int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt \quad (3.25)$$

mostrando a Afirmação.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt = \int_0^T (Ju'(t), \widehat{u}(t)) dt \geq - \left( \int_0^T \|Ju'(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \|\widehat{u}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade de Wirtinger a  $\widehat{u}$ , obtemos

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt \geq - \left( \int_0^T \|Ju'(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \frac{T^2}{4\pi^2} \|\widehat{u}'(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja,

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt \geq - \frac{T}{2\pi} \left( \int_0^T \|Ju'(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \|\widehat{u}'(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando o item (iv) do Lema 3.6 e a definição de  $\widehat{u}$ , segue

$$\|Ju'(t)\|^2 = \|u'(t)\|^2 = \|\widehat{u}'(t)\|^2$$

assim,

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt \geq -\frac{T}{2\pi} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt, \quad \forall u \in M$$

logo,

$$\int_0^T (u'(t), Ju(t)) dt \leq \frac{T}{2\pi} \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt = \frac{T^2}{2\pi}, \quad \forall u \in M$$

ou seja,

$$\int_0^T (u'(t), Ju(t)) dt,$$

é limitado superiormente em  $M$ .

Seja

$$\sup_{u \in M} \int_0^T (u'(t), Ju(t)) dt = A. \quad (3.26)$$

**Etapa 2:** O funcional  $u \mapsto \int_0^T \|u'(t)\|^q dt$  é limitado inferiormente sobre  $N$ .

Com efeito, sendo  $\|u'(t)\|^q \geq 0$ , temos

$$\int_0^T \|u'(t)\|^q dt \geq 0, \quad \forall u \in N$$

mostrando a Etapa 2.

Considere

$$\inf_{u \in N} \int_0^T \|u'(t)\|^q dt = B.$$

**Etapa 3:**  $B$  é atingido e  $B > 0$ .

Com efeito, Seja  $\{u_n\} \subset N$  uma sequência tal que

$$\int_0^T \|u'_n(t)\|^q dt \rightarrow B. \quad (3.27)$$

Considerando

$$w_n(t) = u_n(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt$$

tem-se

$$w'_n(t) = u'_n(t) \quad e \quad \int_0^T \|w'_n(t)\|^q dt \rightarrow B.$$

Além disso, por (3.25) temos

$$\int_0^T (u'_n(t), Ju_n(t)) dt = \int_0^T (w'_n(t), Jw_n(t)) dt$$

logo,

$$\int_0^T (w'_n(t), Jw_n(t)) dt = 1.$$

Por (3.27),  $\|w'_n\|_{L^q}$  é limitada e pela desigualdade de Wirtinger segue que  $\|w_n\|_{L^q}$  é limitada, o que implica que  $(w_n)$  é limitada em  $X$ . Logo, existe uma subsequência, que denotaremos por  $(w_n)$ , tal que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } X.$$

Pelas imersões de Sobolev, temos

$$w_n \rightarrow w \text{ em } L^q([0, T])$$

logo,

$$\int_0^T (w'_n(t), Jw_n(t)) dt \rightarrow \int_0^T (w'(t), Jw(t)) dt$$

mostrando que

$$\int_0^T (w'(t), Jw(t)) dt = 1.$$

Usando o fato que  $\int_0^T \|w'_n(t)\|^q dt$  é convexa, temos

$$\underline{\lim} \int_0^T \|w'_n(t)\|^q dt \geq \int_0^T \|w'(t)\|^q dt$$

ou seja,

$$B \geq \int_0^T \|w'(t)\|^q dt. \quad (3.28)$$

Por outro lado, sendo

$$B = \inf_{u \in N} \int_0^T \|u'(t)\|^q dt$$

devemos ter

$$B \leq \int_0^T \|w'(t)\|^q dt. \quad (3.29)$$

Por (3.28) e (3.29)

$$B = \int_0^T \|w'(t)\|^q dt$$

mostrando a Etapa 3.

**Etapa 4:**  $B = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}$

Sendo

$$\inf_{u \in N} \int_0^T \|u'(t)\|^q dt = B$$

existem  $v_n \in N$  e  $\epsilon_n \rightarrow 0$  tais que

$$\int_0^T \|v'_n(t)\|^q dt = B + \epsilon_n.$$

Denotemos  $B_n = B + \epsilon_n$ , assim

$$\int_0^T \|v'_n(t)\|^q dt = B_n.$$

Note que,

$$\int_0^T \left\| \left( \frac{v_n}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right)' \right\|^q dt = 1$$

assim,

$$T \int_0^T \left\| \frac{v'_n}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right\|^q dt = T$$

logo,

$$\int_0^T \left\| \frac{T^{\frac{1}{q}} v'_n}{B_n^{\frac{1}{q}}} \right\|^q dt = T.$$

Considerando

$$\alpha_n = \left( \frac{B_n}{T} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.30}$$

temos

$$\int_0^T \left\| \left( \frac{v_n}{\alpha_n} \right)' \right\|^q dt = T$$

ou seja,  $g_n = \frac{v_n}{\alpha_n} \in M$ . Assim,

$$\int_0^T \left( \left( \frac{v_n}{\alpha_n} \right)', J \left( \frac{v_n}{\alpha_n} \right) \right) dt \leq A \implies \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^T \left( v'_n, Jv_n \right) dt \leq A$$

o que implica,

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \leq A.$$

Usando (3.30), temos

$$A^{\frac{q}{2}} \geq \frac{T}{B_n}.$$

Passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$B \geq \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}. \tag{3.31}$$

Por outro lado, por (3.26), existem  $w_n \in M$  e  $\epsilon_n \rightarrow 0$  tais que

$$\int_0^T \left( w'_n(t), Jw_n(t) \right) dt = A + \epsilon_n.$$

Fazendo  $A_n = A + \epsilon_n$ , temos

$$\int_0^T \left( w'_n(t), Jw_n(t) \right) dt = A_n. \tag{3.32}$$

Logo, por (3.32)

$$\int_0^T \left( \left( \frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \right)', J \left( \frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \right) \right) dt = 1$$

ou seja,

$$F_n = \frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \in N.$$

Assim,

$$\int_0^T \|F_n'(t)\|^q dt \geq B \implies \int_0^T \left\| \left( \frac{w_n}{A_n^{\frac{1}{2}}} \right)' \right\|^q \geq B$$

ou seja,

$$B \leq \frac{1}{A_n^{\frac{q}{2}}} \int_0^T \|w_n'(t)\|^q dt$$

portanto,

$$B \leq \frac{T}{A_n^{\frac{q}{2}}}$$

passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$B \leq \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}. \quad (3.33)$$

Portanto, por (3.31) e (3.33) temos

$$B = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}.$$

**Etapa 5:**  $A$  é atingido.

De fato, se  $B$  é atingido em  $w \in N$  temos

$$\int_0^T \|w'(t)\|^q dt = B$$

assim,

$$\int_0^T \|w'(t)\|^q dt = \frac{T}{A^{\frac{q}{2}}}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|A^{\frac{1}{2}}w'(t)\|^q dt = T.$$

Portanto,  $h(t) = A^{\frac{1}{2}}w(t) \in M$  e

$$\int_0^T \left( \left( A^{\frac{1}{2}}w(t) \right)', J \left( A^{\frac{1}{2}}w(t) \right) \right) dt = A \int_0^T (w'(t), Jw(t))$$

logo,

$$\int_0^T \left( \left( A^{\frac{1}{2}}w(t) \right)', J \left( A^{\frac{1}{2}}w(t) \right) \right) dt = A$$



mostrando a Etapa 5. Logo,

$$\max \int_0^T \left( u'(t), Ju(t) \right) dt = A, \quad \forall u \in M.$$

Desse modo concluímos que

$$\min \int_0^T \left( Ju'(t), u(t) \right) dt$$

é atingido em algum ponto  $u \in X$ , onde

$$\int_0^T \|u'(t)\|^q dt = T.$$

Para  $u \in X$ , considere

$$G(u') = \|u'\|^q, \quad F(u) = \int_0^T \left( Ju'(t), u(t) \right) dt \quad e \quad H(u) = \int_0^T \|u'(t)\|^q dt.$$

Por definição

$$\frac{F(u + sh) - F(u)}{s} = \frac{\int_0^T \left( J(u'(t) + sh'(t)), u(t) + sh(t) \right) dt - \int_0^T \left( Ju'(t), u(t) \right) dt}{s}.$$

Passando ao limite quando  $s \rightarrow 0$ , encontramos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(u + sh) - F(u)}{s} = \int_0^T \left( J(u'(t), h(t)) \right) dt + \int_0^T \left( Jh'(t), u(t) \right) dt. \quad (3.34)$$

Sendo,

$$\int_0^T \left( J(h'(t)), u(t) \right) dt = - \int_0^T \left( h'(t), Ju(t) \right) dt$$

por (3.34),

$$(\nabla F(u), h) = \int_0^T \left( Ju'(t), h(t) \right) dt - \int_0^T \left( h'(t), Ju(t) \right) dt. \quad (3.35)$$

Integrando  $\int_0^T \left( h'(t), Ju(t) \right) dt$  por partes e usando o fato de que  $u(0) = u(T)$ , encontramos

$$\int_0^T \left( h'(t), Ju(t) \right) dt = - \int_0^T \left( Ju'(t), h(t) \right) dt. \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) em (3.35), obtemos

$$(\nabla F(u), h) = 2 \int_0^T \left( Ju'(t), h(t) \right) dt. \quad (3.37)$$

Sendo

$$H(u) = \int_0^T \|u'(t)\|^q dt.$$

Por definição

$$\left| \frac{H(u + sh) - H(u)}{s} \right| = \left| \frac{\int_0^T (\|u'(t) + sh'(t)\|^q - \|u'(t)\|^q) dt}{s} \right|$$

e pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\left| \frac{\|u'(t) + sh'(t)\|^q - \|u'(t)\|^q}{s} \right| = \left| \frac{(\|u'(t) + \lambda sh'(t)\|^q)' \|sh'\|}{s} \right|$$

consequentemente

$$\left| \frac{\|u'(t) + sh'(t)\|^q - \|u'(t)\|^q}{s} \right| \leq q 2^{q-1} (\|u'(t)\|^{q-1} + \|h'(t)\|^{q-1}) \|h'(t)\|.$$

Observe que usando a desigualdade de Hölder e o fato que  $\int_0^T \|h'(t)\|^q dt < \infty$  tem-se

$$q(\|u'(t)\|^{q-1} + \|h'(t)\|^{q-1}) \|h'(t)\| \in L^1([0, T]).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver[2]), segue

$$(\nabla H(u), h) = \int_0^T \left( q \|u'(t)\|^{q-2} u'(t), h'(t) \right) dt.$$

Desde que

$$\nabla G(u'(t)) = q \|u'(t)\|^{q-2} u'(t)$$

ficamos com

$$(\nabla H(u), h) = \int_0^T \left( \nabla G(u'(t)), h'(t) \right) dt.$$

Integrando  $\int_0^T \left( \nabla G(u'(t)), h'(t) \right) dt$  por partes e usando o fato de que  $u(0) = u(T)$ , obtemos

$$\int_0^T \left( \nabla G(u'(t)), h'(t) \right) dt = - \int_0^T \left( \frac{d}{dt} \nabla G(u'(t)), h(t) \right) dt \quad (3.38)$$

e consequentemente

$$(\nabla H(u), h) = - \int_0^T \left( \frac{d}{dt} \nabla G(u'(t)), h(t) \right) dt.$$

Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange em espaços de Banach, existe  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  satisfazendo

$$(\nabla F(u), h) = \lambda_1 (\nabla H(u), h)$$

ou seja,

$$2 \int_0^T \left( Ju'(t), h(t) \right) dt = -\lambda_1 \int_0^T \left( \frac{d}{dt} \nabla G(u')(t), h(t) \right) dt, \quad \forall h \in X.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \nabla G(u') = -\lambda Ju'.$$

Considere  $G^*$  a transformada de Legendre da função  $G$ . Se  $v = \nabla G(u')$  temos  $u' = \nabla G^*(v)$ , e assim, obtemos o sistema Hamiltoniano

$$v' + \lambda J \nabla G^*(v) = 0. \quad (3.39)$$

Observe que,

$$\frac{d}{dt} G^*(v) = \left( \nabla G^*(v), v' \right) = \left( \nabla G^*(v), -\lambda J \nabla G^*(v) \right) = -\lambda \left( \nabla G^*(v), J \nabla G^*(v) \right)$$

logo, pelo item (i) do Lema 3.6

$$\frac{d}{dt} G^*(v) = 0$$

o que implica que  $G^*(v)$  é constante.

Pelo Lema 3.4, temos

$$G^*(v) = q \frac{\|v\|^p}{p}$$

sendo  $G^*(v)$  constante, segue que  $\|v\|$  é constante. Visto que,

$$v = \nabla G(u') = q \|u'\|^{q-2} u' \quad (3.40)$$

temos,

$$\|v\| = q \|u'\|^{q-1}$$

mostrando que  $\|u'\|$  é constante.

Por outro lado,

$$\int_0^T \|u'(t)\|^q dt = T$$

assim,  $\|u'\| = 1$ . Logo, por (3.40)

$$v = qu'$$

o que implica,

$$v' = qu'' . \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) em (3.39) segue

$$qu'' + \lambda Ju' = 0$$

ou seja,

$$u'' + \frac{\lambda}{q} Ju' = 0.$$

No que segue denotaremos  $\frac{\lambda}{q}$  por  $\lambda$ , assim

$$u'' + \lambda Ju' = 0. \quad (3.42)$$

No que segue vamos mostrar que  $\lambda = \frac{-2\pi}{T}$ .

De fato, para fixar as idéias, consideremos  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , assim

$$u'' + \lambda Ju' = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -u_2' \\ u_1' \end{pmatrix} = 0$$

o que implica,

$$\begin{cases} u_1'' - \lambda u_2' = 0 \\ u_2'' + \lambda u_1' = 0 \end{cases}$$

assim,

$$\begin{cases} u_1''' - \lambda u_2'' = 0 \\ u_2'' + \lambda u_1' = 0 \end{cases}$$

logo,

$$u_1''' + \lambda^2 u_1' = 0.$$

Fazendo,  $y = u_1'$ , obtemos

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0 \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$

que tem equação característica dada por

$$r^2 + \lambda^2 = 0 \quad (3.43)$$

com raízes complexas

$$r = \pm |\lambda| i$$

onde sem perda de generalidade podemos supor  $\lambda > 0$ . Portanto, a solução geral da equação (3.43) é dada por

$$y(t) = C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t).$$

Sendo  $y(0) = y(T)$ , segue

$$C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 \cos(\lambda T) + C_2 \sin(\lambda T)$$

obtendo,

$$\cos(\lambda T) = 1$$

e conseqüentemente,

$$\lambda = \frac{2k\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Além disso,

$$\int_0^T \|u'(t)\|^2 dt = \int_0^T - (u''(t), u(t)) dt$$

usando (3.42), obtemos

$$T = \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt = \int_0^T - (u''(t), u(t)) dt = \lambda \int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt$$

portanto,

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt = \frac{T}{\lambda}.$$

Observe que

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt = \frac{T^2}{2k\pi}, \quad \forall u \in M$$

atinge o menor valor quando  $k = -1$ . Portanto,

$$\int_0^T (Ju'(t), u(t)) dt = \frac{-T^2}{2\pi}, \quad \forall u \in M.$$

■

### 3.5 Dual Hamiltoniano

Nesta subseção vamos considerar de maneira informal que os funcionais que consideraremos são continuamente diferenciáveis em  $W_T^{1,p}([0, T])$ . Além disso, vamos mostrar qual deve ser o funcional adequado afim de que os pontos críticos desse funcional sejam soluções do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} q'(t) = D_z H(t, q, p) \\ p'(t) = -D_x H(t, q, p). \end{cases}$$

Seja  $L(t, x, y)$  uma função suave definida em  $[0, T] \times \mathbb{R}^{2N}$  tal que para qualquer  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$ ,  $L(t, x, \cdot)$  é uma função de Legendre. Considere  $H(t, x, \cdot)$  a transformada de Legendre de  $L(t, x, \cdot)$ . Assim,

$$\begin{cases} H(t, x, z) = (z, y) - L(t, x, y) \\ z = D_y L(t, x, y), \quad y = D_z H(t, x, z) \end{cases} \quad (3.44)$$

ou

$$H(t, x, z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} [(z, y) - L(t, x, y)], \quad \forall z \in \mathbb{R}^N. \quad (3.45)$$

Se  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$  é ponto crítico de

$$\phi(q) = \int_0^T L(t, q, q') dt \quad (3.46)$$

definida em um espaço de funções suaves  $T$ -periódicas, então

**Afirmção 1:**  $\frac{d}{dt} D_y L(t, q, q') = D_x L(t, q, q')$ .

De fato, sendo  $\phi$  continuamente diferenciável em  $W_T^{1,p}([0, T])$ , para cada  $v \in W_T^{1,p}([0, T])$ , considere

$$F(\lambda, t) = L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v')$$

e

$$\psi(\lambda) = \int_0^T F(\lambda, t) dt$$

assim,

$$\psi(\lambda) = \int_0^T F(\lambda, t) dt = \phi(q + \lambda v). \quad (3.47)$$

Por outro lado,

$$\psi'(\lambda) = \int_0^T D_\lambda F(\lambda, t) dt = \int_0^T D_\lambda L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v')$$

sendo,

$$D_\lambda L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v') = \left( D_x L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v \right) + \left( D_y L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v' \right)$$

temos,

$$\psi'(\lambda) = \int_0^T \left( D_x L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v \right) dt + \int_0^T \left( D_y L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v' \right) dt. \quad (3.48)$$

Integrando  $\int_0^T (D_y L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v') dt$  por partes e usando o fato das funções serem  $T$ -periódicas, obtemos

$$\int_0^T (D_y L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v') dt = - \int_0^T \left( \frac{d}{dt} D_y L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v \right) dt \quad (3.49)$$

logo, substituindo (3.49) em (3.48),

$$\psi'(\lambda) = \int_0^T \left( (D_x L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v) - \left( \frac{d}{dt} D_y L(t, q + \lambda v, q' + \lambda v'), v \right) \right) dt. \quad (3.50)$$

Por (3.47),

$$\psi'(\lambda) = \langle \phi'(q + \lambda v), v \rangle$$

o que implica,

$$\psi'(0) = \langle \phi'(q), v \rangle. \quad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.50), obtemos em  $\lambda = 0$

$$\langle \phi'(q), v \rangle = \int_0^T \left( (D_x L(t, q, q'), v) - \left( \frac{d}{dt} D_y L(t, q, q'), v \right) \right) dt, \quad \forall v \in W_T^{1,p}.$$

Sendo  $q$  um ponto crítico de  $\phi$ ,

$$\int_0^T \left( (D_x L(t, q, q'), v) - \left( \frac{d}{dt} D_y L(t, q, q'), v \right) \right) dt = 0, \quad \forall v \in W_T^{1,p}([0, T]).$$

Visto que

$$C_0^1([0, T]) \subset W_T^{1,p}([0, T])$$

tem-se

$$\int_0^T \left( (D_x L(t, q, q'), v) - \left( \frac{d}{dt} D_y L(t, q, q'), v \right) \right) dt = 0 \quad \forall v \in C_0^1([0, T]).$$

Pelo Teorema de Dubois-Raymond (Ver [Apêndice C]), temos

$$D_x L(t, q, q') - \frac{d}{dt} D_y L(t, q, q') = 0$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} D_y L(t, q, q') = D_x L(t, q, q')$$

mostrando a Afirmação.

Considerando

$$p(t) = D_y L(t, q, q') \quad (3.52)$$

temos,

$$p'(t) = D_x L(t, q, q'). \quad (3.53)$$

Analogamente a (3.44), segue de (3.52)

$$q'(t) = D_z H(t, q, p). \quad (3.54)$$

Por (3.44)

$$H(t, x, z) = (z, y) - L(t, x, y)$$

implicando que  $y = y(t, x, z)$ . De maneira informal, obtemos por (3.44)

$$D_{x_i} H = (D_{x_i} z, y) + (z, D_{x_i} y) - D_{x_i} L - (D_y L, D_{x_i} y),$$

sendo  $x$  e  $z$  independentes, segue

$$D_{x_i} H = (z, D_{x_i} y) - D_{x_i} L - (D_y L, D_{x_i} y),$$

usando (3.44),

$$D_{x_i} H = -D_{x_i} L$$

mostrando que  $D_x H = -D_x L$ . Assim, por (3.53) temos

$$p'(t) = -D_x H(t, q, p). \quad (3.55)$$

**Afirmção 2:** As soluções do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} q'(t) = D_z H(t, q, p) \\ p'(t) = -D_x H(t, q, p) \end{cases} \quad (3.56)$$

são os pontos críticos do funcional

$$\phi(p, q) = \int_0^T (p, q') dt - \int_0^T H(t, q, p) dt.$$

De fato, primeiramente considerando

$$I(p, q) = \int_0^T (p, q') dt$$

por definição

$$\frac{I(p + sv, q + sw) - I(p, q)}{s} = \frac{\int_0^T (p + sv, q' + sw') dt - \int_0^T (p, q') dt}{s}$$



logo,

$$\frac{I(p + sv, q + sw) - I(p, q)}{s} = \frac{s \int_0^T (p, w') dt + s \int_0^T (v, q') dt + s^2 \int_0^T (v, w') dt}{s}.$$

Passando ao limite quando  $s \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{I(p + sv, q + sw) - I(p, q)}{s} = \int_0^T (p, w') dt + \int_0^T (v, q') dt$$

ou seja,

$$I'(p, q).(v, w) = \int_0^T [(p, w') + (v, q')] dt. \quad (3.57)$$

Integrando  $\int_0^T (p, w') dt$  por partes e usando o fato das funções serem  $T$ -periódicas, obtemos

$$\int_0^T (p, w') dt = - \int_0^T (p', w) dt, \quad (3.58)$$

substituindo (3.58) em (3.57), encontramos

$$I'(p, q).(v, w) = \int_0^T [(v, q')] - (p', w) dt.$$

Por outro lado, se

$$K(p, q) = \int_0^T H(t, q, p) dt$$

seguindo o mesmo raciocínio da Afirmação 1,

$$K'(p, q).(v, w) = \int_0^T [(D_x H(t, q, p), w) + (D_z H(t, q, p), v)] dt.$$

Logo,

$$\phi'(p, q).(v, w) = I'(p, q).(v, w) - K'(p, q).(v, w)$$

ou seja,

$$\phi'(p, q).(v, w) = \int_0^T (v, q') - \int_0^T (p', w) dt - \int_0^T (D_x H(t, q, p), w) dt - \int_0^T (D_z H(t, q, p), v) dt. \quad (3.59)$$

Agora vamos mostrar que os pontos críticos de  $\phi$  são soluções de (3.56).

Analisemos os seguintes casos:

(i) Se  $(v, w) = (0, w)$ , segue

$$- \int_0^T (p', w) dt - \int_0^T (D_x H(t, q, p), w) dt = 0, \quad \forall w \in W_T^{1,p}([0, T])$$

o que implica,

$$\int_0^T \left( (-p' - D_x H(t, q, p)), w \right) dt = 0, \quad \forall w \in C_0^1([0, T])$$

portanto,

$$p' = -D_x H(t, q, p).$$

(ii) Se  $(v, w) = (v, 0)$ , obtemos

$$\int_0^T (q', v) dt - \int_0^T (D_z H(t, q, p), v) dt = 0, \quad \forall v \in W_T^{1,p}([0, T])$$

e consequentemente,

$$\int_0^T \left( (q' - D_z H(t, q, p)), v \right) dt = 0, \quad \forall v \in C_0^1([0, T])$$

portanto,

$$q' = D_z H(t, q, p).$$

Por (i) e (ii) segue a Afirmação 2.

### 3.6 Soluções Periódicas para o Sistema Hamiltoniano Convexo

Nesta seção trataremos da existência de soluções periódicas para o sistema Hamiltoniano forçado

$$u' = J\nabla H(t, u)$$

e para o sistema Hamiltoniano livre

$$u' = J\nabla H(u),$$

onde  $J$  é definido como no Lema 3.6 e  $\nabla$  denota o gradiente com respeito a  $u$ .

No caso forçado assumiremos que  $H$  é  $T$ -periódica com respeito a  $t$  com o objetivo de encontrar soluções  $T$ -periódicas ou  $kT$ -periódicas para algum  $k \geq 2$ .

No caso livre, a energia é constante, pois

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = \left( \nabla H(u(t)), u'(t) \right) = \left( \nabla H(u(t)), J\nabla H(u(t)) \right)$$

e pelo item i) do Lema 3.6

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = 0$$

mostrando que  $H(u(t))$  é constante.

No que segue, assumimos as seguintes hipóteses sobre o Hamiltoniano  $H(t, u)$ :

(**H<sub>1</sub>**)  $H$  é contínua em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$ , diferenciável com respeito a  $u$  e  $\nabla H(t, u)$  é contínua em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$ .

(**H<sub>2</sub>**)  $H$  é estritamente convexa com respeito a  $u$ .

(**H<sub>3</sub>**) Existem  $q \in (1, 2)$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\beta, \gamma > 0$  tais que

$$\beta\|u\|^q - \alpha \leq H(t, u) \leq \gamma\|u\|^q + \alpha.$$

(**H<sub>4</sub>**)  $H$  é  $T$ -periódica com respeito a  $t$ .

**Observação 3.3** *Assumindo a hipótese ( $H_3$ ), existem  $q \in (1, 2)$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\beta, \gamma > 0$  tais que*

$$\beta\|u\|^{q-1} - \frac{\alpha}{\|u\|} \leq \frac{H(t, u)}{\|u\|} \leq \gamma\|u\|^{q-1} + \frac{\alpha}{\|u\|} \quad \text{com } \|u\| \neq 0.$$

*Passando ao limite quando  $\|u\| \rightarrow \infty$ , encontramos*

$$\frac{H(t, u)}{\|u\|} \rightarrow \infty$$

*de onde concluímos que  $H$  é uma função de Legendre.*

Denotaremos por  $G(t, \cdot)$  a transformada de Legendre de  $H(t, \cdot)$ , isto é,

$$\begin{cases} G(t, v) = (v, u) - H(t, u) \\ v = \nabla H(t, u), \quad u = \nabla G(t, v) \end{cases}$$

ou

$$G(t, v) = \sup_{w \in \mathbb{R}^{2N}} [(v, w) - H(t, w)].$$

Se  $p > 2$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , segue da Afirmação ( $H_3$ ) e do Lema 3.4 que

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha \leq G(t, v) \leq \left(\frac{1}{\beta q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} + \alpha. \quad (3.60)$$

Denotaremos por  $X$  o seguinte espaço vetorial

$$X = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \text{ absolutamente contínua, } T\text{-periódica,} \\ \int_0^T v(t) dt = 0 \text{ e } \int_0^T \|v'(t)\|^p dt < \infty \end{array} \right\}$$

com norma (Ver [Apêndice C])

$$\|v\|_X = \left( \frac{1}{T} \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.61)$$

e por  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  o seguinte funcional

$$\phi(v) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (Jv', v) + G(t, v') \right] dt.$$

Se  $v \in W^{1,p}([0, T])$  e  $\int_0^T v(t) dt = 0$ , pela Proposição 2.3 existe  $C > 0$  tal que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p dt \leq C \int_0^T \|v'(t)\|^p dt$$

o que implica,

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq \left( \int_0^T \|v'(t)\|^p dt + C \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq (C + 1)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

mostrando que

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq T^{\frac{1}{p}} (C + 1)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fixando  $C_1 = T^{\frac{1}{p}} (C + 1)^{\frac{1}{p}}$ , da última desigualdade

$$\|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \leq C_1 \|v\|_X. \quad (3.62)$$

Por outro lado,

$$\|v\|_X = \left( \frac{1}{T} \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{T^{\frac{1}{p}}} \left( \int_0^T \|v'(t)\|^p dt + \int_0^T \|v(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fixando  $C_2 = T^{\frac{1}{p}}$  ficamos com

$$C_2 \|v\|_X \leq \|v\|_{W^{1,p}([0,T])}. \quad (3.63)$$

Por (3.62) e (3.63), temos

$$C_1 \|v\|_X \geq \|v\|_{W^{1,p}([0,T])} \geq C_2 \|v\|_X,$$

de onde concluímos que  $\|\cdot\|_{W^{1,p}([0,T])}$  e  $\|\cdot\|_X$  são equivalentes em  $X$ .

Sendo  $W^{1,p}([0, T])$  um espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|_{W^{1,p}([0,T])}$  para  $1 \leq p \leq \infty$ , concluímos que  $X$  é um espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|_X$ .

O funcional  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\phi(v) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (Jv', v) + G(t, v') \right] dt$$

está bem definido, pois usando (3.60) e o Lema 3.5,  $\nabla G$  cresce no máximo até a potência  $p - 1$ ,  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  (Ver [Apêndice B]) e

**Afirmção 1:**  $\langle \phi'(v), h \rangle = \int_0^T (\nabla G(t, v') - Jv, h') dt$ .

De fato, considerando  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I(v) = \int_0^T (Jv', v) dt,$$

é simples verificar que  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  e

$$\langle I'(v), h \rangle = -2 \int_0^T (Jv, h') dt.$$

Por outro lado, definindo

$$K(v) = \int_0^T G(t, v') dt,$$

tem-se (Ver [Apêndice B]),

$$\langle K'(v), h \rangle = \int_0^T (\nabla G(t, v'), h') dt.$$

Sendo,

$$\langle \phi'(v), h \rangle = \frac{1}{2} \langle I'(v), h \rangle + \langle K'(v), h \rangle$$

temos,

$$\langle \phi'(v), h \rangle = - \int_0^T (Jv, h') dt + \int_0^T (\nabla G(t, v'), h') dt$$

ou

$$\langle \phi'(v), h \rangle = \int_0^T (\nabla G(t, v') - Jv, h') dt \quad (3.64)$$

mostrando a Afirmção 1.

**Lema 3.7** *Se  $v$  é um ponto crítico de  $\phi$ , existe uma solução  $T$ -periódica  $u$  para*

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

*tal que*

$$v(t) = -J \left( u(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \right).$$

**Demonstração:**

Por (3.64),

$$\langle \phi'(v), h \rangle = \int_0^T (\nabla G(t, v') - Jv, h') dt.$$

Sendo  $v$  um ponto crítico de  $\phi$ ,

$$\int_0^T (\nabla G(t, v') - Jv, h') dt = 0, \quad \forall h \in X.$$

Dado  $\varphi \in C_0^\infty([0, T])$ , considerando

$$h_\varphi(t) = \varphi(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(s) ds$$

tem-se,  $h'_\varphi = \varphi'$  e

$$\int_0^T h_\varphi(t) dt = \int_0^T \varphi(t) dt - \int_0^T \frac{1}{T} \left( \int_0^T \varphi(s) ds \right) dt$$

ou seja,

$$\int_0^T h_\varphi(t) dt = 0.$$

Mostrando que  $h_\varphi \in X$ .

Logo,

$$0 = \int_0^T (\nabla G(t, v') - Jv, h'_\varphi) dt = \int_0^T (\nabla G(t, v') - Jv, \varphi') dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0, T])$$

o que implica,

$$D' (\nabla G(t, v') - Jv) = 0$$

onde  $D'$  denota a derivada no sentido das distribuições.

Consequentemente

$$(D' \nabla G(t, v'), \varphi) = \int_0^T Jv' \varphi$$

ou seja,

$$D' \nabla G(t, v') = Jv'$$

portanto,

$$\frac{d}{dt} \nabla G(t, v') = Jv'.$$

Considerando

$$u = \nabla G(t, v')$$

temos

$$v' = \nabla H(t, u)$$

assim,

$$u' = \frac{d}{dt} \nabla G(t, v') = Jv' \quad (3.65)$$

o que implica,

$$u' = J\nabla H(t, u).$$

Logo,  $u$  é solução para

$$u' = J\nabla H(t, u).$$

Sendo  $\nabla G$  e  $v'$   $T$ -periódicas, segue que  $u$  é  $T$ -periódica.

Observando que

$$J^2 = -I, I := \text{identidade},$$

de (3.65) segue

$$Ju'(t) = -v'(t).$$

Integrando de 0 a  $s$ , obtemos

$$\int_0^s v'(t)dt = -J \left( \int_0^s u'(t)dt \right)$$

assim (Ver [3]),

$$v(s) - v(0) = -J(u(s) - u(0))$$

ou seja,

$$v(s) - v(0) = -Ju(s) + Ju(0). \quad (3.66)$$

Integrando de 0 a  $T$ ,

$$\int_0^T v(t)dt - \int_0^T v(0)dt = -J \left( \int_0^T u(t)dt \right) + J \left( \int_0^T u(0)dt \right)$$

e sendo  $\int_0^T v(t)dt = 0$ , temos

$$-Tv(0) = -J \left( \int_0^T u(t)dt \right) + TJu(0)$$

consequentemente,

$$v(0) = J \left( \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \right) - Ju(0). \quad (3.67)$$

Por (3.66) e (3.67) segue

$$v(s) = J \left( \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \right) - Ju(0) - Ju(s) + Ju(0)$$

ou seja,

$$v(t) = J \left( \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \right) - Ju(t)$$

portanto,

$$v(t) = -J \left( u(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \right).$$

■

**Lema 3.8** *O funcional  $\phi$  é limitado inferiormente.*

**Demonstração:**

Para

$$w(t) = \frac{T^{\frac{1}{p}} v(t)}{\left( \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}$$

temos,

$$\|w'(t)\|^p = \frac{T \|v'(t)\|^p}{\int_0^T \|v'(t)\|^p dt}$$

e conseqüentemente

$$\int_0^T \|w'(t)\|^p dt = T.$$

Pela Proposição 3.9,

$$\int_0^T (Jw'(t), w(t)) dt \geq -\frac{T^2}{2\pi}$$

o que implica,

$$\frac{T^{\frac{2}{p}}}{\left( \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{2}{p}}} \int_0^T (Jv'(t), v(t)) dt \geq -\frac{T^2}{2\pi}$$

logo,

$$\frac{1}{2} \int_0^T (Jv'(t), v(t)) dt \geq -\frac{T^2}{4\pi} \|v\|_X^2. \quad (3.68)$$

Por outro lado, usando a equação (3.60) segue

$$\int_0^T G(t, v') dt \geq \left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^T \|v'(t)\|^p dt - \alpha T$$



e assim,

$$\int_0^T G(t, v') dt \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|v'(t)\|^p dt\right) - \alpha T. \quad (3.69)$$

Por (3.68) e (3.69) tem-se

$$\phi(v) \geq \left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p} \|v\|_X^p - \frac{T^2}{4\pi} \|v\|_X^2 - \alpha T.$$

■

**Lema 3.9** *O funcional  $\phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).*

**Demonstração:**

Seja  $(v_k)$  uma sequência em  $X$  tal que  $(\phi(v_k))$  é limitada e  $\phi'(v_k) \rightarrow 0$ . Pelo Lema 3.8,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{T}{p} \|v_k\|_X^p - \frac{T^2}{4\pi} \|v_k\|_X^2 - \alpha T \leq \phi(v_k)$$

e sendo  $(\phi(v_k))$  limitada, existe  $M > 0$  tal que

$$\phi(v_k) \leq M.$$

Usando estas últimas desigualdades, tem-se  $(v_k)$  é limitada em  $X$ . Logo,  $(v_k)$  é limitada em  $W^{1,p}([0, T])$ . Desse modo, existe uma subsequência, que denotaremos por  $(v_k)$ , tal que

$$v_k \rightarrow v \text{ uniformemente em } [0, T] \quad (3.70)$$

pois

$$W^{1,p}([0, T]) \hookrightarrow C([0, T]).$$

Sendo

$$\{v_k\} \subset W^{1,p}([0, T]) \quad (3.71)$$

segue que

$$\{v'_k\} \subset L^p([0, T]).$$

Visto que  $L^p([0, T])$  é um espaço reflexivo, existe uma subsequência, que denotaremos por  $(v'_k)$ , tal que

$$v'_k \rightharpoonup w \text{ em } L^p([0, T]).$$

Por (3.71) temos

$$\int_0^T v'_k(t) \psi(t) dt = - \int_0^T v_k(t) \psi'(t) dt, \quad \forall \psi \in C_0^1([0, T]). \quad (3.72)$$

Por definição

$$v'_k \rightharpoonup w \text{ em } L^p([0, T]) \iff \varphi(v'_k) \rightarrow \varphi(w), \quad \forall \varphi \in (L^p([0, T]))^*.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Ver [3])

$$\int_0^T v'_k(t)\varphi(t)dt \rightarrow \int_0^T w(t)\varphi(t)dt.$$

Por outro lado,

$$\left| \int_0^T v_k(t)\varphi'(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt \right| \leq \int_0^T \|v_k(t) - v(t)\| |\varphi'(t)|dt, \quad \forall \varphi \in C_0^1([0, T])$$

assim,

$$\left| \int_0^T v_k(t)\varphi'(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt \right| \leq C \int_0^T \|v_k(t) - v(t)\|dt.$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue

$$\left| \int_0^T v_k(t)\varphi'(t)dt - \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt \right| \leq C T^{\frac{1}{q}} \|v_k - v\|_{L^p}^p.$$

De (3.70), segue

$$\int_0^T v_k(t)\varphi'(t)dt \rightarrow \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_0^1([0, T]).$$

Usando (3.72), temos

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = - \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_0^1([0, T]).$$

Integrando  $\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt$  por partes e usando o Teorema de Dubois-Raymond (Ver [3]), obtemos

$$w = v'$$

portanto,

$$v'_k \rightharpoonup v' \text{ em } L^p([0, T]). \quad (3.73)$$

Observando que

$$\nabla G(t, v'_k) - Jv_k \in L^q([0, T])$$

podemos escrever,

$$\nabla G(t, v'_k) - Jv_k = w_k + f_k$$

onde

$$w_k = \frac{1}{T} \int_0^T \nabla G(t, v'_k) dt.$$

Desse modo,

$$\int_0^T (\nabla G(t, v'_k) - Jv_k, h') dt = \int_0^T (w_k + f_k, h') dt$$

mostrando que

$$\int_0^T (\nabla G(t, v'_k) - Jv_k, h') dt = \int_0^T (f_k, h') dt.$$

Por outro lado, sendo  $\phi'(v_k) \rightarrow 0$  tem-se

$$\sup \left\{ \left| \int_0^T (\nabla G(t, v'_k) - Jv_k, h') dt \right|; \|h'\|_{L^p([0, T])} \leq 1 \right\} \rightarrow 0$$

portanto,

$$\sup \left\{ \left| \int_0^T (f_k, h') dt \right|; \|h'\|_{L^p([0, T])} \leq 1 \right\} \rightarrow 0. \quad (3.74)$$

Desde que  $f_k \in L^q([0, T])$ , existe  $\psi_k \in C([0, T])$  (Ver[3]), tal que

$$\|f_k - \psi_k\|_{L^q([0, T])} \leq \frac{1}{k}.$$

Considere

$$h_k(t) = \varphi_k(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_k(s) ds$$

onde

$$\varphi_k(t) = \int_0^t \psi_k |\psi_k|^{q-2} ds.$$

Então,

$$\int_0^T f_k h'_k dt = \int_0^T (f_k - \psi_k) h'_k dt + \int_0^T \psi_k h'_k dt$$

ou equivalentemente

$$\|h'_k\|_{L^p([0, T])} \int_0^T f_k \left( \frac{h_k}{\|h'_k\|_{L^p([0, T])}} \right)' dt = \int_0^T (f_k - \psi_k) h'_k dt + \int_0^T \psi_k h'_k dt. \quad (3.75)$$

Usando (3.74) e o fato que  $\|h'_k\|_{L^q([0, T])} \leq C$ , podemos afirmar que

$$\left| \|h'_k\|_{L^p([0, T])} \int_0^T f_k \left( \frac{h_k}{\|h'_k\|_{L^p([0, T])}} \right)' dt \right| \rightarrow 0.$$

Além disso,

$$\int_0^T (f_k - \psi_k) h'_k dt = \int_0^T (f_k - \psi_k) \varphi'_k dt \leq \|f_k - \psi_k\|_{L^q([0, T])} \|\varphi'_k\|_{L^p([0, T])}$$

o que implica,

$$\int_0^T (f_k - \psi_k) h'_k dt \leq \frac{1}{k} \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}^{\frac{p}{q}} \leq \frac{C_1}{k} \rightarrow 0$$

consequentemente por (3.75),

$$\int_0^T \psi_k h'_k dt \rightarrow 0.$$

Observando que

$$\int_0^T \psi_k h'_k dt = \int_0^T |\psi_k|^q dt$$

temos,

$$\|\psi_k\|_{L^q([0,T])} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Por outro lado,

$$\|f_k\|_{L^q([0,T])} = \|f_k - \psi_k + \psi_k\|_{L^q([0,T])} \leq \|f_k - \psi_k\|_{L^q([0,T])} + \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}$$

ou seja,

$$\|f_k\|_{L^q([0,T])} \leq \frac{1}{k} + \|\psi_k\|_{L^q([0,T])}$$

mostrando que

$$f_k \rightarrow 0 \text{ em } L^q([0,T]).$$

Portanto,

$$\nabla G(t, v'_k) - Jv_k - w_k = f_k \rightarrow 0 \text{ em } L^q([0,T]) \quad (3.76)$$

onde

$$w_k = \frac{1}{T} \int_0^T \nabla G(t, v'_k) dt.$$

Note que,

$$\|w_k\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla G(t, v'_k)\| dt. \quad (3.77)$$

Sendo  $G(t, \cdot)$  a transformada de Legendre de  $H(t, \cdot)$ , usando (3.60) e a Observação 3.5 existem  $C_2 > 0$  e  $C_3 > 0$  tais que

$$\|\nabla G(t, v'_k)\| \leq C_2 \|v'_k\|^{p-1} + C_3$$

logo,  $(w_k)$  é limitada em  $\mathbb{R}^{2N}$ . Portanto, existem uma subsequência, que denotaremos por  $(w_k)$ , e  $w \in \mathbb{R}^{2N}$  tais que

$$w_k \rightarrow w \text{ em } \mathbb{R}^{2N}.$$

Usando (3.76),

$$v'_k = \nabla H(f_k + Jv_k + w_k).$$

Por  $(H_3)$  e usando o Lema 3.5 existem  $C_6 > 0$  e  $C_7 > 0$  tais que

$$\|v'_k\| \leq C_6 \|f_k + Jv_k + w_k\|^{q-1} + C_7$$

o que implica,

$$\|v'_k\|^p \leq (C_6 \|f_k + Jv_k + w_k\|^{q-1} + C_7)^p.$$

Considerando

$$g_k = C_6 \|f_k + Jv_k + w_k\|^{q-1} + C_7,$$

temos,

$$\|v'_k\| \leq g_k.$$

Observe que

$$|g_k|^p \leq C_8 \|f_k + Jv_k + w_k\|^{(q-1)p} + C_9$$

ou seja,

$$|g_k|^p \leq C_8 \|f_k + Jv_k + w_k\|^q + C_9.$$

Usando (3.76),

$$g_k \in L^p([0, T]).$$

Por outro lado, passando a subsequência se necessário,

$$v'_k(t) \rightarrow g(t) \quad q.t.p \text{ em } [0, T]$$

onde  $g = \nabla H(Jv + w)$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizado de Lebesgue

$$\int_0^T \|v'_k(t) - g(t)\|^p dt \rightarrow 0 \quad \text{em } L^p([0, T])$$

ou seja,

$$\int_0^T \|v'_k(t) - v'(t)\|^p dt \rightarrow 0 \quad \text{em } L^p([0, T])$$

portanto,

$$v_k \rightarrow v \quad \text{em } X.$$

■

**Teorema 3.10** *Assumindo as hipóteses  $(H_1) - (H_4)$ , existe uma solução  $T$ -periódica  $u$  para*

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J \left( u(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \right)$$

minimiza  $\phi$  em  $X$ .

**Demonstração:**

Uma vez que  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ , pelos Lemas 3.8 e 3.9 o funcional  $\phi$  é limitado inferiormente e satisfaz a condição  $(PS)_c$ . Logo pelo Teorema 1.4 existe um ponto crítico  $v$  que minimiza  $\phi$  em  $X$ .

Portanto, sendo  $v$  um ponto crítico de  $\phi$ , pelo Lema 3.7 existe uma solução  $T$ -periódica  $u$  para

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J \left( u(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \right)$$

minimiza  $\phi$  em  $X$ . ■

**Proposição 3.11** *Assumindo as hipóteses  $(H_1) - (H_4)$  e que  $u$  é uma solução de*

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

verificando  $u(0) = u(T)$ . Então

$$\left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{q}{p}} \frac{1}{p} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi} \left( \int_0^T \|u'(t)\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T \quad (3.78)$$

e

$$\beta \int_0^T \|u(t)\|^q dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi} \left( \int_0^T \|u'(t)\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T. \quad (3.79)$$

**Demonstração:**

Assumindo as hipóteses  $(H_1) - (H_4)$ , temos que  $H$  é uma função de Legendre e existem  $q \in (1, 2)$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\beta, \gamma > 0$  tais que

$$\beta \|u\|^q - \alpha \leq H(t, u) \leq \gamma \|u\|^q + \alpha,$$

com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla H(t, u)\|^p}{p} \leq (\nabla H(t, u), u) + 2\alpha.$$

Sendo  $u$  solução de

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

temos

$$Ju'(t) = -\nabla H(t, u(t))$$

o que implica,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|\nabla H(t, u)\|^p}{p} \leq -(Ju', u) + 2\alpha.$$

Integrando ambos os membros de 0 a  $T$ , obtemos

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^T \|\nabla H(t, u)\|^p dt \leq - \int_0^T (Ju', u) dt + 2\alpha T. \quad (3.80)$$

Observe que,

$$\|u'\|^2 = (J\nabla H(t, u(t)), J\nabla H(t, u(t))) = (\nabla H(t, u(t)), J^2\nabla H(t, u(t)))$$

assim,

$$\|u'\|^2 = \|\nabla H(t, u)\|^2. \quad (3.81)$$

Substituindo (3.81) em (3.80) e usando a Proposição 3.9, ficamos com

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq \frac{T^2}{2\pi} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}} + 2\alpha T.$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq \frac{T^2}{2\pi} \frac{1}{T^{\frac{2}{p}}} \left(\int_0^T \|u'(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}} + 2\alpha T$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq \frac{T^{2-\frac{2}{p}}}{2\pi} \left(\int_0^T \|u'(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}} + 2\alpha T.$$

Usando o fato que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , tem-se

$$\left(\frac{1}{\gamma q}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^T \|u'(t)\|^p dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi} \left(\int_0^T \|u'(t)\|^p dt\right)^{\frac{2}{p}} + 2\alpha T$$

mostrando (3.78).

Por outro lado, pela Proposição 3.2

$$H(t, 0) \geq H(t, u) + (\nabla H(t, u), -u)$$

ou seja,

$$H(t, u) \leq H(t, 0) + (\nabla H(t, u), u).$$

Usando  $(H_3)$ ,

$$\beta \|u\|^q - \alpha \leq H(t, u) \leq (\nabla H(t, u), u) + H(t, 0)$$

e

$$H(t, 0) \leq \alpha.$$

Logo,

$$\beta \|u\|^q \leq (\nabla H(t, u), u) + 2\alpha.$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para mostrar (3.78), obtemos

$$\beta \int_0^T \|u(t)\|^q dt \leq \frac{T^{\frac{2}{q}}}{2\pi} \left( \int_0^T \|u'(t)\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dt + 2\alpha T$$

demonstrando (3.79). ■

### 3.7 Subharmônicas

Considerando o sistema Hamiltoniano

$$Ju'(t) + \nabla H(t, u(t)) = 0, \tag{3.82}$$

uma solução  $u$  de (3.82) em  $[0, T]$  verificando

$$u(0) = u(T)$$

pode ser estendida pela  $T$ -periodicidade para  $\mathbb{R}$ , obtendo-se uma solução  $u$  de (3.82) satisfazendo

$$u(t + T) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.83}$$

Se (3.83) não é satisfeita substituindo  $T$  por  $\frac{T}{k}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  é tal que  $k \geq 2$ ,  $T$  é chamado **período minimal** de  $u$ .



Nesta seção mostraremos que (3.82) admite solução  $u$  tal que

$$u(t) = u(t + kT), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

para algum  $k \geq 2$ . Estas soluções são chamadas soluções subharmônicas ou simplesmente subharmônicas.

**Teorema 3.12** *Assumindo as hipóteses  $(H_1) - (H_4)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ , existe uma solução,  $u_k$ ,  $kT$ -periódica para*

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t))$$

tal que

$$\|u_k\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} \|u_k(t)\| \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, o período minimal  $(T_k)$  de  $u_k$  verifica

$$T_k \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, podemos supor  $T = 2\pi$ . Visto que toda solução  $T$ -periódica é também  $kT$ -periódica, considere  $T = 2k\pi$ , pelo Teorema 3.10 existe uma solução  $2k\pi$  - periódica de

$$u'(t) = J\nabla H(t, u(t)) \quad (3.84)$$

tal que

$$v_k(t) = -J \left( u_k(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u_k(s) ds \right) \quad (3.85)$$

minimiza

$$\phi_k(v) = \int_0^{2k\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( Jv'(t), v(t) \right) + G(t, v'(t)) \right] dt$$

em  $X$ .

Vamos estimar superiormente  $C_k = \phi_k(v_k)$ . Considere  $e \in \mathbb{R}^{2N}$  tal que  $\|e\| = 1$  e

$$m = \max\{G(t, v(t)) : t \in \mathbb{R}, \|v\| = 1\}. \quad (3.86)$$

Se

$$h_k = k \cos\left(\frac{t}{k}\right) e + k \operatorname{sen}\left(\frac{t}{k}\right) Je$$

temos

$$h'_k = -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{k}\right) e + \cos\left(\frac{t}{k}\right) Je$$

e conseqüentemente,

$$\|h'_k\|^2 = \left( -\operatorname{sen} \left( \frac{t}{k} \right) e + \operatorname{cos} \left( \frac{t}{k} \right) Je, -\operatorname{sen} \left( \frac{t}{k} \right) e + \operatorname{cos} \left( \frac{t}{k} \right) Je \right)$$

de onde encontramos,

$$\|h'_k\|^2 = \operatorname{sen}^2 \left( \frac{t}{k} \right) \|e\|^2 + 2(e, Je) \left( -\operatorname{sen} \left( \frac{t}{k} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{t}{k} \right) \right) + \operatorname{cos}^2 \left( \frac{t}{k} \right) \|Je\|^2.$$

Por definição  $\|e\| = \|Je\| = 1$  e por (i) do Lema 3.6 temos  $(e, Je) = 0$ . Portanto,

$$\|h'_k\|^2 = \operatorname{sen}^2 \left( \frac{t}{k} \right) + \operatorname{cos}^2 \left( \frac{t}{k} \right)$$

donde concluimos que

$$\|h'_k\| = 1. \quad (3.87)$$

Além disso,

$$C_k \leq \phi_k(h_k) = \int_0^{2k\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( Jh'_k(t), h_k(t) \right) + G(t, h'_k(t)) \right] dt.$$

Usando (3.86) e (3.87), temos

$$C_k \leq \int_0^{2k\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( Jh'_k(t), h_k(t) \right) + m \right] dt$$

assim,

$$C_k \leq \int_0^{2k\pi} \frac{1}{2} \left( Jh'_k(t), h_k(t) \right) dt + 2km\pi. \quad (3.88)$$

Por outro lado,

$$\left( Jh'_k(t), h_k(t) \right) = \left( -\operatorname{sen} \left( \frac{t}{k} \right) Je - \operatorname{cos} \left( \frac{t}{k} \right) e, k \operatorname{cos} \left( \frac{t}{k} \right) e + k \operatorname{sen} \left( \frac{t}{k} \right) Je \right)$$

o que implica,

$$\left( Jh'_k(t), h_k(t) \right) = -k \operatorname{sen}^2 \left( \frac{t}{k} \right) \|Je\|^2 - k \operatorname{cos}^2 \left( \frac{t}{k} \right) \|e\|^2$$

e portanto,

$$\left( Jh'_k(t), h_k(t) \right) = -k. \quad (3.89)$$

Substituindo (3.89) em (3.88) tem-se

$$C_k \leq -\frac{1}{2} \int_0^{2k\pi} k dt + 2km\pi$$

assim,

$$C_k \leq 2km\pi - k^2\pi. \quad (3.90)$$

**Afirmação 1:**  $\|u_k\|_\infty \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

De fato, Se  $\|u_k\|$  não converge para  $+\infty$ , existem  $C_2 > 0$  e uma subsequência  $(u_{k_n})$  tal que

$$\|u_{k_n}\|_\infty \leq C_2.$$

Observe que,  $\nabla H|_{[0,T] \times \mathbb{R}^{2N}}$  é contínua e usando (3.84) temos

$$\|u'_{k_n}\|_\infty \leq \max\{\|J\nabla H(t, z)\| : t \in [0, T], \|z\| \leq C_2\}$$

portanto,

$$\|u'_{k_n}\|_\infty \leq C_3.$$

Usando (3.85) obtemos

$$\|v_{k_n}\|_\infty = \left\| u_{k_n} - \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} u_{k_n}(s) ds \right\|_\infty$$

o que implica,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq \|u_{k_n}\|_\infty + \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \|u_{k_n}(s)\|_\infty ds$$

logo,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq C_2 + \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} C_2 ds$$

ou seja,

$$\|v_{k_n}\|_\infty \leq 2 C_2.$$

Analogamente,

$$\|v'_{k_n}\|_\infty \leq C_3.$$

Desse modo existe  $C > 0$  tal que

$$\|v_{k_n}\|_\infty \cdot \|v'_{k_n}\|_\infty \leq C.$$

Note que,

$$\left( Jv'_k, v_k \right) \geq - \left| \left( Jv'_k, v_k \right) \right| \geq - \|Jv'_k\| \|v_k\| = - \|v'_k\| \|v_k\|.$$

Sendo

$$C_k = \int_0^{2k\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( Jv'_k(t), v_k(t) \right) + G(t, v'_k(t)) \right] dt$$

temos,

$$C_{k_n} \geq - \int_0^{2k_n\pi} \frac{1}{2} \|v_{k_n}\|_\infty \cdot \|v'_{k_n}\|_\infty dt + \int_0^{2k_n\pi} G(t, v'_{k_n}(t)) dt.$$

Por outro lado, usando (3.60) obtemos

$$G(t, v'_k) \geq -\alpha.$$

logo,

$$C_{k_n} \geq -k_n C \pi - 2k_n \alpha \pi$$

o que implica,

$$C_{k_n} \geq -2k_n \pi \left( \frac{C}{2} + \alpha \right) \quad (3.91)$$

o que é um absurdo, pois por (3.90) e (3.91) segue

$$-2k_n \pi \left( \frac{C}{2} + \alpha \right) \leq -k_n^2 \pi + 2k_n \pi m$$

donde segue,

$$-2 \left( \frac{C}{2} + \alpha \right) \leq -k_n + 2m$$

ou seja,

$$k_n \leq 2m + C - 2\alpha$$

mostrando que  $(u_{k_n})$  é limitada, o que é um absurdo. Portanto,

$$\|u_k\|_\infty \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

mostrando a Afirmação 1.

**Afirmação 2:**  $T_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Com efeito, caso contrário existe  $\tau > 0$  e uma subsequência  $(T_{k_n})$  tal que o período minimal  $T_{k_n}$  de  $u_{k_n}$  satisfaz  $T_{k_n} \leq \tau$  onde  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $k_n \rightarrow \infty$ .

Pela Proposição 3.11, existem  $A_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , tais que

$$\int_0^{T_{k_n}} \|u'_{k_n}\|^p \leq A_1 \frac{\tau^{\frac{2}{q}}}{2\pi} + A_2 \tau \quad (3.92)$$

e

$$\int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}\|^q \leq A_3 T_{k_n}^{\frac{2}{q}} + A_4 T_{k_n}. \quad (3.93)$$

Considere

$$u_{k_n} = \widehat{u}_{k_n} + \overline{u}_{k_n}$$

onde,

$$\widehat{u}_{k_n} = \frac{1}{T_{k_n}} \int_0^{T_{k_n}} u_{k_n}(t) dt.$$

Observe que,

$$u'_{k_n} = \overline{u_{k_n}}'$$

pela desigualdade de Sobolev (Ver Proposição 2.1),

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq \frac{T_{k_n}}{12} \int_0^{T_{k_n}} \|u'_{k_n}\|^2 dt.$$

Sendo  $p > 2$ , por imersões de Sobolev

$$W_T^{1,p}([0, T]) \hookrightarrow W_T^{1,2}([0, T])$$

assim,

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq C \frac{T_{k_n}}{12} \left( \int_0^{T_{k_n}} \|u'_{k_n}\|^p dt \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Usando (3.92) tem-se

$$\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty^2 \leq C \frac{\tau}{12} \left( A_1 \frac{\tau^{\frac{2}{q}}}{2\pi} + A_2 \tau \right)^{\frac{2}{p}}$$

logo,  $\|\overline{u_{k_n}}\|_\infty$  é limitada.

Por outro lado, temos

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}(t)\| dt$$

usando a desigualdade de Hölder, segue

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \left( \int_0^{T_{k_n}} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^{T_{k_n}} \|u_{k_n}(t)\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando (3.93) tem-se

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq \frac{1}{T_{k_n}} \left[ T_{k_n}^{\frac{1}{p}} \left( A_3 T_{k_n}^{\frac{2}{q}} + A_4 T_{k_n} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

assim,

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left[ T_{k_n}^{\frac{1}{p}} \left( A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{1}{q}} \right) \right]$$

o que implica,

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left( A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2} + \frac{1}{p}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \right)$$

ou seja,

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{T_{k_n}} \left( A_3^{\frac{1}{q}} T_{k_n}^{\frac{2}{q^2} + \frac{1}{p}} + A_4^{\frac{1}{q}} T_{k_n} \right).$$

Observe que,

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} - \frac{1}{q} = 1 + \frac{2}{q^2} - \frac{q}{q^2}$$

o que implica,

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q^2} = 1 + \frac{2-q}{q^2} > 1$$

pois, sendo  $q \in (1, 2)$  tem-se

$$\frac{2-q}{q^2} > 0.$$

Portanto,

$$\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty \leq 2^{\frac{1}{q}} \left( A_3^{\frac{1}{q}} \tau^{\frac{2}{q^2} + \frac{1}{p} - 1} + A_4^{\frac{1}{q}} \right).$$

mostrando que  $\|\widehat{u}_{k_n}\|_\infty$  é limitada.

Pela definição de  $u_{k_n}$  segue que  $\|u_{k_n}\|_\infty$  é limitada, o que é um absurdo. Portanto,

$$T_k \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

mostrando a Afirmação 2. ■

### 3.8 Oscilações Livres com Período Minimal Prescrito

No que segue considere as seguintes afirmações sobre o Hamiltoniano livre  $H(u)$ :

(**H<sub>5</sub>**)  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$

(**H<sub>6</sub>**)  $H$  é estritamente convexa com respeito a  $u$

(**H<sub>7</sub>**) Existem  $q \in (1, 2)$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\beta, \gamma > 0$  tais que

$$\beta\|u\|^q - \alpha \leq H(u) \leq \gamma\|u\|^q + \alpha,$$

e considere  $G$  é a transformada de Legendre de  $H$ .

**Observação 3.4** *Assumindo ( $H_5$ ) – ( $H_7$ ), podemos supor sem perda de generalidade  $H(0) = 0$ .*

De fato, usando ( $H_7$ ) e passando ao limite quando  $\|u\| \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} (\beta\|u\|^q - \alpha) \leq \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} H(u) \leq \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} (\gamma\|u\|^q + \alpha)$$

logo,

$$H(u) \rightarrow \infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Assim  $H$  possui mínimo em algum ponto  $q \in \mathbb{R}^{2N}$ .

Considere,

$$h_0 = H(q) = \min_{z \in \mathbb{R}^{2N}} H(z)$$

e a função  $\widehat{H} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\widehat{H}(v) = H(v + q) - h_0.$$

Por definição

$$\widehat{H}(v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Observe que

$$\widehat{H}(0) = H(q) - h_0 = 0,$$

ou seja,  $\widehat{H}$  possui mínimo no ponto 0.

Por outro lado,

$$\nabla H(u) = \nabla \widehat{H}(v)$$

onde  $i = v + q$ . Se

$$v'(t) = J\nabla \widehat{H}(v(t))$$

usando  $u' = v'$  e  $\nabla H(u) = \nabla \widehat{H}(v)$  tem-se

$$u'(t) = J\nabla H(u(t)).$$

No que segue, podemos assumir que  $H(0) = 0$  e  $\nabla H(0) = 0$ . Sendo  $G$  a transformada de Legendre de  $H$ , obtemos

$$G(u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^{2N}$$

e

$$G(0) = (v, 0) - H(0) = 0$$

logo,

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} G(u) = 0 = G(0).$$

Portanto,

$$0 = \min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} H(u) = \min_{u \in \mathbb{R}^{2N}} G(u) = G(0).$$

**Teorema 3.13** *Assumindo  $(H_5) - (H_7)$  e  $H(0) = 0$ , existe  $T_0 \geq 0$  tal que para todo  $T > T_0$ , a equação*

$$u'(t) = J\nabla H(u(t)) \quad (3.94)$$

*admite solução não-trivial  $u_T$  com período minimal prescrito  $T$ . Além disso,*

$$\|u_T\|_\infty \rightarrow \infty \text{ quando } T \rightarrow \infty.$$

**Demonstração:**

Pelo Teorema 3.10, para todo  $T > 0$  existe uma solução  $u_T$  para

$$u'(t) = J\nabla H(u(t))$$

tal que

$$v_T(t) = -J \left( u_T(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u_T(s) ds \right)$$

minimiza

$$\phi_T(v) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \left( Jv'(t), v(t) \right) + G(v'(t)) \right] dt$$

em  $X$ .

Vamos estimar superiormente  $C_T = \phi_T(v_T)$ . Consideremos  $e \in \mathbb{R}^{2N}$  tal que  $\|e\| = 1$  e

$$m = \max_{\|v\|=1} G(v).$$

Se

$$h_T = \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) e + \frac{T}{2\pi} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) Je$$

repetindo os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 3.12, obtemos

$$C_T \leq -\frac{T^2}{4\pi} + mT$$

e

$$\|u_T\|_\infty \rightarrow \infty \text{ quando } T \rightarrow \infty.$$

Além disso, se

$$T > T_0 = 4m\pi$$

temos

$$\frac{T^2}{4\pi} > mT$$

o que implica,

$$mT - \frac{T^2}{4\pi} < 0$$



ou seja, se  $T > T_0 = 4m\pi$  devemos ter

$$C_T < 0 = \phi_T(0)$$

mostrando que  $u_T$  é uma solução não trivial.

**Afirmção:** A solução  $u_T$  tem período minimal  $T$ .

Com efeito, caso contrário  $u_T$  é  $\left(\frac{T}{k}\right)$ -periódica para algum  $k \geq 2$ . Então

$$v(t) = k v_T\left(\frac{t}{k}\right)$$

é  $T$ -periódica, pois

$$v(t+T) = k v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) \quad (3.95)$$

e

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = -J\left(u_T\left(\frac{t+T}{k}\right) - \frac{1}{T} \int_0^T u_T\left(\frac{t+T}{k}\right) dt\right)$$

Logo

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = -J\left(u_T\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{1}{T} \int_0^T u_T\left(\frac{t}{k}\right) dt\right)$$

mostrando a igualdade

$$v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = v_T\left(\frac{t}{k}\right). \quad (3.96)$$

Substituindo (3.96) em (3.95) tem-se

$$v(t+T) = k v_T\left(\frac{t+T}{k}\right) = k v_T\left(\frac{t}{k}\right)$$

ou seja,

$$v(t+T) = v(t)$$

mostrando que  $v(t) = k v_T\left(\frac{t}{k}\right)$  é  $T$ -periódica.

Além disso,

$$\phi_T(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( Jv_T'\left(\frac{t}{k}\right), k v_T\left(\frac{t}{k}\right) \right) dt + \int_0^T G\left(v_T'\left(\frac{t}{k}\right)\right) dt$$

ou seja,

$$\phi_T(v) = \frac{k}{2} \int_0^T \left( Jv_T'\left(\frac{t}{k}\right), v_T\left(\frac{t}{k}\right) \right) dt + \int_0^T G\left(v_T'\left(\frac{t}{k}\right)\right) dt.$$

Considerando  $s = \frac{t}{k}$  temos  $dt = kds$ , logo

$$\phi_T(v) = \frac{k^2}{2} \int_0^{\frac{T}{k}} \left( Jv_T'(s), v_T(s) \right) ds + k \int_0^{\frac{T}{k}} G\left(v_T'(s)\right) ds. \quad (3.97)$$

Definindo

$$f(s) = \left( Jv'_T(s), v_T(s) \right)$$

observe que

$$\int_0^T f(s) ds = \int_0^{\frac{T}{k}} f(s) ds + \int_{\frac{T}{k}}^{\frac{2T}{k}} f(s) ds + \dots + \int_{\frac{(k-2)T}{k}}^{\frac{(k-1)T}{k}} f(s) ds + \int_{\frac{(k-1)T}{k}}^T f(s) ds$$

o que implica,

$$\int_0^T f(s) ds = k \int_0^{\frac{T}{k}} f(s) ds.$$

Substituindo a última igualdade em (3.97) e usando um argumento semelhante para

$\int_0^{\frac{T}{k}} G(v'_T(s)) ds$ , ficamos com

$$\phi_T(v) = \frac{k}{2} \int_0^T \left( Jv'_T(s), v_T(s) \right) ds + \int_0^T G(v'_T(s)) ds$$

ou ainda

$$\phi_T(v) = \phi_T(v_T(t)) + \frac{k-1}{2} \int_0^T \left( Jv'_T(t), v_T(t) \right) dt.$$

Desde que,

$$G(v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^{2N}$$

tem-se

$$0 > \phi_T(v_T) \geq \int_0^T \frac{1}{2} \left( Jv'_T(t), v_T(t) \right) dt$$

o que implica,

$$\int_0^T \frac{1}{2} \left( Jv'_T(t), v_T(t) \right) dt < 0.$$

Portanto,

$$\phi_T(v) < \phi_T(v_T)$$

o que é um absurdo. Mostrando que  $u_T$  é  $T$ -periódica. ■

### 3.9 Oscilações Livres com Energia Prescrita

Se  $u$  é solução do sistema Hamiltoniano livre

$$u'(t) - J\nabla H(u(t)) = 0$$

sabemos que  $H(u(t))$  é constante.

As órbitas de  $u'(t) = J\nabla H(u(t))$  em uma hiper-superfície  $S$ , é o conjunto

$$\{u(t) \in \mathbb{R}^{2N} : u'(t) = J\nabla H(u(t)), t \in [0, T] \text{ e } H(u) \text{ é constante}\}.$$

**Lema 3.10** *Sejam  $H_1, H_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tais que*

$$S = H_1^{-1}(c_1) = H_2^{-1}(c_2).$$

*Se*

$$\nabla H_i(u(t)) \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall u \in S,$$

*então as órbitas de  $u'(t) = J\nabla H_i(u(t))$ ,  $i = 1, 2$  em  $S$  são as mesmas.*

**Demonstração:**

Seja  $u_1 : [0, T] \rightarrow S$  solução de

$$u'(t) = J\nabla H_1(u(t)).$$

Sendo  $S$  uma hiper-superfície,  $\nabla H_1(u_1(t))$  e  $\nabla H_2(u_1(t))$  são paralelos ao vetor normal ao plano tangente  $S$  que passa pelo ponto  $u_1(t)$ . Portanto  $\nabla H_1(u_1(t))$  e  $\nabla H_2(u_1(t))$  são linearmente dependentes. Assim, existe uma função  $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla H_2(u_1(t)) = \lambda(t)\nabla H_1(u_1(t)), \quad t \in [0, T]$$

o que implica,

$$\|\nabla H_2(u_1(t))\| = |\lambda(t)| \|\nabla H_1(u_1(t))\|, \quad t \in [0, T].$$

Visto que  $\nabla H_i(u(t)) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se

$$\lambda(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.98)$$

Observe que,

$$\lambda(t) = \frac{(\nabla H_2(u_1(t)), \nabla H_1(u_1(t)))}{\|\nabla H_1(u_1(t))\|^2}$$

e sendo  $H_1, H_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ , podemos concluir que  $\lambda$  é contínua. Usando (3.98), o fato de  $\lambda$  ser contínua e o Teorema do Valor Intermediário (Ver [9]), temos que

$$\lambda(t) > 0 \text{ ou } \lambda(t) < 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.99)$$

Considere a função  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{dt}{\lambda(t)}.$$

**Afirmação:**  $\psi$  é um difeomorfismo sobre sua imagem.

De fato, sendo

$$\psi'(s) = \frac{1}{\lambda(s)}$$

usando (3.99) segue

$$\psi'(s) > 0, \quad \forall s \in [0, T]$$

ou

$$\psi'(s) < 0, \quad \forall s \in [0, T]$$

mostrando que  $\psi$  é injetiva.

Sendo  $\psi$  contínua e injetiva, existe pelo teorema da Função Inversa  $\psi^{-1} : \psi([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\psi^{-1}$  é contínua. Visto que

$$\psi'(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \quad e \quad \lambda(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, T]$$

pelo Teorema da Regra da Cadeia,  $\psi^{-1}$  é derivável para todo  $s \in \psi([0, T])$ . Logo,  $\psi$  é um difeomorfismo sobre sua imagem. Mostrando a Afirmção.

Considere a função  $u_2 : \psi([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$  tal que

$$u_2(t) = u_1(\psi^{-1}(t))$$

onde  $t = \psi(s)$ . Observe que

$$t = \psi(s) \Leftrightarrow s = \psi^{-1}(t), \quad \forall s \in [0, T].$$

Logo,

$$u_2'(t) = u_1'(\psi^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\psi'(s)}$$

o que implica,

$$u_2'(t) = u_1'(\psi^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$$

ou seja,

$$u_2'(t) = \left( \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))} \right) \cdot \left( u_1'(\psi^{-1}(t)) \right).$$

sendo  $u_1$  solução de  $u'(t) = J\nabla H_1(u(t))$ , segue

$$u_2'(t) = \left( \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))} \right) J\nabla H_1(u_1(\psi^{-1}(t)))$$

e usando a definição de  $\psi$ ,

$$u_2'(t) = \lambda (\psi^{-1}(t)) J\nabla H_1(u_1(\psi^{-1}(t)))$$

visto que  $\psi^{-1}(t) \in [0, T]$ , logo

$$u_2'(t) = J\nabla H_2(u_2(t)).$$

Por outro lado, se considerarmos  $u_2 : [0, T] \rightarrow S$  solução de

$$u'(t) = J\nabla H_2(u(t)).$$

Usando o mesmo argumento devemos ter

$$u_1'(t) = J\nabla H_1(u_1(t)).$$

■

**Lema 3.11** *Sejam  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $\nabla H(u) \neq 0$  para todo  $u \in H^{-1}(c) = S$ , onde  $S$  a fronteira de um conjunto  $C$  compacto e estritamente convexo com  $0 \in \text{int}C$ . Se  $j_c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$  é tal que*

$$j_c(u) = \inf \left\{ \lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C \right\}$$

e

$$F(u) = j_c^{\frac{3}{2}}(u)$$

temos:

- (i)  $F^{-1}(1) = S$
- (ii)  $F$  é homogênea positiva de grau  $\frac{3}{2}$
- (iii)  $F \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$
- (iv)  $F$  é estritamente convexa
- (v) Existem  $\beta, \gamma > 0$  tais que

$$\beta \|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma \|u\|^{\frac{3}{2}}$$

- (vi)  $\nabla F(u) \neq 0, \forall u \in S$ .

**Demonstração:**

No que segue vamos fazer algumas observações que serão utilizadas na demonstração do Lema.

**I:** Se  $u \in C$  então  $j_c(u) \leq 1$ .

De fato, sendo  $u \in C$  temos

$$1 \in \left\{ \lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C \right\}$$

e pela definição de  $j_c$ ,

$$j_c(u) \leq 1$$

mostrando I.

**II:**  $u \in \text{int}C$  se, e somente se,  $j_c(u) < 1$ .

Com efeito, se  $u \in \text{int}C$  então  $(1 + \epsilon)u \in C$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, assim

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \in \left\{ \lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C \right\}$$

logo,

$$j_c(u) \leq \frac{1}{1 + \epsilon} < 1$$

isto é,

$$j_c(u) < 1.$$

Reciprocamente, se  $j_c(u) < 1$  existe  $\alpha$  tal que

$$j_c(u) < \alpha < 1 \quad \text{com} \quad \frac{u}{\alpha} \in C.$$

Sendo  $0 \in \text{int}C$  existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(0) \subset C$ . Para todo  $v \in C$ , usando o fato de  $C$  ser estritamente convexo, temos

$$u + (1 - \alpha)v = \alpha \left( \frac{u}{\alpha} \right) + (1 - \alpha)v \in C$$

logo,

$$B(u, (1 - \alpha)\delta) \subset C$$

ou seja,

$$u \in \text{int}C$$

o que mostra II.

**III:** Se  $j_c(u) = 1$  então  $u \in \partial C$ .

De fato, se  $j_c(u) = 1$  existe uma sequência  $(\lambda_n)$  com  $\lambda_n > 1$  tal que

$$\lambda_n \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \frac{u}{\lambda_n} \in C.$$

Observe que,

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u}{\lambda_n},$$

e sendo  $C$  fechado, devemos ter  $u \in C$ .

Portanto usando I, II e III e o fato que  $C$  é fechado, tem-se

$$u \in \partial C \text{ se, e somente se, } j_c(u) = 1. \quad (3.100)$$

Portanto,  $j_c^{-1}(1)$  é o conjunto de pontos de  $\partial C$ , isto é,

$$j_c^{-1}(1) = S.$$

Observe que

$$u \in F^{-1}(1) \Leftrightarrow F(u) = 1 \Leftrightarrow (j_c(u))^{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow j_c(u) = 1 \Leftrightarrow u \in j_c^{-1}(1).$$

Portanto  $F^{-1}(1) = S$ , o que mostra (i).

Para mostrar (ii), note que para  $t > 0$

$$j_c(tu) = \inf \left\{ \lambda > 0; \frac{tu}{\lambda} \in C \right\},$$

o que implica

$$j_c(tu) = t \inf \left\{ \hat{\lambda} > 0; \frac{u}{\hat{\lambda}} \in C \right\}$$

ou seja,

$$j_c(tu) = t j_c(u).$$

Portanto,

$$F(tu) = (j_c(tu))^{\frac{3}{2}} = (t j_c(u))^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} (j_c(u))^{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} F(u),$$

mostrando (ii).

Com relação a (iii), primeiramente sejam  $U = \{(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{2N+1}; u \neq 0 \text{ e } \lambda > 0\}$  e considere a função  $G : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$G(u, \lambda) = H \left( \frac{u}{\lambda} \right) - c.$$

Observe que,

$$G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{\lambda} \in S \Leftrightarrow j_c \left( \frac{u}{\lambda} \right) = 1$$

logo,

$$G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow j_c(u) = \lambda.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u, \lambda) = \left( \nabla H \left( \frac{u}{\lambda} \right), -\frac{u}{\lambda^2} \right)$$

o que implica,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \left( \nabla H \left( \frac{u}{\lambda} \right), \frac{u}{\lambda} \right)$$

ou seja,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u, \lambda) = -\frac{1}{j_c(u)} \left( \nabla H \left( \frac{u}{j_c(u)} \right), \frac{u}{j_c(u)} \right).$$

Usando o fato de  $0 \in \text{int}C$  segue

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u, \lambda) = -\frac{1}{j_c(u)} \left( \nabla H \left( \frac{u}{j_c(u)} \right), \frac{u}{j_c(u)} \right) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, para cada  $u \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$  existe  $B = B_\delta(u) \subset \mathbb{R}^{2N}$  e um intervalo  $J = (j_c(u) - \epsilon, j_c(u) + \epsilon)$  tal que, existe uma única função  $\xi : B \rightarrow J$  de classe  $C^1$  satisfazendo

$$G(z, \xi(z)) = 0, \quad \forall z \in B.$$

Pela unicidade da função  $\xi$  temos

$$F(z) = \xi(z), \quad \forall z \in B$$

portanto,

$$F \in C^1(B, \mathbb{R}).$$

Sendo  $u$  qualquer em  $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ , concluímos que

$$F \in C^1(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \mathbb{R}).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(0 + th) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(j_c(th))^{\frac{3}{2}} - (j_c(0))^{\frac{3}{2}}}{t}$$

o que implica,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\frac{3}{2}} j_c(h)}{t}$$

logo,

$$\frac{\partial F}{\partial h}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{2}} j_c(h) = 0.$$

Agora iremos mostrar que

$$\frac{F(0 + h) - F(0)}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$



Sendo  $F(0) = 0$  e considerando  $r(h) = F(h)$ , temos

$$(j_c(h))^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

ou seja,

$$\left( j_c \left( \|h\| \frac{h}{\|h\|} \right) \right)^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

o que implica,

$$\|h\|^{\frac{3}{2}} \left( j_c \left( \frac{h}{\|h\|} \right) \right)^{\frac{3}{2}} = r(h)$$

assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h\|^{\frac{1}{2}} F \left( \frac{h}{\|h\|} \right) = 0$$

mostrando que

$$\frac{F(0+h) - F(0)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|h\| \rightarrow 0$$

de onde segue  $F'(0) = 0$ . Obviamente  $\nabla F$  é homogênea positiva de grau  $\frac{1}{2}$ , logo

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \nabla F(u) = \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \nabla F \left( \|u\| \frac{u}{\|u\|} \right) = \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \|u\|^{\frac{1}{2}} \nabla F \left( \frac{u}{\|u\|} \right), \quad h \in \mathbb{R}^{2N}$$

e

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \nabla F(u) = 0 = \nabla F(0)$$

ou seja,  $F$  é diferenciável no ponto 0 e  $\nabla F$  é contínua no ponto 0. Portanto

$$F \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$$

mostrando (iii).

Com relação a (iv), para  $u, v \in \mathbb{R}^m$  fixe

$$\lambda \in \left\{ \lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C \right\}$$

e

$$\mu \in \left\{ \mu > 0; \frac{u}{\mu} \in C \right\}.$$

Usando a convexidade de  $C$ ,

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \left( \frac{u}{\lambda} \right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \left( \frac{v}{\mu} \right) \in C$$

pois, fixando

$$0 < t = \frac{\mu}{\lambda+\mu} < 1$$

tem-se

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = (1-t) \left(\frac{u}{\lambda}\right) + t \left(\frac{v}{\mu}\right)$$

e conseqüentemente,

$$\lambda + \mu \in \left\{ \theta > 0; \frac{u+v}{\theta} \in C \right\}.$$

Usando propriedades de ínfimo, tem-se

$$\inf \left\{ \lambda > 0; \frac{u}{\lambda} \in C \right\} + \inf \left\{ \mu > 0; \frac{v}{\mu} \in C \right\} \geq \inf \left\{ \theta > 0; \frac{u+v}{\theta} \in C \right\},$$

ou seja,

$$j_c(u+v) \leq j_c(u) + j_c(v).$$

Se  $0 < \alpha < 1$  e  $u, v \in \mathbb{R}^m$ ,

$$j_c((1-\alpha)u + \alpha v) \leq j_c((1-\alpha)u) + j_c(\alpha v)$$

o que implica,

$$j_c((1-\alpha)u + \alpha v) \leq (1-\alpha)j_c(u) + \alpha j_c(v)$$

o que mostra que  $j_c$  é uma função convexa.

Sendo  $C$  um conjunto estritamente convexo, para  $u, v \in C$  com  $u \neq v$  e  $\theta \in (0, 1)$  temos

$$\theta \left(\frac{u}{j_c(u)}\right) + (1-\theta) \left(\frac{v}{j_c(v)}\right) \in \text{int}C.$$

Usando II,

$$j_c \left( \theta \left(\frac{u}{j_c(u)}\right) + (1-\theta) \left(\frac{v}{j_c(v)}\right) \right) < 1.$$

Para cada  $t \in [0, 1]$ , considerando

$$\theta = \frac{tj_c(u)}{tj_c(u) + (1-t)j_c(v)}$$

tem-se

$$1 - \theta = \frac{(1-t)j_c(v)}{tj_c(u) + (1-t)j_c(v)}$$

e

$$j_c(tu + (1-t)v) < tj_c(u) + (1-t)j_c(v)$$

mostrando que  $j_c$  é uma função estritamente convexa. Portanto, sendo  $F$  a composição de duas funções estritamente convexas, concluímos que  $F$  é estritamente convexa. Mostrando (iv).

Para a prova de (v), observe que existem  $\gamma, \beta > 0$  tais que

$$\beta \leq F\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \leq \gamma$$

usando (ii) tem-se

$$\beta \leq \left(\frac{1}{\|u\|}\right)^{\frac{3}{2}} F(u) \leq \gamma$$

o que implica,

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}$$

mostrando (v).

Finalmente, para mostrarmos (vi) observe que  $F(0) = 0$  e usando o fato que a função  $F$  é estritamente convexa segue que 0 é o único ponto crítico de  $F$ . Logo, sendo  $F^{-1}(1) = S$  devemos ter

$$\nabla F(u) \neq 0, \forall u \in S.$$

■

**Teorema 3.14** *Sejam  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla H(u) \neq 0$  para todo  $u \in S = H^{-1}(c)$  onde  $S$  é a fronteira de um conjunto  $C$  compacto e estritamente convexo com  $0 \in \text{int}C$ . Então existe pelo menos uma órbita periódica para*

$$u'(t) = J\nabla H(u(t))$$

com  $u(t) \in S, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:**

Considere  $G$  a transformada de Legendre de  $F$ , onde  $F$  é a função definida no Lema 3.11. Do Teorema 3.10, existe uma solução  $u$   $(2\pi)$ -periódica para

$$u'(t) = J\nabla F(u(t))$$

tal que

$$v(t) = -J\left(u(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) ds\right)$$

minimiza

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} (Jv'(t), v(t)) + G(t, v'(t)) \right] dt$$

em  $X$ . Pelo Lema 3.11, existem  $\beta, \gamma > 0$  tais que

$$\beta\|u\|^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \gamma\|u\|^{\frac{3}{2}}.$$

Considerando  $p = 3$  e  $q = \frac{3}{2}$ , segue do Lema 3.4

$$\left(\frac{2}{3\gamma}\right)^2 \frac{\|v\|^3}{3} \leq G(v) \leq \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|v\|^3}{3}.$$

Se

$$h(t) = (\cos t)e + (\sin t)Je, \quad \text{com } e \in \mathbb{R}^{2N}$$

usando o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 3.12 tem-se

$$\phi(h) \leq -\pi\|e\|^2 + 2\pi \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|e\|^3}{3}.$$

Assim,

$$\min_{v \in X} \phi(v) \leq \phi(h) \leq -\pi\|e\|^2 + 2\pi \left(\frac{2}{3\beta}\right)^2 \frac{\|e\|^3}{3},$$

e fixando  $\|e\| < \frac{27\beta^2}{8}$  obtemos

$$\min_{v \in X} \phi(v) < 0 = \phi(0). \quad (3.101)$$

Portanto, usando a hipótese que  $v$  minimiza  $\phi$ , segue por (3.101) que  $v \neq 0$ , o que implica que  $u \neq 0$ .

Por conservação de energia e pelas propriedades de  $F$ , segue

$$F(u(t)) = d > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Considere

$$w(t) = d^{-\frac{2}{3}}u(d^{\frac{1}{3}}t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observe que  $w$  é  $\left(\frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right)$ -periódica. De fato, temos

$$w\left(t + \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right) = d^{-\frac{2}{3}}u(d^{\frac{1}{3}}t + 2\pi)$$

sendo  $u$  uma função  $(2\pi)$ -periódica, segue

$$w\left(t + \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right) = w(t).$$

Por outro lado,

$$F(w(t)) = F\left(d^{-\frac{2}{3}}u(d^{\frac{1}{3}}t)\right) = 1$$

Além disso,

$$Jw'(t) = d^{-\frac{2}{3}}Ju'\left(d^{\frac{1}{3}}t\right) \cdot d^{\frac{1}{3}} = d^{-\frac{1}{3}}Ju'\left(d^{\frac{1}{3}}t\right).$$

Sendo,

$$u'(t) = J\nabla F(u(t))$$

obtemos,

$$Jw'(t) = -d^{-\frac{1}{3}}\nabla F\left(u\left(d^{\frac{1}{3}}t\right)\right)$$

o que implica,

$$Jw'(t) = -\nabla F(w(t))$$

ou ainda,

$$w'(t) = J\nabla F(w(t)).$$

Logo,  $w$  é solução  $\left(\frac{2\pi}{d^{\frac{1}{3}}}\right)$ -periódica de

$$u'(t) = J\nabla F(u(t))$$

com  $F(w(t)) = 1$ .

Pelo Lema 3.10, os sistemas Hamiltonianos

$$u'(t) = J\nabla F(u(t)) \quad e \quad u'(t) = J\nabla H(u(t))$$

admitem a mesma órbita para

$$S = F^{-1}(1) = H^{-1}(c).$$

■

## Capítulo 4

# Pontos Críticos de Funcionais Invariantes

Nosso objetivo neste capítulo é obter resultados de multiplicidade de pontos críticos de funcionais invariantes por uma ação de  $S^1$ .

Quando o problema apresenta simetrias, isto é, quando existe um determinado grupo  $G$  agindo de uma forma contínua no espaço  $X$ , onde  $X$  um espaço de Banach e  $G = S^1$  é um grupo topológico compacto, e o funcional  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  é invariante sob esta ação, é possível mostrar que o funcional  $\phi$  possui muitos pontos críticos. Para tanto, vamos introduzir conceitos, tais como,  $S^1$ -índice e funcionais invariantes. Vamos mostrar também uma versão mais geral do Lema de Deformação, para o qual vamos trabalhar com funcionais invariantes e com vizinhança invariante.

Neste capítulo apresentaremos a teoria de representação de grupos topológicos compactos em espaços de Banach (ou grupo de representação por operadores lineares). O grupo  $S^1$  terá grande importância para o estudo de soluções periódicas dos sistemas Hamiltonianos livres, uma vez que, se  $u(t)$  é solução de tal sistema o mesmo acontece com  $u(t + \theta)$  para cada  $\theta \in \mathbb{R}$  e portanto, se  $u(t)$  é  $T$ -periódica vemos o surgimento da representação  $L(\theta)$  do grupo  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \sim S^1$  dado por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t + \theta).$$

## 4.1 $S^1$ -índice

Suponha que  $\{L(\theta); \theta \in S^1\}$  é uma dada representação isométrica de  $S^1$  em  $X$ , isto é, para cada,  $\theta \in S^1$ ,  $L(\theta) : X \rightarrow X$  é um operador linear e com as seguintes propriedades:

- (i)  $\|L(\theta)u\| = \|u\|$
- (ii)  $L(\theta_1 + \theta_2) = L(\theta_1)L(\theta_2)$ ,  $\forall \theta_1, \theta_2 \in S^1$
- (iii)  $L(0) := I_d$
- (iv)  $(\theta, u) \mapsto L(\theta)u$  é contínua
- (v)  $L(\theta + 2\pi) = L(\theta)$ .

**Definição 4.1** A órbita de um elemento  $u \in X$  é o conjunto  $\sigma(u) = \{L(\theta)u; \theta \in S^1\}$ . Um subconjunto  $\Omega \subset X$  é invariante se  $L(\theta)\Omega = \Omega$ , para todo  $\theta \in S^1$ . O grupo  $S^1$  age livremente em um subconjunto invariante  $\Omega$  se  $L(\theta)u = u$  para algum  $\theta \in S^1$  e para algum  $u \in \Omega$ , implica  $\theta = 0$ .

**Definição 4.2** Uma aplicação  $T$  entre dois conjuntos invariantes diz-se equivariante se  $T \circ L(\theta) = L(\theta) \circ T$ , para todo  $\theta \in S^1$ .

**Definição 4.3** Um funcional  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante se  $\phi \circ L(\theta) = \phi$ , para todo  $\theta \in S^1$ .

## 4.2 O Lema de Deformação

**Lema 4.1** Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $\theta \in S^1$ . Se  $\phi$  é invariante, então

- (i)  $\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h \rangle$
- (ii)  $\|\phi'(L(\theta)u)\| = \|\phi'(u)\|$ .

**Demonstração:**

Por definição,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(L(\theta)u + th) - \phi(L(\theta)u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi[L(\theta)(u + L(-\theta)(th))] - \phi(L(\theta)u)}{t}.$$

Sendo  $\phi$  invariante,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(u + L(-\theta)(th)) - \phi(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(u + tL(-\theta)h) - \phi(u)}{t}$$

logo,

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h \rangle,$$

o que mostra (i).

Sendo

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle = \langle \phi'(u), L(-\theta)h \rangle,$$

segue que

$$\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle \leq \|\phi'(u)\| \|L(-\theta)h\| = \|\phi'(u)\| \|h\|, \forall h \in X.$$

Considerando  $h \in X$  com  $\|h\| \leq 1$ , tem-se

$$\|\phi'(L(\theta)u)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \frac{|\langle \phi'(L(\theta)u), h \rangle|}{\|h\|} \leq \|\phi'(u)\|$$

ou seja,

$$\|\phi'(L(\theta)u)\| \leq \|\phi'(u)\|. \quad (4.1)$$

Por outro lado, dado  $h_1 \in X$ ,  $\|h_1\| \leq 1$ , existe  $h \in X$  tal que

$$L(-\theta)h = h_1$$

pois  $L(-\theta)$  é sobrejetiva. Assim

$$\langle \phi'(u), h_1 \rangle = \langle \phi'(L(\theta)u), L(\theta)h_1 \rangle$$

desse modo,

$$\langle \phi'(u), h_1 \rangle \leq \|\phi'(L(\theta)u)\| \|L(\theta)h_1\| = \|\phi'(L(\theta)u)\| \|h_1\|$$

portanto,

$$\|\phi'(u)\| \leq \|\phi'(L(\theta)u)\|. \quad (4.2)$$

Usando (4.1) e (4.2), tem-se

$$\|\phi'(u)\| = \|\phi'(L(\theta)u)\|.$$

■

**Lema 4.2** *Sejam  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  e  $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$ . Se  $\phi$  é invariante, existe um campo vetorial pseudo-gradiente equivariante para  $\phi$  em  $Y$ .*



**Demonstração:**

Primeiramente note que usando o Lema 4.1 é fácil verificar que o conjunto  $Y$  é invariante. Pelo Lema 1.1, existe um campo vetorial pseudo-gradiente  $w : Y \rightarrow X$ .

Considere  $v : Y \rightarrow X$  dada por

$$v(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(-\theta)w(L(\theta)u)d\theta, \quad \forall u \in Y.$$

Assim,

$$\|v(u)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|L(-\theta)w(L(\theta)u)\|d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|w(L(\theta)u)\|d\theta.$$

Usando o fato de que  $w$  é pseudo-gradiente e o Lema 4.1,

$$\|v(u)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\|\phi'(L(\theta)u)\|d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\|\phi'(u)\|d\theta$$

e portanto

$$\|v(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|.$$

Por outro lado,

$$\langle \phi'(u), v(u) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \phi'(u), L(-\theta)w(L(\theta)u) \rangle d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \phi'(L(\theta)u), w(L(\theta)u) \rangle d\theta$$

e conseqüentemente

$$\langle \phi'(u), v(u) \rangle \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\phi'(L(\theta)u)\|^2 d\theta$$

ou seja,

$$\langle \phi'(u), v(u) \rangle \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\phi'(u)\|^2 d\theta$$

mostrando que

$$\langle \phi'(u), v(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2.$$

Observe que,

$$v(L(\tau)u) = \int_0^{2\pi} L(-\theta)w(L(\theta + \tau)u)d\theta$$

o que implica para  $\sigma = \theta + \tau$

$$v(L(\tau)u) = \frac{L(\tau)}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(-\sigma)w(L(\sigma)u)d\sigma$$

isto é,

$$v(L(\tau)u) = L(\tau)v(u)$$

mostrando que  $v$  é equivariante.

Finalmente, considerando  $u \in Y$ , observando que  $Y$  é invariante e

$$A = \{L(\theta(u)), \theta \in S^1\} \subset Y$$

tem-se que  $A$  é invariante. De fato, seja  $v \in A$ , assim  $v = L(\theta)u$  e

$$L(\widehat{\theta})L(\theta)u = L(\widehat{\theta} + \theta)u = L(\sigma)u, \text{ onde } \sigma \in S^1.$$

Assim,

$$L(\widehat{\theta})A \subset A, \forall \widehat{\theta} \in S^1. \quad (4.3)$$

Por outro lado,

$$L(\widehat{\theta}) \left( L(-\widehat{\theta})A \right) \subset L(\widehat{\theta})A$$

isto é,

$$L(\widehat{\theta} - \widehat{\theta})A \subset L(\widehat{\theta})A$$

o que implica,

$$A \subset L(\widehat{\theta})A, \forall \widehat{\theta} \in S^1. \quad (4.4)$$

Por (4.3) e (4.4) segue que  $A$  é invariante.

Agora considere a seguinte afirmação que será bastante utilizada nesta seção.

**Afirmação 1:** O conjunto  $A_\delta = \{u \in X; \text{dist}(u, A) \leq \delta\}$  é invariante.

Com efeito, se  $u \in L(\theta)A_\delta$ , por definição

$$\text{dist}(u, A) = \inf\{\|u - v\|; v \in A\}$$

o que implica para  $u = L(\theta)z$

$$\text{dist}(u, A) = \inf\{\|L(\theta)z - L(\theta)w\|, w \in A\}$$

assim,

$$\text{dist}(u, A) = \inf\{\|z - w\|, w \in A\}$$

ou seja,

$$\text{dist}(u, A) = \text{dist}(z, A) \leq \delta$$

mostrando que

$$L(\theta)A_\delta \subset A_\delta, \forall \theta \in S^1.$$

Por outro lado,

$$L(\theta)(L(-\theta)A_\delta) \subset L(\theta)A_\delta$$

isto é,

$$L(\theta - \theta)A_\delta \subset L(\theta)A_\delta$$

o que implica,

$$A_\delta \subset L(\theta)A_\delta, \forall \theta \in S^1.$$

mostrando a Afirmação 1.

Considere  $u_1, u_2 \in B_\delta(u)$ , usando o fato que  $A_\delta$  é invariante, segue

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|L(-\theta)[w(L(\theta)u_1) - w(L(\theta)u_2)]\| d\theta$$

o que implica,

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|w(L(\theta)u_1) - w(L(\theta)u_2)\| d\theta$$

considerando  $\delta > 0$  tal que  $w$  é localmente lipschitziana em  $B_\delta(L(\theta)u)$ , existe uma constante  $l$  tal que

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq \frac{l}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|L(\theta)(u_1 - u_2)\| d\theta$$

e assim,

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| \leq l\|u_1 - u_2\|$$

mostrando que  $v$  é localmente lipschitziana. Portanto,  $v$  é um campo vetorial pseudo-gradiente equivariante para  $\phi$  em  $Y$ .

■

**Observação 4.1** Note que para mostrarmos que um conjunto  $\Omega \subset X$  é invariante, basta mostrarmos que  $L(\theta)\Omega \subset \Omega$ ,  $\forall \theta \in S^1$ . Além disso, usando a Afirmação 1 do Lema 4.2 concluímos que se o conjunto  $\Omega$  é invariante então a função distância dada por

$$\text{dist}(u, \Omega) = \inf\{\|u - v\|; v \in \Omega\}$$

é invariante.

No que segue, definamos,  $\text{ind}\Omega = k$  se  $k$  é o menor inteiro tal que existem uma aplicação  $\phi \in C(\Omega, \mathbb{C}^k \setminus \{0\})$  e algum  $n \in \mathbb{N}^*$  satisfazendo a relação

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}\phi(u), \quad \forall \theta \in S^1, \quad \forall u \in \Omega. \quad (4.5)$$

Além disso, defina  $\text{ind}\Omega = \infty$  se uma tal aplicação não existe e defina  $\text{ind}\emptyset = 0$ .

**Teorema 4.4** Para todo conjunto invariante  $\Omega$  que age livremente em  $S^1$ , existe um inteiro, denotado por  $\text{ind}\Omega$ , tal que

- (i) Se existe uma aplicação contínua equivariante  $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  então  $\text{ind}\Omega_1 \leq \text{ind}\Omega_2$
- (ii)  $\text{ind}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq \text{ind}\Omega_1 + \text{ind}\Omega_2$
- (iii) Se  $\Omega$  é compacto, existe uma vizinhança fechada invariante  $N$  de  $\Omega$  com  $\text{ind}N = \text{ind}\Omega$
- (iv) Se  $\text{ind}\Omega \geq 2$  e  $\Omega \cap \text{Fix}(S^1) = \emptyset$ , então  $\Omega$  contém infinitas  $S^1$ -órbitas distintas
- (v) Sejam  $Y$  um subespaço invariante de dimensão finita de  $X$  e  $D$  uma vizinhança aberta limitada invariante de  $\theta$  em  $Y$ . Se

$$D \cap \text{Fix}(S^1) = \{0\}$$

então

$$\text{ind}\partial D = \frac{1}{2}\text{dim}Y,$$

onde

$$\text{Fix}(S^1) = \{u \in X; L(\theta)u = u, \forall \theta \in S^1\}.$$

**Demonstração:**

No que segue mostraremos os itens (i), (ii), (iii) e (iv), com relação ao item (v) Ver [7].

Considere

$$\widehat{\Omega} = \{\Omega \subset X; \Omega \text{ é fechado, } L(\theta)\Omega = \Omega, \forall \theta \in S^1\}.$$

**Prova de (i):**

Por hipótese existe uma aplicação  $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  contínua equivariante. Suponhamos, sem perda de generalidade,  $ind\Omega_2 = k < \infty$ . Assim existe uma aplicação contínua  $\phi : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$  de maneira que

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta} \phi(u), \quad \forall \theta \in S^1, \quad \forall u \in \Omega_2.$$

Sendo  $\phi$  e  $T$  funções contínuas, a função  $\psi = \phi \circ T : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  é contínua.

Por outro lado,

$$\psi(L(\theta)u) = \phi(T(L(\theta)u))$$

e sendo  $T$  equivariante,

$$\psi(L(\theta)u) = (\phi \circ L(\theta))(T(u))$$

o que implica,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in\theta} \phi(T(u))$$

ou seja,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in\theta} \psi(u)$$

mostrando que  $\psi$  satisfaz (4.5). Portanto,

$$ind\Omega_1 \leq k$$

de onde segue (i).

**Prova de (ii):**

Suponhamos que  $ind\Omega_1 = k_1 < \infty$  e  $ind\Omega_2 = k_2 < \infty$ . Portanto, existem aplicações contínuas  $\phi_j : \Omega_j \rightarrow \mathbb{C}^{k_j} \setminus \{0\}$  e algum  $n_j \in \mathbb{N}^*$ ,  $j = 1, 2$  satisfazendo

$$\phi_j(L(\theta)u) = e^{in_j\theta} \phi_j(u), \quad \forall \theta \in S^1, \quad \forall u \in \Omega_j. \quad (4.6)$$

Sejam  $\widehat{\phi}_j : X \rightarrow \mathbb{C}^{k_j}$  uma extensão contínua de  $\phi_j$  dada pelo Teorema de Tietze (Ver [Apêndice C]) e  $\psi_j : X \rightarrow \mathbb{C}^{k_j}$  definida por

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta} \widehat{\phi}_j(L(\theta)u) d\theta, \quad j = 1, 2.$$

Para  $u \in \Omega_j$  tem-se

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta} \phi_j(L(\theta)u) d\theta, \quad j = 1, 2$$

o que implica,

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta} e^{in_j\theta} \phi_j(u) d\theta, \quad j = 1, 2$$

ou seja,

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_j(u) d\theta, \quad j = 1, 2$$

logo,

$$\psi_j(u) = \phi_j(u), \quad j = 1, 2$$

mostrando que  $\psi_j$  é uma extensão contínua de  $\phi_j$ . Além disso  $\psi_j$  satisfaz (4.6).

Definindo  $\psi : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}^{k_1+k_2}$  por

$$\psi(u) = (\psi_1(u)^{n_2}, \psi_2(u)^{n_1})$$

onde

$$\psi_1(u)^{n_2} = (\psi_{1,1}(u)^{n_2}, \dots, \psi_{1,k_1}(u)^{n_2}) \quad e \quad \psi_2(u)^{n_1} = (\psi_{2,1}(u)^{n_1}, \dots, \psi_{2,k_2}(u)^{n_1}),$$

observamos que

- $\psi_j(\Omega_j) = \phi_j(\Omega_j) \subset \mathbb{C}^{k_j} \setminus \{0\}$ ,  $j = 1, 2$
- $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \mathbb{C}^{k_1+k_2} \setminus \{0\}$

e

$$\psi(L(\theta)u) = (\psi_1(L(\theta)u)^{n_2}, \psi_2(L(\theta)u)^{n_1}).$$

Assim,

$$\psi(L(\theta)u) = ((e^{in_1\theta} \psi_1(u))^{n_2}, (e^{in_2\theta} \psi_2(u))^{n_1})$$

o que implica,

$$\psi(L(\theta)u) = (e^{in_1n_2\theta} \psi_1(u)^{n_2}, e^{in_1n_2\theta} \psi_2(u)^{n_1})$$

ou seja,

$$\psi(L(\theta)u) = e^{in_1n_2\theta}\psi(u).$$

Considerando  $n = n_1n_2$ , segue que  $\psi$  satisfaz (4.5). Logo,

$$\psi \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2, \mathbb{C}^{k_1+k_2} \setminus \{0\})$$

portanto,

$$ind(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq k_1 + k_2$$

mostrando (ii).

**Prova de (iii):**

Considerando  $ind\Omega = k < \infty$  existe uma função

$$\phi \in C(\Omega, \mathbb{C}^k \setminus \{0\})$$

satisfazendo (4.5). Seja  $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}^k$  uma extensão contínua de  $\phi$  verificando (4.5).

Visto que,

$$0 \notin \psi(\Omega) = \phi(\Omega)$$

e  $\Omega$  é compacto, segue que  $\psi$  é uniformemente contínua em  $\Omega$ . Considerando  $\epsilon = dist(0, \psi(\Omega)) > 0$  devemos ter

$$\|\psi(u)\| \geq \epsilon, \quad \forall u \in \Omega. \quad (4.7)$$

Desde que,

$$\Omega_\delta = \{u \in X; dist(u, \Omega) \leq \delta\}$$

para  $\epsilon = dist(0, \psi(\Omega))$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$u, v \in \Omega_\delta, \|u - v\| < \delta \Rightarrow \|\psi(u) - \psi(v)\| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (4.8)$$

Se  $u \in \Omega_\delta$  existe  $v \in \Omega$  tal que  $\|u - v\| < \delta$  consequentemente por (4.7) e (4.8),

$$\|\psi(u)\| \geq \frac{3\epsilon}{4}$$

ou seja,

$$\psi(u) \neq 0, \quad \forall u \in \Omega_\delta.$$

Portanto, existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 \notin \psi(\Omega_\delta).$$

Desse modo,  $\Omega_\delta = N$  é uma vizinhança fechada de  $\Omega$ . Pela Afirmação 1 do Lema 4.2  $N$  é invariante. Portanto,

$$\text{ind}N \leq k.$$

Por outro lado, sendo a inclusão uma aplicação equivariante, por (i) do Teorema 4.4, tem-se

$$\text{ind}N \geq k.$$

Logo,

$$\text{ind}N = \text{ind}\Omega = k$$

mostrando (iii).

**Prova de (iv):**

Primeiramente, considere a seguinte afirmação:

**Afirmação 1:** Se  $u \notin \text{Fix}(S^1)$  então  $\text{ind}(\sigma(u)) = 1$ .

Com efeito, visto que  $u \notin \text{Fix}(S^1)$  a aplicação contínua  $\theta \rightarrow L(\theta)u$  tem período minimal  $\frac{2\pi}{n}$  para algum  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Definamos a função  $\phi : \sigma(u) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  por

$$\phi(v) = e^{in\theta}, \quad \forall v \in \sigma(u).$$

Assim, existe  $\theta \in S^1$  tal que

$$v = L(\theta)u$$

o que implica,

$$\phi(L(\theta)u) = e^{in\theta}.$$



Observe que,

$$\phi(L(\widehat{\theta})L(\theta)u) = e^{in(\widehat{\theta}+\theta)}$$

ou seja,

$$\phi(L(\widehat{\theta})L(\theta)u) = e^{in\widehat{\theta}} \cdot e^{in\theta} = e^{in\widehat{\theta}} \phi(L(\theta)u)$$

mostrando que  $\phi$  satisfaz (4.5). Portanto, sendo  $\phi$  contínua, temos

$$ind(\sigma(u)) = 1$$

mostrando a Afirmação 1.

Se

$$\Omega = \sigma(u_1) \cup \sigma(u_2) \cup \dots \cup \sigma(u_k)$$

é uma união disjunta com

$$u_j \notin \text{Fix}(S^1), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Considerando a aplicação  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  dada por

$$\phi(u) = e^{in_j\theta},$$

se  $u \in \sigma(u_j)$  e  $\theta \rightarrow L(\theta)u_j$  tem período minimal  $\frac{2\pi}{n_j}$ . Desse modo, usando a Afirmação 1, tem-se

$$ind\Omega = 1.$$

Portanto, se  $ind\Omega \geq 2$ ,  $\Omega$  contém uma infinidade de  $S^1$ -órbitas. Mostrando (iv). ■

**Observação 4.2** Note que  $u \in \text{Fix}(S^1)$  se, e somente se, a  $S^1$ -órbita de  $u$ ,  $\sigma(u)$ , se reduz ao conjunto  $\{u\}$ . Neste caso,  $ind\{u\} = \infty$ , pois (4.5) não pode ser satisfeita com  $\phi(u) \neq 0$ .

**Lema 4.3** Seja  $\phi$  um funcional invariante satisfazendo a condição (PS). Sejam  $c \in \mathbb{R}$  e  $N$  uma vizinhança aberta invariante de  $K_c$ . Então existem  $\epsilon > 0$  e  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  tais que

$$(i) \quad \eta(0, u) = u, \quad \forall u \in X$$

$$(ii) \quad \eta(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus N) \subset \phi^{c-\epsilon}$$

$$(iii) \quad \eta(t, L(\theta)u) = L(\theta)\eta(t, u), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall u \in X, \quad \forall \theta \in S^1.$$

**Demonstração:**

Considerando  $S = N^c$ , existem  $\epsilon, \delta > 0$  tais que

$$u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \Rightarrow \|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

pois, caso contrário, tomando  $\epsilon = \frac{1}{n}$  e  $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$  existe  $\{u_n\} \subset X$  tal que

$$u_n \in S_{\frac{2}{\sqrt{n}}}, \quad u_n \in \phi^{-1}\left(\left[c - \frac{2}{n}, c + \frac{2}{n}\right]\right) \quad e \quad \|\phi'(u_n)\| < \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Assim,  $\phi(u_n)$  é limitada e  $\phi'(u_n) \rightarrow 0$ . Desde que  $\phi$  satisfaz (PS),  $(u_n)$  possui uma subsequência, que denotaremos por  $(u_n)$ , tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $X$  para algum  $u \in X$ .

Logo,

$$\phi(u) = \phi(\lim u_n) = \lim \phi(u_n) = c$$

e

$$\phi'(u) = \phi'(\lim u_n) = \lim \phi'(u_n) = 0$$

ou seja,

$$u \in K_c \cap S$$

o que é um absurdo, pois  $S = X \setminus N$  e  $K_c \subset N$ . Pelo Lema 1.2, existe  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  satisfazendo (i) e (ii).

Finalmente, sendo  $\phi$  invariante, em vista do Lema 4.2, podemos supor que o campo pseudo-gradiente  $V$  escolhido para  $\phi$  é equivariante.

Definamos a função  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\psi(u) = \frac{\text{dist}(u, A^c)}{\text{dist}(u, A^c) + \text{dist}(u, B)}$$

onde,

$$A = \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap (N^c)_{2\delta}$$

e

$$B = \phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap (N^c)_\delta.$$

**Afirmção 1:**  $\psi$  é invariante.

Com efeito, note que

$$A^c = \left(\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])\right)^c \cup N_{2\delta}$$

logo, se  $u \in A^c$  temos

$$u \in \left(\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])\right)^c \text{ ou } u \in N_{2\delta}.$$

Se  $u \in \left(\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])\right)^c$  então

$$\phi(u) > c + 2\epsilon \text{ ou } \phi(u) < c - 2\epsilon$$

o que implica,

$$\phi(L(\theta)u) = \phi(u) > c + 2\epsilon \text{ ou } \phi(L(\theta)u) = \phi(u) < c - 2\epsilon$$

mostrando que  $\left(\phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])\right)^c$  e  $N_{2\delta}$  são invariantes, ou seja  $A^c$  é invariante.

Usando um argumento análogo, segue que  $B$  é invariante.

Por outro lado, pela Observação 4.1  $\text{dist}(u, A^c)$  é invariante e  $\text{dist}(u, B)$  é invariante. Desse modo,  $\psi$  é invariante. Mostrando a Afirmção 1.

Definamos a função  $f : X \rightarrow X$  por

$$f(u) = -\psi(u) \frac{V(u)}{\|V(u)\|}.$$

Observe que

$$f(L(\theta)u) = -\psi(L(\theta)u) \frac{V(L(\theta)u)}{\|V(L(\theta)u)\|}.$$

Usando a Afirmção 1 e o fato de  $V$  ser equivariante tem-se

$$f(L(\theta)u) = -\psi(u) \frac{L(\theta)V(u)}{\|V(u)\|}$$

e conseqüentemente,

$$f(L(\theta)u) = L(\theta)f(u)$$

mostrando que  $f$  é equivariante.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, para todo  $u \in X$  o problema de Cauchy

$$(PC)_1 \quad \begin{cases} w' = f(w) \\ w(0) = u \end{cases}$$

possui uma única solução contínua  $w(\cdot, u)$ .

**Afirmção 2:** Se  $w(t, u)$  é solução de  $(PC)_1$ , então

$$w_\theta(t) = L(\theta)w(t, u)$$

é solução do problema

$$(PC)_2 \quad \begin{cases} w'_\theta = f(w_\theta) \\ w_\theta(0) = L(\theta)u. \end{cases}$$

Com efeito, desde que  $L(\theta)$  é linear e contínua, temos

$$w'_\theta(t) = L(\theta)w'(t, u) = L(\theta)f(w)$$

usando o fato que  $f$  é equivariante tem-se

$$w'_\theta(t) = f(L(\theta)w) = f(w_\theta).$$

Note que

$$w_\theta(0) = L(\theta)u$$

portanto,

$$w_\theta(t) = w(t, L(\theta)u)$$

o que mostra a Afirmção 2, e portanto

$$L(\theta)w(t, u) = w(t, L(\theta)u)$$

mostrando que  $w$  é equivariante. Por definição  $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$ , donde segue (iii). ■

No Lema que segue, denotaremos por  $X$  o seguinte espaço de Banach

$$X = \left\{ v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \text{ absolutamente contínua, } (2\pi) - \text{periódica,} \int_0^{2\pi} v(t) dt = 0 \text{ e } \int_0^{2\pi} \|v'(t)\|^3 dt < \infty \right\}$$

com norma (Ver [Apêndice C])

$$\|v\|_X = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|v'(t)\|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}},$$

onde a ação de  $S^1$  é dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t + \theta)$$

sobre  $X$ .

**Lema 4.4** *Sejam  $Y$  o subespaço de  $X$  dado por*

$$Y = \{(cost)e + (sent)Je, e \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

e  $D = \{z \in Y; \|z\| < \delta\}$ . Então  $ind \partial D = N$ .

**Demonstração:**

Primeiramente, note que  $Y$  é invariante.

De fato, se  $u \in Y$  temos

$$u(t) = (cost)e + (sent)Je$$

para algum  $e \in \mathbb{R}^{2N}$ . Assim,

$$(L(\theta)u)(t) = u(t + \theta) = (cos(t + \theta))e + (sen(t + \theta))Je$$

desse modo,

$$(L(\theta)u)(t) = (cost \cos\theta - sen\theta \, sent)e + (sent \cos\theta + sen\theta \, cost)Je$$

donde segue,

$$(L(\theta)u)(t) = cost(cos\theta \, e + sen\theta \, Je) + sent(cos\theta \, Je - sen\theta \, e).$$

Considerando  $\widehat{e} = cos\theta \, e + sen\theta \, Je$  tem-se

$$(L(\theta)u)(t) = cost\widehat{e} + sentJ\widehat{e}$$

logo,  $L(\theta)u \in Y$  e portanto  $L(\theta)Y \subset Y$ . Mostrando que  $Y$  é invariante.

Sendo

$$D = \{z \in Y; \|z\| < \delta\},$$

observe que

$$\text{Fix}(S^1) \cap D = \{0\}.$$

De fato, se  $u \in \text{Fix}(S^1) \cap D$  então

- (1)  $u \in \text{Fix}(S^1)$  e
- (2)  $u \in Y$  com  $\|u\| < \delta$ .

Logo, por (1)

$$(L(\theta)u)(t) = u(t),$$

ou seja,

$$u(t + \theta) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mostrando que  $\theta \in [0, 2\pi)$  é período para  $u$ . Usando (2) segue que o período minimal de  $u$  é  $2\pi$ , logo devemos ter  $u \equiv 0$ .

Portanto,

$$\text{Fix}(S^1) \cap D = \{0\}.$$

Pelo item (v) do Teorema 4.4 tem-se

$$\text{ind} \partial D = N.$$

■

### 4.3 Teorema da Multiplicidade

**Teorema 4.5** *Seja  $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  um funcional invariante limitado inferiormente e satisfazendo a condição (PS). Se  $S^1$  age livremente em um subconjunto invariante*

$$\Omega = \{u \in X; \phi(u) < m\}$$

*com  $m \in \mathbb{R}$  e  $\Omega$  contém uma esfera  $\Sigma$ ,  $(2n - 1)$  dimensional invariante, em que a ação de  $S^1$  é dada por*

$$(L(\theta)u)(t) = u(t + \theta).$$

*Então  $\Omega$  contém pelo menos  $n$   $S^1$ -órbitas distintas de pontos críticos de  $\phi$ .*

**Demonstração:**

Definamos, para  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\Gamma_k = \{\gamma \subset \Omega : \gamma \text{ é compacto, invariante e } \text{ind}\gamma \geq k\}.$$

Por hipótese  $S^1$  age livremente em  $\gamma$ . Além disso,  $\Sigma \subset \Omega$  e  $\text{ind}\Sigma = n$ . Assim,

$$\Sigma \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Considere, para  $k = 1, 2, \dots, n$

$$c_k = \inf_{\gamma \in \Gamma_k} \max_{u \in \gamma} \phi(u).$$

Observe que,

$$\Gamma_k \subset \Gamma_{k-1}$$

onde  $k \geq 2$ . Logo,

$$-\infty < \inf \phi \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k \leq \max_{u \in \Sigma} \phi(u) < m.$$

**Afirmação 1:** Cada  $c_k$  é um valor crítico de  $\phi$ .

De fato, caso contrário, sabendo que existe  $\gamma \in \Gamma_k$  tal que

$$\max_{u \in \gamma} \phi(u) \leq c_k + \epsilon$$

podemos aplicar o Lema 4.3 com  $c = c_k$  e  $K_{c_k} = N = \emptyset$ . Assim, pelo item (ii) do Lema 4.3 segue que

$$\hat{\gamma} = \eta(1, \gamma) \subset \phi^{c_k - \epsilon}.$$

Sendo  $\gamma$  compacto, segue que  $\hat{\gamma}$  é compacto e pelo item (iii) do Lema 4.3, obtemos que  $\hat{\gamma}$  é invariante. Observe que,

$$\max_{u \in \hat{\gamma}} \phi(u) \leq c_k - \epsilon < c_k < m$$

ou seja,

$$\hat{\gamma} \subset \Omega.$$

Note que,

$$\begin{aligned} T : \gamma &\rightarrow \widehat{\gamma} \\ u &\mapsto T(u) = \eta(1, u) \end{aligned}$$

é equivariante. Logo, pelo item (i) do Teorema 4.4

$$\text{ind}\widehat{\gamma} \geq \text{ind}\gamma \geq k$$

ou seja,  $\widehat{\gamma} \in \Gamma_k$ , assim,

$$c_k \leq \max_{u \in \widehat{\gamma}} \phi(u) \leq c_k - \epsilon$$

o que é um absurdo. Mostrando Afirmação 1.

**Afirmação 2:** Se todos os  $c_k$ 's são distintos, então cada  $\phi^{-1}(c_k)$  possui pelo menos uma  $S^1$ -órbita de pontos críticos de  $\phi$ .

De fato, considere  $u_k \in X$  tal que  $\phi(u_k) = c_k$  e  $\phi'(u_k) = 0$ . Desse modo, sendo  $v \in \sigma(u_k)$  tem-se

$$v = L(\theta)u_k$$

assim,

$$\phi(v) = \phi(L(\theta)u_k) = \phi(u_k) = c_k$$

o que implica,

$$\sigma(u_k) \subset \phi^{-1}(\{c_k\}).$$

Por outro lado, usando o Lema 4.1 tem-se

$$\langle \phi'(v), h \rangle = \langle \phi'(L(\theta)u_k), h \rangle = \langle \phi'(u_k), L(-\theta)h \rangle = 0, \quad \forall h \in X$$

logo,

$$\sigma(u_k) \subset K_{c_k}$$

mostrando a Afirmação 2.



Por outro lado, vamos mostrar que se  $c_j = c_k$  com  $j < k$ , temos

$$indK_c > k - j$$

ou seja,

$$indK_c \geq 2$$

onde  $c = c_j = c_k$ . Assim, pelo item (iv) do Teorema 4.4,  $K_c$  possui uma infinidade de  $S^1$ -órbitas. Donde concluímos, usando o fato que  $K_c \subset \Omega$  é um conjunto fechado invariante, que  $\Omega$  contém uma infinidade de  $S^1$ -órbitas distintas de pontos críticos de  $\phi$ .

Sendo,

$$K_c = \{u \in X; \phi(u) = c \text{ e } \phi'(u) = 0\}$$

e usando o fato que  $\phi$  satisfaz a condição (PS), segue que  $K_c$  é compacto.

Pelo item (iii) do Teorema 4.4, existe uma vizinhança fechada invariante  $N$  de  $K_c$  com  $indN = indK_c$ . Então o interior de  $N$ , denotado por  $intN$ , é uma vizinhança aberta invariante de  $K_c$ , de sorte que podemos aplicar o Lema 4.3 e concluir a existência de  $\epsilon > 0$  e  $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$  satisfazendo as propriedades (i) - (iii).

Agora, pela definição de  $c = c_k$ , tomemos  $\gamma \in \Gamma_k$  tal que

$$\max_{u \in \gamma} \phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Definamos

$$\beta = \gamma \setminus int N.$$

Usando a definição de  $S^1$ -órbita,

$$k \leq ind\gamma \leq ind(\beta \cup N) \leq ind\beta + indN = ind\beta + indK_c.$$

Visto que,

$$\beta \subset \phi^{c+\epsilon} \setminus int N$$

usando o Lema 4.3,

$$\widehat{\beta} = \eta(1, \beta) \subset \phi^{c-\epsilon}.$$

Por outro lado, sendo  $\beta$  compacto segue que  $\widehat{\beta}$  é compacto. Note que,

$$L(\theta)\widehat{\beta} = L(\theta)\eta(1, \beta)$$

usando o Lema 4.3 e o fato que  $\beta$  é invariante, segue

$$L(\theta)\widehat{\beta} = \eta(1, L(\theta)\beta) = \eta(1, \beta) = \widehat{\beta}$$

ou seja,  $\widehat{\beta}$  é invariante.

Observe que,

$$\max_{u \in \widehat{\beta}} \phi(u) \leq c - \epsilon$$

pela definição de  $c_j = c$ , temos

$$\text{ind}\widehat{\beta} < j.$$

Pelo item (i) do Teorema 4.4

$$\text{ind}\beta \leq \text{ind}\widehat{\beta} < j$$

logo,

$$k < j + \text{ind}K_c$$

ou seja,

$$\text{ind}K_c > k - j$$

e conseqüentemente

$$\text{ind}K_c \geq 2.$$

■

## 4.4 Multiplicidade de Órbitas Hamiltonianas Periódicas em uma Superfície Convexa

Para  $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$  é possível mostrar usando o Teorema 3.14 a existência de pelo menos uma órbita periódica para

$$u'(t) = J\nabla H(u(t)) \tag{4.9}$$

em  $S = H^{-1}(c)$ , desde que

(H<sub>8</sub>) Para todo  $u \in S$ ,  $\nabla H(u) \neq 0$  e  $S$  é a fronteira de um conjunto compacto estritamente convexo  $C$  com  $0 \in \text{int}C$ .

Assumiremos a seguinte hipótese que será de grande importância no decorrer desta seção.

(H<sub>9</sub>) Existe  $0 < r \leq R$  tal que

$$\frac{R}{r} < \sqrt{2},$$

e

$$B[0, r] \subset C \subset B[0, R].$$

**Teorema 4.6** *Assumindo as hipóteses (H<sub>8</sub>) e (H<sub>9</sub>) existe pelo menos  $N$  órbitas periódicas para (4.9) em  $S$ .*

Antes de demonstrar o Teorema 4.6 iremos mostrar algumas propriedades da função  $F$  definida no Lema 3.11 e alguns resultados que serão utilizados nesta demonstração. Desde que  $F$  satisfaz os itens (i)-(vi) do Lema 3.11, assumindo (H<sub>9</sub>) acima temos

$$\left(\frac{|u|}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \left(\frac{|u|}{r}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

De fato, observe que

$$r \frac{u}{|u|} \in B[0, r] \subset C$$

assim,

$$r \frac{u}{|u|} \in C$$

o que implica,

$$\frac{|u|}{r} \geq \inf\{\lambda > 0; u \in \lambda C\}$$

isto é,

$$j_c(u) \leq \frac{|u|}{r}. \tag{4.10}$$

Por outro lado, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\lambda > 0$  tal que

$$j_c(u) \leq \lambda < j_c(u) + \epsilon \quad e \quad \frac{u}{\lambda} \in C.$$

Logo,

$$\frac{u}{\lambda} \in B[0, R]$$

assim,

$$\left| \frac{u}{\lambda} \right| \leq R$$

o que implica,

$$|u| \leq Rj_c(u) + R\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

portanto,

$$|u| \leq Rj_c(u)$$

ou seja,

$$j_c(u) \geq \frac{|u|}{R}. \tag{4.11}$$

Segue de (4.10) e (4.11) que

$$\frac{|u|}{R} \leq j_c(u) \leq \frac{|u|}{r}$$

e conseqüentemente,

$$\left( \frac{|u|}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \leq F(u) \leq \left( \frac{|u|}{r} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.12}$$

Desde que

$$H^{-1}(c) = S = F^{-1}(1)$$

é suficiente, pelo Lema 3.10, encontrar  $N$  órbitas periódicas distintas para

$$u'(t) = J\nabla F(u(t)) \tag{4.13}$$

em  $S$ .

Sejam  $u_1, \dots, u_N$   $N$  soluções descrevendo órbitas distintas de (4.13) com período minimal  $2\pi$ . Se

$$F(u_k(t)) = d_k > 0$$

então  $w_k$  definido por

$$w_k(t) = d_k^{-\frac{2}{3}} u_k \left( d_k^{\frac{1}{3}} t \right)$$

é solução de (4.13) com período minimal  $\frac{2\pi}{d_k^{\frac{1}{3}}}$  e energia

$$F(w_k(t)) = 1.$$

Se  $w_j$  e  $w_k$  descrevem a mesma órbita em  $S = F^{-1}(1)$ , existe uma função  $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tal que

$$w_k = w_j \circ \psi$$

assim,

$$J\nabla F(w_k) = w'_k = \psi'(w'_j \circ \psi) = \psi' J\nabla F(w_j \circ \psi)$$

o que implica,

$$J\nabla F(w_k) = \psi' J\nabla F(w_j)$$

logo,  $\psi' \equiv 1$  e sendo  $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  segue

$$w_k(t) = w_j(t + \alpha).$$

Desse modo,  $w_j$  e  $w_k$  têm o mesmo período minimal, isto é,  $d_k = d_j$ . Consequentemente,

$$u_k(t) = u_j(t + \hat{\alpha}),$$

ou seja,  $u_j$  e  $u_k$  descrevem a mesma órbita e usando o fato que as órbitas são distintas temos  $j = k$ . Assim, é suficiente encontrarmos  $N$  soluções descrevendo órbitas de (4.13) com período minimal  $2\pi$ .

Seja  $G$  a transformada de Legendre da função  $F$ , usando (4.12), obtemos

$$\eta r^3 |v|^3 \leq G(v) \leq \eta R^3 |v|^3 \quad (4.14)$$

onde  $\eta = \frac{4}{27}$ .

No que segue, considere  $X$  o espaço de Banach utilizado no Lema 4.4,  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcional energia dado por

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2}(Jv', v) + G(v') \right] dt$$

e os seguintes subespaços

$$Y = \{(\cos t)e + (\sin t)Je : e \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

e

$$Z = \left\{ v \in X; v \text{ é } \frac{2\pi}{k} \text{-periódica para algum } k \geq 2 \right\}.$$

**Lema 4.5** Se  $v \in Y$  e  $\|v\|_X = \rho = (3\eta R^3)^{-1}$ , então

$$\phi(v) \leq M = -\frac{\pi}{3}\rho^2.$$

**Demonstração:**

Se  $v \in Y$ ,

$$v = (\cos t)e + (\sin t)Je, \quad e \in \mathbb{R}^{2N}$$

sendo,

$$\phi(v) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2}(Jv', v) + G(v') \right] dt,$$

tem-se

$$\phi(v) \leq -\pi\|v\|^2 + 2\pi\eta R^3\|v\|^3$$

isto é,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3} (3\|v\|^2 - 6\eta R^3\|v\|^3)$$

o que implica,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3} (3\rho^2 - 6\eta R^3\rho^3)$$

assim,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\rho^2 (3 - 6\eta R^3\rho)$$

logo,

$$\phi(v) \leq -\frac{\pi}{3}\rho^2.$$

■

**Lema 4.6** *Se  $v \in Z$  então*

$$\phi(v) \geq m = -\frac{\pi}{6} (6\eta r^3)^{-2}.$$

**Demonstração:**

Se  $\|v\|_X = 1$  e  $v$  é  $\frac{2\pi}{k}$  - periódica para algum  $k \geq 2$ , então por definição

$$\int_0^{2\pi} \|v'(t)\|^3 dt = 2\pi$$

usando a Proposição 3.9, temos

$$\int_0^{2\pi} (Jv', v) dt = k \int_0^{\frac{2\pi}{k}} (Jv', v) dt \geq -\frac{2\pi}{k} \geq -\pi.$$

Assim, se  $v \in Z$ , considerando  $w = \frac{v}{\|v\|_X}$  usando (4.14),

$$\phi(v) \geq 2\pi\eta r^3 \|v\|_X^3 - \frac{\pi}{2} \|v\|_X^2. \quad (4.15)$$

**Afirmção 1:** O segundo membro da desigualdade (4.15) é mínimo quando  $\|v\| = (6\eta r^3)^{-1}$ .

Com efeito, considerando

$$f(t) = 2\pi\eta r^3 t^3 - \frac{\pi}{2} t^2$$

tem-se

$$f'(t) = 6\pi\eta r^3 t^2 - \pi t$$

fazendo  $f'(t) = 0$  ficamos com

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = (6\eta r^3)^{-1}.$$

Por outro lado,

$$f''(t) = 12\pi\eta r^3 t - \pi$$

donde segue,

$$f''(0) = -\pi < 0$$

e

$$f''\left((6\eta r^3)^{-1}\right) = \pi > 0$$

logo,  $f$  atinge seu mínimo quando  $\|v\|_X = (6\eta r^3)^{-1}$ .

Portanto,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}(-12\eta r^3\|v\|^3 + 3\|v\|^2)$$

o que implica,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}\|v\|^2$$

logo,

$$\phi(v) \geq -\frac{\pi}{6}(6\eta r^3)^{-2}.$$

■

Agora vamos demonstrar o Teorema 4.6.

**Demonstração:**

Considere sobre  $X$  a ação de  $S^1$  dada por

$$(L(\theta)u)(t) = u(t + \theta).$$

**Afirmção 1:**  $S^1$  age livremente em um subconjunto invariante  $\Omega$  se e somente se  $\Omega \cap Z = \emptyset$ .

De fato, primeiramente vamos mostrar que se  $S^1$  age livremente em um subconjunto invariante  $\Omega$  então  $\Omega \cap Z = \emptyset$ . Suponhamos, por contradição, que existe

$$u \in \Omega \cap Z$$

desse modo,  $u \in X$  e  $u$  é  $\frac{2\pi}{k}$ -periódica para algum  $k \geq 2$ . Por hipótese,

$$L(\theta)u(t) = u(t + \theta).$$



Considerando  $\theta = \frac{2\pi}{k}$  para algum  $k \geq 2$ , ficamos com a igualdade

$$L(\theta)u(t) = u(t).$$

Portanto, existe  $u \in X$  e  $\theta \neq 0 \in S^1$  tal que

$$L(\theta)u = u$$

o que é um absurdo.

Reciprocamente, vamos mostrar que se  $\Omega \cap Z = \emptyset$  então  $S^1$  age livremente em um subconjunto invariante  $\Omega$ . Suponhamos, por contradição, que  $S^1$  não age livremente em um subconjunto invariante  $\Omega$ , então

$$(L(\theta)u)(t) = u(t)$$

para todo  $\theta \in S^1$ , para todo  $u \in \Omega$  mas  $\theta \neq 0$ . Assim,

$$u(t + \theta) = u(t)$$

com  $\theta \neq 0$ . Logo  $\theta = \frac{2\pi}{k}$  para algum  $k \geq 2$ . Assim,  $u \in Z$ . Portanto

$$u \in \Omega \cap Z$$

o que é um absurdo. Mostrando a Afirmação 1.

Observe que o funcional  $\phi$  é invariante, limitado inferiormente pelo Lema 3.8 e satisfaz a condição  $(PS)$  pelo Lema 3.9. Pelo Lema 4.6 tem-se

$$\Omega \cap Z = \emptyset$$

onde

$$\Omega = \{v \in X; \phi(v) < m\}.$$

Note que  $\Omega$  é invariante, pois  $\phi$  é invariante. Da Afirmação 1, acima, segue que  $S^1$  age livremente em  $\Omega$ .

Considere

$$\Sigma = \{v \in Y; \|v\| = \rho\}.$$

Observe que, se  $M < m$  e assumindo que existe  $0 < r \leq R$  tal que

$$\frac{R}{r} < \sqrt{2}$$

e

$$B[0, r] \subset C \subset B[0, R]$$

temos

$$\Sigma \subset \Omega.$$

De fato, note que

$$M < m \Leftrightarrow -\frac{\pi}{27\eta^2 R^6} < -\frac{\pi}{216\eta^2 r^6}$$

o que implica,

$$M < m \Leftrightarrow R^6 < 8r^6$$

logo,

$$M < m \Leftrightarrow \frac{R}{r} < \sqrt{2}.$$

Mostrando que

$$\Sigma \subset \Omega.$$

Pelo Teorema 4.5,  $\Omega$  contém pelo menos  $N$   $S^1$ -órbitas distintas

$$\{L(\theta)v_k; \theta \in S^1\}, \quad k = 1, \dots, n$$

de pontos críticos de  $\phi$ . Pelo Lema 3.7 para cada  $v_k$  existe uma solução  $u_k$   $2\pi$ -periódica para

$$u'_k(t) = J\nabla F(u_k(t))$$

tal que

$$v_k(t) = -J \left( u_k(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(s) ds \right). \quad (4.16)$$

Além disso,  $2\pi$  é período minimal de  $v_k$ , e assim,  $u_k$  tem período minimal  $2\pi$ .

Se  $u_j$  e  $u_k$  descrevem a mesma órbita, então, como já visto,

$$u_k(t) = (u_j \circ \psi)(t)$$

onde  $\psi$  é uma translação. Assim,

$$u_k(t) = u_j(t + \theta)$$

para algum  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Ou seja,

$$u_k(t) = L(\theta)u_j$$

para algum  $\theta \in S^1$ . Usando (4.16) tem-se

$$v_k(t) = L(\theta)v_j.$$

Logo,  $v_j$  e  $v_k$  tem a mesma  $S^1$ -órbita e  $k = j$ .



# Apêndice A

## Séries de Fourier

Neste Apêndice faremos um breve estudo sobre as séries de Fourier. Mais detalhes podem ser encontrados em [6].

Seja  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável, a sua série de Fourier é a série dada por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) + b_k \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) \right). \quad (\text{A.1})$$

Podemos reescrever a série de Fourier de uma função  $u$  definida em  $[0, T]$  usando exponenciais complexas. Lembre-se que se  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$e^{\frac{i2k\pi}{T}t} = \cos \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{T} t \right)$$

o que implica,

$$e^{-\frac{i2k\pi}{T}t} = \cos \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{T} t \right)$$

assim,

$$\cos \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}}{2}$$

e

$$\operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}}{2i}.$$

Logo,

$$a_k \cos \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) + b_k \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{T} t \right) = a_k \left( \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}}{2} \right) + b_k \left( \frac{e^{\frac{i2k\pi}{T}t} - e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}}{2i} \right)$$

donde segue,

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}$$

usando o fato que  $i^2 = -1$ , obtemos

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}.$$

Reescrevendo (A.1) temos

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{\frac{i2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{-\frac{i2k\pi}{T}t}$$

portanto,

$$S[u] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}$$

é a série de Fourier complexa de  $u$ , onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) \quad e \quad c_{-k} = \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Recorde-se que  $a_0$ ,  $b_k$  e  $a_k$  são obtidos da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) dt$$

e

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) dt.$$

Além disso, os coeficientes de Fourier complexos de  $u$  e  $u'$  satisfazem

$$c'_k = \frac{i2\pi k}{T} c_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quanto aos coeficientes reais, se as séries de Fourier de  $u$  e  $u'$  são dadas, respectivamente, por

$$S[u] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) \right)$$

e

$$S[u'] = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a'_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + b'_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) \right)$$

então

$$a'_0 = 0, \quad a'_k = \frac{2k\pi}{T}b_k \quad e \quad b'_k = -\frac{2k\pi}{T}a_k$$

e portanto,

$$S[u'] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{i2\pi k}{T} c_k e^{\frac{i2k\pi}{T}t}.$$

é a série de Fourier complexa de  $u'$ .

# Apêndice B

## Funcionais Diferenciáveis

Neste Apêndice nossa intenção é mostrar que os funcionais usados no decorrer desta dissertação são de classe  $C^1$ .

**Definição B.1** *Seja  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional, definido em um espaço normado. Diremos que  $J$  é Fréchet diferenciável em  $u \in X$ , se existe  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear contínuo verificando*

$$\frac{|J(u+h) - J(u) - L(h)|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|h\| \rightarrow 0.$$

Primeiramente vamos mostrar que o funcional  $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  definido no Capítulo 2 por

$$\phi(u) = \int_0^T \left[ \frac{u'^2}{2} - G(u) + fu \right] dt$$

é de classe  $C^1(H, \mathbb{R})$ , onde

$$H = \left\{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é absolutamente contínua, } T\text{-periódica e } \int_0^T |u'(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Para tanto, basta mostrarmos que o funcional  $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\psi(u) = \int_0^T G(u) dt$$

é de classe  $C^1(H, \mathbb{R})$ .

**Afirmção 1:**  $\psi$  é Fréchet diferenciável e  $\psi'(u)v = \int_0^T G'(u)v dt$ .

Com efeito, para  $u, v \in H$  considere

$$r(v) = \psi(u+v) - \psi(u) - \int_0^T G'(u)v dt \quad (\text{B.1})$$

onde esta última parcela é obtida usando o mesmo raciocínio da seção (3.5). Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Usando (B.1) tem-se

$$r(v) = \int_0^T [G(u+v) - G(u)] dt - \int_0^T G'(u)v dt$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$G(u+v) - G(u) = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv) dx$$

o que implica,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} G(u+xv) dx = \int_0^1 G'(u+xv)v dx.$$

Assim,

$$r(v) = \int_0^T \left[ \int_0^1 G'(u+xv)v dx \right] dt - \int_0^T G'(u)v dt$$

donde segue,

$$r(v) = \int_0^T \left[ \int_0^1 \left( G'(u+xv) - G'(u) \right) v dx \right] dt$$

logo,

$$|r(v)| \leq \int_0^T \left[ \int_0^1 \left| G'(u+xv) - G'(u) \right| |v| dx \right] dt. \quad (\text{B.2})$$

Observe que, usando o mesmo raciocínio que na Afirmção 1 do Lema (2.2), tem-se

$$G'(u+xv) - G'(u) \in L^2([0, T]).$$

Aplicando o Teorema de Fubini em (B.2), obtemos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \left[ \int_0^T \left| G'(u+xv) - G'(u) \right| |v| dt \right] dx$$



usando a desigualdade de Hölder, temos

$$|r(v)| \leq \int_0^1 \|G'(u + xv) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\|_{L^2([0,T])} dx$$

Por Imersões contínuas de Sobolev segue

$$|r(v)| \leq C \int_0^1 \|G'(u + xv) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} \|v\|_H dx$$

logo,

$$\frac{|r(v)|}{\|v\|} \leq C \int_0^1 \|G'(u + xv) - G'(u)\|_{L^2([0,T])} dx.$$

Definamos para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\theta_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\theta_n(x) = \|G'(u + xv_n) - G'(u)\|_{L^2([0,T])}.$$

Desse modo,

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C \int_0^1 \theta_n(x) dx.$$

Para cada  $x$  fixado, temos usando o mesmo raciocínio que na Afirmação 1 do Lema (2.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |G'(u + xv_n) - G'(u)|^2 dt = 0$$

assim, para cada  $x$  fixado  $\theta_n(x) \rightarrow 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . Por outro lado,

$$0 \leq \theta_n(x) \leq \|G'(u + xv_n)\|_{L^2([0,T])} + \|G'(u)\|_{L^2([0,T])}$$

o que implica,

$$0 \leq \theta_n(x) \leq 2MT^{\frac{1}{2}} = \beta \in L^1([0, T])$$

onde  $G'$  é tal que

$$|G'(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \theta_n(x) dx = 0$$

ou seja,

$$\theta_n \rightarrow 0 \text{ em } L^1([0, T])$$

mostrando a Afirmação 1.

Agora vamos mostrar que  $\psi'$  é contínua, para tanto, basta mostrarmos que, se  $u_n \rightarrow u$  em  $H$  então

$$\|\psi'(u_n) - \psi'(u)\|_{H^*} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Primeiramente, considere  $\{v_n\} \subset H$  com  $v_n \rightarrow 0$ . Das imersões contínuas de Sobolev

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2([0, T])$$

logo, a menos de subsequência

$$v_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p em } [0, T].$$

Usando a continuidade de  $G'$

$$G'(u + v_n)(x) \rightarrow G'(u(x)) \text{ q.t.p em } [0, T]$$

o que implica,

$$|G'(u + v_n)(x) - G'(u(x))|^2 \rightarrow 0 \text{ q.t.p em } [0, T].$$

Por outro lado,

$$|G'(u + v_n)(x) - G'(u(x))|^2 \leq (2M)^2 \in L^1([0, T]).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |G'(u + v_n)(x) - G'(u(x))|^2 dx = 0$$

ou seja,

$$G'(u + v_n) \rightarrow G'(u) \text{ em } L^2([0, T])$$

mostrando que,

$$G'(u+v) \rightarrow G'(u) \text{ em } L^2([0, T]); \text{ quando } v \rightarrow 0; v \in H.$$

Por definição,

$$\|\psi'(u+v_n) - \psi'(u)\|_{H^*} = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \langle \psi'(u+v_n) - \psi'(u), v \rangle \right|$$

usando o que mostramos na Afirmação 1, segue

$$\left| \langle \psi'(u+v_n) - \psi'(u), v \rangle \right| \leq \int_0^T |G'(u+v_n) - G'(u)| |v| dt$$

usando a desigualdade de Hölder, as imersões contínuas de Sobolev e o fato que  $\|v\|_H \leq 1$  tem-se

$$\left| \langle \psi'(u+v_n) - \psi'(u), v \rangle \right| \leq C \|G'(u+v_n) - G'(u)\|_{L^2([0, T])}$$

o que implica,

$$\|\psi'(u+v_n) - \psi'(u)\|_{H^*} \leq C \|G'(u+v_n) - G'(u)\|_{L^2([0, T])} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

ou seja,

$$\psi'(u+v_n) \rightarrow \psi'(u)$$

mostrando que  $\psi'$  é contínuo. ■

Nosso objetivo agora é mostrar que o funcional  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido no Capítulo 3 por

$$\phi(v) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (Jv', v) + G(t, v') \right] dt$$

é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ . Para tanto, vamos mostrar que o funcional  $K : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$K(v) = \int_0^T G(t, v') dt$$

é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ .

Por definição,  $G = H^*$  está bem definida e satisfaz

$$\left( \frac{1}{\gamma q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} - \alpha \leq G(t, v) \leq \left( \frac{1}{\beta q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{\|v\|^p}{p} + \alpha.$$

Em particular, a segunda desigualdade acima mostra que a ação dual

$$\phi(v) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (Jv', v) + G(t, v') \right] dt$$

está bem definida.

Pelo Teorema 3.6 temos  $G \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  e pelo Lema 3.5 tem-se

$$\|\nabla G(t, v')\| \leq C_2 \|v'\|^{q-1} + C_3.$$

Para mostrar que o funcional

$$K(v) = \int_0^T G(t, v') dt$$

é diferenciável a Fréchet, basta utilizarmos um raciocínio análogo ao usado na Afirmação 1 deste Apêndice. Portanto para mostrar que o funcional  $K$  é de classe  $C^1(X, \mathbb{R})$  vamos mostrar que  $K'$  é contínua.

**Afirmção:**  $K'$  é contínua, ou seja, se  $u_n \rightarrow u$  em  $X$ , devemos ter

$$\|K'(u_n) - K'(u)\|_{H^*} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Com efeito, por definição

$$\|K'(u_n) - K'(u)\|_{H^*} = \sup_{\|h\| \leq 1} |\langle K'(u_n) - K'(u), h \rangle|$$

e conseqüentemente,

$$\|K'(u_n) - K'(u)\|_{H^*} \leq \int_0^T (\nabla G(t, u'_n) - \nabla G(t, u'), h') dt.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\|K'(u_n) - K'(u)\|_{H^*} \leq \|\nabla G(t, u'_n) - \nabla G(t, u')\|_{L^q([0, T])} \|h'\|_{L^p([0, T])}$$

Supondo  $u_n \rightarrow u$  em  $X$ , concluímos que

$$\|K'(u_n) - K'(u)\|_{H^*} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

■

# Apêndice C

## Resultados Gerais

Neste Apêndice enunciaremos uma definição e os principais teoremas utilizados nesta dissertação.

**Definição C.1** (Ver[10]) Uma família  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de um espaço métrico  $M$  chama-se localmente finita quando todo ponto  $x \in M$  possui uma vizinhança que intercecta apenas um número finito de conjuntos  $C_\lambda$ .

**Teorema C.2** (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver[2]) Seja  $f_n$  uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável  $f$ . Se existe uma função integrável  $g$  tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

então  $f$  é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

**Teorema C.3** (Desigualdade de Hölder) (Ver[2]) Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ , onde  $1 \leq p < +\infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,

$$fg \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Teorema C.4** (Ver[3]) Seja  $(x_n)$  uma sequência fracamente convergente em um espaço normado, isto é, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$ . Então,

(i) O limite fraco  $x$  de  $(x_n)$  é único

(ii) Toda subsequência  $(x_{n_j}) \subset (x_n)$  converge fraco para  $x$

(iii) A sequência  $(x_n)$  é limitada.

**Teorema C.5** (Teorema de Riez) (Ver[3]) Todo funcional linear contínuo  $f$  sobre um espaço de Hilbert, pode ser representado em termos do produto interno, isto é,

$$f(x) = (z, x)$$

onde  $z$  é unicamente determinado e verifica

$$\|f\| = \|z\|.$$

**Teorema C.6** (Ver[3]) Seja  $H$  um espaço de Banach reflexivo. Se  $(u_n)$  é uma sequência limitada em  $H$ , então existem uma subsequência  $(u_{n_j}) \subset (u_n)$  e  $u \in H$  tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em } H.$$

**Teorema C.7** (Du Bois Raymond) (Ver[3]) Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} u\phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0(\Omega).$$

Então,

$$u = 0 \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

**Teorema C.8** (Ver[3]) Se  $u \in W^{1,p}(I)$ , então

$$u(x) - u(y) = \int_y^x |u'(t)| dt.$$

onde  $I = (a, b)$  é um intervalo limitado ou não.

**Teorema C.9** (Ver[2]) Se  $f \in L^1(X, \chi, \mu)$  dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B f d\mu < \epsilon.$$

**Teorema C.10** (Teorema de Tietze) (Ver[10]) Dada uma função real contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em um subconjunto fechado  $X \subset \mathbb{R}^m$ , existe uma função  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $F|_X = f$ .

**Teorema C.11** (Teorema do Valor Intermediário) (Ver[9]) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f(a) < d < f(b)$  então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$ .

**Teorema C.12** (Teorema de Fubini) (Ver[3]) Suponhamos que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Então, para todo  $x \in \Omega_1$

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ e } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx.$$

**Lema C.13** Considere  $X$  o seguinte espaço vetorial

$$X = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}; \text{ absolutamente contínua, } T - \text{periódica,} \\ \int_0^T v(t) dt = 0 \text{ e } \int_0^T \|v'(t)\|^p dt < \infty \end{array} \right\}.$$

Então a função  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\|_X = \left( \frac{1}{T} \int_0^T \|v'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma.

**Demonstração:**

Devemos mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $\|v\|_X \geq 0, \quad \forall v \in X$
- (ii)  $\|v\|_X = 0$  se, e somente se,  $v \equiv 0$
- (iii)  $\|\alpha v\|_X = |\alpha| \|v\|_X, \quad \forall v \in X \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (iv)  $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$

Observe que os itens (i), (iii) e (iv) seguem diretamente das propriedades da norma nos Espaços  $L^p([0, T])$ .

Se  $\|v\|_X = 0$ , temos

$$\int_0^T \|v'(t)\|^p dt = 0$$

o que implica,

$$\|v'\|^p = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}$$

e conseqüentemente

$$v = C \text{ q.t.p em } X.$$

Sendo  $\int_0^T v(t) dt = 0$  tem-se  $v \equiv 0$ .

Reciprocamente, se  $v \equiv 0$  então

$$\int_0^T \|v'(t)\|^p dt = 0$$

assim,

$$\|v\|_X = 0$$

o que mostra (ii). ■

**Lema C.14** (Ver [5]) Seja  $G$  um espaço de Banach e  $f : [a, b] \rightarrow G$  uma função contínua.

Então,

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$



# Bibliografia

- [1] A. Ambrosetti, P. H Rabinowitz., *Dual Variational methods in critical theory and applications*. J. Funct. Anal. 14 (1973).
- [2] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.
- [3] Brézis, Haim., *Analyse Fonctionnelle*. 2<sup>a</sup> ed. Masson, 1987.
- [4] Costa, David Goldstein., *Tópicos em análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- [5] Dantas, Moisés dos Santos, *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos Variacionais*. Dissertação de Mestrado. UFCG, 2005.
- [6] Iório Jr., Rafael José e Iório, Valéria., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [7] J. Mawhin, M. Willem., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, New York, 1983.
- [8] Lang, Serg., *Analysis II*. Addison-Wesley, 1969.
- [9] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [10] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, CNPq-IMPA, 1977.
- [11] Sotomayor, Jorge., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [12] Willem, Michel. , *Lectures on Critical Point Theory*, Trabalho de Matemática N. 199, UnB, 1983. New York, 1983.