Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades de Álgebras de Matrizes e o Teorema de Amitsur-Levitzki

por

Marciel Medeiros de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Antonio Pereira Brandão Junior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande-PB

Dezembro/2010

Identidades de Álgebras de Matrizes e o Teorema de Amitsur-Levitzki

por

Marciel Medeiros de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves-UnB

Prof. Dr. José Antônio O. Freitas-UnB

Prof. Dr. Antonio Pereira Brandão Junior

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2010

Resumo

Neste trabalho fazemos uma abordagem sobre as identidades polinomiais da álgebra das matrizes $M_n(K)$, onde K é um corpo. Inicialmente, apresentamos as provas de Rosset e Swan para o Teorema de Amitsur-Levitzki. Em seguida, fazemos um estudo sobre as identidades de $M_n(K)$ de grau $2n+1$ para $n > 2$ (considerando $char K = 0$) e fechamos essa abordagem com a apresentação da resposta de Chang para a questão sugerida por Formanek sobre minimalidade de um inteiro positivo m tal que o polinômio duplo de Capelli D_m é uma identidade para $M_n(K)$.

Abstract

In this work we approach polinomial identities of the algebra of matrix $M_n(K)$, where K is a field. Initially, we present the Rosset's and Swan's proofs for the Theorem of Amitsur-Levitzki. Afterward, we make a study on the identities of $M_n(K)$ of $2n+1$ degree (considering $char K = 0$). We end this approach with the presentation of the minimality of a integer positive number m such that the Capelli double polinomial D_m is an identity of $M_n(K)$.

Agradecimentos

A batalha da qual sai vencedor, tem como troféu este trabalho. Todavia esta vitória só foi possível, porque recebi apoio, atenção e força daqueles que nos amam e torcem pela minha felicidade. A estes quero agradecer.

Agradeço primeiramente a Deus. Sem ele nada teria sido possível.

Aos meus pais, Cícero Gomes e Maria Zeth pelo amor e educação, e por ensinar valorizar a honestidade, a humildade e a simplicidade. À Marcelino e Maricélia, meus irmãos, pelo companheirismo e compreensão. A meu cunhado Francegildo pela amizade. Aos meus avós, Pedro Martins e Francisca que souberam criar e educar minha mãe. Aos meus tios e demais familiares pelo carinho e incentivos.

A João Moraes, Altinha, Jean e Diego, família que me acolheu com muito carinho em Campina Grande, dando todas as condições para que desenvolvesse minhas atividades com muita tranquilidade.

Aos professores da UEPB pela minha formação na graduação. Especialmente a Vandenberg pelo incentivo e pela confiança.

Aos professores da Pós-Graduação pela contribuição que deram para minha formação no Mestrado. Em especial a Braúlio Maia pelos incentivos, a Marco Aurélio pela confiança e a Daniel Cordeiro pelo reconhecimento de um trabalho desenvolvido.

Ao professor Antonio Pereira Brandão, não somente pela orientação, mas pelo companheirismo, profissionalismo, paciência e toda contribuição dada para realização deste trabalho. Brandão é um exemplo de que é possível ser genial, simples e humilde ao mesmo tempo. Ao professor Sérgio Mota Alves pela elaboração do projeto deste trabalho.

Aos demais professores do DME/UFCG e funcionários da Pós-Graduação que também contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores da Banca Examinadora que avaliaram o trabalho e deram valiosas sugestões que ajudaram a melhorara nosso trabalho.

Aos meus amigos e amigas de Mestrado, que muitas vezes mais pareciam meus irmãos. Em especial a Sabrina, Luciano, Jacson, Eder, Jussiê e Tonhaunm. E aos demais amigos e amigas que conquistei na UFCG. Em especial Priscila Nilo pelo companheirismo.

Aos meus amigos e colegas historiadores pela amizade e apoio. Especialmente Paula, Raquel e Valmir.

Aos amigos e amigas de graduação em Matemática.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Muito obrigado, a todos. Obrigado mesmo.

Dedicatória

Aos meus pais, Maria Zeth e Cícero Gomes e aos meus irmãos, Maricélia e Marcelino.

Conteúdo

Introdução

As álgebras são objetos de grande importância na Teoria dos Anéis. Dentre elas se destacam as álgebras com identidades polinomiais, também chamadas de PI-álgebras. Uma identidade polinomial para uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, ..., x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula sob qualquer substituição por elementos de A. Quando existe um polinômio não nulo que é uma identidade polinomial para A, dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial ou PI-álgebra. Como exemplos de PI-álgebras podemos citar as álgebras comutativas e as de dimensão finita. O estudo das identidades polinomiais de uma álgebra é um tema de grande interesse, à medida que as identidades dizem muito a respeito da compreensão da estrutura de uma álgebra.

A teoria das álgebras com identidades polinomiais, também chamada de PI-teoria, começou a ser abordada com mais profundidade a partir dos anos de 1945, sobretudo com os trabalhos dos matemáticos N. Jacobson [11], J. Levitzki [18] e I. Kaplansky [13], que tratavam da estrutura de anéis (ou álgebras) com identidades polinomiais.

Com o alvorecer dos anos de 1950, os estudos no campo da PI-teoria passaram a se desenvolver de maneira mais intensa, impulsionados principalmente pela publicação do trabalho de S. A. Amitsur e J. Levitzki [1] que, usando argumentos combinatórios, demonstraram que o polinômio standard St_{2n} é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$, trabalho este que é chamado de Teorema de Amitsur-Levitzki. Posteriormente, matemáticos como Higman, Nagata, Regev, Herstein, Formanek, Rosset, Razmyslov, Swan, entre outros, apresentaram outras provas para este teorema, utilizando técnicas diferentes. Neste trabalho, damos uma atenção especial ao Teorema de Amitsur-Levitzki, apresentado as provas de Rosset (veja [10], página 18) e Swan [22].

Nessa mesma época, W. Specht levantou uma questão muito importante no campo da PI-teoria sobre a existência de uma base finita para o T-ideal (ideal das identidades) de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero. Conhecida como *Problema de Specht*, está questão ficou sem resposta por mais de duas décadas. Somente no ano de 1987, Kemer [14, 15] respondeu afirmativamente à questão. A importância do trabalho de Kemer é indiscutivel, porque assegura que toda álgebra associativa sobre um corpo de característica zero, admite uma base finita para suas identidades polinomiais. Todavia, não mostra como determinar tal base. Assim, Kemer em seu trabalho, não resolve o problema da descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, problema que até hoje ainda continua em aberto, tendo sido resolvido apenas para algumas álgebras em particular.

Essa problemática se torna ainda mais empolgante, quando trazemos para a discussão uma álgebra particular e de grande importância, a saber, a álgebra das matrizes $M_n(K)$.

A descrição das identidades polinomiais da álgebra das matrizes $M_n(K)$ ainda é uma questão sobre a qual se conhece pouco a respeito, mesmo quando o corpo K é de característica zero. Os principais resultados nessa direção apareceram a partir de 1973, com Razmyslov [21], que neste mesmo ano encontrou uma base para as identidades de $M_2(K)$ formada por 9 identidades de graus 4, 5 e 6, quando K é um corpo de característica zero. Vale dizer que a importância deste resultado está muito mais pelo fato dessa base ser finita, do que propriamente a quantidade de identidades que a compõe. Posteriormente, apoiado no trabalho de Razmyslov, Drensky [4], em 1981, encontrou uma base mínima para as identidades de $M_2(K)$ com 2 identidades, a saber, a identidade standard St_4 e a identidade de Hall $[[x_1, x_2]^2, x_1]$. Quando o corpo K é finito, o problema da descrição das identidades de $M_n(K)$ já está solucionado para $n = 2, 3$ e 4 (veja em [19], [7] e [9]). O resultado de Drensky foi generalizado em 2001, por Koshlukov [16], para K infinito e de característica diferente de 2 e 3. Quando $char K = 3$, é necessária uma terceira identidade para gerar o T-ideal das identidades de $M_2(K)$ (ver [3]). No caso de $char K = 2$, a descrição das identidades de $M_2(K)$ ainda é um problema em aberto. Quanto a álgebra $M_3(K)$, quase nada se conhece sobre suas identidades, mesmo quando o corpo K é de característica zero e quanto as identidades de $M_n(K)$, para $n \geq 4$, menos ainda se sabe a respeito.

O trabalho de Drensky que encontrou uma base mínima para as identidades polinomiais de $M_2(K)$ com 2 identidades criou uma expectativa entre os pesquisadores que a identidade standard St_{2n} e a identidade de algebricidade poderiam formar uma base para o T-ideal das identidades de $M_n(K)$, também para $n > 2$. Porém essa questão teve uma resposta negativa em 1986, quando Okhitin [20] construiu uma identidade para $M_3(K)$ de grau 9 e que não é consequência destas duas identidades.

O resultado obtido por Okhitin não somente eliminou as expectativas dos pesquisadores, como também assegurou que 9 é o grau mínimo das identidades de $M_3(K)$ que não são consequências da identidade standard St_6. Nessa direção, já se sabia que toda identidade de grau $2n + 1$ de $M_n(K)$, para $n > 2$, é consequência do polinômio standard St_{2n}, resultado obtido por U. Leron [17] em 1973, e que será apresentado neste trabalho. Também já era sabido que as identidades de $M_3(K)$ de grau $8 = 2.3 + 2$ são consequências do polinômio standard St_6, resultado demonstrado por Drensky e Azniv Kasparian [5] em 1983.

Se é 9 o grau mínimo das identidades de $M_3(K)$ que não seguem do polinômio standard St_6, naturalmente nasce uma pergunta: quando $n > 3$, qual o grau mínimo das identidades de $M_n(K)$ que não seguem do polinômio standard St_{2n}? Esta questão, certamente já apreciada por muitos pesquisadores da PI-teoria, ainda é um problema em aberto, mesmo quando a característica do corpo K é zero.

Nesse mesmo mote, um outro problema que atraiu a atenção dos pesquisadores da PI-teoria foi colocado por Formanek. A questão é se $m = 2n$ é o menor inteiro positivo tal que o polinômio duplo de Capelli D_m é uma identidade para $M_n(K)$, quando K é de característica zero. Este problema foi respondido de maneira independente por Giambruno e Sehgal [8] e Chang [2], e neste trabalho apresentamos a construção da resposta dada por Chang.

A importância da álgebra $M_n(K)$ e de suas identidades polinomiais, algo que se sabe pouco a respeito, são motivações importantes para o estudo de alguns resultados sobre tais identidades. Nesse sentido este trabalho objetiva fazer uma abordagem sobre as identidades da álgebra das matrizes $M_n(K)$, com entradas em um corpo K, e está dividido em quatro capítulos.

No capítulo 1, são apresentados os conceitos e resultados básicos necessários para o seu desenvolvimento.

No capítulo 2, são apresentadas as provas de Rosset e Swan para Teorema de Amitsur-Levitzki, sendo que a prova de Rosset envolve a álgebra exterior e a prova de Swan se apóia num teorema da teoria dos grafos.

No capítulo 3, apresentamos um estudo das identidades polinomiais de $M_n(K)$ $(charK = 0)$ de grau $2n+1$, para $n > 2$, onde chegaremos que essas identidades seguem do polinômio standard St_{2n+1} e também apresentamos uma base para o espaço vetorial das identidades multilineares de $M_n(K)$, aqui denotado por V_{2n+1}. Tudo isso, com suporte no artigo de U. Leron, já citado anteriormente.

Finalmente, no capítulo 4, apresentamos a construção da resposta elaborada por Chang, para a questão proposta por Formanek sobre a minimalidade de um inteiro positivo m tal que o polinômio duplo de Capelli D_m é uma identidade para $M_n(K)$, quando K é de característica zero.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos e resultados básicos para o desenvolvimento de nosso trabalho. Iniciaremos fazendo uma discussão sobre álgebras, as quais serão nosso objeto de estudo. Ao longo do texto escrevemos K para denotar um corpo e, a menos de menção em contrário, os espaços vetoriais e as álgebras serão definidas sobre o corpo K.

1.1 Álgebras

Definição 1.1 *Definimos uma K-álgebra como sendo um par $(A, *)$, onde A é um K-espaço vetorial e $*$ é uma operação em A que é bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz:*

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$

(iii) $\lambda(a * b) = (\lambda a) * b = a * (\lambda b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, a operação $*$ é chamada de *produto* ou *multiplicação*. Por simplicidade de notação, vamos denotar $(A, *)$ simplesmente por A e $a * b$ por ab para $a, b \in A$. Definimos também $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente $a_1a_2...a_na_{n+1}$ como sendo $(a_1a_2...a_n)a_{n+1}$ para $a_i \in A$. Sendo A uma álgebra, vamos dizer que um subconjunto β é *uma base de* A se β é uma base de A como espaço vetorial. Com isso, definimos a dimensão de uma álgebra A como sendo a dimensão de A como espaço vetorial e que será denotada por $dim\ A$.

Definição 1.2 *Seja A uma álgebra. Dizemos que:*

*(i) A é **associativa** se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$.*

*(ii) A é **comutativa** se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$.*

*(iii) A é **unitária** (ou **com unidade**) se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.*

*(iv) A é uma **álgebra de Lie** se $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c+(bc)a+(ca)b = 0$ para quaisquer $a, b, c \in A$.*

Neste trabalho, a menos de menção em contrário, as álgebras consideradas serão associativas com unidade. Dessa forma, quando uma álgebra for mencionada, entenda que é associativa com unidade.

Sejam A uma álgebra associativa e $a, b \in A$. Definimos o *comutador* $[a, b]$ como sendo o elemento

$$[a, b] = ab - ba.$$

Definimos também o *comutador de comprimento* n como sendo

$$[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n]$$

para $a_i \in A$, e o *comutador de* A, denotado por $[A, A]$, como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{[a, b] \mid a, b \in A\}$. Através de um cálculo simples é possível mostrar que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \tag{1.1}$$

para quaisquer $a, b, c \in A$. Ademais, usando indução e (1.1), podemos mostrar que

$$[a_1a_2...a_n, c] = \sum_{i=1}^{n} a_1...a_{i-1}[a_i, c]a_{i+1}...a_n. \tag{1.2}$$

É imediato que

$$[a, b] = -[b, a]$$

e que $[A, A] = 0$ se, e somente se, A é comutativa.

Sendo A uma álgebra, U e W subespaços vetoriais de A, definimos o produto de U por W, denotado por UW, como sendo o subespaço de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in U, \quad y \in W\}$.

Exemplo 1.3 *Seja $M_n(K)$ o espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K. Temos que $M_n(K)$, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade. Nesta álgebra é importante destacar as matrizes unitárias e_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, onde e_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Vê-se facilmente que as matrizes unitárias formam uma base para o espaço vetorial $M_n(K)$. Portanto dim $M_n(K) = n^2$.*

De maneira geral, se A é uma álgebra, podemos considerar o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. O produto de matrizes em $M_n(A)$ é análogo ao produto em $M_n(K)$. Ademais, este produto define em $M_n(A)$ a estrutura de uma álgebra.

Exemplo 1.4 *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$. Definimos a* ***álgebra de Grassmann*** *(ou* ***álgebra exterior****) de V, denotada por $E(V)$ (ou simplesmente E), como sendo a álgebra associativa com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k, \ k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Na álgebra E é importante destacar os seguintes subespaços:

- *E_0, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$.*
- *E_1, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$.*

Observe que $E = E_0 \oplus E_1$, visto como espaço vetorial. Além disso, como $e_ie_j = -e_je_i$ temos que

$$(e_{i_1}...e_{i_m})(e_{j_1}...e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}...e_{j_k})(e_{i_1}...e_{i_m})$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. E mais, não é difícil ver que se char$K = 2$, então a álgebra E é comutativa. Por outro lado, considerando E' como sendo a álgebra com base $\{e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k, \ k \geq 1\}$, temos que E' não tem unidade e é chamada de álgebra exterior sem unidade.

Exemplo 1.5 *O espaço vetorial $K[x]$ dos polinômios na variável x com coeficientes em K, munido do produto usual de polinômios, é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade. De maneira geral, considerando o conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, podemos definir a álgebra comutativa $K[X]$ dos polinômios em n variáveis e denotamos por $K[x_1, ..., x_n]$.*

Exemplo 1.6 *Considere o espaço vetorial*

$$K \oplus A = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in K \quad e \quad a \in A\},$$

onde A é uma álgebra e K é um corpo. Defina em $K \oplus A$, o seguinte produto

$$(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2).$$

Temos que $K \oplus A$, munido deste produto, é uma álgebra com unidade (que é o elemento (1,0)). Note que a álgebra $K \oplus A$ é associativa se, e somente se, A é associativa. Esta construção é chamada de ***adjunção formal da unidade à álgebra*** *A.*

Observação 1.7 *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto gerador de A (como espaço vetorial). Então não é difícil ver que:*

(i) A é ***associativa*** *se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$.*

(ii) A é ***comutativa*** *se, e somente se, $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$.*

(iii) A é ***unitária*** *se, e somente se, existe $1 \in A$ tal que $1v = v1 = v$ para todo $v \in S$.*

Proposição 1.8 *Sejam A um espaço vetorial e β uma base de A. Então, dada uma função $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$, existe uma única aplicação bilinear $* : A \times A \longrightarrow A$ estendendo f, ou seja, satisfazendo $u * v = f(u, v)$ para quaisquer $u, v \in \beta$.*

Demonstração. Dado $a \in A$, a pode ser expresso na forma $a = \sum_{u\in\beta} \alpha_u u$, com o conjunto $\{u \in \beta \mid \alpha_u \neq 0\}$ finito. Sendo $a = \sum_{u\in\beta} \alpha_u u$ e $b = \sum_{v\in\beta} \lambda_v v$ com $\alpha_u, \lambda_v \in K$, considere a aplicação $* : A \times A \longrightarrow A$ definida da seguinte forma:

$$a * b = \sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v).$$

Observe que $*$ está bem definida, pois se $\sum_{v\in\beta} \gamma_v v = \sum_{v\in\beta} \gamma'_v v$ com $\gamma_v, \gamma'_v \in K$, então $\gamma_v = \gamma'_v$ para todo $v \in \beta$. Tomando agora $\mu \in K$ e $a = \sum_{u\in\beta} \alpha_u u,\ a_1 = \sum_{u\in\beta} \alpha'_u u,\ b = \sum_{v\in\beta} \lambda_v v$ elementos de A, temos

$$(a + a_1) * b = \sum_{u\in\beta} (\alpha_u + \alpha'_u) u * \sum_{v\in\beta} \lambda_v v = \sum_{u,v\in\beta} (\alpha_u + \alpha'_u) \lambda_v f(u, v) =$$

$$\sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) + \sum_{u,v\in\beta} \alpha'_u \lambda_v f(u, v) = (a * b) + (a_1 * b)$$

e

$$\mu(a*b)=\sum_{u,v\in\beta}\mu\alpha_u\lambda_v f(u,v)=\sum_{u\in\beta}(\mu\alpha_u)u*\sum_{v\in\beta}\lambda_v v=(\mu a)*b.$$

Analogamente se mostra que $a*(b_1+b_2)=(a*b_1)+(a*b_2)$ e $\mu(a*b)=a*(\mu b)$ para quaisquer $b_1,b_2\in A$. Logo $*$ é bilinear. Dados $u_1,v_1\in\beta$, podemos escrever $u_1=\sum_{u\in\beta}\lambda_u u$ e $v_1=\sum_{v\in\beta}\gamma_v v$, com

$$\lambda_u=\begin{cases}1, & \text{se} \quad u=u_1\\ 0, & \text{se} \quad u\neq u_1\end{cases} \quad e \quad \gamma_v=\begin{cases}1, & \text{se} \quad v=v_1\\ 0, & \text{se} \quad v\neq v_1\end{cases}$$

Logo,

$$u_1*v_1=\sum_{u,v\in\beta}\lambda_u\gamma_v f(u,v)=\lambda_{u_1}\lambda_{v_1}f(u_1,v_1)=f(u_1,v_1)$$

Observe que $*$ é única estendendo f. De fato, suponha $*':A\times A\longrightarrow A$ outra operação bilinear estendendo f, então

$$a*'b=\sum_{u,v\in\beta}\alpha_u\lambda_v(u*'v)=\sum_{u,v\in\beta}\alpha_u\lambda_v f(u,v)=a*b.$$

Logo $*$ é única. Portanto, temos o resultado. ♦

Exemplo 1.9 *Seja S um conjunto não vazio. Consideremos KS o conjunto de todas as somas formais do tipo $\sum_{s\in S}\alpha_s s$, onde $\alpha_s\in K$ e $\{s\in S\mid\alpha_s\neq0\}$ é finito. Aqui o produto $\alpha_s s$ é um símbolo formal. Dizemos ainda que os elementos $\sum_{s\in S}\alpha_s s$ e $\sum_{s\in S}\beta_s s$ são iguais em KS se $\alpha_s=\beta_s$ para todo $s\in S$. Sendo $\{s\in S\mid\alpha_s\neq0\}=\{s_1,...,s_n\}$ podemos escrever o elemento $\sum_{s\in S}\alpha_s s\in KS$ como $\alpha_{s_1}s_1+\alpha_{s_2}s_2+...+\alpha_{s_n}s_n$. Dado $s_1\in S$, podemos identificar naturalmente s_1 com o elemento $\sum_{s\in S}\alpha_s s\in KS$, onde*

$$\alpha_s=\begin{cases}1, & se \quad s=s_1\\ 0, & se \quad s\neq s_1\end{cases}.$$

Feita esta identificação, podemos ver S como um subconjunto de KS. Defina agora em KS a soma

$$\sum_{s\in S}\alpha_s s+\sum_{s\in S}\beta_s s=\sum_{s\in S}(\alpha_s+\beta_s)s$$

e o produto por escalar

$$\lambda\sum_{s\in S}\alpha_s s=\sum_{s\in S}(\lambda\alpha_s)s$$

*para $\lambda\in K$. Estas operações definem em KS uma estrutura de espaço vetorial. Observe que S é uma base para o espaço vetorial KS, o qual chamamos de **K-espaço vetorial com base S.***

Seja $* : S \times S \longrightarrow S$ uma operação em S. De acordo com a Proposição 1.8, a operação $*$ se estende a uma única operação bilinear $* : KS \times KS \longrightarrow KS$, a qual define em KS uma estrutura de álgebra. Pela Observação 1.7, segue que se a operação $*$ é associativa (respec. comutativa) em S, então a álgebra $(KS, *)$ é associativa (respec. comutativa). Observe também que se $*$ possui elemento neutro em S, então este funciona como unidade da álgebra $(KS, *)$.

Neste tipo de construção, um caso particular e importante aparece quando ao invés do conjunto S, consideramos um grupo G (adotando a notação multiplicativa em G) e tomando no espaço vetorial KG a multiplicação induzida pela operação do grupo G, resulta que KG é uma álgebra associativa com unidade, chamada de *álgebra de grupo*. A álgebra KG é comutativa se, e somente se, G é abeliano.

Definição 1.10 *Seja A uma álgebra. Dizemos que:*

(i) Um subespaço B de A é uma ***subálgebra*** *de A se B é multiplicativamente fechado, ou seja, $BB \subseteq B$.*

(ii) Um subespaço I de A é um ***ideal*** *(bilateral) de A se $IA \subseteq I$ e $AI \subseteq I$.*

Exemplo 1.11 *Seja E a álgebra exterior definida no Exemplo 1.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}.$$

Temos que E_n é multiplicativamente fechado e portanto é uma subálgebra de E. Ademais, temos que a dimensão de E_n é 2^n.

Exemplo 1.12 ***(Centro de uma álgebra)*** *Seja A uma álgebra. Definimos o* ***centro de*** *A, denotado por $Z(A)$, como sendo o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa \text{ para todo } x \in A\}.$$

Temos que $Z(A)$ é um subespaço vetorial de A. Temos também que $Z(A)$ é uma subálgebra de A. Um fato conhecido da álgebra linear é que

$$Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, considerando $A = E$, a álgebra de Grassmann, podemos ver que, em $charK \neq 2$, $Z(E) = E_0$.

Exemplo 1.13 ***(Subálgebra gerada)*** *Seja A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A. Considere B_S o subespaço de A gerado pelo conjunto $\{1, s_1 s_2 ... s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Observe que B_S é multiplicativamente fechado e $1 \in B_S$, donde concluímos que B_S é uma subálgebra de A, chamada de subálgebra gerada por S. Por outro lado, toda subálgebra de A que contém S, deve também conter a subálgebra B_S e assim B_S é a menor subálgebra de A que contém S.*

Definição 1.14 *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um* ***homomorfismo de álgebras*** *se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$ e $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Sendo φ um homomorfismo de álgebras, dizemos que φ é um *mergulho* (ou *monomorfismo*, ou *imersão*) se φ é injetivo. É um *epimorfismo*, se φ é sobrejetivo. É um *isomorfismo*, se φ é bijetivo. Quando existe um isomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Um *endomorfismo* de uma álgebra A, é um homomorfismo de A em A. Um *automorfismo* de uma álgebra A é um endomorfismo bijetivo de A. Vamos denotar por $End\ A$ e $Aut\ A$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A.

Sendo $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras definimos o ***núcleo de*** φ como sendo o conjunto $Ker\ \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ e a ***imagem de*** φ como sendo o conjunto $Im\ \varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$. Observe que $Ker\ \varphi$ é um ideal de A e que $Im\ \varphi$ é uma subálgebra de B.

Sendo A uma álgebra e I um ideal de A, considere o espaço vetorial quociente A/I. Para cada $a \in A$, considere o elemento $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$ de A/I e defina em A/I as seguintes operações de soma e produto por escalar

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \qquad e \qquad \lambda(a + I) = \lambda a + I$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Defina também em A/I a multiplicação

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Este produto é bem definido (pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais) e é bilinear. Assim, munido deste produto, A/I é uma álgebra, chamada de *álgebra quociente de A por I*. Na álgebra quociente de A por I, vamos denotar $a + I$ por $\overline{a}$.

Se I é um ideal de A tal que $I \subseteq Ker\varphi$, então a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi}: & A/I & \longrightarrow & B \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) \ = \varphi(a) \end{array}$$

é bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Ademais, se $I = Ker\varphi$, então $\overline{\varphi}$ é injetor, implicando que $A/Ker\varphi \simeq Im\overline{\varphi} = Im\varphi$.

Exemplo 1.15 *Se A é uma álgebra e I é um ideal de A, então*

$$\begin{array}{rccl} \pi: & A & \longrightarrow & A/I \\ & a & \longmapsto & \pi(a) \ = \overline{a} \ = a+I \end{array}$$

é um homomorfismo de álgebras, chamado de ***projeção canônica****.*

Exemplo 1.16 *Consideremos a álgebra exterior E e a álgebra $K \oplus E'$, definida no Exemplo 1.6. A aplicação $\psi : K \oplus E' \longrightarrow E$, dada por $\psi(\lambda, a) = \lambda + a$, é um isomorfismo de álgebras e portanto $K \oplus E' \simeq E$.*

1.2 Identidades Polinomiais

Definição 1.17 *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathfrak{B}$ é* ***livre*** *na classe $\mathfrak{B}$ se existe $X \subseteq F$ tal que X gera F e para cada álgebra $A \in \mathfrak{B}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow A$ estendendo h. Nestas condições, dizemos que F é* ***livremente gerada por*** *X.*

Vamos agora construir uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade. Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto não vazio e enumerável de ***variáveis***. Definimos uma ***palavra*** em X como sendo uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$, onde $x_{i_j} \in X$ e $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vamos definir o ***tamanho*** da palavra $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ como sendo n. Quando $n = 0$, vamos chamar esta palavra de ***palavra vazia*** que denotaremos por 1. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, ..., i_n = j_m$. Sendo as variáveis em X não comutativas, escreva $S(X)$ para denotar o conjunto de todas as palavras em X e considere o espaço vetorial $K\langle X\rangle$ com base $S(X)$ (veja o Exemplo 1.9). Chamando de ***polinômios*** os elementos de $K\langle X\rangle$, temos que um polinômio em $K\langle X\rangle$ é uma soma (formal) de ***monômios*** que são produtos (formais) de um escalar em K por uma palavra em X.

Considere em $K\langle X\rangle$ a seguinte multiplicação

$$(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_m}.$$

Observe que esta multiplicação é associativa e possui elemento neutro (a palavra vazia). Dessa forma, concluímos que $K\langle X\rangle$, munido deste produto, é uma álgebra associativa com unidade.

Proposição 1.18 *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{B}$ a classe das álgebras associativas com unidade e seja $A \in \mathfrak{B}$ uma álgebra. Considere uma aplicação $g : X \longrightarrow A$ dada por $g(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Então existe uma única aplicação linear $\varphi_g : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_g(1) = 1_A$ e $\varphi_g(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$. Temos que φ_g é um homomorfismo de álgebras e é o único que satisfaz $\varphi_g|_X = g$. Portanto, $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade. ♦

Observação 1.19 *Se $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$, denotamos por $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ a imagem de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ por φ_g.*

Definição 1.20 *Sejam $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ e A uma álgebra associativa com unidade. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** para a álgebra A se*

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

Se $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$, então $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma identidade polinomial para a álgebra A se, e somente se, $f \in Ker\ \varphi$ para todo homomorfismo de álgebras $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais da álgebra A, vamos dizer que A é uma **PI-álgebra**, se existe $0 \neq f \in T(A)$. Noutras palavras, uma álgebra A é uma PI-álgebra se ela satisfaz alguma identidade polinomial não-nula.

Exemplo 1.21 *Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para A. Portanto toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.22 *Considere a álgebra $M_2(K)$. Temos que $M_2(K)$ satisfaz a identidade polinomial $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$, chamada de **identidade de Hall**.*

Exemplo 1.23 *O polinômio* $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$ *é uma identidade polinomial para a álgebra exterior* E.

Exemplo 1.24 *Considere o polinômio*

$$St_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$$

onde S_n *é o grupo simétrico das permutações e* $(-1)^\sigma$ *é o sinal da permutação* σ, *chamado de* ***polinômio standard de grau*** n. *Sendo* A *uma álgebra associativa com dim* $A < n$, *temos que a álgebra* A *satisfaz o polinômio standard* St_n. *No Capítulo 2, provaremos que* $St_{2n}(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ *é uma identidade polinomial para* $M_n(K)$. *Este resultado é conhecido como* ***teorema de Amitsur-Levitzki*** .

Exemplo 1.25 *Seja* A *uma álgebra associativa com dim* $A < n$, *então* A *satisfaz o polinômio*

$$d_n(x_1, ..., x_n;\ y_1, ..., y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 ... y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}$$

chamado de ***identidade de Capelli****. Foi demonstrado por Razmyslov que* d_{n^2+1} *é uma identidade polinomial para* $M_n(K)$, *mas* d_{n^2} *não é identidade para* $M_n(K)$ *(veja [12], páginas 16-17). Por outro lado, considere o polinômio*

$$D_n(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n) = \sum_{\rho, \sigma \in S_n} (-1)^{\rho\sigma} x_{\rho(1)} y_{\sigma(1)} ... x_{\rho(n)} y_{\sigma(n)}$$

chamado de ***duplo polinômio de Capelli****. No Capítulo 4, mostraremos que* D_{2n} *é uma identidade polinomial para* $M_n(K)$.

1.3 T-ideais de $K\langle X \rangle$

Definição 1.26 *Seja* I *um ideal de* $K\langle X \rangle$. *Dizemos que* I *é um* ***T-ideal*** *de* $K\langle X \rangle$ *se* $\phi(I) \subseteq I$ *para todo* $\phi \in End\ K\langle X \rangle$.

Observe que um ideal I de $K\langle X \rangle$ é um T-ideal se, e somente se, $f(g_1, ..., g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, ..., x_n) \in I$ e quaisquer $g_1, ..., g_n \in K\langle X \rangle$.

Proposição 1.27 *Sendo* A *uma álgebra, o conjunto* $T(A)$ *de todas as identidades polinomiais de* A *é um T-ideal de* $K\langle X \rangle$. *Reciprocamente, se* I *é um T-ideal de* $K\langle X \rangle$, *então* $I = T(F)$ *para alguma álgebra* F.

Demonstração. Observe que $T(A)$ é uma interseção de ideais, que são exatamente os núcleos dos homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A. Se $f(x_1,...,x_n) \in T(A)$ e $g_1(x_1,...,x_m),...,g_n(x_1,...,x_m) \in K\langle X\rangle$, então

$$h(x_1,...,x_m) = f(g_1(x_1,...,x_m),...,g_n(x_1,...,x_m)) \in T(A),$$

pois dados $a_1,...,a_m \in A$, temos $h(a_1,...,a_m) = f(g_1(a_1,...,a_m),...,g_n(a_1,...,a_m)) = 0$, uma vez que $g_i(a_1,...,a_m) \in A$. Agora, tomemos um T-ideal I de $K\langle X\rangle$ e consideremos a álgebra quociente $F = K\langle X\rangle/I$. Dados $f(x_1,...,x_n) \in I$ e $\overline{g}_1,...,\overline{g}_n \in F$, $f(\overline{g}_1,...,\overline{g}_n) = \overline{f(g_1,...,g_n)} = \overline{0}$, ou seja, $I \subseteq T(F)$. Por outro lado, se $f(x_1,...,x_n) \in T(F)$, então $\overline{0} = f(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) = \overline{f(x_1,...,x_n)}$ e assim $f(x_1,...,x_n) \in I$. Logo, $T(F) \subseteq I$ e as duas inclusões garantem o resultado. ♦

Definição 1.28 *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. Definimos o T-ideal gerado por S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a intersecção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S, ou seja,*

$$\langle S\rangle^T = \bigcap_{\substack{I \text{ é } T-ideal \\ S \subseteq I}} I.$$

Sendo $S = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, vamos dizer que $f \in \langle f_1, f_2, ..., f_n\rangle^T$ é ***consequência*** (ou que f ***segue***) de $f_1, f_2, ..., f_n$. Além disso, se $S = \{f_j(x_1,...,x_{n_j}) \mid j \in I\} \subseteq K\langle X\rangle$, então $\langle S\rangle^T$ coincide com o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{h_1 f_j(g_1,...,g_{n_j})h_2 \mid h_1, h_2, g_1, g_2, ..., g_{n_j} \in K\langle X\rangle,\ j \in I\}$.

Sejam A uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ tal que $\langle S\rangle^T = T(A)$. Nestas condições, dizemos que S é uma ***base das identidades de*** A. Um fato histórico sobre esta questão é que em 1987, Kemer [14, 15] demonstrou que em característica zero, toda álgebra associativa possui uma base finita para as suas identidades. Noutras palavras, se A é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero, então existe $S \subseteq T(A)$, S finito, tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$.

Exemplo 1.29 *Sejam A uma álgebra comutativa e K um corpo infinito. Então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$. Nestas condições, todas as identidades de A são consequências do polinômio $[x_1, x_2]$.*

Exemplo 1.30 *Considere a álgebra $M_2(K)$. Em 1973, foi provado por Razmyslov [21] que em char$K = 0$, $T(M_2(K))$ é finitamente gerado. Razmyslov encontrou uma base para as identidades polinomiais de $M_2(K)$ formada por 9 identidades. Posteriormente, em 1981, Drensky [4] provou que em char$K = 0$, $T(M_2(K)) = \langle St_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$. O resultado de Drensky foi generalizado em 2001, por Koshlukov [16], para K infinito e de característica diferente de 2 e 3. Quando char$K = 3$, é necessária uma terceira identidade para gerar o T-ideal $T(M_2(K))$ (ver [3]). No caso de char$K = 2$, a descrição do $T(M_2(K))$ ainda é um problema em aberto.*

1.4 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Definição 1.31 *Sejam $m \in K\langle X \rangle$ um monômio e $x_i \in X$ uma variável. Definimos o grau de x_i em m, denotado por $deg_{x_i} m$, como sendo o número de vezes que x_i aparece no monômio m. Sendo $f \in K\langle X \rangle$, dizemos que f é* ***homogêneo*** *em x_i se todos os monômios de f têm o mesmo grau em x_i. Vamos dizer que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é* ***multi-homogêneo*** *se f é homogêneo nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$.*

Seja $m = m(x_1, x_2, ..., x_n)$ um monômio em $K\langle X \rangle$. Definimos o **multigrau** de m como sendo a n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$ onde $a_i = deg_{x_i} m$ para $i = 1, 2, ..., n$. A soma de todos os monômios de $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X \rangle$ com mesmo multigrau é chamada de **componente multi-homogênea**. Observe que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é a soma de suas componentes multi-homogêneas.

Definição 1.32 *Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X \rangle$ é* ***multilinear*** *se é multi-homogêneo com multigrau $(1, 1, ..., 1)$.*

Se $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X \rangle$ é multilinear nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, então

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$$

com $\alpha_\sigma \in K$. Sendo

$$P_n = P_n(x_1, x_2, ..., x_n) = span_K \{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\} \tag{1.3}$$

o espaço vetorial dos polinômios em $K\langle X \rangle$ multilineares em $x_1, x_2, ..., x_n$, temos que $dim\ P_n = n!$.

Teorema 1.33 *Sejam K um corpo infinito e I um T-ideal de $K\langle X \rangle$. Se $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$, então todas suas componentes multi-homogêneas também pertencem a I.*

Demonstração. Seja n o maior grau possível em x_1 de algum monômio de f. Para cada $j = 0, 1, 2, ..., n$, tomemos $f_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ a soma de todos os monômios de f que tem grau j em x_1 (componente homogênea de grau j em x_1). Claramente $f = f_0 + f_1 + ... + f_n$. Como K é infinito, podemos tomar $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ dois a dois distintos. Para cada $j = 1, 2, ..., n$, temos $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\lambda_j x_1, x_2, ..., x_n) = f_0(\lambda_j x_1, x_2, ..., x_n) + f_1(\lambda_j x_1, x_2, ..., x_n) + ... + f_n(\lambda_j x_1, x_2, ..., x_n) = f_0 + \lambda_j f_1 + ... + \lambda_j^n f_n$. E assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

A primeira matriz acima é inversível (Vandermonde) e $g_0, g_1, ..., g_n \in I$, pois I é um T-ideal. Logo, devemos ter $f_0, f_1, ..., f_n \in I$. Repetindo o mesmo processo para $x_2, ..., x_n$, temos o resultado. ♦

Este teorema nos possibilita chegar a um importante resultado.

Corolário 1.34 *Se K é um corpo infinito, então todo T-ideal de $K\langle X\rangle$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Teorema 1.35 *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $charK = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração. Como $charK = 0$, temos que K é infinito e assim, pelo Corolário 1.34, podemos assumir que $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$ é um polinômio multi-homogêneo. Sejam $n = deg_{x_1} f$ e $h(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n)$. Considerando agora $h_1(y_1, y_2, x_2, ..., x_n)$ a componente homogênea de grau 1 em y_1 de h, temos $deg_{y_2} h_1 = n - 1$. Como $h(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) \in I$, temos que $h_1(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) \in I$. Ademais $h_1(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = nf(x_1, x_2, ..., x_n)$ e assim $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n} h_1(x_1, x_1, x_2, ..., x_n)$. Logo, devemos ter $\langle f\rangle^T = \langle h_1\rangle^T$. Continuando com este processo (chamado de *processo de linearização*), concluímos que f é consequência de algum polinômio multilinear de I. ♦

Proposição 1.36 *Seja A uma PI-álgebra. Então A satisfaz uma identidade polinomial multilinear.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra e $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$ uma identidade polinomial não nula para A. Podemos supor que em cada monômio de f aparecem todas as variáveis não necessariamente com o mesmo grau. Se cada variável x_i aparece em cada monônio de f com grau exatamente igual a 1, então f é uma identidade polinomial multilinear como queremos. Suponha então que existe uma variável em f, digamos x_1, cujo grau $deg_{x_1} f = d > 1$ e substitua x_1 por $y_1 + y_2$ em f, obtendo

$$h(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) - f(y_1, x_2, ..., x_n) - f(y_2, x_2, ..., x_n).$$

Temos que h ainda é uma identidade polinomial não nula para A. Suponha agora que $h = 0$. Desde que uma função de X em X pode ser estendida para um endomorfismo de $K\langle X\rangle$, substituindo y_1 e y_2 por x_1 em h, temos que

$$h(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = f(2x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$= f(2x_1, x_2, ..., x_n) - 2f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Se decompormos f numa soma $f = f_0 + f_1 + ... + f_d$, onde f_k é uma soma de monômios de grau k em x_1, então temos a seguinte implicação

$$h(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = 2^0 f_0 + 2^1 f_1 + 2^2 f_2 + ... + 2^d f_d - 2f_0 - 2f_1 - 2f_2 - ... - 2f_d$$

$$= -f_0 + (2^2 - 2)f_2 + ... + (2^d - 2)f_d = 0,$$

contradizendo o fato de que $d > 1$.

Como $deg_{y_1} h = d-1 < deg_{x_1} f$, usando argumento indutivo obtemos um polinômio multilinear que é uma identidade polinomial para a álgebra A. ♦

1.5 S_n-Módulos

Nesta seção apresentaremos os conceitos de S_n-módulo e elementos simétrico e anti-simétrico com respeito a uma transposição do grupo S_n, idéias que serão fundamentais para o desenvolvimento do Capítulo 3.

Definição 1.37 *Sejam A uma álgebra e M um espaço vetorial. Dizemos que M é um* ***módulo sobre*** *A (ou A-**módulo**) se munido de um produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a,m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

satisfaz:

(i) $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$

(ii) $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$

(iii) $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$

(iv) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$

(v) $1_A \cdot m = m$

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A,\ m, m_1, m_2 \in M$ *e* $\lambda \in K$.

Na definição acima, observe que as condições (i),(ii) e (iii) significam que o produto " $\cdot$ " é uma operação bilinear.

Definição 1.38 *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Definimos um* ***submódulo*** *(ou A-**submódulo**) de M como sendo um subespaço vetorial N de M tal que $a \cdot n \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$. Se $N \neq \{0\}$ e não existe nenhum submódulo N_1 de M tal que $\{0\} \neq N_1 \subsetneq N$, dizemos que N é* ***minimal****. Se os únicos submódulos de M são $\{0\}$ e M, dizemos que M é um A-módulo* ***irredutível*** *(ou* ***simples****).*

Exemplo 1.39 *Se A é uma álgebra, então A é naturalmente um módulo sobre si mesma, que vamos denotar por ${}_AA$. Para ver isto, defina*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a,x) & \longmapsto & a \cdot x = ax\ . \end{array}$$

Observe que os submódulos de ${}_AA$ são exatamente os ideais à esquerda de A.

Exemplo 1.40 *Sejam M um A-módulo e $m \in M$. Temos que o conjunto $A \cdot m = \{a \cdot m \mid a \in A\}$ é um submódulo de M e que os submódulos minimais de M são exatamente os irredutíveis. Ademais, observe que se dimensão de M é finita, então M possui necessariamente submódulo minimal.*

Sejam G um grupo, V um espaço vetorial e

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi_g \end{array}$$

um homomorfismo de grupos. Considere a álgebra de grupo KG (veja Exemplo 1.9) e o produto

$$\begin{array}{rccl} \cdot: & KG \times V & \longrightarrow & V \\ & \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g, v\right) & \longmapsto & \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\cdot v \ = \sum_{g\in G} \lambda_g \cdot \varphi_g(v). \end{array}$$

Munido deste produto, V é um KG-módulo (ou simplesmente G-módulo).

Exemplo 1.41 *Sejam* S_n *o grupo simétrico sobre* $\{1, 2, ..., n\}$ *e*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K\langle X\rangle$$

um polinômio multilinear em $x_1, x_2, ..., x_n$*. Temos que* f *é combinação linear de monômios* $M_\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$*, com* $\sigma \in S_n$*. Considere o espaço vetorial* P_n *de todos os polinômios em* $K\langle X\rangle$ *multilineares em* $x_1, x_2, ..., x_n$*, definido em (1.3). Temos que o conjunto* $\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ *é uma base para o espaço vetorial* P_n*. Defina agora uma aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & KS_n & \longrightarrow & P_n \\ & \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma & \longmapsto & \phi\left(\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) \ = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ ... \ x_{\sigma(n)}. \end{array}$$

Identificando uma permutação $\sigma \in S_n$ *com o monômio* $M_\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)}$*, obtemos um isomorfismo entre os espaços vetoriais* KS_n *e* P_n*. Disto, segue que* P_n *pode ser visto como um* S_n*-módulo. Dados* $\rho, \sigma \in S_n$*, temos que o produto* $\rho\sigma$ *corresponde ao monômio* $M_{\rho\sigma} = M_{\rho\sigma}(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{\rho\sigma(1)}x_{\rho\sigma(2)}...x_{\rho\sigma(n)}$*. Este produto pode ser visto como uma* ***ação à esquerda*** *do grupo* S_n *sobre o monômio* $M_\sigma(x_1, x_2, ..., x_n)$ *descrita por* $\rho M_\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = M_{\rho\sigma}(x_1, x_2, ..., x_n)$*. Assim,* $\rho M_\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{\rho\sigma(1)}x_{\rho\sigma(2)}...x_{\rho\sigma(n)} = M_\sigma(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, ..., x_{\rho(n)})$*. Agora, usando linearidade, podemos estender esta ação à esquerda do grupo* S_n*, para um polinômio* $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_n$*, descrita por* $\rho f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, ..., x_{\rho(n)})$*. Sejam* A *uma álgebra e* $T(A)$ *o* T*-ideal de* $K\langle X\rangle$ *de todas as identidades polinomiais de* A*, onde* $charK = 0$*. Do Teorema 1.35, sabemos que* $T(A)$ *é gerado por seus polinômios multilineares. Do mais, como os* T*-ideais são invariantes sob toda substituição de variáveis, e considerando* $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_n \cap T(A)$*, temos que* $\rho f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) \in P_n \cap T(A)$*, com* $\sigma \in S_n$*. Daí podemos concluir que* $P_n \cap T(A)$ *é um submódulo (ou* S_n*-submódulo) de* P_n*.*

A seguir, vamos introduzir os conceitos de elemento simétrico e anti-simétrico com relação a uma transposição do grupo S_n.

Definição 1.42 *Seja V um S_n-módulo. Dados $i, j \in \{1, ..., n\}$, com $i < j$, considere a transposição $(i\ j)$ em S_n que permuta i e j e deixa o restante fixo. Se $v \in V$, dizemos que v é $(i\ j)$-**simétrico** quando $(i\ j)v = v$ e que v é $(i\ j)$-**anti-simétrico** quando $(i\ j)v = -v$.*

Observe que um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)} \in P_n$ é $(i\,j)$-simétrico se, e somente se, $f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$ e é $(i\ j)$-anti-simétrico se, e somente se, $f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$. Temos que f é $(i\ j)$-simétrico se, e somente se, $\alpha_{(ij)\sigma} = \alpha_\sigma$ para toda $\sigma \in S_n$ e f é $(i\ j)$-anti-simétrico se, e somente se, $\alpha_{(ij)\sigma} = -\alpha_\sigma$ para toda $\sigma \in S_n$.

Neste trabalho, vamos caracterizar a simetria e a anti-simetria dos elementos de um S_n-módulo V, através do operador

$$\begin{array}{rccl} T_{ij}: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & T_{ij}(v) = \sigma_{ij} v, \end{array}$$

onde $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(1 + (i\ j))$ e $(i\ j)$ é uma transposição no grupo S_n. Observe que $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij}$, implicando que σ_{ij} é um idempotente de KS_n. Ademais, se $v \in V$, então v é $(i\ j)$-simétrico se, e somente se, $\sigma_{ij} v = v$ e v é $(i\ j)$- anti-simétrico se, e somente se, $\sigma_{ij} v = 0$.

Lema 1.43 *Sejam V um S_n-módulo e $v \in V$. Se $\sigma_{pq} v = 0$, então $\sigma_{pr} \sigma_{qr} v = \frac{1}{2} \sigma_{pr} v$ para distintos números $p, q, r \in \{1, ..., n\}$.*

Demonstração. Temos que

$$\sigma_{pr}\sigma_{qr} - \frac{1}{2}\sigma_{pr} = \frac{1}{2}\sigma_{pr}(1 + (q\ r)) - \frac{1}{2}\sigma_{pr}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_{pr}((1 + (q\ r)) - 1) = \frac{1}{2}\sigma_{pr}(qr) = \frac{1}{4}(1 + (p\ r))(q\ r)$$

$$= \frac{1}{4}((q\ r) + (p\ r)(q\ r)) = \frac{1}{4}((q\ r) + (q\ r)(p\ q))$$

$$= \frac{1}{4}(q\ r)(1 + (p\ q)) = \frac{1}{2}(q\ r)(\frac{1}{2}(1 + (p\ q))) = \frac{1}{2}(q\ r)\sigma_{pq}.$$

Logo

$$(\sigma_{pr}\sigma_{qr} - \frac{1}{2}\sigma_{pr})v = \frac{1}{2}(q\ r)\sigma_{pq} v = \frac{1}{2}(q\ r)0 = 0$$

e assim $\sigma_{pr}\sigma_{qr} v = \frac{1}{2}\sigma_{pr} v$. ♦

Teorema 1.44 *Sejam V um S_n-módulo e W um subespaço vetorial de V. Suponha $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., n\}$ números distintos tais que $\sigma_{i_k i_l}(W) \subseteq W$ para todo $1 \leq k < l \leq r$. Então:*

(a) Se $v \in V$ satisfaz $\sigma_{i_k i_l}(v) \in W$ para todo $1 \leq k < l \leq r$, então existe $v' \in V$ tal que $v' - v \in W$ e $\sigma_{i_k i_l}(v') = 0$ para todo $1 \leq k < l \leq r$.

(b) Se $v \in V$ é $(i\ j)$-simétrico com $\{i, j\} \cap \{i_1, ..., i_r\} = \varnothing$, então v' é $(i\ j)$-simétrico.

Demonstração.

(a) Vamos usar indução em r. Por conveniência assumimos que $\{i_1, ..., i_r\} = \{1, ..., r\}$. Sendo $r = 2$, tomemos $v' = v - \sigma_{12}v$. Suponha agora que o resultado é válido para $r - 1$, onde $r \geq 3$, ou seja, dado $v \in V$ satisfazendo $\sigma_{pq}v \in W$ para $1 \leq p < q \leq r - 1$, existe $v'' \in V$ tal que $v'' - v \in W$ e $\sigma_{pq}v'' = 0$ para $1 \leq p < q \leq r - 1$. Mostremos que o resultado vale para $1 \leq p < q \leq r$. Para isso, suponha $\sigma_{pq}v \in W$ para $1 \leq p,\ q \leq r$, e defina

$$v' = \left(1 - \frac{2}{r}\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{pr}\right)v'' = v'' - \frac{2}{r}\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{pr}v''.$$

Por hipótese de indução, temos que $v'' - v \in W$. Além disso, $\sigma_{pr}(W) \subseteq W$, resultando que $\sigma_{pr}v'' - \sigma_{pr}v \in W$ para $p \in \{1, ..., r - 1\}$. Logo, pela definição de v', segue que $v' - v'', v' - v \in W$. Por outro lado, calculemos

$$\sigma_{qr}v' = \left(\sigma_{qr} - \frac{2}{r}\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{qr}\sigma_{pr}\right)v''.$$

Para isso, considere o somatório sobre p e suponha $q < r$. Se $p = q$, então temos $\sigma_{qr}\sigma_{qr} = \sigma_{qr}^2 = \sigma_{qr}$. Se $p \neq q$, então segue da hipótese de indução que $\sigma_{pq}v'' = 0$ e daí $\sigma_{qr}\sigma_{pr}v'' = \frac{1}{2}\sigma_{qr}v''$ (Lema 1.43). Daí,

$$\begin{aligned}\sigma_{qr}v' &= \left(\sigma_{qr} - \frac{2}{r}\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{qr}\sigma_{pr}\right)v'' = \sigma_{qr}v'' - \frac{2}{r}\left(\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{qr}\sigma_{pr}v''\right)\\ &= \sigma_{qr}v'' - \frac{2}{r}\left(\sigma_{qr}v'' + \sum_{p=1,p\neq q}^{r-1}\sigma_{qr}\sigma_{pr}v''\right)\\ &= \left(\sigma_{qr} - \frac{2}{r}\sigma_{qr} - \frac{1}{r}\sum_{p=1,p\neq q}^{r-1}\sigma_{qr}\right)v'' = \left(1 - \frac{2}{r} - \frac{r-2}{r}\right)\sigma_{qr}v'' = 0.\end{aligned}$$

Agora, escreva $(p\ q) = (p\ r)(q\ r)(p\ r)$ para $1 \leq p < q < r$. Logo $(p\ q)v' = (p\ r)(q\ r)(p\ r)v' = (-1)(-1)(-1)v' = (-1)^3 v' = -v'$. Portanto, $\sigma_{pq}v' = 0$.

(b) Sejam $\{i, j\} \cap \{1, ..., r\} = \varnothing$ e $v' = \left(1 - \frac{2}{r}\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{pr}\right)v''$, e suponha que v é $(i\ j)$-simétrico. Por indução v'' é $(i\ j)$-simétrico. Fazendo $a = 1 - \frac{2}{r}\sum_{p=1}^{r-1}\sigma_{pr}$, então σ_{ij} comuta com a. Logo,

$$\sigma_{ij}v' = \sigma_{ij}a\ v'' = a\ (\sigma_{ij}v'') = av'' = v'.$$

Assim, $\sigma_{ij}v' = v'$ e concluímos que v' é $(i\ j)$- simétrico. ♦

Definição 1.45 *Sejam V um S_n-módulo e $r \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que $v \in V$ é $r-$**simétrico** se existem distintos $i_1, j_1; i_2, j_2; ...; i_r, j_r \in \{1, ..., n\}$ tais que v é $(i_k\ j_k)-$simétrico para todo $k = 1, ..., r$. Dizemos que v é r-**perfeito**, se, além disso, v é $(p\ q)-$anti-simétrico para quaisquer $1 \leq p < q \leq n$ tais que $\{p, q\} \cap \{i_1, j_1, ..., i_r, j_r\} = \varnothing$.*

Sendo V um S_n-módulo, observe que todo $v \in V$ é 0-simétrico e que $v \in V$ é 0-perfeito se, e somente se, v é $(p\ q)$-anti-simétrico para quaisquer $1 \leq p < q \leq n$.

Exemplo 1.46 *Considere o S_n-módulo P_n e $f(x_1, ..., x_n) \in P_n$. Então $f(x_1, ..., x_n)$ é 0-perfeito se, e somente se, $f(x_1, ..., x_n) = \alpha St_n(x_1, ..., x_n)$ para algum $\alpha \in K$. Realmente, sendo f 0-perfeito, então f é $(p\ q)$-anti-simétrico para quaisquer $1 \leq p < q \leq n$, ou seja, $f(x_1, ..., x_p, ..., x_q, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_q, ..., x_p, ..., x_n)$. Agora, seja $\alpha x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ um monômio não nulo em f. Desde que toda permutação em S_n pode ser escrita como produto de transposições, então para toda permutação $\sigma \in S_n$, segue que para o monômio $\beta x_{\sigma(i_1)}x_{\sigma(i_2)}...x_{\sigma(i_n)}$ de f tem-se $\beta = (-1)^\sigma\alpha$. Assim, $f(x_1, ..., x_n) = \alpha St_n(x_1, ..., x_n)$ para algum $\alpha \in K$. Reciprocamente, sendo $f(x_1, ..., x_n) = \alpha St_n(x_1, ..., x_n)$ e considerando que o polinômio standard St_n é $(p\ q)$-anti-simétrico para quaisquer $1 \leq p < q \leq n$, segue que f é 0-perfeito.*

Exemplo 1.47 *O polinômio standard St_{n+1} é consequência do polinômio standard St_n, isto é,*

$$St_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x_i St_n(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{n+1}).$$

Para ver isso, observe que St_{n+1} pode ser escrito como $St_{n+1} = x_1 f_1 + ... + x_{n+1}f_{n+1}$, onde $f_i = f_i(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{n+1})$ é um polinômio anti-simétrico multilinear. Logo, $f_i = \alpha_i St_n(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{n+1})$, onde $\alpha_i = (-1)^{i+1}$.

Sejam V um S_n-módulo e U_r o subespaço de V gerado pelos elementos r-simétricos. Se $u \in V$ é r-simétrico, então existem $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ transposições em S_n, duas a duas disjuntas, tais que $\theta_i(u) = u$ para $i = 1, 2, ..., r$. Por outro lado, se $\sigma \in S_n$, então $\sigma\theta_1\sigma^{-1}, \sigma\theta_2\sigma^{-1}, ..., \sigma\theta_r\sigma^{-1}$ são também transposições duas a duas disjuntas, pois sendo $\theta_i = (k\ l)$ com $1 \leq k < l \leq n$, temos que $\sigma\theta_i\sigma^{-1} = (\sigma(k)\ \sigma(l))$. Ademais,

$$(\sigma\theta_i\sigma^{-1})(\sigma(u)) = \sigma(u),$$

significando que $\sigma(u)$ é r-simétrico. Com isso, obtemos que U_r é um submódulo do S_n-módulo V. Com isso, temos que $\sigma_{pq}(v) \in U_r$ para qualquer $v \in U_r$, significando que U_r é σ_{pq}-invariante. Por outro lado, seja U_{r+1} o subespaço de V gerado pelos elementos $(r+1)$-simétricos. Através de um argumento análogo ao desenvolvido para U_r, obtemos que U_{r+1} é um submódulo σ_{pq}-invariante.

Observação 1.48 *Suponha que v é simétrico em r pares dois a dois disjuntos, digamos em $(1\ 2)$, $(3\ 4)$,...,$(2r-1\ 2r)$. Para $2r < p < q \leq n$, mostremos que $\sigma_{pq}v$ é $r+1$-simétrico. De fato, temos que $(2i-1\ 2i)\sigma_{pq} = \sigma_{pq}(2i-1\ 2i)$, para $1 \leq i \leq r$, e*

$$(p\ q)\sigma_{pq} = \frac{1}{2}((p\ q) + 1) = \sigma_{pq}.$$

Então, $(p\ q)\sigma_{pq}v = \sigma_{pq}v$ e $(2i-1\ 2i)\sigma_{pq}v = \sigma_{pq}v$, significando que $\sigma_{pq}v$ é $(r+1)$-simétrico.

Teorema 1.49 *Sejam V um S_n-módulo e W_r o subespaço de V gerado pelos elementos r-perfeitos. Então:*

(a) $U_r = W_r + U_{r+1}$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$.

(b) $V = W_0 + W_1 + ... + W_r + U_{r+1}$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$.

(c) $V = W_0 + W_1 + ... + W_r$ para algum $r \in \mathbb{N}_0$ e consequentemente V é gerado pelos elementos perfeitos.

Demonstração.

(a) Não é difícil ver que $W_r + U_{r+1} \subseteq U_r$. Mostremos a inclusão contrária. Como $W_r + U_{r+1}$ é subespaço de V é suficiente provar a inclusão contrária apenas para os elementos r-simétricos. Para isso, seja $v \in V$ um elemento r-simétrico. Pela Observação 1.48, temos que $\sigma_{pq}v$ é $(r+1)$-simétrico para quaisquer $2r < p < q \leq n$, ou seja, $\sigma_{pq}v \in U_{r+1}$. Além disso, temos que $\sigma_{pq}(U_{r+1}) \subseteq U_{r+1}$. Com isso, chegamos na hipótese do Teorema 1.44. E, pelo item (a) do Teorema 1.44, existe $v' \in V$ tal que $v' - v \in U_{r+1}$ e $\sigma_{pq}(v') = 0$ para quaisquer $2r < p < q \leq n$. Ademais, desde que v é $(i\ j)$-simétrico para $(i\ j) \in \{(1\ 2), (3\ 4), ..., (2r-1\ \ 2r)\}$, segue pelo item (b) do mesmo Teorema que v' é $(i\ j)$-simétrico, significando que $v' \in W_r$. Como $v - v' \in U_{r+1}$ e $v = v' + (v - v')$, segue que $v \in W_r + U_{r+1}$ e temos a inclusão contrária.

(b) Desde que todo $v \in V$ é 0-simétrico, temos que $V = U_0$. Mas pelo item (a), $U_0 = W_0 + U_1$ e $U_1 = W_1 + U_2$. Assim, $U_0 = W_0 + W_1 + U_2$. Aplicando o item (a) sucessivamente chegamos que $V = U_0 = W_0 + U_1 = W_0 + W_1 + U_2 = ... = W_0 + W_1 + ... + W_n + U_{n+1}$.

(c) Existe t para o qual $U_{t+1} = \{0_V\}$ e pelo item (b) temos que $V = W_0 + W_1 + ... + W_t$.

♦

Capítulo 2

O Teorema de Amitsur-Levitzki

No ano de 1950, S. A. Amitsur e J. Levitzki [1], usando argumentos combinatórios, demonstraram que o polinômio standard St_{2n} é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$. A demonstração deste resultado, chamado de teorema de Amitsur-Levitzki é considerada um marco na história da PI-teoria.

Posteriormente, matemáticos como Higman, Nagata, Regev, Herstein, Formanek, Rosset, Razmyslov, Swan, entre outros, apresentaram outras provas para este teorema, utilizando técnicas diferentes. Dentre estas provas, vamos apresentar neste capítulo as provas de Rosset (veja [10], página 18) e Swan [22].

2.1 Resultados preliminares

Proposição 2.1 *A álgebra $M_n(K)$ não possui identidade polinomial de grau menor do que $2n$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $M_n(K)$ possui uma identidade não nula de grau menor do que $2n$. Pela Proposição 1.36, existe identidade multilinear de $M_n(K)$

$$g(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(m)} = 0,$$

onde $m < 2n$ e $\alpha_\sigma \in K$. Como g é um polinômio não nulo, temos que $\alpha_\sigma \neq 0$ para algum $\sigma \in S_m$. Agora, considere o polinômio

$$h(x_1, x_2, ..., x_m) = \sigma^{-1}g(x_1, x_2, ..., x_m).$$

É claro que h é uma identidade para $M_n(K)$ e o coeficiente de $x_1x_2...x_m$ em h é α_σ. Considere em h a substituição $x_{\sigma(1)} = e_{11}$, $x_{\sigma(2)} = e_{12}$, $x_{\sigma(3)} = e_{22}$, $x_{\sigma(4)} = e_{23}, ..., x_{\sigma(m)} = e_{pq}$, onde $p = q$ ou $p = q - 1$ (dependendo da paridade de m). Temos que

$$h(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, ..., e_{pq}) = \alpha_\sigma e_{1q} = 0$$

resultando que $\alpha_\sigma = 0$. Absurdo. ♦

Proposição 2.2 *Se St_{2n} é uma identidade para $M_n(\mathbb{Q})$, então St_{2n} é também uma identidade para $M_n(K)$, onde K é um corpo qualquer.*

Demonstração. Desde que $M_n(\mathbb{Z}) \subseteq M_n(\mathbb{Q})$, segue que se St_{2n} é uma identidade para $M_n(\mathbb{Q})$, então St_{2n} também é uma identidade para $M_n(\mathbb{Z})$. Considere agora o corpo $\mathbb{Z}_p$ (p primo) e a função canônica $\varphi_p : M_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow M_n(\mathbb{Z}_p)$. Temos que φ_p é sobrejetiva, resultando que St_{2n} é também uma identidade para $M_n(\mathbb{Z}_p)$. Como St_{2n} é um polinômio multilinear, então é suficiente provar que St_{2n} se anula nos elementos de uma base de $M_n(K)$, digamos a base formada pelas matrizes unitárias e_{ij}. Sendo P o corpo primo de K, temos que 1_K e 0_K pertencem a P e assim as matrizes unitárias $e_{ij} \in M_n(P)$. Por outro lado, temos que $P \simeq \mathbb{Q}$, se $charK = 0$ e que $P \simeq \mathbb{Z}_p$, se $charK = p$. Ademais, como St_{2n} é uma identidade para $M_n(\mathbb{Q})$ e para $M_n(\mathbb{Z}_p)$, segue que St_{2n} é também uma identidade para $M_n(P)$, e portanto é também identidade para $M_n(K)$. ♦

Um dos temas importantes na discussão das identidades polinomiais da álgebra $M_n(K)$ é a utilização do polinômio característico $p(x) = det(xI_{n\times n} - a)$ de uma matriz $a \in M_n(K)$, à medida que o Teorema de Cayley-Hamilton assegura que $p(a) = 0$. Nesse sentido, usaremos a seguir o polinômio característico de uma matriz para demonstrar alguns resultados importantes.

Definição 2.3 *Definimos o **polinômio elementar simétrico** de grau m nas variáveis comutativas $t_1, t_2, ..., t_n$ como sendo*

$$e_m = e_m(t_1, ..., t_n) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n} t_{i_1}...t_{i_m}.$$

Definimos o ***polinômio potência simétrico*** *de grau k como sendo*

$$p_k = p_k(t_1, t_2, ..., t_n) = t_1^k + t_2^k + ... + t_n^k.$$

Existem relações entre os polinômios elementares simétricos e potência simétricos, dadas pelas seguintes fórmulas

$$me_m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} p_k e_{m-k}$$

para $m = 1, ..., n$ chamadas de *fórmulas de Newton* (veja demonstração em [10], página 15).

Proposição 2.4 *Sejam $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ os autovalores de uma matriz $a \in M_n(K)$ e $e_m = e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n} \varepsilon_{i_1} ... \varepsilon_{i_m}$ o valor do polinômio elementar simétrico de grau m e $p_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ o valor do polinômio potência simétrico de grau m em $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$. Então*

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) a^{n-m} = 0 \qquad e \qquad tr(a^m) = p_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \varepsilon_1^m + ... + \varepsilon_n^m.$$

Demonstração. Sejam $a \in M_n(K)$ e $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in K_1$ os autovalores de a, onde K_1 é uma extensão de K. Como

$$p(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) x^{n-m}$$

é o polinômio característico da matriz a, então o teorema de Cayley-Hamilton assegura que $p(a) = 0$ e assim

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) a^{n-m} = 0.$$

Por outro lado, como toda matriz $a \in M_n(K)$ é semelhante a uma matriz $b \in M_n(K_1)$ na forma de Jordan e considerando que os autovalores $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ aparecem na diagonal principal dos blocos de Jordan, devemos ter $tr(a) = tr(b) = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$. Ademais, como $\varepsilon_1^m, ..., \varepsilon_n^m$ são os autovalores de a^m, concluímos que $tr(a^m) = \varepsilon_1^m + ... + \varepsilon_n^m$. ♦

Sendo $n \geq 1$ um número inteiro, dizemos que λ é uma *partição* de n se $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$, onde $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_r > 0$ são números inteiros tais que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$ e escrevemos $\lambda \vdash n$.

Usando as fórmulas de Newton e indução podemos mostrar que

$$e_m = \sum_{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \vdash m} q_\lambda p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} ... p_{\lambda_r}$$

com $q_\lambda \in \mathbb{Q}$.

Lema 2.5 *Sejam* C *uma álgebra comutativa sobre* $\mathbb{Q}$ *e* $a \in M_n(C)$. *Se* $p(x) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m x^{n-m}$ *é o polinômio característico de* a, *então*

$$\alpha_m = \sum_{\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_r)\vdash m} q_\lambda tr(a^{\lambda_1}) ... \, tr(a^{\lambda_r}),$$

onde $m > 0$ *e* $q_\lambda \in \mathbb{Q}$ *não depende da matriz* a.

Demonstração. Primeiro suponha que C é um domínio de integridade. Se F é o corpo de frações de C, então $a \in M_n(F)$ e

$$p(x) = (x - \varepsilon_1)...(x - \varepsilon_n) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) x^{n-m},$$

onde $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ são os autovalores da matriz a e $e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ é o polinômio elementar simétrico. Como $\alpha_m = (-1)^m e_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ e $p_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = tr(a^m) = \varepsilon_1^m + ... + \varepsilon_n^m$, temos o resultado neste caso, como consequência do que foi visto acima.

Em geral, sejam $\mathbb{Q}[Y]$ uma álgebra polinomial e $\phi : \mathbb{Q}[Y] \longrightarrow C$ um homomorfismo. Temos que ϕ induz um homomorfismo $\overline{\phi} : M_n(\mathbb{Q}[Y]) \longrightarrow M_n(C)$, dado por $\overline{\phi}((a_{ij})) = (\phi(a_{ij}))$ para $a_{ij} \in \mathbb{Q}[Y]$. Desde que

$$tr(\overline{\phi}(a)) = \phi(tr(a))$$

para $a \in M_n(\mathbb{Q}[Y])$ e que $\mathbb{Q}[Y]$ é um domínio de integridade, temos o resultado no caso geral. ♦

Lema 2.6 *Seja* C *uma álgebra comutativa sobre* $\mathbb{Q}$. *Se* $a \in M_n(C)$ *é tal que* $tr(a) = tr(a^2) = ... = tr(a^n) = 0$, *então* $a^n = 0$.

Demonstração. Sendo $p(x) = x^n + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m x^{n-m}$ o polinômio característico da matriz a, temos $p(a) = a^n + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m a^{n-m} = 0$. Desde que os α_m são dados como no Lema 2.5 e por hipótese $tr(a) = tr(a^2) = ... = tr(a^n) = 0$, segue que os coeficientes $\alpha_m = 0$ para $m = 1, 2, ..., n$. Logo, $p(a) = a^n$, resultando que $a^n = 0$. ♦

Lema 2.7 *Sejam* E *a álgebra de Grassmann (veja o Exemplo 1.4 no Capítulo 1) sobre* $\mathbb{Q}$ *e* E_1 *o subespaço da álgebra exterior* E *gerado pelo conjunto* $\{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$. *Então* $tr(ab) = -tr(ba)$ *para quaisquer* $a, b \in M_n(E_1)$.

Demonstração. Não é difícil ver que podemos escrever $a = \sum_i a_i w_i$ e $b = \sum_i b_i w_i$ com $a_i, b_i \in M_n(\mathbb{Q})$, e para todo i os $w_i \in E_1$ são produtos dos elementos $e_1, e_2, e_3, ...$ de E. Desde que $w_i w_j = -w_j w_i$ para quaisquer $w_i, w_j \in E_1$, e considerando que $tr(a_i b_j) = tr(b_j a_i)$, temos que

$$tr(ab) = \sum_{i,j} tr(a_i b_j) w_i w_j = -\sum_{i,j} tr(b_j a_i) w_j w_i = -tr(ba).$$

♦

2.2 A prova de Rosset para o teorema de Amitsur-Levitzki

Teorema 2.8 *(**Amitsur-Levitzki**) O polinômio standard St_{2n} é uma identidade polinomial para a álgebra das matrizes $M_n(K)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2 , podemos assumir $K = \mathbb{Q}$. Considere a álgebra de Grasmann $E = E_0 \oplus E_1$ sobre $\mathbb{Q}$. Considere $a = a_1 e_1 + ... + a_{2n} e_{2n} \in M_n(E_1)$, onde $a_1, ..., a_{2n} \in M_n(\mathbb{Q})$. Desde que

$$e_{\sigma(1)} ... e_{\sigma(2n)} = (-1)^\sigma e_1 ... e_{2n}$$

para toda $\sigma \in S_{2n}$, temos que

$$a^{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} ... a_{\sigma(2n)} e_1 ... e_{2n} = St_{2n}(a_1, ..., a_{2n}) e_1 ... e_{2n}. \tag{2.1}$$

Desde que $a, a^{2i-1} \in M_n(E_1)$ para todo $i = 1, ..., n$, então pelo Lema 2.7, temos que

$$tr(a^{2i}) = tr(aa^{2i-1}) = -tr(a^{2i-1}a) = -tr(a^{2i}),$$

resultando que $tr(a^{2i}) = 0$. Sendo E_0 uma subálgebra comutativa de E e observando que $a^2 \in M_n(E_0)$, temos que $a^{2n} = 0$ pelo Lema 2.6. Substituindo $a^{2n} = 0$ em (2.1), resulta que $St_{2n}(a_1, ..., a_{2n}) e_1 ... e_{2n} = 0$. Como $e_1 ... e_{2n}$ é não nulo, concluímos que $St_{2n}(a_1, ..., a_{2n}) = 0$. ♦

2.3 A prova de Swan para o teorema de Amitsur-Levitzki

A prova do teorema de Amitsur-Levitzki desenvolvida por Swan [22] é baseada num teorema da teoria dos grafos. Diante disso, julgamos ser importante fazer uma abordagem sobre grafos antes de apresentar a prova do teorema.

Definição 2.9 *Um* ***grafo orientado*** Γ *(finito) consiste em:*

(i) um conjunto V finito de pontos chamados de ***vértices****.*

(ii) um conjunto E finito de segmentos orientados chamados de ***arestas****.*

Para $e \in E$, escreva $i(e)$ para denotar o *início* da aresta e e $f(e)$ para denotar o *final* da aresta e. Temos então duas funções $i, f : E \longrightarrow V$.

Seja $p \in V$. Definimos $s(p) = |\{e \in E \mid i(e) = p\}|$ como sendo o *número de arestas que saem do vértice* p e $t(p) = |\{e \in E \mid f(e) = p\}|$ como sendo o *número de arestas que chegam em* p. Definimos também a *ordem* e o *fluxo* do vértice p como sendo

$$ordem(p) = s(p) + t(p) \quad e \quad fluxo(p) = s(p) - t(p),$$

respectivamente.

Definição 2.10 *Sejam Γ um grafo orientado e p e q vértices em Γ. Definimos um* ***caminho orientado*** *$\mathcal{C}$, como sendo uma sequência de arestas $e_1, e_2, ..., e_k$ em Γ tais que $f(e_i) = i(e_{i+1})$ para $i = 1, 2, ..., k-1$. Quando $i(e_1) = p$ e $f(e_k) = q$, vamos dizer que $\mathcal{C}$ é um caminho orientado de p para q.*

Definição 2.11 *Seja Γ um grafo orientado. Dizemos que Γ é* ***conexo,*** *se para todo par de vértices p, q em Γ, existe um caminho orientado ligando p e q.*

Se p e q são vértices em Γ, vamos admitir que p e q podem ser ligados por vários caminhos orientados e que p pode ser ligado a ele próprio por uma aresta (este tipo de aresta é chamada de *laço*). Ademais, vamos supor que em Γ não existe vértice cuja ordem é 0. Podemos supor isto, pois aqui vamos trabalhar somente com grafos conexos.

Definição 2.12 *Sejam Γ um grafo orientado e $\mathcal{C}$ um caminho orientado de p para q em Γ. Vamos dizer que $\mathcal{C}$ é um* ***caminho unicursal*** *se cada aresta de Γ aparece uma única vez em $\mathcal{C}$.*

Considere o conjunto $S = \{1, 2, ..., k\}$ e um caminho unicursal $\mathcal{C} = (e_1, e_2, ..., e_k)$ em Γ. Desde que cada aresta e_i aparece uma única vez em $\mathcal{C}$, temos que existe uma bijeção entre S e E. Assim, enumerando as arestas de E, observamos que a cada caminho unicursal $\mathcal{C}$ fica associada uma permutação do conjunto S. Com isso, vamos dizer que um caminho unicursal $\mathcal{C}$ é *par* se o sinal da permutação associada a ele é par, e que um caminho unicursal $\mathcal{C}$ é *ímpar* se o sinal da permutação associada a ele é ímpar. Ademais, sendo Γ um grafo orientado e p e q vértices em Γ, vamos chamar de $n_1(p, q)$ e $n_2(p, q)$ os números de caminhos unicursais pares e ímpares, respectivamente, de p para q.

Exemplo 2.13 *Seja Γ o grafo orientado representado na Figura 2.1. Temos que $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e $V = \{p, q, r, s\}$. Além disso, $i(e_1) = s$ e $f(e_1) = p$, $i(e_2) = p$ e $f(e_2) = r$, $i(e_3) = p$ e $f(e_3) = q$, $i(e_4) = q$ e $f(e_4) = s$, $i(e_5) = r$ e $f(e_5) = q$. Observe que existem em Γ exatamente dois caminhos unicursais de p para q, a saber, $\mathcal{C}_1 = (e_2, e_5, e_4, e_1, e_3)$ e $\mathcal{C}_2 = (e_3, e_4, e_1, e_2, e_5)$. Associados aos caminhos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ estão as permutações pares $\sigma_{\mathcal{C}_1} = (12534) = (14)(13)(15)(12)$ e $\sigma_{\mathcal{C}_2} = (13)(24)$. Portanto, são pares os dois únicos caminhos unicursais de p para q em Γ.*

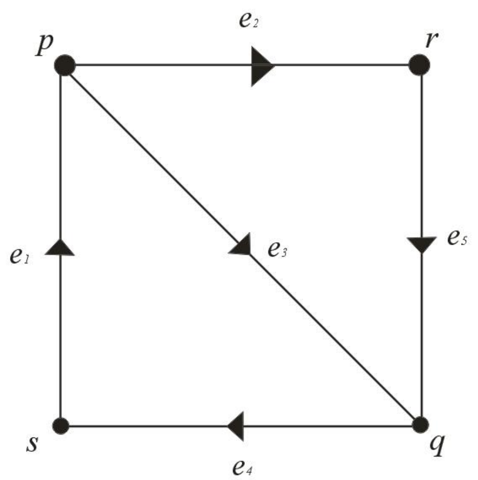

Figura 2.1: Desenho do grafo do Exemplo 2.1

Proposição 2.14 *Sejam p e q vértices em Γ e $\mathcal{C}$ um caminho unicursal ligando p e q, então valem:*

(a) Γ *é conexo.*

(b) Todos os outros vértices em Γ diferentes de p e q tem fluxo igual a zero(0).

(c) Se $p = q$, então $fluxo(p) = 0$.

(d) Se $p \neq q$, então $fluxo(p) = +1$ e $fluxo(q) = -1$.

Demonstração.

(a) Suponha que o grafo Γ não é conexo, então para algum par de vértices, digamos p_1, q_1 em Γ, não existe um caminho orientado ligando p_1 e q_1, implicando que não pode haver nenhum caminho orientado $\mathcal{C}$ conectando todos os vértices de Γ e que cada aresta de Γ apareça um única vez em $\mathcal{C}$. Noutras palavras, sob estas condições não pode existir nenhum caminho unicursal em Γ. Portanto, para que em Γ haja um caminho unicursal, Γ deve ser necessariamente conexo.

(b) Sejam $(e_1, e_2, ..., e_k)$ um caminho unicursal de p para q em Γ e p_j um vértice tal que $p_j \neq p$ e $p_j \neq q$. Como $i(e_{i+1}) = f(e_i)$ para $i = 1, 2, ..., k-1$, então para cada aresta que sai de p_j outra chega em p_j. Logo, $s(p_j) = t(p_j)$, resultando que $fluxo(p_j) = 0$.

(c) Seja $(e_1, e_2, ..., e_k)$ um caminho unicursal de p para q em Γ. Como $p = q$, segue que para cada aresta que sai de p, outra chega em p, implicando que $s(p) = t(p)$. Logo, $fluxo(p) = 0$.

(d) Seja $(e_1, e_2, ..., e_k)$ um caminho unicursal de p para q em Γ. Como $p \neq q$ e $i(e_1) = p$, e para cada aresta intermediária que sai de p outra chega em p, segue que o número de arestas que saem do vértice p, excede em um o número de arestas que chegam em p, ou seja, $s(p) = |\{e \in E \mid i(e) = p\}|$ tem uma aresta a mais do que $t(p) = |\{e \in E \mid f(e) = p\}|$, resultando que $fluxo(p) = +1$. Por outro lado, como $f(e_k) = q$ e $p \neq q$, e para cada aresta intermediária que chega em q outra sai de q, segue que o número de arestas que chegam no vértice q excede em um o número de arestas que saem de q, ou seja, $t(q) = |\{e \in E \mid f(e) = q\}|$ tem uma aresta a mais do que $s(q) = |\{e \in E \mid i(e) = q\}|$, resultando que $fluxo(q) = -1$. ♦

Teorema 2.15 *Seja Γ um grafo orientado tal que $|E| \geq 2|V|$. Se p e q são vértices em Γ, então $n_1(p,q) = n_2(p,q)$.*

Demonstração. Vamos fazer algumas reduções iniciais.

(1) Suponha que o teorema é válido para $|E| = 2|V|$. Afirmamos que o teorema também vale se Γ é um grafo com $|E| > 2|V|$. De fato, se $|E| > 2|V|$, tomemos $k = |E| - 2|V|$ e

modifiquemos o grafo Γ, introduzindo k novos vértices e k novas arestas. Agora temos um novo grafo orientado Γ', representado na Figura 2.2.

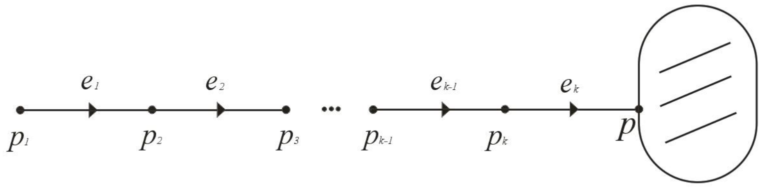

Figura 2.2: Desenho de parte do grafo Γ' da primeira redução

O novo grafo Γ' tem a seguinte configuração: $E' = E \cup \{e_1, ..., e_k\}$ e $V' = V \cup \{p_1, ..., p_k\}$. Assim, em Γ' temos que $|E'| = |E| + k$ e $|V'| = |V| + k$. Mas,$|E'| = |E| + (|E| - 2|V|) = 2|E| - 2|V| = 2(|E| - |V|)$ e $|V'| = |V| + |E| - 2|V| = (|E| - |V|)$. Logo, $|E'| = 2|V'|$. Desta última igualdade temos que o teorema é válido para Γ'. Mostremos que o teorema também vale para Γ. De fato, sendo $\mathcal{C}$ um caminho unicursal em Γ com início em p e final em q, temos que $e_1e_2...e_k\mathcal{C}$ é um caminho unicursal em Γ' com início em p_1 e final q. Dessa forma, a aplicação $\mathcal{C} \longrightarrow e_1e_2...e_k\mathcal{C}$ é bijetora e preserva a paridade dos caminhos. Desde que o resultado vale para o grafo Γ', também vale para Γ.

(2) Suponha que o teorema é válido para o grafo Γ com $|E| = 2|V|$ e que $fluxo(x) = 0$ para todo $x \in V$. Mostremos que o teorema é válido no caso geral. Suponha que nem todo vértice em Γ tem fluxo zero e que existe caminho unicursal em Γ. Então este caminho deve começar em p e terminar em q, com $p \neq q$. Pela Proposição 2.14, temos que $fluxo(p) = 1$ e $fluxo(q) = -1$. Agora, defina um novo grafo orientado Γ', adicionando duas arestas e'_1 e e'_2 e um vértice v, representado na Figura 2.3.

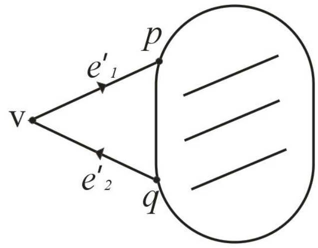

Figura 2.3: Desenho de parte do grafo Γ' da segunda redução

O novo grafo Γ' tem a seguinte configuração $E' = E \cup \{e'_1, e'_2\}$ e $V' = V \cup \{v\}$. Desse modo, $|E'| = |E| + 2$ e $|V'| = |V| + 1$. Mas, $|E'| = 2|V'| - 2|V| + |E|$. Desde que

$|E| = 2|V|$, concluímos que $|E'| = 2|V'|$. Sendo $\mathcal{C}$ um caminho unicursal de p para q em Γ, então $e_1'\mathcal{C}e_2'$ é um caminho unicursal de v para v em Γ'. Temos que a aplicação $\mathcal{C} \longrightarrow e_1'\mathcal{C}e_2'$ é bijetora e preserva a paridade. Como o resultado é válido para Γ', pois $|E'| = 2|V'|$, segue que também vale para o grafo Γ. Ademais, observe que todo vértice tem fluxo zero em Γ'.

Pelo que fizemos nas reduções acima, podemos provar o teorema para um grafo orientado Γ, sob as seguintes hipóteses: $|E| = 2|V|$ e $fluxo\ (x) = 0$ para todo vértice x em Γ. Assim, pela Proposição 2.14, podemos dizer que todo caminho unicursal em Γ começa e termina num mesmo vértice. Para demonstrar o teorema vamos considerar três casos.

Caso 1. Suponha que o grafo orientado Γ tem a configuração representada na Figura 2.4.

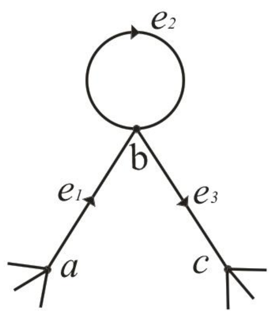

Figura 2.4: Desenho de parte do grafo Γ do Caso 1

Se $p = b$, observe que qualquer caminho unicursal (com extremos iguais a p) começa ou termina em e_2, ou seja, com a notação usada escrevemos $e_2\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}e_2$, respectivamente. Quando e_2 é aresta inicial (respec. final), passe a vê-la como aresta final (respec. inicial) e temos uma correspondência biunívoca entre os caminhos unicursais pares e ímpares. Se $p \neq b$, modifique o grafo Γ substituindo as arestas e_1, e_2, e_3 pela aresta e e retirando o vértice b, para formar um novo grafo Γ' representado na Figura 2.5.

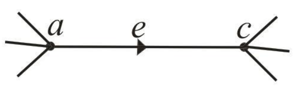

Figura 2.5: Desenho de parte do grafo Γ' do Caso 1

O grafo Γ' tem a seguinte configuração: $E' = (E - \{e_1, e_2, e_3\}) \cup \{e\}$ e $V' = V - \{b\}$. Observe que um caminho unicursal em Γ', é um caminho unicursal em Γ, substituindo $e_1e_2e_3$ por e. Note também que em Γ', temos $|E'| = |E| - 1$ arestas e $|V'| = |V| - 2$ vértices. Através de um cálculo análogo ao feito em (2), obtemos que $|E'| = 2|V'|$, ou seja, o grafo Γ' satisfaz as hipóteses. Seja um caminho unicursal $\mathcal{C}_1e_1e_2e_3\mathcal{C}_2$ em Γ com base p, então $\mathcal{C}_1e\mathcal{C}_2$ é um caminho unicursal em Γ' com base p. Ademais, existe uma correspondência biunívoca entre os caminhos unicursais $\mathcal{C}_1e_1e_2e_3\mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1e\mathcal{C}_2$, preservando a paridade. Desde que Γ' satisfaz as hipóteses e tem menos vértices do que Γ, concluímos por indução que o teorema vale para o grafo Γ.

Caso 2. Suponha que o grafo orientado Γ possui um vértice de *ordem* 2. Como $|E| > |V|$, segue que nem todo vértice em Γ tem *ordem* 2. Então temos duas possibilidades para o grafo Γ, representadas na Figura 2.6.

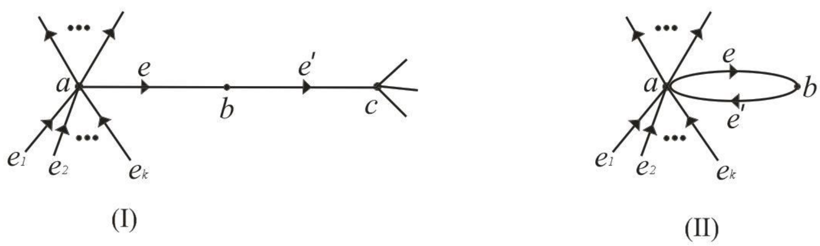

Figura 2.6: Desenhos de partes das duas possibilidades do grafo Γ do Caso 2

Consideremos primeiramente os caminhos unicursais com base $p \neq a, b$. Para cada $i = 1, 2, ..., k$, defina um novo grafo Γ_i, com as transformações representadas na Figura 2.7. Observe que se tivermos a possibilidade (II), teremos $c = a$ no grafo Γ_i.

Os caminhos unicursais em Γ com base p e que contêm e_ie, estão em correspondência biunívoca (preservando a paridade) com os caminhos unicursais em Γ_i com base p. Desde que o teorema vale para o grafo Γ_i, pois este satisfaz as hipóteses e se enquadra no caso anterior (para o qual o teorema é válido), e existe uma correspondência biunívoca preservando a paridade, segue que o teorema também vale para o grafo Γ.

Vamos agora considerar os caminhos unicursais com base $p = a$ ou $p = b$. Consideremos a possibilidade (II) e suponhamos primeiramente que $ordem(c) =$

Figura 2.7: Desenho de parte do grafo Γ_i

2 e denotemos por e'' a aresta que sai de c. A aplicação $e''\mathcal{C}ee' \longrightarrow e'e''\mathcal{C}e$ é uma correspondência biunívoca que muda a paridade entre os caminhos unicursais de Γ com base c e b. Desde que já vimos que o resultado vale para c, deve valer também para b.

Observe agora que $ee'\mathcal{C} \longrightarrow e'\mathcal{C}e$ é uma correspondência biunívoca (mudando paridade) entre os caminhos unicursais com base b e os caminhos unicursais com base a começando com e. Para os caminhos unicursais com base a que não começam com e, usamos os grafos Γ_i.

Suponha agora que $ordem(c) > 2$, então Γ tem a configuração representada na Figura 2.8.

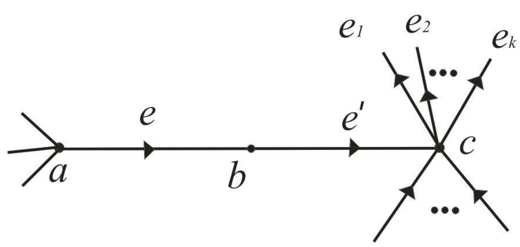

Figura 2.8: Desenho de parte do grafo Γ do Caso 2

Para cada $i = 1, ..., k$, defina um novo grafo $\overline{\Gamma}_i$ com as transformações representadas na Figura 2.9.

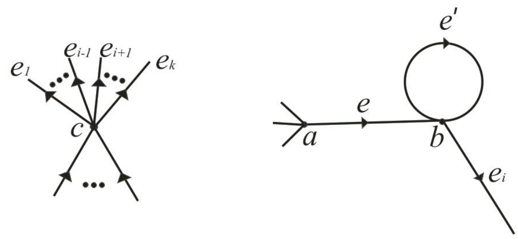

Figura 2.9: Desenho de parte do grafo $\overline{\Gamma}_i$ do Caso 2

Temos uma correspondência biunívoca preservando a paridade, entre os caminhos unicursais com base a em Γ que contêm $e'e_i$ e os caminhos unicursais com base a em $\overline{\Gamma}_i$. Desde que o teorema é válido para $\overline{\Gamma}_i$, também vale para os caminhos unicursais com base a em Γ. Desde que o teorema vale em Γ para caminhos unicursais com base a e que não têm início em e, deve valer também para os caminhos com base a e com início em e. Observe que os caminhos unicursais com base b em Γ estão em correspondência biunívoca com os caminhos unicursais de Γ com base a e começando com e. Esta correspondência é dada por $e'\mathcal{C}e \longrightarrow ee'\mathcal{C}$ e muda a paridade. Logo, o resultado vale para os caminhos unicursais com base b em Γ.

Na possibilidade (II), defina um novo grafo Γ' obtido de Γ eliminando-se as arestas e, e' e o vértice b. Por indução, temos que o teorema é valido para o grafo Γ'. Observe que sendo $e'\mathcal{C}e$ um caminho unicursal em Γ com base b e $\mathcal{C}$ um caminho unicursal em Γ' com base a, temos que a correspondência $e'\mathcal{C}e \longrightarrow \mathcal{C}$ é biunívoca e preserva a paridade. Por outro lado, sendo $ee'\mathcal{C}$ um caminho unicursal em Γ com base a, com início em e, temos que a correspondência $ee'\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é biunívoca (e preserva a paridade). Os caminhos unicursais em Γ que não começam em e, devem conter e_iee' para algum $i = 1, 2, ..., k$. Então pelo grafo Γ_i, onde o teorema vale, podemos concluir que em Γ, o número de caminhos unicursais pares é igual ao número de caminhos unicursal ímpares para algum i fixado.

Caso 3. Suponha que o Caso 1 e o Caso 2 não se aplicam ao grafo orientado Γ. Então Γ não possui vértice de ordem 2. Disto segue que $ordem(v) \geq 4$ para todo vértice v em Γ. Mas, $\sum_{v \in V} ordem(v) = 2|E| = 2(2|V|) = 4|V|$ e daí devemos ter que todo vértice em Γ tem *ordem* exatamente igual a 4. Portanto, o grafo Γ tem a configuração representada na Figura 2.10.

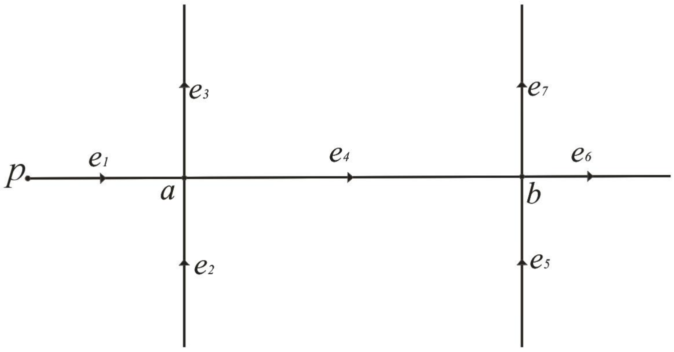

Figura 2.10: Desenho de parte do grafo Γ do Caso 3

Para $i = 1, 2$, considere o grafo orientado Γ_i representado na Figura 2.11.

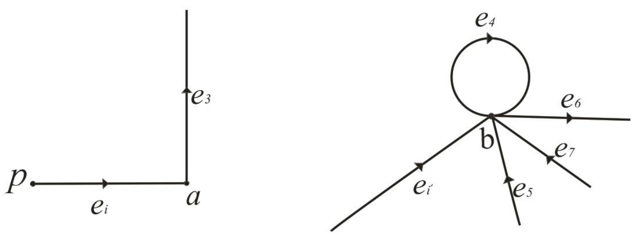

Figura 2.11: Desenho de parte do grafo Γ_i do Caso 3

Se $i' = 2$ e $i = 1$, então o grafo Γ_1 tem a configuração da Figura 2.12.

Se $i' = 1$ e $i = 2$, então o grafo Γ_2 tem a configuração da Figura 2.13.

Como no Caso 2, todo caminho unicursal em Γ gera um caminho unicursal em Γ_1 ou em Γ_2, embora nem todo caminho unicursal em Γ_1 ou em Γ_2 seja proveniente de algum caminho unicursal de Γ. Por exemplo, os caminhos unicursais que contêm e_1e_6 ou e_1e_7 no grafo Γ_2 e os caminhos unicursais que contêm e_2e_6 ou e_2e_7 no grafo Γ_1 (sem passar por e_4 imediatamente por e_1 ou e_2). Observe que tanto um quanto o outro contém os subcaminhos $e_5e_4e_6$ ou $e_5e_4e_7$. Logo, esses caminhos em Γ_1 e Γ_2, que não são unicursais em Γ, são unicursais nos grafos Γ'_j, para $j = 6, 7$, representados na Figura 2.14.

Se $j' = 7$ e $j = 6$, então o grafo Γ'_6 tem a configuração da Figura 2.15.

Se $j' = 6$ e $j = 7$, então o grafo Γ'_7 tem a configuração da Figura 2.16.

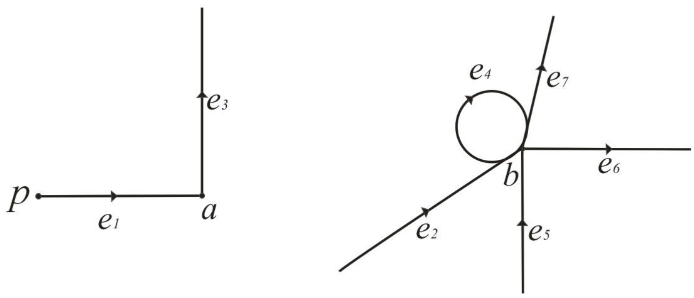

Figura 2.12: Desenho de parte do grafo Γ_1 do Caso 3

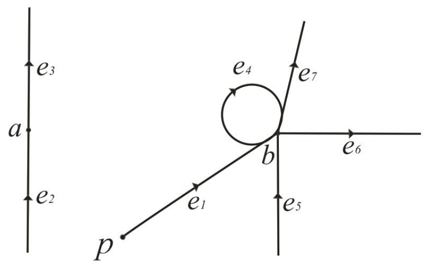

Figura 2.13: Desenho do grafo Γ_2 do Caso 3

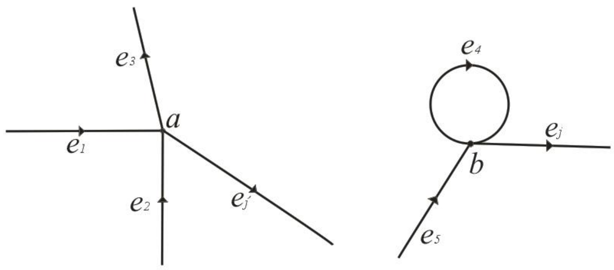

Figura 2.14: Desenho do grafo Γ'_j do Caso 3

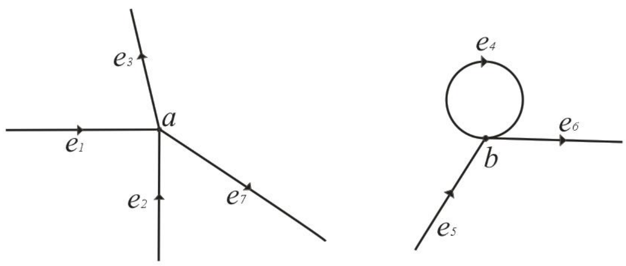

Figura 2.15: Desenho do grafo Γ'_7 do Caso 3

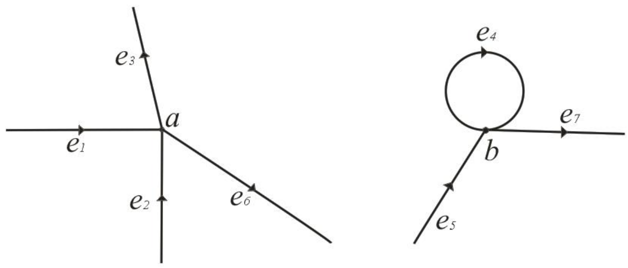

Figura 2.16: Desenho do grafo Γ_6' do Caso 3

Observe que os caminhos unicursais sobre Γ_1 e Γ_2, ou são unicursais em Γ, ou são unicursais em Γ_6' e Γ_7', preservando a paridade. Como o teorema vale pelo Caso 2 para Γ_1 e Γ_2 e vale pelo Caso 1 para Γ_6' e Γ_7', segue que também vale para o grafo Γ. ♦

Teorema 2.16 ***(Amitsur-Levitzki)*** *O polinômio standard St_{2n} é uma identidade polinomial para a álgebra das matrizes $M_n(K)$.*

Demonstração. Desde que St_{2n} é um polinômio multilinear, é suficiente provar que St_{2n} se anula nos elementos de uma base da álgebra $M_n(K)$. Então consideremos as matrizes unitárias e_{ij}, as quais formam uma base para $M_n(K)$. Tomemos $(a_1, a_2, ..., a_{2n})$ uma sequência $2n$-upla qualquer de matrizes unitárias e defina um grafo orientado Γ com n vértices $p_1, p_2, ..., p_n$ e uma aresta e_i para cada matriz unitária a_i. Além disso, no grafo orientado Γ, se $a_i = e_{jk}$, então $i(e_i) = p_j$ e $f(e_i) = p_k$. Observe que no grafo Γ se verifica a igualdade $|E| = 2|V|$. Temos que um produto $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(2n)}$ é uma matriz unitária e_{ij} não nula se, e somente se, a sequência de arestas $e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(2n)}$ forma um caminho unicursal de p_i para p_j no grafo Γ. Em $St_{2n}(a_1, a_2, ..., a_{2n})$ o produto $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(2n)}$ aparece com o sinal da permutação σ. Fixados $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, segue do Teorema 2.15 que o número de permutações pares σ é igual ao número de permutações ímpares σ tais que $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(2n)} = e_{ij}$. Segue então que os termos da soma $\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(2n)}$ nos quais aparece e_{ij} se anulam dois a dois. Logo, $St_{2n}(a_1, a_2, ..., a_{2n}) = 0$. ♦

Capítulo 3

Identidades multilineares da álgebra das matrizes $M_n(K)$

Uma maneira didática de fazer uma abordagem sobre as identidades polinomiais da álgebra $M_n(K)$, sobre um corpo K de característica zero, é dividí-las em três casos. Primeiro, as identidades multilineares de grau menor do que $2n-1$. Neste caso, temos somente a identidade nula. Segundo, as identidades multilineares de grau $2n$, as quais são múltiplas escalares do polinômio standard St_{2n}. Terceiro, as identidades multilineares de grau maior ou igual a $2n+1$. Neste capítulo abordaremos as identidades multilineares de grau $2n+1$. Nesse sentido, nossos objetivos aqui consistirão em provar, para $n > 2$, que o espaço vetorial das identidades multilineares de $M_n(K)$ de grau $2n+1$, denotado por V_{2n+1}, é gerado pelas identidades multilineares que seguem do polinômio standard St_{2n+1} e encontrar uma base para V_{2n+1}.

Antes, porém, de partirmos para a construção da prova, é importante chamar atenção para uma pergunta natural, mas recorrente. E as identidades multilineares de $M_n(K)$ de grau $2n+2$? Esta pergunta foi respondida por Drensky e Azniv Kasparian [5], em 1983, para o caso $n = 3$. Eles provaram que as identidades multilineares de grau $8 = 2.3 + 2$ de $M_3(K)$, sobre o corpo K de característica zero, seguem do polinômio standard St_6.

Em todo este capítulo, K denotará um corpo de característica zero.

3.1 Sequência rígida

Sejam $a_1, ..., a_k$ matrizes em $M_n(K)$ e seja $u = (a_1, ..., a_k)$ uma sequência. Definimos o ***comprimento da sequência*** u, denotado por $l(u)$, como sendo o número k. Definimos também o ***valor da sequência*** u, denotado por $v(u)$, como sendo o produto das k matrizes, ou seja, $v(u) = a_1a_2...a_k$. Dizemos que u é n-***simples*** se toda a_t é alguma matriz unitária e_{ij} e o conjunto de índices dessas matrizes unitárias contém no máximo n números distintos. Vamos dizer que uma sequência u é ***anti-anulação*** se $v(u)$ é uma matriz não nula.

Exemplo 3.1 *Considere a sequência* $u = (e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33})$*. Temos que o comprimento é* $l(u) = 2.3 - 1 = 5$ *e o valor de* u *é* $v(u) = e_{11}e_{12}e_{22}e_{23}e_{33} = e_{13}$*. Além disso, a sequência* u *é* 3*-simples e anti-anulação, pois* $v(u)$ *é uma matriz não nula.*

Definição 3.2 *Seja* u *uma sequência anti-anulação* n*-simples. Dizemos que* u *é* n*-**rígida** se nenhuma sequência obtida de* u *por permutação não trivial assume o mesmo valor de* u*.*

Exemplo 3.3 *As sequências* $u = (e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33})$ *e* $u_0 = (e_{12}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, e_{21})$ *são ambas* 3*-rígidas. Realmente, tanto a sequência* u*, quanto a sequência* u_0 *são* 3*-simples e anti-anulação, pois* $v(u) = e_{13}$ *e* $v(u_0) = e_{11}$*. Ademais, a permutação identidade é a única que preserva os valores de* u *e* u_0*.*

Seja u uma sequência anti-anulação n-simples. Então u tem a forma $u = (e_{i_1i_2}, e_{i_2i_3}, e_{i_3i_4}, ..., e_{i_ki_{k+1}})$, onde $\{i_1, i_2, ..., i_{k+1}\}$ possui, no máximo, n elementos distintos. Vamos definir a sequência ***derivada*** de u, denotada por u', como sendo a sequência de números $u' = (i_1, i_2, i_3, ..., i_{k+1})$. Observe que toda $u' = (i_1, i_2, i_3, ..., i_{k+1})$ tal que o conjunto $\{i_1, i_2, i_3, ..., i_{k+1}\}$ tem no máximo n, define uma sequência n-simples u tal que $l(u') = l(u) + 1$. A sequência u' derivada de u é dita n-rígida se u é n-rígida.

Sejam u uma sequência anti-anulação n-simples e $u' = (i_1, i_2, ..., i_{k+1})$ a sequência derivada de u. Se r é um número tal que $r = i_\rho$ para algum $1 \leq \rho \leq k+1$, vamos dizer que r ***ocorre*** em u' na posição ρ. Vamos dizer que r é ***externo*** em u' quando $\rho = 1$ ou $\rho = k + 1$. Caso contrário, dizemos que r é ***interno*** em u'.

Teorema 3.4 *Sejam* u *uma sequência anti-anulação* n*-simples com comprimento* $l(u) = 2n - 1$ *e* u' *a sequência derivada de* u*. Então* u *é* n*-rígida se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(i) Todo número r que ocorre em u', ocorre exatamente duas vezes.

(ii) Se $\rho_1(r)$ denota a posição da primeira ocorrência de r e $\rho_2(r)$ denota a posição da segunda ocorrência de r em u', então a relação $\rho_1(r) < \rho_1(s) < \rho_2(r) < \rho_2(s)$ não vale para nenhum par de números r e s.

Demonstração. Suponha que u é uma sequência n-rígida. Mostremos que todo número r que ocorre na sequência derivada u', ocorre exatamente duas vezes. Supondo, por contradição, que isto não vale, desde que $l(u') = l(u) + 1 = (2n-1) + 1 = 2n$ e que no máximo n números distintos aparecem em u', deve existir r que aparece ao menos três vezes em u'. A sequência original u pode então ser decomposta em quatro blocos, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, tais que $l(u_1), l(u_4) \geq 0$, $l(u_2), l(u_3) \geq 1$ e $v(u_2) = v(u_3) = e_{rr}$. Como os blocos u_2 e u_3 têm o mesmo valor, então podem ser transpostos na sequência original u sem afetar o valor de u, o que é uma contradição, pois a identidade é a única permutação que preserva o valor da sequência u. Logo, r ocorre exatamente duas vezes em u'. Agora, vamos supor por contradição que existem r e s tais que a relação $\rho_1(r) < \rho_1(s) < \rho_2(r) < \rho_2(s)$ vale, ou seja, r e s ocorrem em u' na seguinte ordem $(..., r, ..., s, ..., r, ..., s, ...)$. Então a sequência u pode ser decomposta em cinco blocos $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, tal que $l(u_1), l(u_5) \geq 0$, $l(u_2), l(u_3), l(u_4) \geq 1$ e $v(u_2) = v(u_4) = e_{rs}$. Desde que os blocos u_2 e u_4 têm o mesmo valor, então podem ser transpostos em u' sem afetar o valor de u'. Novamente, chegamos a uma contradição.

Suponha que uma sequência u satisfaz às condições (i) e (ii). Mostremos que nessas condições u é n-rígida. Vamos proceder por indução em n. Se $n = 1$ temos o caso trivial. Se $n = 2$, então são duas possibilidades para a sequência derivada u' satisfazer às condições (i) e (ii), a saber, $(1, 2, 2, 1)$ e $(1, 1, 2, 2)$ que são derivadas das sequências 2-rígidas com as seguintes configurações (e_{12}, e_{22}, e_{21}) e (e_{11}, e_{12}, e_{22}), respectivamente. Se $n \geq 3$, existe r cuja segunda ocorrência em u' sucede imediatamente a primeira e ambas são internas. Para ver isso, escolha um número r ocorrendo em u' somente internamente, o que é possível pois $n \geq 3$. Pela condição (i) pelo menos três números distintos devem ocorrer em u', pois cada número ocorre exatamente duas vezes. Se tivermos $\rho_2(r) = \rho_1(r) + 1$, então está feito. Caso contrário, sejam $s_1, ..., s_t$ os números que ocorrem entre as posições $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$. Pela condição (ii), devemos ter $\rho_1(r) < \rho_1(s_j) < \rho_2(s_j) < \rho_2(r)$ para qualquer $j = 1, 2, ..., t$. Assim,

$\rho_1(r) < \rho_1(s_1) < \rho_1(s_2) < ... < \rho_1(s_t) < \rho_2(r)$ e daí $\rho_1(r) < \rho_1(s_t) < \rho_2(s_t) < \rho_2(r)$, e pela condição (ii), não pode haver nada entre $\rho_1(s_t)$ e $\rho_2(s_t)$. Assim, escolha r tal que $\rho_2(r) = \rho_1(r) + 1$ e observe que o número r ocorre na sequência original u no interior de um bloco com forma e_{lr}, e_{rr}, e_{rk} e em nenhum outro lugar. Considere a sequência u_0, obtida de u substituindo o bloco e_{lr}, e_{rr}, e_{rk} pelo termo e_{lk} (observe que $e_{lk} = e_{lr}e_{rr}e_{rk}$). Temos que u_0 é uma sequência $(n-1)$-simples (observe que r não ocorre na sequência u_0) cujo comprimento é $l(u_0) = 2(n-1) - 1$ e satisfaz (i) e (ii). Por hipótese de indução, a sequência u_0 é $(n-1)$-rígida, donde concluímos que u é n-rígida. ♦

Teorema 3.5 *Sejam $r_1, ..., r_k$ números distintos, com $k \leq n$, e para cada r_i considere um par $\rho_1(r_i), \rho_2(r_i) \in \{1, ..., 2n\}$ tais que todos os $\rho_j(r_i)$ são distintos e $\rho_1(r_i) < \rho_2(r_i)$. Para que exista uma sequência n-rígida u de comprimento $l(u) = 2n - 1$, onde os números $\rho_1(r_i), \rho_2(r_i)$ são as posições de ocorrência de r_i em u', é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(a) O número $\rho_2(r_i) - \rho_1(r_i)$ é ímpar para $i = 1, ..., k$.

(b) A relação $\rho_1(r_i) < \rho_1(r_j) < \rho_2(r_i) < \rho_2(r_j)$ não é satisfeita para nenhum par i e j.

Demonstração. Provemos a condição necessária. Para isso, suponha que existe uma tal sequência n-rígida u de comprimento $l(u) = 2n - 1$ e usemos as condições do Teorema 3.4. Fixe $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Dado $r \in \{r_1, r_2, ..., r_k\} - \{r_i\}$ qualquer, temos $\rho_1(r_i) < \rho_1(r) < \rho_2(r) < \rho_2(r_i)$ ou $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$ ambos fora do intervalo $\rho_1(r_i)$ a $\rho_2(r_i)$. Assim, o número $\rho_2(r_i) - \rho_1(r_i) - 1$ de posições entre as duas ocorrências de r_i é par, resultando que $\rho_2(r_i) - \rho_1(r_i)$ é um número ímpar para $i = 1, ..., k$. Isto prova a necessidade da condição (a). A necessidade de (b) é imediata da condição (ii) do Teorema 3.4.

Provemos a condição suficiente. Para isso, vamos supor por conveniência que $\{r_1, ..., r_k\} = \{1, ..., k\}$ e escreva

$$\Lambda = \{\rho_j(r) \ \mid \ r = 1, ..., k, \quad j = 1, 2\}.$$

Vamos chamar os números $1, ..., 2n$ de ***posições*** e vamos dizer que uma posição ***está ocupada*** (respec. ***está vaga***) em u', se tal posição ***pertence*** (respec. ***não pertence***) a Λ. O nosso objetivo é preencher as posições vagas para obter uma sequência n-rígida u'. Isto concluirá a demonstração, pois a sequência u' derivada de u é n-rígida se, e somente se, a sequência u é n-rígida.

Se todas as posições pertencem Λ (ou seja, $n = k$), então a sequência u' definida pelas posições $\rho_j(r)$ satisfaz às condições (i) e (ii) do Teorema 3.4, e chegamos que u' é n-rígida. Suponha agora que alguma posição não pertence a Λ (ou seja, $k < n$) e observe que os números de posições vagas e ocupadas entre $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$ são sempre números pares, para que seja par o número total de posições entre $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$. De fato, se fosse ímpar o número total de posições entre $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$, então a condição (a) não seria satisfeita, pois $\rho_2(r) - \rho_1(r)$ seria um número par. Também não valeria a condição (b), pois existiria algum r_i tal que $\rho_1(r_i) < \rho_1(r) < \rho_2(r_i) < \rho_2(r)$ ou $\rho_1(r) < \rho_1(r_i) < \rho_2(r) < \rho_2(r_i)$.

Vamos começar a construir a sequência u' supondo que existem duas posições vagas, relativas a não ocorrência de $k+1$ em u'. Nesse sentido, defina a posição $\rho_1(k+1)$ como sendo a primeira posição que não pertence a Λ. Se a posição $\rho_1(k+1)+1$ não está ocupada, tome $\rho_2(k+1) = \rho_1(k+1)+1$. Por outro lado, supondo que a posição $\rho_1(k+1)+1$ está ocupada, existe uma sequência $s_1, ..., s_t$, com $1 \leq s_i \leq k$ tal que

(1) $\rho_1(s_1) = \rho_1(k+1)+1$.

(2) $\rho_1(s_i) = \rho_2(s_{i-1})+1$ para $i = 2, ..., t$.

(3) $\rho_2(s_t)+1$ é vaga.

De fato, como a posição $\rho_1(k+1)+1$ está ocupada, devemos ter $\rho_1(k+1)+1 = \rho_j(s_1)$ para algum $1 \leq s_1 \leq k$. Observe que j não pode ser 2, pois isto implicaria que entre $\rho_1(s_1)$ e $\rho_2(s_1)$, teríamos somente uma posição vaga (ou seja, a posição $\rho_1(k+1)$) e daí $\rho_2(s_1) - \rho_1(s_1)$ seria um número par, o que é uma contradição com a condição (a). Logo $j = 1$ e daí $\rho_1(s_1) = \rho_1(k+1)+1$. Isto prova a afirmação (1).

Se a posição $\rho_2(s_1)+1$ não está ocupada, então a afirmação (3) é provada com $t = 1$. Suponha que a posição $\rho_2(s_1)+1$ está ocupada. Então temos que $\rho_j(s_2) = \rho_2(s_1)+1$ para algum $1 \leq s_2 \leq k$. Novamente, j não pode ser 2. Realmente, suponha $j = 2$ e considere $\rho_1(s_2)$. Então temos duas possibilidade para $\rho_1(s_2)$. A primeira é $\rho_1(s_2)$ está entre $\rho_1(s_1)$ e $\rho_2(s_1)$, e daí teremos $\rho_1(s_1) < \rho_1(s_2) < \rho_2(s_1) < \rho_2(s_2)$.

Mas isso não pode acontecer pela condição (b) do Teorema. A segunda é $\rho_1(s_2)$ ocupar uma posição anterior a $\rho_1(k+1)$ e assim teríamos

$$..., \rho_1(s_2), ..., \rho_1(k+1), \rho_1(s_1), ..., \rho_2(s_1), \rho_2(s_2), ...$$

Como o número de posições entre $\rho_1(s_1)$ e $\rho_2(s_1)$ é par, e considerando a posição $\rho_1(k+1)$, teríamos que o número total de posições entre $\rho_1(s_2)$ e $\rho_2(s_2)$ seria ímpar, o que não pode acontecer. Assim, $\rho_1(s_2) = \rho_2(s_1)+1$ e a condição (2) está provada para $i = 2$. Continuando com este procedimento, devemos chegar que $\rho_2(s_t) = 2n$ ou que $\rho_2(s_t)+1$ é vaga para algum $1 \leq s_t \leq k$. Mas, a possibilidade $\rho_2(s_t) = 2n$ não pode acontecer. De fato, supondo $\rho_2(s_t) = 2n$ e denotando por nv_i o número de posições vagas entre $\rho_1(s_i)$ e $\rho_2(s_i)$ para $1 \leq i \leq t$, temos que o número total de posições vagas é exatamente $1 + nv_1 + nv_2 + ... + nv_t$, observando que $\rho_1(k+1) = \rho_1(s_1) - 1$ é a primeira posição vaga. Por outro lado, sabemos que o número total de posições vagas é $2n-2k$, o que nos dá uma contradição, pois nv_i é par, para $1 \leq i \leq t$. Assim, podemos concluir que $\rho_2(s_t)+1$ é vaga, provando com isso a afirmação (3). Com isso, vamos definir $\rho_2(k+1) = \rho_2(s_t)+1$.

Neste momento a sequência u' está parcialmente preenchida e tem a seguinte forma: $u' = (..., k+1, s_1, ..., s_1, s_2, ..., s_2, ..., s_t, ..., s_t, k+1, ...)$. Seja agora

$$\overline{\Lambda} = \{\rho_j(r) \ \ | \ \ r = 1, ..., k+1, \quad j = 1, 2\}$$

o conjunto de posições ocupadas, incluindo $\rho_1(k+1)$ e $\rho_2(k+1)$. Afirmamos que com essa configuração, $\overline{\Lambda}$ satisfaz às condições (a) e (b) do Teorema. Realmente, se a posição $\rho_1(k+1)+1$ não está ocupada, então tomemos $\rho_2(k+1) = \rho_1(k+1)+1$. Se a posição $\rho_1(k+1)+1$ está ocupada, as posições entre $\rho_1(k+1)$ e $\rho_2(k+1)$ são

$$\rho_1(s_1), ..., \rho_2(s_1), \rho_1(s_2), ..., \rho_2(s_2), ..., \rho_1(s_t), ..., \rho_2(s_t).$$

Como é par o número de posições entre $\rho_1(s_i)$ e $\rho_2(s_i)$, com $i = 1, 2, ..., t$, segue que também é par o número de posições entre $\rho_1(k+1)$ e $\rho_2(k+1)$, significando que $\rho_2(k+1) - \rho_1(k+1)$ é ímpar. Isto prova a condição (a) para $k+1$. Para $1 \leq r \leq k$, a condição (a) é preservada. Para provar a condição (b), suponha que $\rho_1(k+1) < \rho_1(r) < \rho_2(k+1)$, para algum $1 \leq r \leq k$. Pela construção de $\rho_j(k+1)$, temos que $\rho_1(s_i) < \rho_1(r) < \rho_2(s_i)$ para algum $1 \leq i \leq t$. Como a condição (b)

é válida em Λ, então ***não*** podemos ter $\rho_1(s_i) < \rho_1(r) < \rho_2(s_i) < \rho_2(r)$. Assim, $\rho_1(s_i) < \rho_1(r) < \rho_2(r) < \rho_2(s_i)$ e daí $\rho_1(s_i) < \rho_2(r) < \rho_2(s_i)$. Logo,

$$\rho_1(k+1) < \rho_2(r) < \rho_2(k+1).$$

Semelhantemente, supondo que $\rho_1(k+1) < \rho_2(r) < \rho_2(k+1)$, podemos provar que $\rho_1(k+1) < \rho_1(r) < \rho_2(k+1)$. Como a condição (b) é válida para Λ, então vale também em $\overline{\Lambda}$. Logo, as condições (a) e (b) do teorema são válidas em $\overline{\Lambda}$.

Ademais, observe que no conjunto $\overline{\Lambda}$ o número de posições vagas em u' é reduzido em 2. Então, induzindo sobre o número de posições vagas, concluímos a demonstração do teorema. ♦

A seguir vamos apresentar um exemplo que ilustra a construção realizada no Teorema 3.5.

Exemplo 3.6 *Seja* $u' = (1, 2, 2, \cdot, 3, \cdot, 4, 4, \cdot, 3, 5, \cdot, \cdot, 5, \cdot, 1)$. *Vamos completar as posições de* u' *para obter uma sequência* 8*-rígida. Observe que as posições ocupadas (ou seja, os elementos do conjunto* Λ *definido na demonstração do Teorema 3.5) são* $\rho_1(1) = 1, \rho_2(1) = 16$; $\rho_1(2) = 2, \rho_2(2) = 3$; $\rho_1(3) = 5, \rho_2(3) = 10$; $\rho_1(4) = 7, \rho_2(4) = 8$; $\rho_1(5) = 11, \rho_2(5) = 14$ *e que as posições vagas são* $4, 6, 9, 12, 13$ *e* 15. *Então procuremos* $\rho_1(5+1)$ *e* $\rho_2(5+1)$*, relativas a* $k = 5$. *Tomemos* $\rho_1(5+1) = \rho_1(6) = 4$. *Como a posição* $\rho_1(5+1)+1$ *esta ocupada em* u'*, existem* $s_1, ..., s_t$*, com* $1 \leq s_i \leq 5$*, tais que*

(1) $\rho_1(s_1) = \rho_1(5+1) + 1$.

(2) $\rho_1(s_i) = \rho_2(s_{i-1}) + 1$ *para* $i = 2, ..., t$.

(3) $\rho_2(s_t) + 1$ *é vaga.*

Neste caso, temos que $t = 2$ *e* $s_1 = 3$ *e* $s_2 = 5$. *Como* $\rho_2(s_2) + 1$ *está vaga, tome* $\rho_2(5+1) = \rho_2(s_2) + 1$*, isto é,* $\rho_2(6) = \rho_2(5) + 1 = 14 + 1 = 15$. *Agora, vamos procurar* $\rho_1(6+1)$ *e* $\rho_2(6+1)$*, relativas a* $k = 6$. *Recomeçando o processo, tomemos* $\rho_1(6+1) = \rho_1(7) = 6$ *e procedendo da mesma maneira do preenchimento anterior para* $s_1 = 4$*, encontraremos que* $\rho_2(6+1) = \rho_2(s_1) + 1$*, isto é,* $\rho_2(7) = 9$. *Por fim encontremos* $\rho_1(7+1)$ *e* $\rho_2(7+1)$*, relativas a* $k = 7$. *Neste último caso, basta tomar* $\rho_1(7+1) = \rho_1(8) = 12$ *e daí que* $\rho_2(7+1) = \rho_2(8) = 13$ *pois* $\rho_1(8) + 1$ *é vaga. Logo a sequência completa tem a seguinte configuração*

$$u' = (1, 2, 2, 6, 3, 7, 4, 4, 7, 3, 5, 8, 8, 5, 6, 1).$$

Observe que se ao invés de $\rho_2(5) = 14$, tivéssemos $\rho_2(5) = 13$, então a sequência u' não seria rígida, pois $\rho_2(5) - \rho_1(5) = 13 - 11 = 2$ que é um número par, contradizendo a condição (a) do Teorema 3.5.

Corolário 3.7 *Sejam $1 \leq s_1 < s_2 < ... < s_t \leq 2n - 1$ números tais que $s_i - s_{i-1} > 1$ para $i = 2, ..., t$. Então existe uma sequência n-rígida u com comprimento $l(u) = 2n - 1$,onde as posições s_i são ocupados por idempotentes para todo $1 \leq i \leq t$.*

Demonstração. Suponha $1 \leq r_1, ..., r_t \leq n$ números distintos arbitrários e defina uma sequência $u' = (i_1, i_2, ..., i_{2n})$, onde $i_{s_1} = i_{s_1+1} = r_1, ..., i_{s_t} = i_{s_t+1} = r_t$. Pelo Teorema 3.5, esta definição parcial de u' pode ser completada rigidamente e a sequência u definida por u' satisfaz todos os requisitos. ♦

Definição 3.8 *Seja u uma sequência anti-anulação n-simples. Dizemos que u é n-**semi-rígida** se eliminando um certo número de elementos idempotentes, obtemos uma sequência n-rígida de comprimento $l(u) = 2n - 1$.*

Exemplo 3.9 *Considere a sequência 2-simples $u = (e_{12}, e_{22}, e_{22}, e_{21}, e_{11})$. Eliminando os idempotentes e_{22} (apenas um) e e_{11} em u, obtemos a sequência $u_0 = (e_{12}, e_{22}, e_{21})$ que é 2-rígida de comprimento $l(u_0) = 2.2 - 1 = 3$, ou seja, u é 2-semi-rígida.*

As sequências semi-rígidas têm uma grande importância para a determinação das permutações que *preservam o valor original* de uma sequência. De fato, sejam u uma sequência semi-rígida e u_0 uma sequência de comprimento $l(u_0) = 2n-1$ obtida quando eliminamos um certo número de idempotentes em u. Suponha que a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_k \\ a_{i_1} & ... & a_{i_k} \end{pmatrix}$$

preserva o valor original da sequência u. Então ignorando os idempotentes de u, a permutação σ induz uma permutação que preserva o valor de u_0, a qual deve ser a identidade, desde que u_0 é rígida (pois a identidade é a única permutação que preserva o valor de uma sequência rígida). Analisando isto, observamos que a ação da σ sobre u pode importar somente em permutar algum idempotente e_{ii} extra.

Exemplo 3.10 *Considere uma sequência n-semi-rígida u_0 de comprimento $l(u_0) = 2n$, onde u_0 é obtida de uma sequência n-rígida u adicionando-se somente um idempotente e_{ii}, ou seja, $l(u) = 2n - 1$. Desde que u tem exatamente um bloco com valor*

e_{ii} (correspondendo às duas ocorrências do i na sequência u' derivada de u), então é somente uma permutação não trivial que preserva o valor original da sequência u_0, ou seja, a permutação que permuta e_{ii} com o bloco de valor e_{ii}. Ademais, o número de permutações que preserva o valor original de uma sequência n-semi-rígida u_0 de comprimento $l(u_0) = 2n + 1$, incluindo a permutação identidade, é 4 ou 6, dependendo se a sequência u_0 é obtida de u por acréscimo de dois idempotentes distintos ou iguais.

3.2 Teorema principal: o caso perfeito

Seja V_{2n+1} o espaço vetorial de todas identidades multilineares de $M_n(K)$ nas variáveis $x_1, ..., x_{2n+1}$. Pelo Teorema de Amitsur- Levitzki o polinômio standard St_{2n} é uma identidade polinomial para $M_n(K)$. Consequentemente, são também identidades polinomiais para $M_n(K)$ nas variáveis $x_1, ..., x_{2n+1}$ os seguintes polinômios:

$$\phi_i = x_i St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{2n+1}), \quad i = 1, ..., 2n + 1.$$

$$\psi_i = St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{2n+1})x_i, \quad i = 1, ..., 2n + 1.$$

$$\chi_{ij} = St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1},\ x_i x_j,\ x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1}),$$

$$i, j = 1, ..., 2n + 1, \quad i \neq j,$$

os quais seguem do polinômio standard St_{2n} e pertencem ao espaço vetorial V_{2n+1}.

Seja B o subespaço vetorial de V_{2n+1} gerado pelas identidades polinomiais ϕ_i, ψ_i e χ_{ij}. Objetivamos mostrar que $V_{2n+1} = B$, para $n > 2$, ou seja, que toda identidade polinomial em V_{2n+1} segue do polinômio standard St_{2n}. Nesse sentido, já sabemos que B é um subespaço vetorial de V_{2n+1}, implicando que $B \subseteq V_{2n+1}$. Resta então mostrar a inclusão contrária, ou seja, $V_{2n+1} \subseteq B$.

Antes de apresentar o próximo resultado, vamos relembrar os conceitos de elementos r-simétrico e r-perfeito. Um elemento v num S_n-módulo V é dito r-simétrico se existem distintos $i_1, j_1; ...; i_r, j_r \in \{1, ..., n\}$ tais que v é $(i_k\ j_k)$-simétrico para todo $k = 1, ..., r$, com $r \in \mathbb{N}_0$. Se além disso, v é $(p\ q)$-anti-simétrico para quaisquer $1 \leq p < q \leq n$ tais que $\{p, q\} \cap \{i_1, j_1, ..., i_r, j_r\} = \varnothing$, dizemos que v é r-perfeito.

Teorema 3.11 *V_{2n+1} é gerado por S, onde S é o conjunto de todas as identidades 1-perfeitas de V_{2n+1}, de todas as identidades 2-simétricas de V_{2n+1} e o polinômio standard St_{2n+1}.*

Demonstração. Pelo Teorema de Amitsur-Levitzki, o polinômio $St_{2n+1} \in V_{2n+1}$, pois considerando

$$\phi_1 = x_1 St_{2n}(x_2, x_3, ..., x_{2n+1})$$

$$\phi_2 = x_2 St_{2n}(x_1, x_3, ..., x_{2n+1})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\phi_{2n+1} = x_{2n+1} St_{2n}(x_1, x_2, ..., x_{2n}),$$

temos que $St_{2n+1} = \phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + ... + \phi_{2n+1}$ (veja Exemplo 1.47). Disto também segue que $St_{2n+1} \in B$, pois $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, ..., \phi_{2n+1} \in B$. Além disso, V_{2n+1} é um KS_{2n+1}-módulo e W_0 definido no Teorema 1.49 é gerado por St_{2n+1}. Logo, pelo item (b) do Teorema 1.49, temos que $V_{2n+1} = W_0 + W_1 + U_2$, onde W_1 é o subespaço de V_{2n+1} gerado pelos polinômios 1-perfeitos e U_2 é o subespaço de V_{2n+1} gerado pelos polinômios 2-simétricos. ♦

De posse do Teorema 3.11, que acabamos de demonstrar, é suficiente mostrar que o conjunto gerador S do espaço V_{2n+1} está contido no subespaço B, para termos a prova da inclusão $V_{2n+1} \subseteq B$. Desde que já temos $St_{2n+1} \in B$, devemos nos preocupar somente em provar que o conjunto de todos os polinômios 1-perfeitos de V_{2n+1} e de todos os polinômios 2-simétricos de V_{2n+1} estão contidos em B. Antes, porém, de partirmos para esta prova, vamos apresentar um lema e um corolário que serão muito úteis para nossa pretensão.

Lema 3.12 *Sejam i, j, k, l números distintos. Então $(k\ l)\phi_i = -\phi_i$, $(i\ k)\phi_i = (-1)^{k-i+1}\phi_k$, $(k\ l)\chi_{ij} = -\chi_{ij}$, $(i\ k)\chi_{ij} = -\chi_{kj}$, $(k\ j)\chi_{ij} = (-1)^{k-j+1}\chi_{ik}$ e $(i\ j)\chi_{ij} = (-1)^{i-j+1}\chi_{ji}$.*

Demonstração. Temos

$$(k\ l)\phi_i = (k\ l)x_i St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= -x_i St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_l, x_{k+1}, ..., x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, ..., x_{2n+1}) = -\phi_i,$$

pois St_{2n} é anti-simétrico. Logo, $(k\ l)\phi_i = -\phi_i$.

Observando que

$$(i\ k)\phi_i = (i\ k)x_i St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= x_k St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, \underbrace{x_i}_{\text{posição } k-1}, x_{k+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= (-1)^{k-1-i} St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{2n+1}) = (-1)^{k-1-i}\phi_k$$

e que $(k-i)-1 \equiv (k-i)+1 \ (mod\ 2)$, podemos concluir a igualdade $(i\ k)\phi_i = (-1)^{k-i+1}\phi_k$.

Temos

$$(k\ l)\chi_{ij} = (k\ l)St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, ..., x_k, ..., x_l, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= -St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_l, x_{k+1}, ..., x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= -\chi_{ij},$$

pois St_{2n} é anti-simétrico. Logo, $(k\ l)\chi_{ij} = -\chi_{ij}$.

Observe que

$$(i\ k)\chi_{ij} = (i\ k)St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_k x_j, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= -St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_k x_j, x_{k+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1}) = -\chi_{kj},$$

pois St_{2n} é anti-simétrico. Logo, $(i\ k)\chi_{ij} = -\chi_{kj}$.

Temos

$$(k\ j)\chi_{ij} = (k\ j)St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_k, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{k-1}, \underbrace{x_j}_{\text{posição } k-1}, x_{k+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= (-1)^{k-j+1} St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_k, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= (-1)^{k-j+1}\chi_{ik}.$$

Logo, $(k\ j)\chi_{ij} = (-1)^{k-j+1}\chi_{ik}$.

Por fim, temos

$$(i\ j)\chi_{ij} = (i\ j)St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i x_j, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, \underbrace{x_j x_i}_{\text{posição } i}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{2n+1})$$

$$= (-1)^{i-j+1} St_{2n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j x_i, x_{j+1}, ..., x_{2n+1}) = (-1)^{i-j+1} \chi_{ji}$$

e daí $(i\ j)\chi_{ij} = (-1)^{i-j+1}\chi_{ji}$. ♦

Corolário 3.13 *Sejam i, j, k, l números distintos. Então:*

(a) $\sigma_{kl}\phi_i = 0$, $2\sigma_{ik}\phi_i = \phi_i - (-1)^{k-i}\phi_k$.

(b) $\sigma_{kl}\chi_{ij} = 0$, $2\sigma_{ik}\chi_{ij} = \chi_{ij} - \chi_{kj}$, $2\sigma_{kj}\chi_{ij} = \chi_{ij} - (-1)^{k-j}\chi_{ik}$, $2\sigma_{ij}\chi_{ij} = \chi_{ij} - (-1)^{i-j}\chi_{ji}$.

(c) $\sigma_{kl}(\chi_{kj} - \chi_{lj}) = \chi_{kj} - \chi_{lj}$, $\sigma_{kl}(\chi_{il} - (-1)^{k-l}\chi_{ik}) = \chi_{il} - (-1)^{k-l}\chi_{ik}$ *e* $\sigma_{kl}(\chi_{kl} - (-1)^{k-l}\chi_{lk}) = \chi_{kl} - (-1)^{k-l}\chi_{lk}$, *ou seja, estes polinômios são $(k\ l)$-simétricos.*

(d) $\sigma_{kl}\chi_{ij} = 0, \sigma_{kl}(\chi_{kj}+\chi_{lj}) = 0, \sigma_{kl}(\chi_{ik}+(-1)^{k-l}\chi_{il}) = 0$ *e* $\sigma_{kl}(\chi_{kl}+(-1)^{k-l}\chi_{lk}) = 0$, *ou seja, estes são $(k\ l)$-anti-simétricos.*

Demonstração.

(a) Seja $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(1 + (i\ j))$. Se $(k\ l)\phi_i = -\phi_i$, então $(k\ l)\phi_i + \phi_i = 0$ implicando que $(1+(k\ l))\phi_i = 0$. Daí, $2(\frac{1}{2}(1+(k\ l)))\phi_i = 0$, disto segue que $2\sigma_{kl}\phi_i = 0$. Logo $\sigma_{kl}\phi_i = 0$.

Como $2\sigma_{ik}\phi_i = \phi_i + (i\ k)\phi_i$ *e* $(i\ k)\phi_i = (-1)^{k-i+1}\phi_k$, temos $2\sigma_{ik}\phi_i = \phi_i + (-1)^{k-i+1}\phi_k$. Mas, $(-1)^{k-i-1} = -(-1)^{k-i}$, resultando que $2\sigma_{ik} = \phi_i - (-1)^{k-i}\phi_k$.

(b) Seja $\sigma_{kl} = \frac{1}{2}(1 + (k\ l))$. Aplicando χ_{ij} a ambos os lados da igualdade, obtemos $\sigma_{kl}\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\chi_{ij} + (k\ l)\chi_{ij})$. Como $(k\ l)\chi_{ij} = -\chi_{ij}$, então $\sigma_{kl}\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\chi_{ij} - \chi_{ij}) = 0$. Donde concluímos que $\sigma_{kl}\chi_{ij} = 0$.

Observe que $2\sigma_{ik}\chi_{ij} = \chi_{ij} + (i\ k)\chi_{ij}$. Como $(i\ k)\chi_{ij} = -\chi_{kj}$, segue que $2\sigma_{ik}\chi_{ij} = \chi_{ij} - \chi_{kj}$.

Observando as igualdades $2\sigma_{kj}\chi_{ij} = \chi_{ij} + (k\ j)\chi_{ij}$ e $(k\ j)\chi_{ij} = (-1)^{k-j+1}\chi_{ik}$, concluímos que $2\sigma_{kj}\chi_{ij} = \chi_{ij} + (-1)^{k-j+1}\chi_{ik}$. Logo, $2\sigma_{kj}\chi_{ij} = \chi_{ij} - (-1)^{k-j}\chi_{ik}$.

Por fim, temos que $2\sigma_{ij}\chi_{ij} = \chi_{ij} + (i\ j)\chi_{ij}$. Como $(i\ j)\chi_{ij} = (-1)^{i-j+1}\chi_{ji}$, segue que $2\sigma_{ij}\chi_{ij} = \chi_{ij} + (-1)^{i-j+1}\chi_{ji}$, e daí $2\sigma_{ij}\chi_{ij} = \chi_{ij} - (-1)^{i-j}\chi_{ji}$.

(c) Pelos itens (a) e (b), $\chi_{kj} - \chi_{lj} = 2\sigma_{kl}\chi_{kj}$, $\chi_{il} - (-1)^{k-l}\chi_{ik} = 2\sigma_{kl}\chi_{il}$ e $\chi_{kl} - (-1)^{k-l}\chi_{lk} = 2\sigma_{kl}\chi_{kl}$. Aplicando σ_{kl} a ambos os lados dessas igualdades e usando o fato de que σ_{kl} é idempotente, obtemos $\sigma_{kl}(\chi_{kj} - \chi_{lj}) = 2\sigma_{kl}\chi_{kj} = \chi_{kj} - \chi_{lj}$,

$\sigma_{kl}(\chi_{il} - (-1)^{k-l}\chi_{ik}) = 2\sigma_{kl}\chi_{il} = \chi_{il} - (-1)^{k-l}\chi_{ik}$ e $\sigma_{kl}(\chi_{kl} - (-1)^{k-l}\chi_{lk}) = 2\sigma_{kl}\chi_{kl} = \chi_{kl} - (-1)^{k-l}\chi_{lk}$, respectivamente.

(d) Pelo item (b), $\sigma_{kl}\chi_{ij} = 0$. Além disso,

$$\sigma_{kl}(\chi_{kj} + \chi_{lj}) = \frac{1}{2}(\chi_{kj} + (k\ l)\chi_{kj} + \chi_{lj} + (k\ l)\chi_{lj}).$$

Pelo Lema 3.12, $(k\ l)\chi_{kj} = -\chi_{lj}$ e $(k\ l)\chi_{lj} = -\chi_{kj}$, resultando que, $\sigma_{kl}(\chi_{kj} - \chi_{lj}) = \frac{1}{2}(\chi_{kj} - \chi_{lj} + \chi_{lj} - \chi_{kj}) = 0$.

Temos que $\sigma_{kl}(\chi_{ik} + (-1)^{k-l}\chi_{il}) = \frac{1}{2}((1 + (k\ l))\chi_{ik} + (-1)^{k-l}2\sigma_{kl}\chi_{il})$. Novamente pelo item (b), $2\sigma_{kl}\chi_{il} = \chi_{il} - (-1)^{k-l}\chi_{ik}$ e $(k\ l)\chi_{ik} = (-1)^{l-k+1}\chi_{il}$, resultando que $\sigma_{kl}(\chi_{ik} + (-1)^{k-l}\chi_{il}) = \frac{1}{2}(\chi_{ik} + (-1)^{l-k+1}\chi_{il} + (-1)^{k-l}\chi_{il} - \chi_{ik}) = 0$.

Por fim, observe que $\sigma_{kl}(\chi_{kl} + (-1)^{k-l}\chi_{lk}) = \frac{1}{2}((1 + (k\ l))\chi_{kl} + (-1)^{k-l}2\sigma_{kl}\chi_{lk})$. Pelo mesmo item (b), $2\sigma_{kl}\chi_{lk} = \chi_{lk} - (-1)^{k-l}\chi_{lk}$ e $(k\ l)\chi_{kl} = (-1)^{k-l}\chi_{lk}$. Portanto, $\sigma_{kl}(\chi_{kl} + (-1)^{k-l}\chi_{lk}) = \frac{1}{2}(\chi_{kl} + (-1)^{k-l}\chi_{lk} + (-1)^{k-l}(\chi_{lk} - (-1)^{k-l}\chi_{lk})) = 0$. ♦

A partir de agora, iniciaremos o trabalho de provar que toda identidade polinomial 1-perfeita em V_{2n+1} pertence ao subespaço vetorial B. Para isso, é suficiente considerar apenas as identidades (1 2)-perfeitas.

Lema 3.14 *O subespaço B contêm quatro identidades* (1 2)*-perfeitas linearmente independentes.*

Demonstração. Defina

$$p_1 = \phi_1 + \phi_2 = x_1 St_{2n}(x_2, x_3, ..., x_{2n+1}) + x_2 St_{2n}(x_1, x_3, ..., x_{2n+1})$$

$$p_2 = \psi_1 + \psi_2 = St_{2n}(x_2, x_3, ..., x_{2n+1})x_1 + St_{2n}(x_1, x_3, ..., x_{2n+1})x_2$$

$$p_3 = \chi_{12} + \chi_{21} = St_{2n}(x_1x_2, x_3, ..., x_{2n+1}) + St_{2n}(x_2x_1, x_3, ..., x_{2n+1})$$

$$p_4 = \sum_{i=3}^{2n+1}(\chi_{i1} + \chi_{i2}) = (\chi_{31} + \chi_{32}) + (\chi_{41} + \chi_{42}) + ... + (\chi_{2n+1,1} + \chi_{2n+1,2}).$$

Como o polinômio standard St_{2n} é $(i\ j)$-anti-simétrico para todo $i \neq j$, segue da definição de ϕ_i, ψ_i, χ_{ij} que as identidades p_1, p_2 e p_3 são (1 2)-perfeitas e que p_4 é (1 2)-simétrica. Além disso, p_4 é uma identidade $(k\ l)$-anti-simétrica para todo $2 < k < l$, pois

$$\sigma_{kl}p_4 = \sigma_{kl}\sum_{i=3}^{2n+1}(\chi_{i1} + \chi_{i2}) = \sum_{i=3}^{2n+1}\sigma_{kl}\chi_{i1} + \sum_{i=3}^{2n+1}\sigma_{kl}\chi_{i2} = 0,$$

pelo Corolário 3.13. Logo, p_4 é uma identidade (1 2)-perfeita. Suponha agora que

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 = 0,$$

com $\alpha_i \in K$. Mostremos que os $\alpha_{i's}$ são necessariamente nulos. Igualando a zero os coeficientes dos monômios $x_1x_2... \, x_{2n+1}$, $x_1x_3x_2x_4... \, x_{2n+1}$, $x_1x_3x_4x_2x_5... \, x_{2n+1}$ e $x_1x_3x_4... \, x_{2n+1}x_2$, obtemos as seguintes equações $\alpha_1+\alpha_3 = 0$, $-\alpha_1+\alpha_4 = 0$, $\alpha_1+\alpha_4 = 0$ e $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$. Disto resulta que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Portanto, as identidades (1 2)-perfeitas p_1, p_2, p_3 e p_4 são linearmente independentes. ♦

Seja $f = f(x_1, ..., x_{2n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{2n+1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(2n+1)}$. Dada uma permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n+1 \\ i_1 & i_2 & ... & i_{2n+1} \end{pmatrix}$$

em S_{2n+1}, vamos escrever $\alpha_\sigma = \alpha_{i_1 i_2 ... i_{2n+1}}$ para denotar o coeficiente da permutação σ. Além disso, para uma equação particular envolvendo os coeficientes de f, vamos escrever somente os índices que variam suas posições ao longo da equação. Por exemplo na equação $\alpha_{12345} + \alpha_{32145} + \alpha_{12435} + \alpha_{42315} = 0$, os índices 2 e 5 se repetem nas mesmas posições em todos os coeficientes, então escrevemos simplesmente $\alpha_{134} + \alpha_{314} + \alpha_{143} + \alpha_{431} = 0$.

Lema 3.15 *Se $f(x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{2n+1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(2n+1)} \in V_{2n+1}$ é uma identidade (1 2)-perfeita, onde os monômios $x_1x_2...x_{2n+1}$, $x_1x_3x_2x_4...x_{2n+1}$, $x_1x_3x_4x_2x_5...x_{2n+1}$ e $x_1x_3x_4...x_{2n+1}x_2$ ocorrem com coeficiente zero, então f é a identidade nula.*

Demonstração. Como estamos supondo que f é uma identidade (1 2)-perfeita, então f é (1 2)-simétrica e $(i\ j)$-anti-simétrica para $2 < i < j$. Com isso, se algum monômio em f ocorre com coeficiente zero, o mesmo acontece com todos os monômios obtidos por transposição de $\{1, 2\}$, pois f é (1 2)-perfeita. Da mesma forma, todos os monômios obtidos por transposição de $\{3, ..., 2n + 1\}$, terão também coeficientes zero, mesmo f sendo $(i\ j)$-anti-simétrica para $i, j \in \{3, ..., 2n + 1\}$. Portanto para provar que todos os outros monômios em f têm coeficiente zero, podemos somente considerar as possibilidades de posições das variáveis x_1 e x_2 nos monômios em f, já que permutando as variáveis x_1 e x_2 o coeficiente do monômio não se altera. Para isso, vamos considerar alguns casos.

(a) *Monômios em f nos quais a variável x_2 sucede imediatamente a variável x_1 e que ocorrem com coeficiente zero.* Por hipótese, temos que $\alpha_{123...2n+1} = 0$. Provemos que $\alpha_{3124...2n+1} = 0$. Para isso, façamos em f a substituição pela sequência n-semi-rígida

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ..., \\ u: & (e_{11}) & (e_{11}) & e_{11} & e_{12} & e_{22} & .... \end{array}$$

Eliminando-se os idempotentes (e_{11}) e (e_{11}), obtemos uma sequência rígida de comprimento $2n-1$ e com mesmo valor da sequência u. Avaliando a sequência u em f, obtemos um polinômio da forma

$$f(u) = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}e_{ij} \ ,$$

onde t_{ij} são escalares em K e e_{ij} são matrizes unitárias. Desde que f é uma identidade para $M_n(K)$, segue que $t_{ij} = 0$ para todo $i,\ j$. Em particular, se $v(u) = e_{rs}$, então $t_{rs} = 0$. Desde que foram eliminados dois idempotentes iguais em u, temos que são seis as permutações que preservam o valor da sequência u, as quais correspondem aos monômios $x_1x_2x_3...x_{2n+1}$, $x_2x_1x_3...x_{2n+1}$, $x_1x_3x_2...x_{2n+1}$, $x_2x_3x_1...x_{2n+1}$, $x_3x_1x_2...x_{2n+1}$ e $x_3x_2x_1...x_{2n+1}$. Daí, temos que

$$t_{rs} = (\alpha_{123} + \alpha_{213}) + (\alpha_{132} + \alpha_{231}) + (\alpha_{312} + \alpha_{321}) = 0.$$

Mas f é (1 2)-simétrica e assim $\alpha_{213} = \alpha_{123}$, $\alpha_{231} = \alpha_{132}$ e $\alpha_{321} = \alpha_{312}$, resultando que $(\alpha_{123}+\alpha_{213})+(\alpha_{132}+\alpha_{231})+(\alpha_{312}+\alpha_{321}) = 2\alpha_{123}+2\alpha_{132}+2\alpha_{312} = 0$, implicando que $2(\alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{312}) = 0$. Como $charK = 0$, temos que $\alpha_{123} + \alpha_{132} + \alpha_{312} = 0$. Além disso, temos por hipótese que $\alpha_{123} = \alpha_{132} = 0$, resultando que $\alpha_{312} = 0$. A conclusão deste item segue por indução nas posições do bloco x_1x_2 nos monômios. Suponha agora que $\alpha_{3...i\ 12\ i+1...2n+1} = 0$ para $i \geq 2$. Se $i < 2n$, então façamos a substituição pela seguinte sequência n-semi-rígida

$$\begin{array}{cccccccc} x_3 & ... & x_i & x_1 & x_2 & x_{i+1} & ... & x_{2n} & x_{2n+1} \\ e_{12} & ... & & e_{kk} & (e_{kk}) & & ... & e_{21} & (e_{11}). \end{array}$$

Mas f é uma identidade (1 2)-simétrica, daí $\alpha_{3...i\ 12\ i+1...2n2n+1} + \alpha_{2n+1\ 3...i\ 12\ i+1...2n} = 0$. Por hipótese, temos que $\alpha_{3...i\ 12\ i+1...2n2n+1} = 0$, donde segue que $\alpha_{2n+1\ 3...i\ 12\ i+1...2n} = 0$.

Ademais, trabalhando na mesma hipótese $\alpha_{3...i\ 12\ i+1...2n2n+1} = 0$, chegaremos que $\alpha_{3...i\ i+1\ 12\ i+2...2n2n+1} = 0$ e isto completa a indução para $i < 2n$. Para provar que $\alpha_{3...2n+1\ 12} = 0$, façamos a substituição pela sequência n-semi-rígida

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & ... & x_{2n+1} & x_1 & x_2 \\ e_{12} & ... & e_{21} & (e_{11}) & (e_{11}) \end{array}$$

e concluímos que $\alpha_{3...2n+1\ 12} + \alpha_{12\ 3...2n+1} + \alpha_{13...2n+1\ 2} = 0$. Desde que $\alpha_{12\ 3...2n+1} = \alpha_{13...2n+1\ 2} = 0$ (por hipótese), segue que $\alpha_{3...2n+1\ 12} = 0$. E a prova deste item está completa.

(b) *Monômios em f nos quais as variáveis x_1 e x_2 são separadas por uma única variável, digamos x_3.* Neste caso, substitua

$$\begin{array}{ccccc} ... & x_1 & x_3 & x_2 & ... \\ ... & e_{11} & (e_{11}) & (e_{11}) & ... \end{array}$$

para termos $\alpha_{132} + \alpha_{123} + \alpha_{312} = 0$. Por (a) temos que $\alpha_{123} = \alpha_{312} = 0$, donde segue que $\alpha_{132} = 0$.

(c) *Monômios em f nos quais as variáveis x_1 e x_2 são separadas por três variáveis, digamos x_3, x_4, x_5.* Neste caso, substitua

$$\begin{array}{ccccccc} ... & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & x_2 & ... \\ ... & (e_{11}) & e_{12} & e_{22} & e_{21} & (e_{11}) & ... \end{array}$$

e temos $\alpha_{13452} + \alpha_{12345} + \alpha_{34512} = 0$. Por hipótese $\alpha_{12345} = 0$ e por (a) temos que $\alpha_{34512} = 0$, resultando que $\alpha_{13452} = 0$.

(d) *Monômios em f nos quais as variáveis x_1 e x_2 são separados por duas variáveis, digamos x_3, x_4.* Neste caso, provemos que são nulos os coeficientes dos monômios que contêm o bloco $x_1x_3x_4x_2$. Para isso, usemos indução na posição do bloco nos monômios. Se o bloco vem à esquerda do monômio, ou seja, $x_1x_3x_4x_2...\ x_{2n+1}$, então por hipótese $\alpha_{1342...2n+1} = 0$. Para os monômios que têm a forma $...x_5x_1x_3x_4x_2...$, substitua

$$\begin{array}{ccccccc} ... & x_5 & x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & ... \\ ... & (e_{11}) & e_{11} & e_{12} & e_{22} & (e_{22}) & ... \ , \end{array}$$

daí obtemos $\alpha_{51342} + \alpha_{51324} + \alpha_{15342} + \alpha_{15324} = 0$. Pelo item (b), temos que $\alpha_{51324} = 0$ e, pelo item (c), temos que $\alpha_{15342} = 0$ e por hipótese de indução (o bloco anda uma posição para a esquerda) $\alpha_{15324} = 0$. Disto resulta que $\alpha_{51342} = 0$.

(e) *Monômios em f nos quais o número de variáveis entre x_1 e x_2 é maior do que três.* Neste caso, os monômios têm a forma ... $x_1x_3x_4...x_5x_2...$. Substitua

$$\begin{array}{ccccccc} ... & x_1 & x_3 & ... & x_5 & x_2 & ... \\ ... & e_{11} & (e_{11}) & ... & e_{22} & (e_{22}) & ... . \end{array}$$

Tal substituição por sequência semi-rígida existe pelo Corolário 3.7, pois x_3 e x_5 são separados por no mínimo uma variável. A completa anulação do polinômio f se dá pela substituição acima, pois $\alpha_{1352} + \alpha_{1325} + \alpha_{3152} + \alpha_{3125} = 0$. Como $\alpha_{1325} = \alpha_{3152} = \alpha_{3125} = 0$ por hipótese de indução (indução sobre número de variáveis entre x_1 e x_2), segue que $\alpha_{1352} = 0$. Portanto, f é a identidade nula. ♦

Teorema 3.16 *Seja $f \in V_{2n+1}$ uma identidade* (1 2)*-perfeita, então $f \in B$.*

Demonstração. Suponha que os monômios $x_1x_2...x_{2n+1}$, $x_1x_3x_2x_4...x_{2n+1}$, $x_1x_3x_4x_2x_5...x_{2n+1}$ e $x_1x_3...x_{2n+1}x_2$ do Lema 3.15, aqui chamados de monômios especiais, ocorrem em f com coeficientes, β_1, β_2, β_3 e β_4, respectivamente, ou seja, $\beta_1x_1x_2...x_{2n+1}$, $\beta_2x_1x_3x_2x_4...x_{2n+1}$, $\beta_3x_1x_3x_4x_2x_5...x_{2n+1}$ e $\beta_4x_1x_3...x_{2n+1}x_2$. Queremos escrever f como combinação linear das identidades (1 2)-perfeitas p_1, p_2, p_3 e p_4, definidas no Lema 3.14, as quais estão no subespaço vetorial B. Nesse sentido, observe que se existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$, tais que $f = \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 + \alpha_3p_3 + \alpha_4p_4$, então podemos igualar os coeficientes dos monômios especiais dados acima e obtermos $\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1$, $-\alpha_1 + \alpha_4 = \beta_2$, $\alpha_1 + \alpha_4 = \beta_3$ e $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \beta_4$, (compare com a demonstração do Lema 3.14). Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_3 - \beta_2), \alpha_2 = \beta_4 - \beta_2, \alpha_3 = \beta_1 - \frac{1}{2}(\beta_3 - \beta_2)$ e $\alpha_4 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3)$. Agora, defina $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ por estas fórmulas e considere $g = \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 + \alpha_3p_3 + \alpha_4p_4$. Então, f e g são identidades (1 2)-perfeitas com os mesmos coeficientes nos monômios especiais. Considerando a identidade $f - g$, temos que $f - g$ é uma identidade (1 2)-perfeita e são nulos os coeficientes dos monômios especiais em $f - g$. Donde concluímos, pelo Lema 3.15, que $f - g = 0$, ou seja, $f = g$. Como $g \in B$, pois é combinação linear das identidades (1 2)-perfeitas p_1, p_2, p_3 e p_4, segue que $f \in B$. ♦

Nesse instante é importante que chamemos a atenção para um importante fato.

Na demonstração do Teorema 3.16, tomamos uma identidade (1 2)-perfeita f em V_{2n+1} e escrevemos como combinação linear das identidades (1 2)-perfeitas p_1, p_2, p_3 e p_4. E, estas quatro identidades são linearmente independentes pelo que fizemos no Lema 3.14. Logo, as identidades (1 2)-perfeitas p_1, p_2, p_3 e p_4 formam uma base para o subespaço vetorial das identidades (1 2)-perfeitas de V_{2n+1}.

É importante também que sintetizemos o que foi feito nesta seção até o momento. Em síntese, nesta seção, mostramos que o polinômio standard St_{2n+1} e que todas as identidades 1-perfeitas de V_{2n+1}, estão no subespaço vetorial B. Então, para alcançar nosso objetivo, ou seja, demonstrar a inclusão $V_{2n+1} \subseteq B$, resta mostrar que todas identidades 2-simétricas de V_{2n+1} estão em B. Feito isso, teremos demonstrado que os geradores do espaço vetorial V_{2n+1} estão contidos em B, e consequentemente o espaço V_{2n+1} está contido em B. É o que faremos na próxima seção.

3.3 Teorema principal: o caso 2-simétrico

Como foi anunciado no final da seção anterior, vamos dedicar esta seção para provar que toda identidade polinomial 2-simétrica em V_{2n+1} pertence ao subespaço vetorial B. Para isto é suficiente considerarmos as identidades polinomiais (1 2) e (3 4)-simétricas. Antes porém de iniciar propriamente esta tarefa, vamos fazer uma simplificação de notação. Durante toda esta seção, vamos chamar as *identidades* (1 2) *e* (3 4)-*simétricas* simplesmente de *identidades* 2-*simétricas.*

Primeiramente observe que as seguintes identidades são linearmente independentes 2-simétricas e pertencem ao subespaço vetorial B :

$$q_1 = St_{2n}(x_1x_3, x_2, x_4, ..., x_{2n+1}) + St_{2n}(x_2x_3, x_1, x_4, ..., x_{2n+1}) +$$

$$St_{2n}(x_1x_4, x_2, x_3, ..., x_{2n+1}) + St_{2n}(x_2x_4, x_1, x_3, ..., x_{2n+1})$$

$$q_2 = St_{2n}(x_3x_1, x_2, x_4, ..., x_{2n+1}) + St_{2n}(x_3x_2, x_1, x_4, ..., x_{2n+1}) +$$

$$St_{2n}(x_4x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n+1}) + St_{2n}(x_4x_2, x_1, x_3, ..., x_{2n+1}).$$

Realmente, suponha que $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Mostremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Igualando a zero os coeficientes dos monômios $x_1x_3x_2x_4...x_{2n+1}$ e $x_2x_3x_4x_1...x_{2n+1}$, em que o primeiro aparece em $St_{2n}(x_1x_3, x_2, x_4, ..., x_{2n+1})$, $St_{2n}(x_2x_4, x_1, x_3, ..., x_{2n+1})$ e $St_{2n}(x_3x_2, x_1, x_4, ..., x_{2n+1})$ e o segundo aparece em $St_{2n}(x_2x_3, x_1, x_4, ..., x_{2n+1})$ e $St_{2n}(x_4x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n+1})$. Então, temos as seguintes equações $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ e $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, implicando que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Objetivamos mostrar que toda identidade 2-simétrica em V_{2n+1} é combinação linear de q_1 e q_2.

Lema 3.17 *Sejam* $M_\sigma = M_\sigma(x_1, ..., x_{2n+1}) = x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(2n+1)}$, *com* $\sigma \in S_{2n+1}$, *e* $f(x_1, ..., x_{2n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{2n+1}} \alpha_\sigma M_\sigma(x_1, ..., x_{2n+1})$ *uma identidade* (1 2)*-simétrica em* V_{2n+1}. *Supondo que* $M_{\sigma'}$ *é obtido de* M_σ *por uma transposição que não move nenhum vizinho de* x_1 *ou* x_2, *então* $\alpha_{\sigma'} = -\alpha_\sigma$.

Demonstração. Suponha que a transposição é (3 4) (para as outras o raciocínio é análogo). Vamos distinguir quatro casos envolvendo as posições das variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 no monômio $M_\sigma(x_1, ..., x_{2n+1})$.

(a) *Quando no monômio* M_σ *nenhuma das variáveis do par* x_1, x_2 *separa o par* x_3, x_4 *e vice-versa.* Neste caso, não podemos ter, por exemplo, $M_\sigma = ...x_1...x_3...x_2...x_4....$ Devemos ter $M_\sigma = ...x_1...x_2...x_3...x_4....$ (Se o par x_3, x_4 ocorrer no lado esquerdo do par x_1, x_2 ou se x_4 vier do lado esquerdo de x_3 o tratamento é o mesmo). Suponha primeiro que x_4 sucede x_3 imediatamente. Vamos usar indução na distância entre x_1 e x_2. Quando a distância entre x_1 e x_2 é zero, significa que x_2 sucede x_1 imediatamente e M_σ tem a forma $M_\sigma = ...\ x_1x_2...x_3x_4...$, onde x_2 e x_3 não são vizinhos imediatos pelo que estamos supondo. Pelo Corolário 3.7, existe uma substituição por uma sequência n-semi-rígida da forma

$$\begin{array}{cccccccc} ... & x_1 & x_2 & ... & x_3 & x_4 & ... \\ ... & e_{11} & (e_{11}) & ... & e_{22} & (e_{22}) & ... , \end{array}$$

da qual obtemos a equação $\alpha_{1234} + \alpha_{2134} + \alpha_{1243} + \alpha_{2143} = 0$. Como f é uma identidade (1 2)-simétrica, temos que $\alpha_{1234} = \alpha_{2134}$ e $\alpha_{1243} = \alpha_{2143}$, ou seja, $2\alpha_{1234} + 2\alpha_{1243} = 2(\alpha_{1234} + \alpha_{1243}) = 0$. Como $char K = 0$, então $\alpha_{1234} + \alpha_{1243} = 0$. Assim, $\alpha_{1234} = -\alpha_{1243}$ e obtemos a conclusão desejada. Quando a distância entre x_1 e x_2 é positiva, então o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_1x_5...x_2...x_3x_4...$, e fazemos a substituição

$$\begin{array}{cccccccccc} ... & x_1 & x_5 & ... & x_2 & ... & x_3 & x_4 & ... \\ ... & e_{11} & (e_{11}) & & ... & & e_{22} & (e_{22}) & ... , \end{array}$$

obtendo a equação $\alpha_{15234} + \alpha_{51234} + \alpha_{15243} + \alpha_{51243} = 0$. Por hipótese de indução, $\alpha_{51234} + \alpha_{51243} = 0$, resultando que $\alpha_{15234} + \alpha_{15243} = 0$, ou seja, $\alpha_{15234} = -\alpha_{15243}$ e obtemos a conclusão desejada. Assim o caso (a) está resolvido quando a distância entre x_3 e x_4 é zero. Vamos proceder por indução sobre a distância de x_3 e x_4. Suponha agora que a distância entre x_3 e x_4 é positiva, ou seja, o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_1...x_2...x_3x_5...x_4....$ Por hipótese de indução e pelo que já provamos, podemos escrever $\alpha_{12354} = -\alpha_{12534} = \alpha_{12543} = -\alpha_{12453}$. Isto completa a prova do caso (a).

(b) *Quando no monômio M_σ o par x_1, x_2 separa o par x_3, x_4, digamos* $M_\sigma = ...x_3...x_1...x_2...x_4....$ Neste caso, suponha primeiro que o número de variáveis entre x_3 e x_4 é ímpar. Pelo Teorema 3.5, podemos substituir por uma sequência semi-rígida da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccccc} ... & x_3 & ... & x_1 & ... & x_2 & ... & x_4 & ... \\ ... & (e_{11}) & & & ... & & & (e_{11}) & ... . \end{array}$$

Denotando por [1 2] o bloco completo de índices entre x_3 e x_4, temos que $(\alpha_{3[12]4} + \alpha_{4[12]3}) + (\alpha_{34[12]} + \alpha_{43[12]}) + (\alpha_{[12]34} + \alpha_{[12]43}) = 0$. Pelo caso (a) o segundo e o terceiro parênteses são anulados, resultando que $\alpha_{3124} + \alpha_{4123} = 0$, ou seja, $\alpha_{3124} = -\alpha_{4123}$ e obtemos a conclusão desejada. Se o número de variáveis entre x_3 e x_4 é par, então deve ocorrer alguma variável em M_σ exterior ao bloco $x_3...x_4$, já que são $2n+1$ variáveis e não podemos ter $2n-1$ (número ímpar) variáveis entre x_3 e x_4. Podemos supor então $M_\sigma = ...x_3...x_1...x_2...x_4x_5....$ Usando o caso (a) e parte do que já provamos no caso (b), obtemos que $\alpha_{31245} = -\alpha_{31254} = \alpha_{41253} = -\alpha_{41235}$, como desejamos.

(c) *Quando no monômio M_σ o par x_3, x_4 separa o par x_1, x_2, digamos* $M_\sigma = ...x_1...x_3...x_4...x_2....$ Neste caso, é suficiente tratar o caso em que x_4 sucede x_3 imediatamente, pois podemos transpor x_3 e x_4 através de sucessivas transposições deles com seus vizinhos. Observe que nenhuma destas transposições envolve nenhum vizinho imediato de x_1 ou x_2. O número de transposições neste processo deve ser ímpar, logo se a conclusão é verdadeira para elas é também verdadeira para a transposição (3 4). Se o número de varáveis entre x_1 e x_2 é ímpar, faça a substituição

$$\begin{array}{ccccccc} ... & x_1 & ... & x_3x_4 & ... & x_2 & ... \\ ... & (e_{11}) & & ... & & (e_{11}) & ... . \end{array}$$

Desde que f é uma identidade (1 2)-simétrica, obtemos $2(\alpha_{1[34]2} + \alpha_{12[34]} + \alpha_{[34]12}) = 0$, resultando que $\alpha_{1[34]2} + \alpha_{12[34]} + \alpha_{[34]12} = 0$. Permutando nesta substituição x_4 e x_3, obtemos $\alpha_{1[43]2} + \alpha_{12[43]} + \alpha_{[43]12} = 0$. Agora, somando as duas últimas igualdades e aplicando o caso (a), obtemos $\alpha_{1[34]2}+\alpha_{12[34]}+\alpha_{[34]12}+\alpha_{1[43]2}-\alpha_{12[34]}-\alpha_{[34]12} = 0$ e assim $\alpha_{1[34]2} + \alpha_{1[43]2} = 0$, resultando que $\alpha_{1[34]2} = -\alpha_{1[43]2}$, como desejamos. Se o número de variáveis entre x_1 e x_2 é par, então o monômio tem a forma $M_\sigma = ...x_1...x_3x_4...x_2x_5....$ Fazendo a substituição

$$\begin{array}{cccccccccc} ... & x_1 & ... & x_3 & x_4 & ... & x_2 & x_5 & ... & \\ & ... & & e_{11} & (e_{11}) & ... & e_{22} & (e_{22}) & ... & , \end{array}$$

obtemos a equação $\alpha_{13425} + \alpha_{14325} + \alpha_{13452} + \alpha_{14352} = 0$. Pelo que já provamos neste item para caso em que o número de variáveis entre x_1 e x_2 é ímpar, podemos dizer que $\alpha_{13452} + \alpha_{14352} = 0$, resultando que $\alpha_{13425} + \alpha_{14325} = 0$, ou seja, $\alpha_{13425} = -\alpha_{14325}$.

(d) *Quando no monômio M_σ os dois pares x_1, x_2 e x_3, x_4 estão alternados, ou seja, o monômio tem a forma $M_\sigma = ...x_3...x_1...x_4...x_2....$* Se o número de variáveis entre x_3 e x_4 é ímpar, substituímos

$$\begin{array}{cccccccccc} ... & x_3 & ... & x_1 & ... & x_4 & ... & x_2 & ... & \\ ... & (e_{11}) & & ... & & (e_{11}) & & ... & & , \end{array}$$

e reduzimos aos casos (a) e (c). Suponha agora que x_3 e x_4 são separados por um número par de variáveis. Além disso, por hipótese, há pelo menos uma variável entre x_1 e x_3, e pelo menos uma entre x_1 e x_4. Como não pode haver exatamente 3 variáveis entre x_3 e x_4, pelo menos um dos pares, x_1 e x_3 ou x_3 e x_4, deve ser separado por pelo menos duas variáveis. Assim, podemos supor que o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_3x_5x_6...x_1...x_4...x_2....$ Pelo caso (a) e por parte já provada do caso (d), temos que $\alpha_{35142} = -\alpha_{53142} = \alpha_{5413} = -\alpha_{45132}$, observando que x_5 não é vizinho imediato de x_1. Isto conclui a prova do caso (d) e assim completamos a prova do Lema. ♦

Definição 3.18 *Dizemos que um par (x_{i_1}, x_{i_2})* ***toca*** *o par (x_{j_1}, x_{j_2}) no monômio M_σ, se uma das variáveis do primeiro par é vizinha imediata de uma das variáveis do segundo par.*

Corolário 3.19 *Sejam $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ uma identidade 2-simétrica e M_σ um monômio de f, onde o par (x_1, x_2) não toca o par (x_3, x_4). Então $\alpha_\sigma = 0$.*

Demonstração. Como f é uma identidade (3 4)-simétrica, então $\alpha_{(34)\sigma} = \alpha_\sigma$. Por outro lado, como (x_1, x_2) não toca (x_3, x_4), então pelo Lema 3.17, temos que $\alpha_{(34)\sigma} = -\alpha_\sigma$, resultando que $\alpha_\sigma = -\alpha_\sigma$, ou seja, $2\alpha_\sigma = 0$. Como $char K = 0$, segue que $\alpha_\sigma = 0$. ♦

Lema 3.20 *Se $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ é uma identidade 3-simétrica, então f é a identidade nula.*

Demonstração. Seja f uma identidade 3-simétrica em três pares disjuntos, digamos (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2). Suponha que $f \neq 0$. Então existe em f algum monômio M_σ com coeficiente $\alpha_\sigma \neq 0$. Pelo Lema 3.17, podemos passar do monômio M_σ para o monômio $M_{\sigma'}$ em f, transpondo um par de variáveis que não toca um dos três pares (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2) e ainda temos o coeficiente $\alpha_{\sigma'} \neq 0$. Pelo Corolário 3.19, quaisquer dois dos pares em que f é simétrico devem se tocar em M_σ e em algum outro monômio com coeficiente não nulo. Seja agora uma nova variável t diferente das variáveis x_i, y_i e z_i que ocorra em M_σ. Podemos considerar esta nova variável, pois o número $2n + 1$ é ímpar. Para o restante da prova, vamos sempre nos referir a estas sete variáveis $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ e t. Ainda sobre a prova, se o par (x_1, x_2) não toca o par (y_1, y_2), vamos dizer que não temos (x, y)-***contato***. Do mesmo modo, se o par (x_1, x_2) não toca o par (z_1, z_2), vamos dizer que não temos (x, z)-***contato***. Por fim, se o par (y_1, y_2) não toca o par (z_1, z_2), vamos dizer que não temos (y, z)-***contato***. No desenvolvimento da prova distinguiremos alguns casos para a posição relativa da variável t no monômio M_σ. Em cada caso, vamos procurar contradizer o Corolário 3.19.

(a) *Quando temos em M_σ uma única variável num lado de t e as outras cinco restantes do outro lado de t. Digamos que x_1 está do lado direito de t e as outras cinco variáveis x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 do lado esquerdo de t.* Neste caso, como todo par simétrico deve tocar cada um dos outros, a variável x_2 deve ocorrer entre y_i e z_j, digamos da forma $y_1x_2z_1$. Quanto às posições de y_2 e z_2 no monômio M_σ, note primeiro que y_2 e z_2 não tocam o par (x_1, x_2) e assim podem ser permutadas. Desde que o bloco $y_2y_1x_2z_1z_2$ não pode ocorrer em M_σ (se ocorresse não teríamos (y, z)-contato), segue também que $z_2y_1x_2z_1y_2$ não pode ocorrer em M_σ. Assim, permutando y_2 e z_2 (se necessário), podemos supor que M_σ tem uma das formas $M_\sigma = y_1x_2z_1z_2y_2tx_1$ ou $M_\sigma = z_2y_2y_1x_2z_1tx_1$. Considerando o monômio $M_\sigma = y_1x_2z_1z_2y_2tx_1$ podemos permutar x_1 e y_1, pois eles não tocam o par (z_1, z_2) e concluir pelo Lema 3.17 que o monômio $M_{\sigma'} = x_1x_2z_1z_2y_2ty_1$ tem coeficiente não nulo. Mas no monômio $M_{\sigma'}$ não temos (x, y)-contato e pelo Corolário 3.19, o coeficiente $\alpha_{\sigma'}$ deve ser nulo, o que é uma contradição. Já no monômio $M_\sigma = z_2y_2y_1x_2z_1tx_1$ podemos permutar x_1 e z_1, pois eles não tocam o par (y_1, y_2), obtendo o monômio $M_{\sigma'} = z_2y_2y_1x_2x_1tz_1$ e novamente pelo Lema 3.17, o monômio $M_{\sigma'}$ tem coeficiente não nulo. Mas em $M_{\sigma'}$ não temos (x, z)-contato e pelo Corolário 3.19 o coeficiente $\alpha_{\sigma'}$ deve ser nulo. Novamente chegamos a uma contradição.

(b) *Quando as seis variáveis $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ estão de um mesmo lado da variável t, digamos do lado esquerdo.* Neste caso, observe que um dos três pares (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2) nos quais f é simétrica, não toca os dois vizinhos mais próximos do lado esquerdo de t. Assim, a variável t e o seu vizinho mais próximo pela esquerda não tocam este par simétrico. Então pelo Lema 3.17, permutando-se t e a sua vizinha mais próxima à esquerda o coeficiente do monômio obtido não se anula. Usando esta idéia recaímos no caso (a).

(c) *Quando temos em M_σ duas variáveis de um lado de t e as outras quatro do outro lado de t.* Neste caso, as duas que estão de um lado de t não podem pertencer a um mesmo par simétrico, pois senão este par não tocaria outro par simétrico. Assim, podemos supor que o mônomio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...t...x_1y_1$. Se t não é vizinho imediato à direita de nenhum z_i, então t e x_1 não tocam o par (z_1, z_2) e podemos permutar t e x_1 obtendo $M_{\sigma'} = ...x_1ty_1$. Mas isto nos conduz ao caso (b). Podemos supor então que $M_\sigma = ...z_1tx_1y_1$. Observe que a variável z_1 não pode ser vizinha imediata de z_2, pois se assim fosse, o par (z_1, z_2) teria somente contato com apenas um dos outros dois pares. Então digamos que y_2 é a vizinha imediata de z_1 e o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...y_2z_1tx_1y_1$. Observe que a última variável à esquerda de M_σ não toca y_2, a qual pode ser permutada com t, pois elas não tocam o par (y_1, y_2). Mas isto nos leva para o caso (a), ou seja, que todas as seis variáveis ficam num mesmo lado da variável t.

(d) *Quando temos em M_σ exatamente três das 6 variáveis $\{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2\}$ de cada lado de t.* Neste caso, observe que duas variáveis de um mesmo par simétrico não pode ocorrer num mesmo lado de t, pois então teríamos somente um contato com os outros pares. Suponha que M_σ tem a forma $M_\sigma = ...tx_1y_1z_1$. Se t não é vizinha imediata à direita de z_2, então podemos permutar t e x_1, pois elas não tocam o par

(z_1, z_2) e obtemos $M_{\sigma'} = ...x_1 t y_1 z_1$. Mas isto nos conduz ao caso (c). Sendo assim, vamos supor que M_σ tem a forma $M_\sigma = ...z_2 t x_1 y_1 z_1$, ou seja, a variável t é vizinha imediata à direita de z_2. Então para existir um (x, z)-contato é necessário que M_σ tenha a forma $M_\sigma = y_2 x_2 z_2 t x_1 y_1 z_1$. Observe que x_1 e y_2 podem ser permutadas, pois elas não tocam o par (z_1, z_2) e obtemos $M_{\sigma'} = x_1 x_2 z_2 t y_2 y_1 z_1$, o qual tem coeficiente não nulo pelo Lema 3.17. Mas em $M_{\sigma'}$ não temos (x, y)-contato e pelo Corolário 3.19, o coeficiente $\alpha_{\sigma'}$, deveria ser nulo, ou seja, chegamos a uma contradição.

Portanto, supondo que $f \neq 0$ e analisando todas as possibilidades para os monômios de f, chegamos sempre a uma contradição, o que nos leva a concluir que f é a identidade nula. ♦

Corolário 3.21 *Seja $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ uma identidade 2-simétrica. Então f é anti-simétrica em todo par de variáveis diferentes de x_1, x_2, x_3, x_4, ou seja, f é 2-perfeita.*

Demonstração. Suponha um par de variáveis (x_i, x_j), onde $\{i, j\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \varnothing$ e considere o operador $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(1 + (i\ j))$. Então $\sigma_{ij} f$ ainda é uma identidade em V_{2n+1} e $\sigma_{ij} f$ é 3-simétrica (pois $(i\ j)\sigma_{ij} = \sigma_{ij}, (1\ 2)\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(1\ 2), (3\ 4)\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(3\ 4)$), donde concluímos pelo Lema 3.20 que $\sigma_{ij} f = 0$, ou seja, $f \in Ker\ \sigma_{ij}$. Logo, f é $(i\ j)$-anti-simétrica. Como f é 2-simétrica por hipótese e anti-simétrica num par de variáveis diferente de x_1, x_2, x_3, x_4, podemos concluir que f é 2-perfeita. ♦

Definição 3.22 *Dizemos que $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ é uma identidade **simétrica em três variáveis** (x_1, x_2, x_3) se f é invariante por uma permutação do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Equivalentemente, f é simétrica em (x_1, x_2, x_3), se f é $(1\ 2)$ e $(2\ 3)$- simétrica.*

Corolário 3.23 *Seja $M_n(K)$, com $n > 2$. Se $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ é uma identidade de $M_n(K)$, simétrica em (x_1, x_2) e (x_3, x_4, x_5), então f é a identidade nula.*

Demonstração. Temos que $2n + 1 \geq 7$. Como f é $(1\ 2)$, $(3\ 4)$, $(4\ 5)$ e $(3\ 5)$-simétrica, segue que $(1\ 2)f = (3\ 4)f = (4\ 5)f = (3\ 5)f = f$. Como f é simétrica em (x_1, x_2) e (x_3, x_4), então pelo Corolário 3.21, f é anti-simétrica no par $(5\ 6)$, ou seja, $(5\ 6)f = -f$. Semelhantemente, como f é simétrica em (x_1, x_2) e (x_3, x_5), então novamente pelo Corolário 3.21, f é anti-simétrica no par $(4\ 6)$, ou seja, $(4\ 6)f = -f$.

Assim, $(4\ 5)f = (5\ 6)(4\ 6)(5\ 6)f = (-1)^3 f = -f$, ou seja, $(4\ 5)f = -f$. Mas, por hipótese, $(4\ 5)f = f$, resultando que $f = -f$, ou seja, $2f = 0$. Desde que $charK = 0$, concluímos que $f = 0$. ♦

Corolário 3.24 *Seja $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ uma identidade 2-simétrica, então $g = f + (4\ 5)f + (3\ 5)f = 0$.*

Demonstração. Observando que $(1\ 2)$ comuta com $(4\ 5)$ e com $(3\ 5)$ e que $(1\ 2)f = f$, segue que

$$(1\ 2)g = (1\ 2)f + (1\ 2)(4\ 5)f + (1\ 2)(3\ 5)f$$

$$= f + (4\ 5)f + (3\ 5)f = g,$$

ou seja, $(1\ 2)g = g$. Além disso, observando que $(3\ 5)(4\ 5) = (4\ 5)(3\ 4)$, temos que

$$(3\ 5)g = (3\ 5)f + (3\ 5)(4\ 5)f + (3\ 5)^2 f$$

$$= (3\ 5)f + (4\ 5)(3\ 4)f + f$$

$$= (3\ 5)f + (4\ 5)f + f = g,$$

ou seja, $(3\ 5)g = g$. Analogamente, podemos mostrar que $(4\ 5)g = g$. Assim, g é simétrica em (x_1, x_2) e (x_3, x_4, x_5). Logo, pelo Corolário 3.24, temos que $g = 0$. ♦

Lema 3.25 *Seja $M_n(K)$, com $n > 2$. Se $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ é uma identidade 2-simétrica de $M_n(K)$, onde os monômios $x_1x_2x_3x_4x_5...x_{2n+1}$ e $x_4x_3x_2x_1x_5...x_{2n+1}$ ocorrem com coeficiente zero, então f é a identidade nula.*

Demonstração. Suponha que $f \neq 0$. Então em f deve ocorrer algum monômio M_σ com coeficiente $\alpha_\sigma \neq 0$.

A prova do Lema será dividida em duas partes.

Parte (1): Seja M_σ um monômio em f com coeficiente não nulo. Note que os pares (x_1, x_2) e (x_3, x_4) se tocam em M_σ. Caso contrário, o coeficiente de M_σ seria nulo pelo Corolário 3.19. Suponha que é igual a dois o número de contatos entre (x_1, x_2) e (x_3, x_4) em M_σ. Então em um dos dois pares, ambos os membros deve tomar parte nos contatos. Digamos que este par é (x_1, x_2) (observe que os dois contatos podem ocorrer de várias formas, tal como $x_1x_3x_2$, $x_1x_3...x_2x_4$, $x_1x_3x_4x_2$, etc.). Além disso, deve existir em M_σ alguma variável que não toca o par (x_3, x_4), pois x_3 e x_4 têm 4 lados e assim devem ter no máximo 4 contatos com outras variáveis. Mas dois desses contatos são com as variáveis x_1 e x_2. Assim, x_3 e x_4 devem ter no máximo 2 contatos com outras variáveis diferentes de x_1 e x_2. Como $n > 2$, resulta que $2n+1 \geq 7$, e isto significa que em M_σ, além de x_1, x_2, x_3, x_4, existem no mínimo 3 outras variáveis. Assim, seja x_5 a variável que não toca (x_3, x_4) em M_σ. Pelo Corolário 3.24, temos que

$$g = f + (1\ 5)f + (2\ 5)f = 0.$$

Além disso, o monômio M_σ aqui considerado está em g. Desse modo, igualando a zero o coeficiente de M_σ em g, obtemos a equação

$$\alpha_\sigma + \alpha_{(15)\sigma} + \alpha_{(25)\sigma} = 0.$$

Mas por hipótese o coeficiente α_σ é não nulo, resultando que um dos dois coeficientes $\alpha_{(15)\sigma}$, $\alpha_{(25)\sigma}$, deve ser não nulo. Suponha que $\alpha_{(15)\sigma}$ é não nulo. Mas, o coeficiente $\alpha_{(15)\sigma}$ é obtido do monômio M_σ por permutação de x_1 e x_5, significando que temos somente um contato entre $(x_1,\ x_2)$ e $(x_3,\ x_4)$. Suponha finalmente que em M_σ tenha mais de dois contatos entre os pares $(x_1,\ x_2)$ e $(x_3,\ x_4)$. Então uma variável, digamos x_2 deve tocar ambas as variáveis x_3 e x_4 e o monômio M_σ contém um bloco da forma $x_3x_2x_4$. Desde que em M_σ, são mais de dois contatos entre os pares $(x_1,\ x_2)$ e $(x_3,\ x_4)$, a variável x_1 deve tocar o bloco $x_3x_2x_4$. Com isso podemos supor que M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_1x_3x_2x_4...$. Substituindo em f a sequência semi-rígida da forma

$$\begin{matrix} ... & x_1 & x_3 & x_2 & ... \\ ... & e_{11} & (e_{11}) & (e_{11}) & ... \end{matrix}$$

obtemos a equação $\alpha_{1324} + \alpha_{1234} + \alpha_{3124} = 0$. Na equação, o primeiro termo é não nulo, pois $\alpha_{1324} = \alpha_\sigma \neq 0$. Logo, o mesmo acontece com o segundo ou com o terceiro termo. O segundo é o coeficiente de um monômio que tem somente um contato entre os pares (x_1, x_2) e (x_3, x_4). O terceiro é o coeficiente de um monômio com dois contatos entre os pares (x_1, x_2) e (x_3, x_4). Portanto este caso se reduz a um dos casos anteriores.

Parte (2): Como f é (1 2) e (3 4)-simétrico, então permutando-se $x_1,\ x_2$ ou $x_3,\ x_4$, não muda os coeficientes dos monômios em f. Com o auxílio da Parte (1), podemos dizer que existe um monômio M_σ em f com coeficiente não nulo, em que o único contato entre (x_1, x_2) e (x_3, x_4) é x_2x_3 ou x_3x_2. Suponha por enquanto que o contato em M_σ é x_2x_3. Mostremos que o coeficiente do monômio $x_1x_2x_3...x_{2n+1}$ é não nulo, contradizendo a condição do Lema (quando em M_σ o contato for x_3x_2 o tratamento é o mesmo e a contradição aparece mostrando que o coeficiente do $x_4x_3x_2x_1x_5...x_{2n+1}$ é não nulo). Pelo Corolário 3.21, uma permutação das variáveis $x_5, ..., x_{2n+1}$ não influencia na anulação do monômio, pois f é anti-simétrica num par diferente de x_1, x_2, x_3, x_4. Dessa forma, não importa a ordem das variáveis nesta última sequência. Vamos agora distinguir alguns casos para a posição relativa de x_1, x_2, x_3, x_4 nos monômios.

Caso (1): Quando o monômio M_σ contém um bloco da forma $x_1x_2x_3x_4$. Mostremos que este bloco pode sempre ser mudado uma posição para a esquerda em M_σ sem que o monômio se anule, resultando que após um número finito de mudanças obtemos uma contradição (pois chegaremos a um monômio da forma $x_1x_2x_3x_4...\ x_{2n+1}$, o qual tem coeficiente nulo pela condição do Lema). Se no mínimo duas variáveis vêm à esquerda do bloco $x_1x_2x_3x_4$, então o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_5x_6x_1x_2x_3x_4...$ e fazemos a substituição pela seguinte sequência semi-rígida:

$$\begin{array}{ccccccccc} ... & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ... \\ ... & (e_{11}) & e_{12} & e_{22} & (e_{22}) & e_{21} & e_{13} & ... . \end{array}$$

Como f é uma identidade (1 2)-simétrica, segue que $\alpha_{561234} + \alpha_{612354} = 0$ e daí $\alpha_{612354} \neq 0$, pois $\alpha_{561234} \neq 0$. Como x_4, x_5 não toca (x_1, x_2), podemos permutar x_4, x_5 e obtemos $\alpha_{612345} \neq 0$, ou seja, movemos o bloco $x_1x_2x_3x_4$ uma posição para esquerda em M_σ e o coeficiente do monômio correspondente não foi anulado. Se são menos que duas variáveis do lado esquerdo do bloco $x_1x_2x_3x_4$, então temos duas possibilidades. A primeira é que nenhuma variável esteja no lado esquerdo do bloco $x_1x_2x_3x_4$, e neste caso nada temos a provar. A segunda possibilidade é que uma variável esteja do lado esquerdo do bloco $x_1x_2x_3x_4$. Desde que o monômio M_σ tem no mínimo sete variáveis, devemos ter no mínimo duas variáveis do lado direito do bloco $x_1x_2x_3x_4$, ou seja, o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = x_5x_1x_2x_3x_4x_6x_7....$ Observe que x_5 e x_1 não tocam o par (x_3, x_4) e podemos permutar x_1 e x_5, obtendo que $\alpha_{1523467} \neq 0$. Substitua

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & ... \\ & (e_{11}) & e_{12} & e_{22} & (e_{22}) & e_{21} & & ... . \end{array}$$

Como f é uma identidade (3 4)-simétrica, segue que $\alpha_{1523467} + \alpha_{1234657} = 0$ e daí $\alpha_{1234657} \neq 0$, pois $\alpha_{1523467} \neq 0$. Portanto, neste caso em todas análises feitas, chegamos que o monômio $M_\sigma = x_1x_2x_3x_4...x_{2n+1}$ tem coeficiente nulo, contradizendo a condição do Lema.

Caso (2): Quando o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...\ x_1...\ x_2x_3...\ x_4....$ Então pelo Lema 3.17 permutando x_1 com o vizinho imediato de x_2 pela esquerda e x_4 com o vizinho imediato de x_3 pela direita, temos que o coeficiente do monômio $M_{\sigma'}$ é não nulo. Fazendo isso, obtemos que $M_{\sigma'} = ...x_1x_2x_3x_4....$ Então procedendo como no Caso (1), chegaremos à mesma contradição.

Caso (3): Quando o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_4...x_2x_3...x_1....$ Então pelo Lema 3.17, permutando x_4 com a primeira variável à esquerda de M_σ e permutando x_1 com a última variável à direita de M_σ, obtemos o monômio $M_{\sigma'} = x_4...x_2x_3...x_1$, que tem coeficiente não nulo. Como são no mínimo sete variáveis, então um dos casos deve ocorrer: x_4 e x_2, ou x_3 e x_1 devem ser separadas por no mínimo duas variáveis. Digamos que o monômio $M_{\sigma'}$ tem a forma $M_{\sigma'} = x_4...x_2x_3x_5x_6...x_1$. Como x_4 e x_5 não tocam o par (x_1, x_2), podemos passar para $x_5...x_2x_3x_4x_6...x_1$. Neste último monômio o vizinho imediato de x_2 pela esquerda e x_1 não tocam o par (x_3, x_4), e daí podemos passar para $x_5...\ x_1x_2x_3x_4x_6...$, obtendo com isso uma redução ao Caso (1). Procedendo da mesma maneira, a contradição aparecerá.

Caso (4): Quando o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_2x_3...x_4...x_1....$ Então pelo Lema 3.17, permutando x_4 com a primeira variável que sucede x_3, obtemos $M_{\sigma'} = ...x_2x_3x_4...x_1...$, que tem coeficiente não nulo. Se x_2 não é primeira variável à esquerda, então passemos para $...x_1x_2x_3x_4...$ e temos uma redução ao Caso (1). Se x_2 é a primeira variável a esquerda, ou seja, $x_2x_3x_4...x_1...$, então substitua

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & ... & x_1 & ... \\ e_{12} & e_{22} & (e_{22}) & ... & (e_{11}) & ... , \end{array}$$

e concluímos que $\alpha_{1234...} \neq 0$. Mas isto contradiz a condição do Lema.

Caso (5): Quando o monômio M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_2x_3...x_1...x_4....$ Então pelo Lema 3.17, permutando x_4 com a última variável à direita em M_σ, obtemos que $M_{\sigma'} = ...\ x_2x_3...\ x_1...\ x_4$, que tem coeficiente não nulo. Se x_2 não é a primeira variável à esquerda, então passemos para $...x_1x_2x_3...x_4$. Pelo Lema 3.17, nesta última configuração, podemos permutar x_4 com a primeira variável que sucede x_3, obtendo

$...x_1x_2x_3x_4...$. Mas isto nos conduz para o Caso (1). Se x_2 é a primeira variável à esquerda, então permute x_1 com a variável na $(2n-1)$-ésima posição. Como são no mínimo sete variáveis, o monômio obtido tem a forma $x_2x_3x_6x_7...\ x_1x_5x_4$. Como x_4 e x_6 não tocam o par (x_1, x_2), então permutando x_4 e x_6 obtemos o monômio $x_2x_3x_4x_7...x_1x_5x_6$ e reduzimos ao Caso (4), ou seja, obtemos que $\alpha_{1234...} \neq 0$, o que contradiz a condição do Lema.

Quando M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_4...x_1...x_2x_3...$, tratamos exatamente como o Caso (3) pela esquerda, e quando M_σ tem a forma $M_\sigma = ...x_1...x_4...x_2x_3...$, tratamos como o Caso (4) pela direita.

Portanto, supondo que $f \neq 0$ e analisando todas as possibilidades para os monômios de f, chegamos sempre a uma contradição, o que nos leva a concluir que f é a identidade nula. ♦

Corolário 3.26 *Seja $n > 2$. Então toda identidade polinomial 2-simétrica em V_{2n+1} pertence ao subespaço B.*

Demonstração. Seja $f(x_1, ..., x_{2n+1}) \in V_{2n+1}$ uma identidade 2-simétrica e denote por α_1 e α_2 os coeficientes de $x_1x_2x_3x_4x_5...x_{2n+1}$ e $x_4x_3x_2x_1x_5...x_{2n+1}$ em f. Sendo q_1 e q_2 os dois polinômios definidos no início desta seção, defina um polinômio h da forma $h = \alpha_2q_2 - \alpha_1q_1$ e observe que h pertence ao subespaço B. Observe também que os monômios $x_1x_2x_3x_4x_5...x_{2n+1}$ e $x_4x_3x_2x_1x_5...x_{2n+1}$ em h têm os mesmos coeficientes que em f. Portanto, $f - h$ está em V_{2n+1} e é uma identidade 2-simétrica. Ademais, os coeficientes em $f - h$ dos monômios $x_1x_2x_3x_4x_5...x_{2n+1}$ e $x_4x_3x_2x_1x_5...x_{2n+1}$ são nulos. Isto faz com que a identidade $f - h$ satisfaça as hipóteses do Lema 3.25, donde podemos concluir que $f - h = 0$, ou seja, $f = h$. Mas $h \in B$, resultando que $f \in B$. ♦

Vamos agora rememorar os pontos mais importantes discutidos até aqui na busca de mostrar a inclusão $V_{2n+1} \subseteq B$.

No Teorema 3.11, mostramos que o espaço vetorial V_{2n+1} de todas as identidades polinomiais multilineares de $M_n(K)$ de grau $2n + 1$, com $n > 2$, é gerado por S, onde S é o conjunto de todas as identidades 1-perfeitas de V_{2n+1}, todas as identidades 2-simétricas de V_{2n+1} e o polinômio standard St_{2n+1}. Então para mostrar que $V_{2n+1} \subseteq$

B, precisamos apenas mostrar que o conjunto gerador S está contido em B. Nesse sentido, na demonstração do Teorema 3.11, mostramos que o polinômio standard St_{2n+1} pertence a B. Além disso, no Teorema 3.16, mostramos que todas as identidades 1-perfeitas de V_{2n+1} pertencem a B. Por fim, mostramos no Corolário 3.26 que toda identidade 2-simétrica de V_{2n+1} pertence a B. Portanto, mostramos que o conjunto gerador S do espaço vetorial V_{2n+1} está contido em B e consequentemente $V_{2n+1} \subseteq B$. Com isso, podemos escrever o Teorema seguinte.

Teorema 3.27 *Se $n > 2$, então $V_{2n+1} = B$, ou seja, toda identidade multilinear de $M_n(K)$ de grau $2n+1$ segue do polinômio standard St_{2n}.* ♦

Observação 3.28 *A hipótese $n > 2$ no Teorema 3.27 é realmente necessária, pois para $n = 2$ o Teorema 3.27 não é valido. Basta tomar a identidade Hall $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1,\ x_2][x_3,\ x_4] + [x_3,\ x_4][x_1,\ x_2],\ x_5]$ de $M_2(K)$, a qual não segue do polinômio standard St_4.*

3.4 A dimensão do espaço vetorial V_{2n+1} das identidades multilineares de $M_n(K)$

Nesta seção, vamos calcular a dimensão do espaço vetorial V_{2n+1} das identidades polinomiais multilineares de $M_n(K)$ nas variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n+1}$, com $n > 2$. Nesse sentido, já sabemos pelo Teorema 3.27 que o espaço vetorial V_{2n+1} é gerado por todas identidades polinomiais $\phi_i, \psi_i, \chi_{ij}$, definidas na Seção 3.2.

Também já sabemos do Lema 3.14 que os polinômios

$$p_1 = \phi_1 + \phi_2, \quad p_2 = \psi_1 + \psi_2, \quad p_3 = \chi_{12} + \chi_{21} \quad e \quad p_4 = \sum_{i=3}^{2n+1} (\chi_{i1} + \chi_{i2}),$$

formam uma base para o subespaço das identidades (1 2)-perfeitas de V_{2n+1} e, no início da Seção 3.3, vimos que os polinômios

$$q_1 = \chi_{13} + (1\ 2)\chi_{13} + \chi_{14} + (1\ 2)\chi_{14}$$

e

$$q_2 = (1\ 3)\chi_{13} + (1\ 3)\chi_{12} + (1\ 4)\chi_{14} + (1\ 3)(1\ 4)\chi_{12}$$

são identidades linearmente independentes 2-simétricas de V_{2n+1}.

Agora, considere o polinômio

$$f = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i \phi_i + \sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \lambda_{ij}\chi_{ij}$$

e o operador $\sigma_{k,k+1} = \frac{1}{2}(1+(k\ \ k+1))$. Usando as operações apresentadas no Corolário 3.13, podemos ver que se $\{i,j\} \cap \{k,k+1\} = \varnothing$, então $\sigma_{k,k+1}\phi_i = \sigma_{k,k+1}\chi_{ij} = 0$. Agora aplicando o operador $\sigma_{k,k+1}$ no polinômio f e usando a última igualdade, obtemos:

$$\sigma_{k,k+1} f = \sigma_{k,k+1}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i\phi_i + \sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \lambda_{ij}\chi_{ij}\right)$$

$$= \alpha_i \sum_{i=1}^{2n+1} \sigma_{k,k+1}\phi_i + \lambda_{ij} \sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \sigma_{k,k+1}\chi_{ij}$$

$$= \sigma_{k,k+1}\Bigg[\alpha_k\phi_k + \alpha_{k+1}\phi_{k+1} + \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{ik}\chi_{ik} + \lambda_{i,k+1}\chi_{i,k+1}) +$$

$$\sum_{\substack{j=1;\\ j\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{kj}\chi_{kj} + \lambda_{k+1,j}\chi_{k+1,j} + (\lambda_{k,k+1}\chi_{k,k+1} + \lambda_{k+1,k}\chi_{k+1,k})\Bigg].$$

Usando o Corolário 3.13, obtemos:

$$\sigma_{k,k+1} f = \frac{1}{2}(1+(k\ \ k+1))\Bigg[\alpha_k\phi_k + \alpha_{k+1}\phi_{k+1} + \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{ik}\chi_{ik} + \lambda_{i,k+1}\chi_{i,k+1}) +$$

$$\sum_{\substack{j=1;\\ j\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{kj}\chi_{kj} + \lambda_{k+1,j}\chi_{k+1,j}) + (\lambda_{k,k+1}\chi_{k,k+1} + \lambda_{k+1,k}\chi_{k+1,k})\Bigg],$$

implicando que

$$2\sigma_{k,k+1} f = (1+(k\ \ k+1))\Bigg[\alpha_k\phi_k + \alpha_{k+1}\phi_{k+1} + \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{ik}\chi_{ik} + \lambda_{i,k+1}\chi_{i,k+1}) +$$

$$\sum_{\substack{j=1;\\ j\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{kj}\chi_{kj} + \lambda_{k+1,j}\chi_{k+1,j}) + (\lambda_{k,k+1}\chi_{k,k+1} + \lambda_{k+1,k}\chi_{k+1,k})\Bigg]$$

$$= \alpha_k(\phi_k + \phi_{k+1}) + \alpha_{k+1}(\phi_k + \phi_{k+1}) +$$

$$\sum_{i\neq k,k+1} (\lambda_{ik}(\chi_{ik} + \chi_{i,k+1}) + \lambda_{i,k+1}(\chi_{i,k+1} + \chi_{ik})) +$$

$$\sum_{j\neq k,k+1}(\lambda_{kj}(\chi_{kj}-\chi_{k+1,j})+\lambda_{k+1,j}(\chi_{k+1,j}-\chi_{kj}))+$$
$$\lambda_{k,k+1}(\chi_{k,k+1}+\chi_{k+1,k})+\lambda_{k+1,k}(\chi_{k+1,k}+\chi_{k,k+1})$$
$$=(\alpha_k+\alpha_{k+1})(\phi_k+\phi_{k+1})+\sum_{i\neq k,k+1}(\lambda_{ik}+\lambda_{i,k+1})(\chi_{ik}+\chi_{i,k+1})+$$
$$\sum_{j\neq k,k+1}(\lambda_{kj}-\lambda_{k+1,j})(\chi_{kj}-\chi_{k+1,j})+(\lambda_{k,k+1}+\lambda_{k+1,k})(\chi_{k,k+1}+\chi_{k+1,k}).$$

Portanto,

$$2\sigma_{k,k+1}f=(\alpha_k+\alpha_{k+1})(\phi_k+\phi_{k+1})+\sum_{i\neq k,k+1}(\lambda_{ik}+\lambda_{i,k+1})(\chi_{ik}+\chi_{i,k+1})+$$
$$\sum_{j\neq k,k+1}(\lambda_{kj}-\lambda_{k+1,j})(\chi_{kj}-\chi_{k+1,j})+(\lambda_{k,k+1}+\lambda_{k+1,k})(\chi_{k,k+1}+\chi_{k+1,k}).$$

Lema 3.29 *Seja*
$$g=a(\phi_k+\phi_{k+1})+e(\chi_{k,k+1}+\chi_{k+1,k})+$$
$$\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,k+1}}^{2n+1}d_i(\chi_{ik}-\chi_{i,k+1})+\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,k+1}}^{2n+1}c_i(\chi_{ki}-\chi_{k+1,i}).$$
Se $g=0$, então $a=c_i=d_i=e=0$ para $i=1,...,k-1,k+2,...,2n+1$.

Demonstração. Nesta prova vamos usar $\hat{x}_k$ para denotar a omissão da variável x_k num monômio. Na equação $g=0$, vamos igualar a zero os coeficientes dos monômios

$$x_1...\hat{x}_k\hat{x}_{k+1}...x_{2n+1}x_kx_{k+1} \quad e \quad x_1...\hat{x}_k\hat{x}_{k+1}...\hat{x}_i...x_{2n+1}x_kx_{k+1}x_i$$

para obtermos as equações $\pm(d_{2n+1}+e)=0$ e $\pm(d_{2n+1}+e\pm c_i)=0$. Disto segue que $c_i=0$ para $i=1,...,k-1,k+2,...,2n+1$. Semelhantemente, igualando a zero o coeficiente do monômio $x_1...x_{k-1}x_kx_ix_{k+1}...\hat{x}_i...x_{2n+1}$ $(i\neq k-1,k,k+1)$, obtemos que $\pm(d_{k-1}-d_i)=0$, ou seja, $d_i=d_{k-1}$, noutras palavras os d_i para $i\neq k,k+1$ são todos iguais. Assumiremos aqui que $k>1$. Para $k=1$, temos o mesmo resultado trabalhando com $x_{2n+1}x_1x_ix_2...\hat{x}_i...x_{2n}$, e esta observação é também aplicada nos próximos dois casos. O monômio $x_kx_1...x_{k-1}x_{k+1}...x_{2n+1}$ produz $a+(-1)^{k-1}d_{k-1}=0$, mas se permutarmos o bloco $x_{k-1}x_{k+1}$ neste monômio com seu vizinho da direita (ou da esquerda, se x_{k+1} estiver no extremo direito do monômio) temos $a + (-1)(-1)^{k-1}d_{k-1} = a + (-1)^k d_{k-1} = 0$. Assim, $a = d_{k-1} = 0$ e daí $d_i = 0$ para todo $i \neq k, k+1$. Da primeira equação $d_{2n+1} + e = 0$, temos que $e = 0$. ♦

Corolário 3.30 *Tomando $p_5 = \sum_{i=3}^{2n+1} (-1)^i (\chi_{1i} - \chi_{2i})$, os polinômios p_1, p_3, p_4 e p_5 são linearmente independentes.*

Demonstração. Pelo Lema 3.14, temos que p_1, p_3, p_4 são identidades (1 2)-perfeitas. Além disso, p_5 é (1 2)-simétrica. Para mostrar que p_5 é (1 2)-perfeita, devemos mostrar que p_5 é $(k\ l)$-anti-simétrica para todo $2 < k < l$. Usando o Corolário 3.13 temos que

$$\sigma_{kl} p_5 = \sum_{i=3}^{2n+1} (-1)^i \sigma_{kl} (\chi_{1i} - \chi_{2i})$$

$$= (-1)^k \sigma_{kl} (\chi_{1k} - \chi_{2k}) + (-1)^l \sigma_{kl} (\chi_{1l} - \chi_{2l})$$

$$= (-1)^k \sigma_{kl} (\chi_{1k} + (-1)^{k-l} \chi_{1l}) - (-1)^k \sigma_{kl} (\chi_{2k} + (-1)^{k-l} \chi_{2l}) = 0.$$

Logo, p_5 é (1 2)-perfeita.

Suponha agora $\alpha_1 p_1 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 + \alpha_5 p_5 = 0$. Igualando a zero os coeficientes dos monômios $x_1 x_2 x_3 x_4 ... x_{2n+1}$, $x_1 x_3 x_2 x_4 ... x_{2n+1}$ e $x_1 x_3 x_4 x_2 x_5 ... x_{2n+1}$, obtemos as respectivas equações $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $-\alpha_1 + \alpha_4 = 0$ e $\alpha_1 + \alpha_4 = 0$, resultando que $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Donde segue que $\alpha_5 p_5 = 0$. Logo, $\alpha_5 = 0$. Portanto, p_1, p_3, p_4 e p_5 são linearmente independentes. ♦

Vamos agora construir uma base para o espaço vetorial das identidades V_{2n+1}.

Lema 3.31 *Os polinômios ϕ_i para $i = 1, ..., 2n+1$, e χ_{ij} para $i, j = 1, ..., 2n+1, i \neq j$, $(i\ j) \neq (1\ 2)$, geram o espaço vetorial V_{2n+1}.*

Demonstração. No Teorema 3.11, mostramos que o polinômio standard St_{2n+1}, todas as identidades 1-perfeitas e todas as identidades 2-simétricas geram o espaço vetorial V_{2n+1}. Com isso, a demonstração desse teorema, consiste em apresentar esses geradores do espaço vetorial V_{2n+1} como combinação linear dos polinômios ϕ_i e χ_{ij}. Primeiramente, observe que o polinômio standard St_{2n+1} é gerado pelos ϕ_i, pois

$$St_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} \phi_i.$$

Também temos que as identidades 2-simétricas estão em B e assim são geradas pelos χ_{ij}. Portanto é suficiente tratarmos o caso das identidades 1-perfeitas, digamos (1 2)-perfeitas. Nesse sentido, relembremos que na Seção 3.2 verificamos que os polinômios p_1, p_2, p_3 e p_4, formam uma base para o espaço vetorial das identidades (1 2)-perfeitas. Por outro lado, no Corolário 3.30, vimos que as identidades p_1, p_3, p_4 e p_5 são (1 2)-perfeitas e linearmente independentes, ou seja, elas formam outra base para o espaço das identidades (1 2)-perfeitas. Mas, estas quatro identidades p_1, p_3, p_4 e p_5, são geradas por ϕ_i e χ_{ij}.

Para concluir a demonstração do Teorema, precisamos mostrar que χ_{12} é combinação linear do restante dos χ_{ij}. Nesse sentido, considere o polinômio

$$h = \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^j \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \chi_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} (-1)^j \chi_{ij}.$$

Para um j fixo, considere o termo

$$\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \chi_{ij}$$

em h. Aplicando o operador σ_{kl} neste termo, com $k, l \neq j$, e utilizando as relações do Corolário 3.13, obtemos que

$$\sigma_{kl}\left(\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \chi_{ij}\right) = \sigma_{kl}\chi_{kj} + \sigma_{kl}\chi_{lj} = \sigma_{kl}(\chi_{kj} + \chi_{lj}).$$

Também pelo Corolário 3.13, temos que $\chi_{kj} + \chi_{lj}$ é $(k\ l)$-anti-simétrico, implicando que $\chi_{kj} + \chi_{lj} \in Ker\ \sigma_{kl}$. Logo,

$$\sigma_{kl}\left(\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \chi_{ij}\right) = \sigma_{kl}(\chi_{kj} + \chi_{lj}) = 0.$$

Agora, aplicando o operador σ_{kl} sobre o polinômio h e novamente usando as relações da Corolário 3.13, obtemos que σ_{kl} anula os termos do somatório sobre j, exceto aqueles em que $j = k$ ou $j = l$. Assim,

$$\sigma_{kl} h = \sigma_{kl}\left(\sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^j \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \chi_{ij}\right)$$

$$= \sigma_{kl}\Bigg((-1)^k \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k}}^{2n+1} \chi_{ik} + (-1)^l \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq l}}^{2n+1} \chi_{il}\Bigg)$$

$$= (-1)^k\Bigg(\sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k}}^{2n+1} \sigma_{kl}\chi_{ik} + (-1)^{l-k} \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq l}}^{2n+1} \sigma_{kl}\chi_{il}\Bigg)$$

$$= (-1)^k\Bigg(\sigma_{kl}\chi_{lk} + \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,l}}^{2n+1} \sigma_{kl}\chi_{ik} + (-1)^{l-k}\sigma_{kl}\chi_{kl} + (-1)^{l-k} \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq l,k}}^{2n+1} \sigma_{kl}\chi_{il}\Bigg)$$

$$= (-1)^k\Bigg(\sigma_{kl}(\chi_{lk} + (-1)^{l-k}\chi_{kl}) + \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,l}}^{2n+1} \sigma_{kl}(\chi_{ik} + (-1)^{l-k}\chi_{il})\Bigg).$$

Pelo Corolário 3.13, temos que $\chi_{lk} + (-1)^{l-k}\chi_{kl}$ e $\chi_{ik} + (-1)^{l-k}\chi_{il}$ são $(k\ l)$-anti-simétricos, significando que

$$\chi_{lk} + (-1)^{l-k}\chi_{kl}, \quad \chi_{ik} + (-1)^{l-k}\chi_{il} \ \in Ker\ \sigma_{kl}.$$

Disto segue que $\sigma_{kl}h = 0$, significando que h é anti-simétrico em todos os pares. Com isso, podemos dizer que h é múltiplo escalar do polinômio standard St_{2n+1}, ou seja, $h = aSt_{2n+1}$ para algum $a \in K$. Considere agora o monômio $x_1x_2x_3...x_{2n+1}$, o qual está em h e em St_{2n+1}. Observe que este monômio sendo visto em h, faz parte exatamente dos termos

$$\chi_{12}, \chi_{23}, \chi_{34}, ..., \chi_{2n,2n+1}.$$

Note também que o coeficiente do monômio $x_1x_2x_3...x_{2n+1}$ em $\chi_{i,i+1}$ é 1, para $i = 1, 2, ..., 2n$. Logo, o coeficiente de $x_1x_2x_3...x_{2n+1}$ em h é $\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1} = 0$, donde $a = 0$, uma vez que a é o coeficiente de $x_1x_2x_3...x_{2n+1}$ em aSt_{2n+1}. Disto concluímos que

$$h = \sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} (-1)^j \chi_{ij} = 0. \tag{3.1}$$

Como todos os χ_{ij}, inclusive χ_{12}, estão em h, isolamos χ_{12} de um lado da igualdade 3.1 e concluímos que χ_{12} é combinação linear do restante dos χ_{ij}. Isto conclui a demonstração do Lema. ♦

Teorema 3.32 *Os polinômios ϕ_i para $i = 1, ..., 2n+1$, e χ_{ij} para $i, j = 1, ..., 2n+1$, $i \neq j$, $(i\ j) \neq (1\ 2)$, formam uma base para o espaço vetorial V_{2n+1}.*

Demonstração. Pelo Lema 3.31, para que os polinômios ϕ_i e χ_{ij} formem uma base para V_{2n+1}, precisamos somente mostrar que eles são linearmente independentes. Para isso, suponha

$$f = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i \phi_i + \sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{2n+1} \lambda_{ij}\chi_{ij} = 0,$$

com $\lambda_{12} = 0$. Pelo que fizemos no Lema 3.29, podemos escrever

$$\begin{aligned}
2\sigma_{k,k+1} f = {} & (\alpha_k + \alpha_{k+1})(\phi_k + \phi_{k+1}) + \\
& (\lambda_{k,k+1} + \lambda_{k+1,k})(\chi_{k,k+1} + \chi_{k+1,k}) + \\
& \sum_{\substack{j=1;\\ j\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{kj} - \lambda_{k+1,j})(\chi_{kj} - \chi_{k+1,j}) + \\
& \sum_{\substack{i=1;\\ i\neq k,k+1}}^{2n+1} (\lambda_{ik} + \lambda_{i,k+1})(\chi_{ik} + \chi_{i,k+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Ainda pelo mesmo Lema 3.29 segue que $\lambda_{ik} + \lambda_{i,k+1} = \lambda_{kj} - \lambda_{k+1,j} = 0$, ou seja, $\lambda_{ik} = -\lambda_{i,k+1}$ e $\lambda_{kj} = \lambda_{k+1,j}$. Destas igualdades e do fato que χ_{12} é combinação linear do restante dos χ_{ij}, segue que $\lambda_{rs} = \pm\lambda_{12} = 0$ para todo r, s. Agora, a igualdade $f = 0$, se reduz a

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i \phi_i = 0,$$

implicando que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, ..., 2n+1$. Portanto os polinômios ϕ_i para $i = 1, ..., 2n+1$ e χ_{ij} para $i, j = 1, ..., 2n+1, i \neq j$, $(i\ j) \neq (1\ 2)$ são linearmente independentes. ♦

Corolário 3.33 *dim* $V_{2n+1} = (2n+1)^2 - 1 = 4n(n+1)$. ♦

Capítulo 4

Algumas consequências do polinômio standard

A identidade standard St_n e a identidade de Capelli d_n são duas das mais importantes identidades polinomiais das álgebras com dimensão finita, à medida que importantes resultados nascem a partir destas identidades. Como é o caso do Teorema de Amitsur-Levitzki, o qual assegura que St_{2n} é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$. Todavia St_{2n-1} não é identidade para $M_n(K)$ (veja [10], Teorema 1.72, páginas 16-17). Com relação ao polinômio de Cappeli d_n, Razmyslov mostrou que d_{n^2+1} é uma identidade polinomial para $M_n(K)$, mas d_{n^2} não é identidade para $M_n(K)$ (veja [12], páginas 16-17).

Estes resultados motivaram Formanek a elaborar o seguinte problema: será $m = 2n$ o menor inteiro positivo tal que a álgebra $M_n(K)$ ($char K = 0$) satisfaz o polinômio duplo de Cappeli D_m? Esta questão foi respondida de maneira independente por Giambruno e Sehgal [8] e Chang [2]. E é justamente a resposta elaborada por Chang que será abordada neste capítulo.

Seja $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ em $K\langle X\rangle$, onde $w_1, w_2, ..., w_u$ são monômios nas variáveis $y_1, y_2, ..., y_t$ tais que $w_1 w_2 ... w_u$ é uma reordenação de $y_1 y_2 ... y_t$, o polinômio definido por

$$f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u) = \sum (-1)^{\mu} x_{\rho(1)} ...\ x_{\rho(n_1)} w_{\sigma(1)} x_{\rho(n_1+1)} ...$$

$$...\ x_{\rho(n_1+n_2)} w_{\sigma(2)} x_{\rho(n_1+n_2+1)} ...\ x_{\rho(n_1+...+n_u)} w_{\sigma(u)} x_{\rho(n_1+...+n_u+1)} ... x_{\rho(n_1+...+n_{u+1})},$$

onde o somatório é sobre todos os $\rho \in S_m$, $\sigma \in S_u$ e todas as escolhas dos inteiros $n_1, ..., n_u \geq 1, n_{u+1} \geq 0$ tais que $n_1 + n_2 + ... + n_{u+1} = m$ e o sinal para cada monômio é o sinal da permutação μ sobre as variáveis $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t$.

Exemplo 4.1 *Considere* $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ *com* $m = 2$, $t = 3$ *e* $u = 2$, *sendo* $w_1 = y_1 y_3$ *e* $w_2 = y_2$. *Temos que*

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \mid w_1 = y_1 y_3, w_2 = y_2) = \sum (-1)^{\mu} x_{\rho(1)} w_{\sigma(1)} x_{\rho(2)} w_{\sigma(2)},$$

onde o somatório é sobre todas as $\rho, \sigma \in S_2$, *e* $n_1 = n_2 = 1$ *e* $n_3 = 0$. *Assim,*

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \mid w_1 = y_1 y_3, w_2 = y_2) = -x_1 w_1 x_2 w_2 + x_1 w_2 x_2 w_1 +$$

$$x_2 w_1 x_1 w_2 - x_2 w_2 x_1 w_1 = -x_1 y_1 y_3 x_2 y_2 + x_1 y_2 x_2 y_1 y_3 + x_2 y_1 y_3 x_1 y_2 - x_2 y_2 x_1 y_1 y_3.$$

Exemplo 4.2 *Considere* $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ *com* $t = 1$ *e* $u = 1$, *sendo* $w_1 = y_1$. *Temos que*

$$f(x_1, ..., x_m, y_1 \mid w_1 = y_1) = \sum (-1)^{\mu} x_{\rho(1)} ... x_{\rho(n_1)} y_1 x_{\rho(n_1+1)} ... x_{\rho(m-1)} x_{\rho(m)}, \tag{4.1}$$

com $\rho \in S_m$ *e* $n_1 \in \{1, ..., m\}$. *Assim,*

$$\mu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{n_1} & x_{n_1+1} & x_{n_1+2} & ... & x_m & y_1 \\ x_{\rho(1)} & x_{\rho(2)} & ... & x_{\rho(n_1)} & y_1 & x_{\rho(n_1+1)} & ... & x_{(m-1)} & x_{\rho(m)} \end{pmatrix}$$

sendo $\mu = \theta_1 \circ \theta_2$, *onde*

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{n_1} & x_{n_1+1} & x_{n_1+2} & ... & x_m & y_1 \\ x_{\rho(1)} & x_{\rho(2)} & ... & x_{\rho(n_1)} & x_{\rho(n_1+1)} & x_{\rho(n_1+2)} & ... & x_{\rho(m)} & y_1 \end{pmatrix}$$

e

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_{n_1} & x_{n_1+1} & x_{n_1+2} & ... & x_{m-1} & x_m & y_1 \\ x_1 & ... & x_{n_1} & y_1 & x_{n_1+1} & ... & x_{m-2} & x_{m-1} & x_m \end{pmatrix}.$$

Observe que θ_1 *e* ρ *têm o mesmo sinal e que* $\theta_2 = (y_1\ \ x_m\ \ x_{m-1}\ ...\ x_{n_1+2}\ \ x_{n_1+1})$. *Logo,* $(-1)^{\theta_2} = (-1)^{m-n_1}$ *e daí* $(-1)^{\mu} = (-1)^{m-n_1}(-1)^{\rho}$.

Por outro lado, considere o polinômio standard

$$St_{m+1}(x_1, ..., x_m, x_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_{m+1}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(m)} x_{\sigma(m+1)}$$

$$= (-1)^m \sum_{\pi \in S_m} (-1)^\pi x_{m+1} x_{\pi(1)} ... x_{\pi(m)} +$$

$$\sum_{\substack{\tau \in S_m \\ n_1 \in \{1,...,m\}}} (-1)^{m-n_1} (-1)^\tau x_{\tau(1)} ... x_{\tau(n_1)} x_{m+1} x_{\tau(n_1+1)} ... x_{\tau(m)}.$$

No último membro desta igualdade, observe que os termos do primeiro somatório correspondem às permutações $\sigma \in S_{m+1}$ *tais que* $\sigma(x_1) = x_{m+1}$*, e que os termos do segundo somatório correspondem às demais permutações de* S_{m+1}.

Temos que

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_m & x_{m+1} \\ x_{m+1} & x_{\pi(1)} & ... & x_{\pi(m-1)} & x_{\pi(m)} \end{pmatrix}.$$

Mas, $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2$*, onde*

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{m-1} & x_m & x_{m+1} \\ x_{\pi(1)} & x_{\pi(2)} & ... & x_{\pi(m-1)} & x_{\pi(m)} & x_{m+1} \end{pmatrix}$$

e

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_m & x_{m+1} \\ x_{m+1} & x_1 & ... & x_{m-1} & x_m \end{pmatrix}.$$

Além disso, $\tau_2 = (x_{m+1} \quad x_m \quad x_{m-1} \, ... \, x_3 \quad x_2 \quad x_1)$*. Logo,* $(-1)^{\tau_2} = (-1)^m$ *e daí* $(-1)^\sigma = (-1)^m (-1)^{\tau_1}$.

Agora, identificando a variável x_{m+1} *com a variável* y_1*, temos que nesse primeiro somatório estão todos os monômios em* St_{m+1}*, nos quais a variável* y_1 *precede todos os* x_j*, ou seja, exatamente os monômios que* ***não*** *caem na definição de* $f(x_1, ..., x_m, y_1 \mid w_1 = y_1)$*. Ademais, considerando novamente a identificação* x_{m+1} *com* y_1*, temos que o segundo somatório da igualdade acima coincide exatamente com o segundo membro da igualdade 4.1. Nestas condições, podemos escrever*

$$St_{m+1}(x_1, ..., x_m, y_1) = (-1)^m \sum_{\pi \in S_m} (-1)^\pi y_1 x_{\pi(1)} ... x_{\pi(m)} +$$

$$\sum (-1)^\mu x_{\rho(1)} ... x_{\rho(n_1)} y_1 x_{\rho(n_1+1)} ... x_{\rho(m-1)} x_{\rho(m)},$$

ou seja,

$$St_{m+1}(x_1, ..., x_m, y_1) = (-1)^m y_1 St_m(x_1, ... x_m) + f(x_1, ..., x_m, y_1 \mid w_1 = y_1).$$

A seguir vamos apresentar um caso particular do exemplo acima.

Exemplo 4.3 *Considere* $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ *com* $m = 3$, $t = 1$ *e* $u = 1$, *sendo* $w_1 = y_1$. *Temos que*

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1 \mid w_1 = y_1) = \sum (-1)^{\mu} x_{\rho(1)} ... x_{\rho(n_1)} w_1 x_{\rho(n_1+1)} ... x_{\rho(n_1+n_2)}$$

onde o somatório é sobre todos os termos $\rho \in S_3$ *e o sinal de cada monômio é o sinal da permutação* μ *sobre as variáveis* x_1, x_2, x_3, y_1. *Assim,*

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1 \mid w_1 = y_1) = x_1x_2x_3y_1 - x_1x_2y_1x_3 - x_1x_3x_2y_1 +$$

$$x_1x_3y_1x_2 + x_1y_1x_2x_3 - x_1y_1x_3x_2 - x_2x_1x_3y_1 + x_2x_1y_1x_3 + x_1x_3x_2y_1 -$$

$$x_2x_3y_1x_1 - x_2y_1x_1x_3 + x_2y_1x_3x_1 + x_3x_1x_2y_1 - x_3x_1y_1x_2 -$$

$$x_3x_2x_1y_1 + x_3x_2y_1x_1 + x_3y_1x_1x_2 - x_3y_1x_2x_1.$$

Observe que $f(x_1, x_2, x_3, y_1 \mid w_1 = y_1)$ *é um somatório de monômios em* $St_{3+1}(x_1, x_2, x_3, y_1)$, ***excluindo*** *os monômios* $-y_1x_1x_2x_3 + y_1x_1x_3x_2 + y_1x_2x_1x_3 - y_1x_2x_3x_1 - y_1x_3x_1x_2 + y_1x_3x_2x_1$, *ou seja, aqueles em que* y_1 *antecede todos os* x_i. *Observe ainda que* $-y_1x_1x_2x_3 + y_1x_1x_3x_2 + y_1x_2x_1x_3 - y_1x_2x_3x_1 - y_1x_3x_1x_2 + y_1x_3x_2x_1 = (-1)^3 y_1 St_3(x_1, x_2, x_3)$. *Assim, podemos escrever*

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1 \mid w_1 = y_1) = St_4(x_1, x_2, x_3, y_1) - (-1)^3 y_1 St_3(x_1, x_2, x_3).$$

De outra maneira,

$$St_4(x_1, x_2, x_3, y_1) = (-1)^3 y_1 St_3(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_2, x_3, y_1 \mid w_1 = y_1).$$

Observação 4.4 1) *O polinômio* $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ *é multilinear nas variáveis* $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t$ *e pode ser escrito como* $f_\pi(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t)$, *onde* $\pi = (w_1, w_2, ..., w_u)$ *é uma partição de uma reordenação do produto* $y_1y_2...y_t$.
2) *Temos* $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u) = \sum_{\rho \in Q} (-1)^{\rho} z_{\rho(1)} ... z_{\rho(m+t)}$, *onde* $\{x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t\} = \{z_1, z_2, ..., z_{m+t}\}$ *e* $Q \subseteq S_{m+t}$, *ou seja,* $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ *é o somatório de alguns dos monômios do polinômio standard* $St_{m+t}(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t)$. *A condição sobre* $n_1, ..., n_{u+1}$, *significa que em todos os monômios de* f, *cada* w_i *é imediatamente precedido por algum* x_j.

Teorema 4.5 $f(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_t \mid w_1, w_2, ..., w_u)$ *é uma consequência do polinômio standard* St_m.

Demonstração. A prova é por indução sobre o par (t, u) associado a f, onde $(t_1, u_1) < (t, u)$ se $t_1 < t$ ou $t_1 = t$ e $u_1 < u$ (ordem lexicográfica).

Seja o par $(1,1)$ o passo inicial da indução. Temos $w_1 = y_1$, pois $t = 1$ e $u = 1$, e assim pelo Exemplo 4.2,

$$St_{m+1}(x_1, ..., x_m, y_1) = (-1)^m y_1 St_m(x_1, ..., x_m) + f(x_1, ..., x_m, y_1 \mid w_1 = y_1).$$

Desde que o polinômio standard St_{m+1} é consequência de St_m (veja o Exemplo 1.47), temos que $f(x_1, ..., x_m, y_1 \mid w_1)$ é também consequência do polinômio standard St_m para o par $(1,1)$.

Fixado $(t,u) > (1,1)$, suponha que $f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{t_1} \mid w_1, ..., w_{u_1})$ é consequência do polinômio standard St_m para todo par $(t_1, u_1) < (t,u)$. Para prosseguir a demonstração, vamos considerar três casos, onde qualquer um exclui os outros.

Caso 1. *Algum monômio w_i nas variáveis $y_1, y_2, ..., y_t$ tem comprimento* ≥ 3. Para simplificar a notação, vamos supor neste caso que o monômio de comprimento ≥ 3 é $w_u = w'\ y_{t-2}y_{t-1}y_t$. Temos que

$$f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{t-3}, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t \mid w_1, ..., w_u)$$

$$= f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{t-3}, (y_{t-2}y_{t-1}y_t) \mid w_1, ..., w_u), \tag{4.2}$$

pois ambos os lados são somas dos mesmos monômios e com os mesmos sinais (usando procedimento análogo ao Exemplo 4.2, constataremos que os monômios que compõem estes polinômios têm os mesmos sinais). Além disso, o polinômio do lado esquerdo dessa igualdade está associado ao par (t,u) e o polinômio do lado direito da mesma igualdade está associado ao par $(t-2, u)$. Como $t - 2 < t$, segue que $(t-2, u) < (t,u)$ e, por hipótese de indução temos que o polinômio do lado esquerdo da igualdade 4.2 é consequência do polinômio standard St_m. Logo, o polinômio do lado direito é também consequência de St_m, ou seja, $f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{t-3}, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t \mid w_1, ..., w_u)$ é consequência de St_m, quando algum monômio w_i tem comprimento ≥ 3.

Caso 2. *Algum monômio w_i, nas variáveis $y_1, y_2, ..., y_t$, tem comprimento exatamente igual a 2, e nenhum tem comprimento maior que 2.* Para simplificar a notação, vamos supor neste caso que o monômio de comprimento 2 é $w_u = y_{t-1}y_t$. Observe que

$$f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_1, ..., w_u) =$$

$$= f(x_1w_u, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_{t-2} \mid w_1, ..., w_{u-1}) +$$

$$f(x_1, x_2w_u, x_3, ..., x_m, y_1, ..., y_{t-2} \mid w_1, ..., w_{u-1}) +$$

$$... + f(x_1, ..., x_{m-1}, x_mw_u, y_1, ..., y_{t-2} \mid w_1, ..., w_{u-1}) -$$

$$f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_uw_1, w_2..., w_{u-1}) -$$

$$f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_1, w_uw_2, w_3..., w_{u-1}) -$$

$$... - f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_1, ..., w_uw_{u-1})$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq m} f(x_1, ..., x_{i-1}, x_iw_u, x_{i+1}, ..., x_m, y_1, ..., y_{t-2} \mid w_1, ..., w_{u-1})$$

$$- \sum_{1 \leq j \leq u} f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_1, ..., w_{j-1}, w_uw_j, w_{j+1}, ..., w_{u-1}).$$

Essa igualdade é realmente válida. Para ver isso, observe que o polinômio $f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_1, ..., w_u)$ é escrita como uma soma alternada de monômios, onde w_u é imediatamente precedido em cada monômio por alguma x_i e essa soma ocorre, exatamente, com o mesmo sinal (usando procedimento análogo ao usado no Exemplo 4.2, chegaremos a essa constatação) no primeiro somatório do lado direito da equação. Com isso, todo monômio neste primeiro somatório ocorre com o mesmo sinal com o qual ocorre no polinômio f, *exceto* os monômios em que x_iw_u precede imediatamente algum w_j, e estes monômios são eliminados no somatório final, verificando então a igualdade acima.

Temos que os $f's$ no primeiro somatório são associados ao par $(t-2, u-1)$. Como $t-2 < t$, segue que $(t-2, u-1) < (t, u)$ e, por hipótese de indução, os $f's$ no primeiro somatório são consequências do polinômio standard St_m. Já os $f's$ no segundo somatório são associados ao par $(t, u-1)$. Como $t = t$ e $u - 1 < u$, segue que $(t, u-1) < (t, u)$ e, novamente por hipótese de indução, os $f's$ no segundo somatório são consequências do polinômio standard St_m. Disto segue que $f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_t \mid w_1, ..., w_u)$ é consequência do polinômio standard St_m, quando algum monômio w_i em f tem comprimento exatamente igual a 2.

Caso 3. *Todos os monômios w_i nas variáveis $y_1, ..., y_t$ têm comprimento igual a* 1. Neste caso temos $u = t$. Suponha que $w_1 = y_1, ..., w_t = y_t$ e considere o polinômio standard $St_{m+t}(x_1,...,x_m,y_1,...,y_t)$. Expandindo St_{m+t}, obtemos que todo monômio dessa expansão é da forma

$$\mu_0(y)\eta_1(x)\mu_1(y)\eta_2(x)\mu_3(y)...\eta_r(x)\mu_r(y)\eta_{r+1}(x),$$

onde $r \geq 0$, $\mu_0(y),...,\mu_r(y)$ são monômios em $y_1,...,y_t$, não triviais, exceto possivelmente $\mu_0(y)$, e $\eta_1(x),...,\eta_{r+1}(x)$ são monômios em $x_1,...,x_m$, não triviais, exceto possivelmente $\eta_{r+1}(x)$. Considere na expansão de St_{m+t} todos os monômios que começam com o mesmo $\mu_0(y)$ e onde aparecem $\mu_1(y),...,\mu_r(y)$ (não necessariamente nesta ordem) alternados com monômios $\eta_i(x)$. Então, a soma destes monômios resulta em

$$\pm\mu_0(y)f(x_1,...,x_m,y_{i_1},...,y_{i_s} \mid \mu_1(y),...,\mu_r(y))$$

que é consequência de St_m por hipótese de indução, pois $(s,r) < (t,t)$ uma vez que $s \leq t$ e $r < t$. Os termos da expansão nos quais $r = t$, e consequentemente $\mu_0(y) = 1$, constituem o polinômio

$$f(x_1,...,x_m,y_1,...,y_t \mid w_1 = y_1,...,w_t = y_t).$$

Assim, St_{m+1} é uma soma deste último com consequências de St_m. Como St_{m+t} é também consequência de St_m, completamos a indução. ♦

Exemplo 4.6 *Sejam* $D_m(x_1,...,x_m;y_1,...,y_m) = \sum_{\rho,\sigma\in S_m}(-1)^{\rho\sigma}x_{\rho(1)}y_{\sigma(1)}...\, x_{\rho(m)}y_{\sigma(m)}$ *o polinômio duplo de Capelli e* $f(x_1,...,x_m;y_1,...,y_t \mid w_1,...,w_u)$ *o polinômio definido acima. Então*

$$D_{2n}(x_1,...,x_{2n};y_1,...,y_{2n}) = \pm f(x_1,...,x_{2n},y_1,...,y_{2n} \mid w_1 = y_1,...,w_{2n} = y_{2n}).$$

Para ver isso, observe que da definição de f*, com* $m = t = u = 2n$*, devemos ter necessariamente os inteiros* $n_1,n_2,...,n_{2n}$ *todos iguais a* 1 *e* $n_{2n+1} = 0$ *para que* $n_1 + n_2 + ... + n_{2n} = 2n$*. Nestas condição, temos que*

$$f(x_1,...,x_{2n},y_1,...,y_{2n} \mid w_1 = y_1,...,w_{2n} = y_{2n}) = \sum(-1)^{\mu}x_{\rho(1)}y_{\sigma(1)}...x_{\rho(2n)}y_{\sigma(2n)},$$

onde $\rho,\sigma \in S_{2n}$*. Assim,*

$$\mu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{2n-1} & x_{2n} & y_1 & y_2 & \cdots & y_{2n-1} & y_{2n} \\ x_{\rho(1)} & y_{\sigma(1)} & ... & x_{\rho(n)} & y_{\sigma(n)} & x_{\rho(n+1)} & y_{\sigma(n+1)} & \cdots & x_{\rho(2n)} & y_{\sigma(2n)} \end{pmatrix},$$

sendo $\mu = \theta_1 \circ \theta_2$*, onde*

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{2n-1} & x_{2n} & y_1 & y_2 & ... & y_{2n-1} & y_{2n} \\ x_{\rho(1)} & x_{\rho(2)} & ... & x_{\rho(2n-1)} & x_{\rho(2n)} & y_{\sigma(1)} & y_{\sigma(2)} & ... & y_{\sigma(2n-1)} & y_{\sigma(2n)} \end{pmatrix}$$

e

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{2n-1} & x_{2n} & y_1 & y_2 & ... & y_{2n-1} & y_{2n} \\ x_1 & y_1 & ... & x_n & y_n & x_{n+1} & y_{n+1} & ... & x_{2n} & y_{2n} \end{pmatrix}.$$

Observe que o sinal de θ_2 *só depende de* n*. Como* n *é fixado, segue que* $(-1)^\mu = \pm(-1)^{\theta_1}$*. Ademais, como* θ_1 *e* $\rho \circ \sigma$ *têm o mesmo sinal, segue que* $(-1)^\mu = \pm(-1)^{\rho\sigma}$*. Portanto,*

$$D_{2n}(x_1, ..., x_{2n}; y_1, ..., y_{2n}) = \pm f(x_1, ..., x_{2n}, y_1, ..., y_{2n} \mid w_1 = y_1, ..., w_{2n} = y_{2n}).$$

Teorema 4.7 *Seja* $D_m(x_1, ..., x_m; y_1, ..., y_m) = \sum_{\rho,\sigma \in S_m} (-1)^{\rho\sigma} x_{\rho(1)} y_{\sigma(1)} ... \, x_{\rho(m)} y_{\sigma(m)}$ *o polinômio duplo de Capelli. Então* $D_{2n}(x_1, ..., x_{2n}; y_1, ..., y_{2n})$ *é uma identidade polinomial para a álgebra* $M_n(K)$*. Entretanto,* $D_{2n-1}(x_1, ..., x_{2n-1}; y_1, ..., y_{2n-1})$ *não é identidade polinomial para a álgebra* $M_n(K)$*.*

Demonstração. Pelo Exemplo 4.6, temos que $D_{2n}(x_1, ..., x_{2n}; y_1, ..., y_{2n}) = \pm f(x_1, ..., x_{2n}, y_1, ..., y_{2n} \mid y_1, ..., y_{2n})$. Do Teorema 4.5, temos que f é consequência do polinômio standard St_{2n} e St_{2n} é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$ (pelo Teorema de Amitsur-Levitzki). Disto concluímos que $D_{2n}(x_1, ..., x_{2n}, y_1, ..., y_{2n})$ é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$.

Mostremos agora que $D_{2n-1}(x_1, ..., x_{2n-1}; y_1, ..., y_{2n-1})$ não é identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$. Para isso, considere o argumento *escada duplo* :

$$u_1 = e_{11}, u_2 = e_{22}, ..., u_n = e_{nn}, ..., u_{n+1} = e_{n,n-1}, ..., u_{2n-1} = e_{21}$$

e

$$v_1 = e_{12}, v_2 = e_{23}, ..., v_n = e_{nn}, ..., v_{n+1} = e_{n-1,n-1}, ..., u_{2n-1} = e_{11},$$

onde e_{ij} são matrizes unitárias. Fazendo $D_{2n-1}(u_1, u_2, ..., u_{2n-1}; v_1, v_2, ..., v_{2n-1})$, temos que são não nulos os monômios correspondentes à permutação identidade e aos ciclos de tamanho $2n - 1$, os quais têm sinal $+1$. Logo,

$$D_{2n-1}(u_1, ..., u_{2n-1}; v_1, ..., v_{2n-1}) = \sum_{\rho,\sigma \in S_{2n-1}} (-1)^{\rho\sigma} u_{\rho(1)} v_{\sigma(1)} ... \, u_{\rho(2n-1)} v_{\sigma(2n-1)} =$$

$$= u_1v_1u_2v_2...u_{2n-1}v_{2n-1} \ + \ u_2v_2...u_{2n-1}v_{2n-1}u_1v_1 \ +$$

$$u_3v_3u_4v_4...u_{2n-1}v_{2n-1}u_1v_1u_2v_2 + ... + u_{2n-1}v_{2n-1}u_1v_1u_2v_2...u_{2n-2}v_{2n-2} =$$

$$e_{11}+e_{22}+...+e_{nn}+e_{nn}+...+e_{22} = (-e_{11}+e_{11})+e_{11}+e_{22}+...+e_{nn}+e_{nn}+...+e_{22} =$$

$$2e_{11} + 2e_{22} + ... + 2e_{nn} - e_{11} = 2(e_{11} + e_{22} + ... + e_{nn}) - e_{11} = 2I_{n\times n} - e_{11} \neq 0.$$

Portanto, $D_{2n-1}(x_1, ..., x_{2n-1}; y_1, ..., y_{2n-1})$ não é identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$. ♦

Bibliografia

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras,* Proc. Amer. Math. Soc., **1**, 449-463 (1950).

[2] Q. Chang, *Some consequences of the standard polynomial,* Proc. Amer. Math. Soc., **104**, 707-710 (1988).

[3] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two,* Linear Algebra Appl. **377**, 53-67 (2004).

[4] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0,* Algebra and Logic **12**, 188-194 (1981).

[5] V. Drensky, A. Kasparian, *Polynomial identities of eighth degree for* 3×3 *matrices,* Annuaire de I'Univ. de Sofia, Fac. de Math. et Mecan, Livre 1, math. **77**, 175-195 (1983).

[6] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras,* Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.

[7] G. K. Genov, P. N. Siderov, *A basis for identities of third order matrix algebra over a finite field,* Algebra and Logic, **20**, 241-257 (1981).

[8] A. Giambruno, S. K. Sehgal, *On a polynomial identity for* $n \times n$ *matrices,* J. Algebra, **96**, 451-453 (1989).

[9] A. Giambruno, A. Valenti, *Central polynomial and matrix invariant,* Israel J. Math., **96**, 281-297 (1996).

[10] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Amer. Math. Soc. 2005.

[11] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree,* Annals of Math., **46**, 695-707 (1945).

[12] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen, *Computational aspects of polynomial identites,* A K Peters, 2004.

[13] I. Kaplansky, *Ring with a polynomial identite,* Bull. Amer. Math., **54**, 575-580 (1948).

[14] A. Kemer, *Varietities and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras,* Math. USSR, Izv., **25**, 359-374 (1985).

[15] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras,* Algebra e Logic., **26**, 362-397 (1987).

[16] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$,* J. Algebra, **241**, 410-434 (2001).

[17] U. Leron, *Multilinear identites of the matrix ring,* Trans. Amer. Math. Soc., **183**, 175-202 (1973).

[18] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch,* Bull. Amer. Math., **52**, 1033-1035 (1946).

[19] Yu. N. Maltsev, E. N. Kuzmin, *On a problem of A. Kurosch,* Bull. Amer. Math., **52**, 1033-1035 (1946).

[20] S. V. Okahitin, *On varieties defined by two-variable identities (Russia),* Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1986(manuscript deposited in VINITI 12.02.1986 No 1016-V) Ref. Zh. Mat. 6A366DEP/1986.

[21] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero,* Algebra and Logic, **12**, 47-63 (1973).

[22] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra,* Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 367-373 (1963). Correção: **21**, 379-380 (1969).