Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Teconologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

O POLINÔMIO DE TUTTE

por

Marta Élid Conceição Amorim

sob orientação do

Prof. Dr. Braulio Maia Junior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Fevereiro/2006

Resumo

Neste trabalho apresentamos o Polinômio de Tutte com duas e quatro variáveis e o associamos a Função de Möbius, o Polinômio Característico e o Beta Invariante. Veremos, também, que por recursão sobre certas equações, algumas funções relacionadas a matróides podem ser obtidas pela avaliação do Polinômio de Tutte para certos valores.

Abstract

In this work, we show Tutte Polynomial with two or four variables and we associate it with Möbius Function the charateristic Polynomial and the Beta Invariant. We also see, to turn to under some equations, some functions related to matroids can be obtained for Tutte Polynomial assessment for some values.

O POLINÔMIO DE TUTTE

por

Marta Élid Conceição Amorim

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Manoel Jose Machado Soares Lemos

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza

Prof. Dr. Braulio Maia Junior
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2006

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por me proporcionar sempre momentos muito felizes e colocar em minha vida pessoas muito especiais.

A minha mãe, que é um exemplo de coragem, perseverança, caráter, e a quem devo não só a vida, mas tudo o que sou e que conquistei.

A Éder, pelo amor, confiança, apoio e paciência, muita paciência.

A minha família, por tudo.

Ao Professor Braulio Maia Junior pela amizade e orientação.

Aos professores Fernando Xavier e Manoel Lemos, que participaram da banca. Mas, de maneira especial ao Professor Manoel Lemos que também colaborou de forma expressiva para a conclusão deste trabalho.

Aos professores e funcionários do DME, em especial, aos professores, Daniel Pelegrino e Vânio Fragoso, pelas disciplinas lecionadas e, a funcionária, D. Salete, sempre tão atenciosa e bem humorada.

Aos amigos e companheiros de aventura (Geometria Diferencial): Areli, Dantas, Hallyson e Jackeline. Aos amigos e irmãos, por parte de orientador, Lino e Aluízio, que tornaram essa batalha menos árdua. As amigas, com quem dividir muitas alegrias e tristezas: Tatiana, Juliana, Lya, Rosângela, Ana Cristina. Aos amigos que sabem tudo sobre o LATEX: Thicyane e Lauriclécio. A amiguinha, Ana Carolina, a pessoa que mandava nos nossos finais de semana. Enfim, agradeço a todas as pessoas que me acolheram nessa cidade, e me ajudaram a suportar a saudade de casa.

Aos amigos de Recife, em especial, Allyson e Fábio.

Aos professores e amigos da UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana), onde concluir a graduação e fui incentivada a me qualificar.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

As duas "Marias"da minha vida, minha vó e minha mãe.

E ao meu noivo, Éder.

Conteúdo

Introdução

Nesta dissertação apresentaremos um dos principais polinômios associado a matróides: O Polinômio de Tutte. Tal polinômio foi introduzido por William Tutte, como uma generalização do polinômio cromático de um grafo, e extendido, para matróides.

No primeiro capítulo, faremos uma breve relação de definições e resultados básicos da Teoria dos Grafos, como também para a Teoria das Matróides, só que este último de maneira mais detalhada, no qual abrangeremos resultados de dualidade, deleção e contração de um elemento de uma matróide arbitrária e conectividade. Faremos referências constantes aos resultados apresentados nesse capítulo ao longo de todo o trabalho.

No Capítulo 2, trataremos da Função de Möbius, do Polinômio Característico e do Beta Invariante com a finalidade de posteriormente associá-los ao Polinômio de Tutte. Definiremos tais funções e demonstraremos resultados relevantes para o nosso estudo. Provaremos que a Função de Möbius, o Polinômio Característico e o Beta Invariante, além de outros resultados, satisfazem a fórmula da deleção-contração,

$$f(M) = f(M-e) \pm f(M/e).$$

Finalmente, no Capítulo 3, caracterizaremos todos os T-G invariantes, como também, os T-G invariantes generalizados e grupos invariantes e daremos algumas aplicações básicas desses resultados. Mostraremos explicitamente formas para calcular o Polinômio de Tutte. Faremos uma comparação entre o Polinômio de Tutte com duas e o Polinômio de Tutte com quatro variáveis e, por fim, veremos o Polinômio coposto-nulidade

$$S_{KC}(M;x,y)$$

que é fundamental em aplicações de T-G técnico, assim como, o Polinômio coposto-cardinalidade, também, conhecido como o Polinômio gerador associado ao posto,

$$S(M;x,y)$$

é fundamental na classe de T-G invariantes.

Capítulo 1

Preliminares

Na primeira seção deste capítulo, faremos um apanhado de definições básicas da Teoria dos Grafos e da Teoria das Matróides, e nas demais seções enunciaremos resultados da Teoria das Matróides que serão utilizados ao longo deste trabalho e estão demonstrados em Oxley [3].

1.1 Definições Básicas

1.1.1 Grafos

Definição 1.1 *Um grafo G é uma tripla ordenada $(V, E, \mathfrak{I})$, onde V e E são conjuntos finitos disjuntos e $\mathfrak{I} \subseteq V \times E$ satisfazendo:*

$$1 \leq |v \in V : (v, e) \in \mathfrak{I}| \leq 2$$

para qualquer $e \in E$.

Notação: Os elementos do conjunto $V := V(G)$ são chamados de *vértices* de G e os elementos de $E := E(G)$ são chamados de *arestas* de G. Denomina-se

$$\mathfrak{I} \subseteq V \times E := (V \times E)(G)$$

como a *lei de incidência* do grafo G.

Definição 1.2 *É dito que a aresta e é incidente ao vértice v, quando* $(v,e) \in \mathfrak{I}$.

Notação: Quando a aresta e for incidente a vértices distintos x e y, denota-se tal aresta por $e = xy$. Assim, x e y são chamados *extremos desta aresta*. Caso uma aresta e seja incidente a um único vértice x, denota-se tal aresta por $e = xx$, ou seja, uma aresta cujos extremos são representados pelo mesmo vértice. Neste caso, diz-se que e é um *laço*. Outra possibilidade, é que dois vértices sejam unidos por mais de uma aresta, chamadas de *arestas em paralelo*.

Observe na Figura 1.1 abaixo, que f é um exemplo de um laço, enquanto que g e h representam arestas em paralelo.

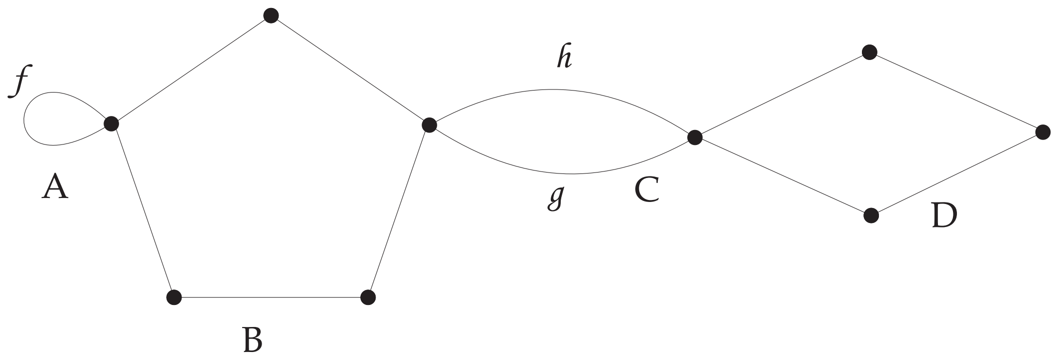

Figura 1.1: Grafo G

Definição 1.3 *Um grafo simples é um grafo que não possui laços, nem arestas em paralelo.*

Definição 1.4 *Um grafo é dito planar se ele pode ser mergulhado no plano, ou seja, se ele pode ser representado no plano sem que haja interseção de suas arestas.*

1.1.2 Matróides

Definição 1.5 *Uma matróide é um par ordenado* $M = (E,r)$*, onde* E *é um conjunto finito e* r *uma função de* 2^E *(conjunto das partes do conjunto* E*) em* $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ *tal que para* $X,Y \subseteq E$*,*

(i) $0 \leq r(X) \leq |X|$;

(ii) Se $X \subseteq Y$*, então* $r(X) \leq r(Y)$;

(iii) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Notação: Se M é a matróide (E, r), então M é chamada de matróide em E, r a função posto de M e E o conjunto básico de M.

Definição 1.6 *Seja M uma matróide e $\mathscr{I}$ a coleção de subconjuntos X de E, tal que, $|X| = r(X)$. Tal coleção é chamada de conjunto de independentes de M.*

Definição 1.7 *Os subconjuntos de E que não pertencem a $\mathscr{I}$ são chamados de dependentes.*

Definição 1.8 *Os conjuntos dependentes minimais de uma matróide arbitrária são chamados de circuito de M.*

Definição 1.9 *Chamamos de conjunto de bases de uma matróide M, $\mathscr{B}(M)$, a coleção de subconjuntos de E, tal que $|X| = r(X) = r(M)$.*

Notação: Se x é um elemento de M e X um subconjunto de $E(M)$ que não contém x, então denotaremos a união $X \cup \{x\}$, por $X \cup x$.

Definição 1.10 *Seja cl uma função de 2^E em 2^E definida, para todo $X \subseteq E$, por*

$$cl(X) = \{x \in E; r(X \cup x) = r(X)\}.$$

Tal função chamaremos de função fecho da matróide $M = (E, r)$.

Definição 1.11 *Seja M uma matróide, se $X \subseteq E(M)$ e $X = cl(X)$, então dizemos que X é um fechado de M.*

Proposição 1.12 *Se $X \subseteq E$ e $x \in E$, então $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$.* ■

1.2 Conjunto Parcialmente Ordenado

Definição 1.13 *Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto P com uma relação binária, $\leq$, tal que, para todo x, y e $z \in P$, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $x \leq x$;

(ii) *Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;*

(iii) *Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.*

Exemplo 1 *O conjunto de divisores inteiros positivos de um inteiro positivo n, o qual denotaremos por D_n, com a relação $x \leq y$, se x divide y é um exemplo de conjunto parcialmente ordenado.*

Notação: Em um conjunto parcialmente ordenado P:

(1) Se $x \leq y$, podemos também escrever $y \geq x$;

(2) Se $x \leq y$, mas $x \neq y$, escrevemos $x < y$ ou $y > x$;

(3) Se $x < y$ mas não existe $z \in P$ tal que $x < z < y$, então dizemos que y cobre x em P.

Definição 1.14 *O Diagrama de Hasse de um conjunto parcialmente ordenado P é um grafo simples, cujo vértices são os elementos de P e dois vértices, x e y, são ligados por uma aresta se x cobre y.*

Exemplo 2 *O Diagrama de Hasse correspondente ao conjunto de subconjuntos de* $\{1,2,3,4\}$ *ordenado por inclusão.*

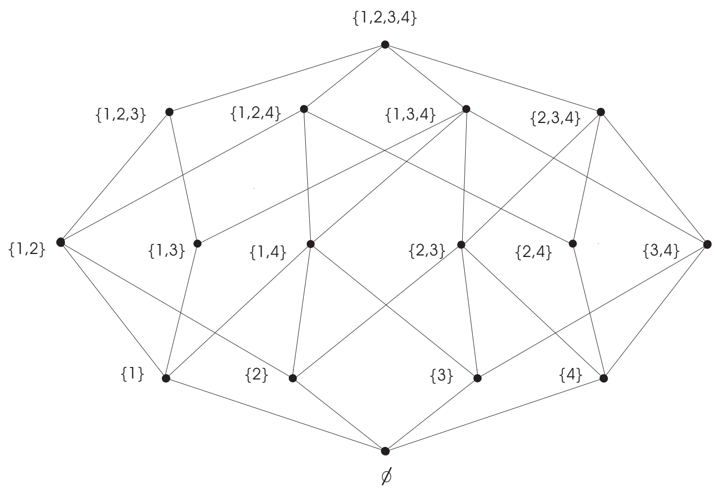

Figura 1.2: O Diagrama de Hasse

Definição 1.15 *Dois conjuntos parcialmente ordenados P e Q são isomorfos, se existe uma bijeção $\varphi : P \to Q$ tal que $x \leq y$ se, e somente se, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.*

Exemplo 3 *Um exemplo de dois conjuntos isomorfos é o D_{30} com a relação x divide y e o conjuntos de partes de um conjunto com 3 elementos ordenados pela inclusão.*

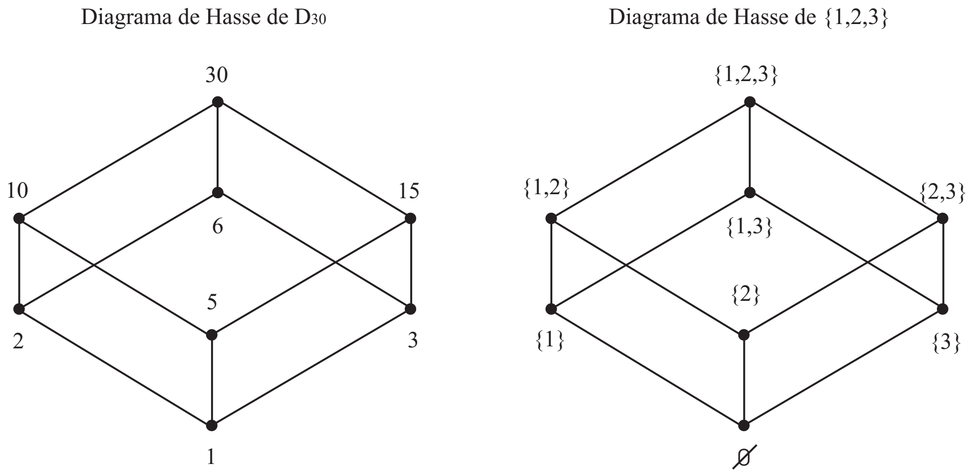

Figura 1.3:

1.3 Reticulado de Fechados

Definição 1.16 *Sejam x e y elementos de um conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{L}$, então definimos por junção, o menor elemento maior do que x e y que será denotado por $x \vee y$.*

Definição 1.17 *Sejam x e y elementos de um conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{L}$, então definimos por encontro, o maior elemento menor do que x e y que será denotado por $x \wedge y$.*

Definição 1.18 *Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{L}$ é um reticulado se, dados $x, y \in \mathscr{L}$, então $\mathscr{L}$ contém $x \vee y$ e $x \wedge y$, tais que*

(i) $x \vee y \geq x$ *e* $x \vee y \geq y$, *e se* $z \geq x$ *e* $z \geq y$, *então* $z \geq x \vee y$;

(ii) $x \wedge y \leq x$ *e* $x \wedge y \leq y$, *e se* $z \leq x$ *e* $z \leq y$, *então* $z \leq x \wedge y$.

Notação: Se M é uma matróide e E o seu conjunto básico, então $\mathscr{L}(E)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos fechados ordenados pela relação de inclusão de conjuntos.

Proposição 1.19 *$\mathscr{L}(E)$ é um reticulado e, para todo fechado X e Y de M,*

$$X \wedge Y = X \cap Y \text{ e } X \vee Y = cl(X \cup Y)$$

Prova. Evidentemente, $\mathscr{L}(M)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Afirmação: X e Y são fechados, então $X \cap Y$ também é. De fato, suponha que $X \cap Y$ não é fechado, então existe $x \in cl(X \cap Y) - (X \cap Y)$ e $x \in C \subseteq (X \cap Y) \cup x$, onde C é um circuito de M. Então $x \in cl(X) \cap cl(Y) = X \cap Y$, pois X e Y são fechados, uma contradição. Logo, $X \cap Y$ é um fechado de M e concluimos que $X \wedge Y = X \cap Y$, pois $X \cap Y$ é o maior subconjunto contido em X e em Y.

Resta-nos mostrar que $X \vee Y = cl(X \cup Y)$. De fato,

$$cl(X \cup Y) = (X \cup Y) \cup \{x; \text{M tem um circuito } C \text{ tal que } x \in C \subseteq X \cup Y \cup x\}.$$

É claro que $cl(cl(X \cup Y)) = cl(X \cup Y)$, logo $cl(X \cup Y)$ é um fechado. Além disso, $X \subseteq cl(X \cup Y)$ e $Y \subseteq cl(X \cup Y)$, e mais, se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$, então $X \cup Y \subseteq Z$, o que implica em, $cl(X \cup Y) \subseteq cl(Z) \subseteq Z$. Logo, $X \vee Y = cl(X \cup Y)$. ■

1.4 Dualidade

Nessa seção definiremos a dual de uma matróide e estabelecemos algumas relações fundamentais entre a matróide e sua dual.

Teorema 1.20 *Seja M uma matróide e $\mathscr{B}^*(M) = \{E(M) - B; B \in \mathscr{B}(M)\}$. Então, $\mathscr{B}^*(M)$ é o conjunto de bases de uma matróide em $E(M)$.* ■

Definição 1.21 *A matróide do teorema anterior, cujo conjunto básico é $E(M)$ e conjunto de bases é $\mathscr{B}^*(M)$, é chamada de dual de M e denotaremos por M^*.*

Observe que B é uma base de M se, e somente se, $E - B$ é uma base de M^*. Logo,

$$(M^*)^* = M.$$

Notação: Seja m e n, números inteiros não-negativos, tal que $m \leq n$. Seja E um conjunto básico da matróide M, contendo n elementos e $\mathscr{B}$, o conjunto de bases, constituido de todos os subconjuntos de E com m elementos. Denotamos essa matróide por $U_{m,n}$ e a chamamos de matróide uniforme com n elementos e posto m. Claramente,

$$\mathscr{I}(U_{m,n}) = \{X \subset E; |X| \leq m\}.$$

Exemplo 4 *Considere $U_{m,n}$. Suas bases são todos os subconjuntos com m-elementos do conjunto E que contém n elementos. Então, $\mathscr{B}^*(U_{m,n})$ consiste de todos os subconjuntos de E com (n-m)-elementos. Assim,*

$$U^*_{m,n} = U_{n-m,n}$$

Notação: Usaremos o asterisco para denotarmos associação com a matróide dual. Por exemplo, r^* denota a função posto da matróide M^*.

Claramente,

$$r(M) + r^*(M) = |E(M)|.$$

O próximo resultado nos fornecerá uma fórmula para a função coposto de M.

Proposição 1.22 *Para todo subconjunto X do conjunto básico E da matróide M,*

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X).$$

■

1.5 Deleção e Contração

Definição 1.23 *Seja M uma matróide sobre o conjunto básico E e $T \subseteq E$. Definimos por deleção de T em M e denotamos por $M - T$, a matróide cujo conjunto básico é $E - T$ e os conjuntos independentes são os conjuntos independentes de M que estão contidos em $E - T$.*

Agora, introduziremos a operação de contração como a dual da operação de deleção.

Definição 1.24 *Seja M uma matróide em E e T um subconjunto de E. M/T, a contração de T em M, é dada por*

$$M/T = (M^* - T)^*.$$

Proposição 1.25 *Se $T \subseteq E(M)$, então $M - T = (M^*/T)^*$.*

Prova. Segue da definição,

$$M^*/T = ((M^*)^* - T)^* = (M - T)^*.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (M^*/T)^* &= [(M-T)^*]^* \\ &= M - T \end{aligned}$$

■

Evidentemente, se $T \subseteq E$, então o posto de $M - T$ é a restrição de r_M para o conjunto de subconjuntos de $E - T$, isto é, para todo $X \subseteq E - T$,

$$r_{M-T}(X) = r_M(X).$$

Os resultados abaixo encontram-se em Oxley [3].

Proposição 1.26 *Se $T \subseteq E$, então, para todo $X \subseteq E - T$*

$$r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T).$$

■

Proposição 1.27 *$M - T = M/T$ se, e somente se, $r(T) + r(E - T) = r(M)$.* ■

Corolário 1.28 *$M - e = M/e$ se, e somente se, e é laço ou colaço de M.*

1.6 Conectividade e Soma Direta

Definição 1.29 *A matróide M é conexa se para todo par de elementos distintos de $E(M)$, existe um circuito contendo ambos.*

Definição 1.30 *Uma matróide M é dita desconexa se possui mais de uma componente conexa.*

Exemplo 5 *A matróide gráfica $M(G)$ associada ao grafo G da Figura 1.1, cujas componentes conexas estão identificadas por A, B , C e D.*

Definição 1.31 *Seja T um subconjunto do conjunto básico E da matróide M. Então, T é um separador de M se, e somente se,*

$$r(T) + r(E - T) = r(M).$$

Iremos citar alguns resultados sobre conectividade e soma direta cuja demonstrações se encontram em Oxley [3].

Proposição 1.32 *A matróide M é desconexa se, e somente se, para algum subconjunto próprio, não-vazio, T de M,*

$$r(T) + r^*(T) - |T| = 0.$$

■

Corolário 1.33 *M é conexa se, e somente se, M^* é conexa.*

Teorema 1.34 *Seja e um elemento da matróide conexa M. Então, $M - e$ ou M/e é conexa.* ■

Definição 1.35 *Seja M_1 e M_2 matróides em conjuntos disjuntos E_1 e E_2. Definimos a soma direta de M_1 e M_2, e denotamos por $M_1 \oplus M_2$, como sendo a matróide cujo conjunto básico é $E = E_1 \cup E_2$ e o posto é*

$$r_{M_1 \oplus M_2}(X) = r_{M_1}(X \cap E(M_1)) + r_{M_2}(X \cap E(M_2)).$$

Proposição 1.36 $(M_1 \oplus M_2)^* = M_1^* \oplus M_2^*$ ■

Capítulo 2

Função de Möbius, Polinômio Característico e Beta Invariante

Neste capítulo, faremos um estudo sobre Função de Möbius, Polinômio Característico e Beta Invariante de uma matróide. Provaremos alguns resultados referentes a essas funções, com o objetivo de posteriormente os relacionarmos com o Polinômio de Tutte.

2.1 Função de Möbius

Definição 2.1 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado e considere as funções inteiras definida em $P \times P$ tomando valores em $\mathbb{Z}$. A função de Möbius $\mu : P \times P \to \mathbb{Z}$ é definida por:*

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \text{para } x \in P; \\ \mu(x,z) &= -\sum_{x \leq y < z} \mu(x,y), && \text{para } x < z \text{ em } P. \end{aligned}$$

Entretanto, se $x \nleq z$, temos

$$\mu(x,z) = 0.$$

Proposição 2.2 *Em um conjunto parcialmente ordenado, $\mu(x,y) = -1$ se y cobre x.*

Prova. De fato,

$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z)$$

mas, por hipótese, y cobre x, então não existe z, tal que $x < z < y$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu(x,y) &= -[\mu(x,x)] \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

Definição 2.3 *A Função de Möbius de M é definida por:*

$$\mu_M(X,F) = \mu_{\mathscr{L}}(X,F), \quad \text{se } X,F \in \mathscr{L};$$
$$\mu_M(X,F) = 0, \quad \text{se } X \notin \mathscr{L},\ F \in \mathscr{L}.$$

Além disso, $\mu_M(X,F)$ não está definida se $F \notin \mathscr{L}$.

Observação 2.1 *Note que, no caso de uma matróide finita $M = M(E)$, seus reticulados de fechados $\mathscr{L}$ têm Função de Möbius $\mu_{\mathscr{L}}$.*

A proposição seguinte possui uma prova longa e utiliza conceitos que não são usados na nossa dissertação. Portanto, citaremos a proposição sem demonstração e indicaremos onde o leitor poderá encontrá-la.

Proposição 2.4 (Zaslavski [6]) *Seja $\mathscr{L}$ um reticulado de fechados da matróide M. Se $W \subseteq E$ e $F \in \mathscr{L}$, então*

$$\mu_M(W,F) = \sum_{\substack{W \subseteq X \subseteq F \\ clX = F}} (-1)^{|X-W|}$$

Observação 2.2 *Da* **Proposição 2.4**, *segue que*

$$\mu(M) = \mu_M(\emptyset, E) = \sum_{\substack{\emptyset \subseteq X \subseteq E \\ clX = E}} (-1)^{|X-\emptyset|} = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ clX = E}} (-1)^{|X|}$$

Teorema 2.5 *A Função de Möbius de uma matróide $M = M(E)$ satisfaz a fórmula*

$$\mu(M) = \mu(M-e) - \mu(M/e),$$

se e não é um colaço, com $e \in E$.

Prova. Observe que os subconjuntos de um conjunto finito podem ser particionados entre os subconjuntos que contém um determinado elemento e e os subconjuntos que não o contém. E mais, $|X \cup e| = |X| + 1$, desde que $e \notin X$. Suponha então que e não é laço, nem colaço. Pela **Proposição 2.4** podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mu(M) &= \sum_{\substack{X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|} \\
&= \sum_{\substack{e \notin X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|} + \sum_{\substack{e \in X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|} \\
&= \sum_{\substack{X \subseteq E-e \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|} + \sum_{\substack{e \in X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|(X-e)\cup e|} \\
&= \sum_{\substack{X \subseteq E-e \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|} + \sum_{\substack{e \in X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|(X-e)|+1} \\
&= \sum_{\substack{X \subseteq E-e \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|} + (-1) \sum_{\substack{e \in X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|(X-e)|} \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{X \subseteq E-e \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X|}}_{A} - \underbrace{\sum_{\substack{e \in X \subseteq E \\ cl(X)=E}} (-1)^{|X-e|}}_{B}
\end{aligned}$$

Como e não é colaço, o conjunto $X \subseteq E - e$ gera M se, e somente se, gera $M - e$. Então A é igual $\mu(M - e)$. Já a parcela B é igual a $\mu(M/e)$, pois dado X contendo e, tal conjunto gera M se, e somente se, $X - e$ gera M/e. Logo,

$$\mu(M) = \mu(M - e) - \mu(M/e).$$

Essa fórmula é conhecida como a fórmula de deleção-contração para a Função de Möbius. ■

2.2 Polinômio Característico

O Polinômio Característico $p(M;\lambda)$ de M é definido pela equação

$$p(M;\lambda) = \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(E)-r(X)} \tag{2.1}$$

Teorema 2.6 *O Polinômio Característico $p(M;\lambda)$ de uma matróide M satisfaz a fórmula:*

$$p(M;\lambda) = p(M-e;\lambda) - p(M/e;\lambda),$$

se e não é laço, nem colaço, com $e \in E$

Prova. Se e não é laço, nem colaço, então

$$\begin{aligned} p(M;\lambda) &= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)} \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\notin X}} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)}}_{A} + \underbrace{\sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\in X}} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)}}_{B} \end{aligned}$$

Analisando as parcelas da igualdade anterior, obtemos que

$$A = \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)}$$

mas, $r(E) = r(E-e)$ pelo fato de e não ser um colaço, então

$$\begin{aligned} A &= \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E-e)-r(X)} \\ &= p(M-e;\lambda). \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$B = \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X\cup e|}\lambda^{r(E-e\cup e)-r(X\cup e)}.$$

Seja r' a função posto da matróide M/e. Então, para todo $X \subseteq E-e$, onde e não é laço, nem colaço, temos

$$r'(X) = r(X\cup e) - 1 \Rightarrow r(X\cup e) = r'(X) + 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} B &= \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|+1}\lambda^{r'(E-e)+1-(r'(X)+1)} \\ &= -\sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|}\lambda^{r'(E-e)-r'(X)} \\ &= -p(M/e;\lambda). \end{aligned}$$

Logo,

$$p(M;\lambda) = p(M-e;\lambda) - p(M/e;\lambda).$$

E esta é a fórmula de deleção-contração para o Polinômio Característico. ∎

2.3 Beta Invariante

Definição 2.7 *O Beta Invariante de uma matróide $M = M(E)$, cujo reticulado de fechados $\mathscr{L}$, é definido por*

$$\beta(M) = (-1)^{r(E)-1} \frac{d}{d\lambda} p(M;1)$$

Lema 2.1 *Seja M uma matróide e E seu conjunto básico. Então,*

$$\sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} = 0$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} &= \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} (-1)^{|X|} + \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} (-1)^{|X|} \\
&= \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} + \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X \cup e|} \\
&= \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} + \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|+1} \\
&= \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} + (-1) \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} \\
&= \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} - \sum_{X \subseteq E-e} (-1)^{|X|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

∎

Proposição 2.8 *O Beta Invariante de uma matróide $M = M(E)$ satisfaz*

$$\beta(M) = (-1)^{r(E)} \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} r(X).$$

Prova. Usando a definição e o **Lema 2.1**, temos

$$\begin{aligned}
\beta(M) &= (-1)^{r(E)-1}\frac{d}{d\lambda}p(M;1)\\
&= (-1)^{r(E)-1}[\frac{d}{d\lambda}(\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)})]\,|_{\lambda=1}\\
&= (-1)^{r(E)-1}[(\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}(r(E)-r(X)))]\\
&= (-1)^{r(E)-1}[\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}r(E)-\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}r(X)]\\
&= (-1)^{r(E)}(-1)[r(E)\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}-\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}r(X)]\\
&= (-1)^{r(E)}\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}r(X).
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.9 *O Beta Invariante de uma matróide M satisfaz a fórmula:*

$$\beta(M)=\beta(M-e)+\beta(M/e),$$

se $e\in E$ e e não é laço, nem colaço.

Prova.

$$\begin{aligned}
\beta(M) &= (-1)^{r(E)}\sum_{X\subseteq E}(-1)^{|X|}r(X)\\
&= \underbrace{(-1)^{r(E)}\sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\notin X}}(-1)^{|X|}r(X)}_{A}+\underbrace{(-1)^{r(E)}\sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\in X}}(-1)^{|X|}r(X)}_{B}
\end{aligned}$$

Observe que $r(E)=r(E-e)$, pelo fato do elemento e não ser um colaço. Então

$$\begin{aligned}
A &= (-1)^{r(E)}\sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\notin X}}(-1)^{|X|}r(X)\\
&= (-1)^{r(E-e)}\sum_{X\subseteq E-e}(-1)^{|X|}r(X)\\
&= \beta(M-e)
\end{aligned}$$

Seja r' a função posto da matróide M/e, considerando que e não é laço, nem colaço, temos que $r'(E-e) = r(E)-1$ e $r(X\cup e) = r'(X)+1$. Usando essas informações e o **Lema 2.1**, segue que

$$\begin{aligned}
B &= (-1)^{r(E)} \sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\in X}} (-1)^{|X|} r(X)\\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X\cup e|} r(X\cup e)\\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|+1} (r'(X)+1)\\
&= (-1)^{r(E)-1} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} (r'(X)+1)\\
&= (-1)^{r(E)-1} [\sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r'(X) + \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|}]\\
&= (-1)^{r'(E-e)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r'(X)\\
&= \beta(M/e)
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\beta(M) = \beta(M-e) + \beta(M/e).$$

Essa é a fórmula de deleção-contração para o Beta Invariante. ∎

Notação: Em Oxley [3] é muito utilizado a letra I para denotar um membro do conjunto dos independentes de uma matróide. A partir de agora, todas as vezes que não fizermos nenhum comentário, a letra I denotará um colaço de uma matróide M.

Teorema 2.10 *O Beta Invariante de uma matróide $M = M(E)$ satisfaz*

(i) $\beta(I) = 1$;

(ii) $\beta(M) \geq 0$;

(iii) $\beta(M) > 0$ *se, e somente se, M é conexa e não é laço;*

(iv) $\beta(M) = \beta(M^*)$ *exceto quando M é laço ou colaço.*

Prova. Mostraremos *(i)*, usando a **Definição 2.7** de Beta Invariante,

$$\begin{aligned}\beta(I) &= (-1)^{r(I)} \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|} r(X) \\ &= (-1)^1[(-1)^{|\emptyset|} r(\emptyset) + (-1) r(I)] \\ &= -1[0+(-1)] \\ &= 1\end{aligned}$$

A demonstração do item *(ii)*, faremos por indução sobre a cardinalidade de $|E(M)|$.

Provaremos para $|E(M)| = 1$. Dessa forma, o único elemento da matróide será um colaço.

Se e é colaço, por *(i)*, $\beta(I) = 1$.

Se e é laço, então

$$\begin{aligned}\beta(L) &= (-1)^{r(L)} \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|} r(X) \\ &= (-1)^1[(-1)^{|\emptyset|} r(\emptyset) + (-1) r(L)] \\ &= -1[0+0] \\ &= 0\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade é válida para cardinalidade de $|E(M)|$ igual a 1.

Suponha que a desigualdade vale para $|E(M)| = n$ e mostraremos que vale para $|E(M)| = n+1$.

Seja $e \in E(M)$, se e não é laço, nem colaço, então da fórmula de deleção-contração para o Beta Invariante temos

$$\beta(M) = \beta(M-e) + \beta(M/e)$$

mas, por hipótese de indução, $\beta(M-e) \geq 0$ e $\beta(M/e) \geq 0$. Logo, $\beta(M) \geq 0$.

Se e é um laço, então

$$\begin{aligned}\beta(M) &= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|} r(X) \\ &= (-1)^{r(E)} \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\notin X}} (-1)^{|X|} r(X) + (-1)^{r(E)} \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\in X}} (-1)^{|X|} r(X) \\ &= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) + (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X\cup e|} r(X\cup e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) + (-1)^{r(E)-1} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) - (-1)^{r(M)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Se e é um colaço,

$$\begin{aligned}
\beta(M) &= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|} r(X) \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\notin X}} (-1)^{|X|} r(X) + (-1)^{r(E)} \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\in X}} (-1)^{|X|} r(X) \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) + (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X\cup e|} r(X\cup e) \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) + (-1)^{r(E)-1} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) + \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) - (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} r(X) + \sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

já que $\sum_{X\subseteq E-e} (-1)^{|X|} = 0$, pelo **Lema 2.1**. Assim, concluímos que $\beta(M) \geq 0$.

Provaremos agora o item *(iii)*. Primeiramente mostraremos que se $\beta(M) > 0$, então M é conexa e não possui laços. Faremos isso por redução ao absurdo. Já sabemos da demonstração do item *(ii)* que se uma matróide possui laços, então $\beta(M) = 0$.

Resta-nos mostrar que se M é desconexa, teremos $\beta(M) = 0$.

De fato, provaremos tal afirmação por indução sobre a cardinalidade de $E(M)$.

Para $|E(M)| = 2$, pelo item *(ii)*, $\beta(M) = 0$, pois M possui laços ou colaços.

Suponha que a igualdade vale para $|E(M)| = n$. Mostraremos para $|E(M)| = n+1$.

Observe que se M possui laço ou colaço, então $\beta(M) = 0$.

Então suponha que M não possui laço, nem colaço. Escolha $e \in E(M)$,

$$\beta(M) = \beta(M-e) + \beta(M/e)$$

por hipótese de indução, $\beta(M-e) = \beta(M/e) = 0$, já que $M-e$ e M/e são desconexas e $|E(M-e)| = |E(M/e)| = n$, donde conclui-se que $\beta(M) = 0$.

Agora provaremos que se M é conexa e não tem laços, então $\beta(M) > 0$. O que faremos recorrendo, mais uma vez, a demonstração por indução sobre a cardinalidade de $E(M)$.
Se M é conexo e $|E(M)| = 1$, pelo item *(i)*, $\beta(M) = 1 > 0$.
Suponha M conexo e $|E(M)| = n+1$. Então, pelo **Teorema 1.34**, dado $e \in E$, temos que, $M - e$ é conexo ou M/e é conexo. Então, por hipótese de indução, $|E(M-e)| = |E(M/e)| = n$, e então, $\beta(M-e) > 0$ ou $\beta(M/e) > 0$, e pela fórmula de deleção-contração para o Beta Invariante, temos

$$\beta(M) = \beta(M-e) + \beta(M/e) > 0.$$

Por fim, demonstraremos o item *(iv)*. Dividiremos essa prova em duas etapas, faremos primeiro para M desconexa e logo após para M conexa.
Se M é desconexa, pelo **Corolário 1.33**, M^* também é desconexa. Então,

$$\beta(M) = \beta(M^*) = 0.$$

Agora assumiremos que M é conexa e $|E(M)| \geq 2$, já que a hipótese exclui laços e colaços. Tal demonstração será feita por indução sobre a cardinalidade de $E(M)$. Para $|E(M)| = 2$, temos que, $M = M^*$, e assim

$$\begin{aligned}
\beta(M^*) &= \beta(M) \\
&= \beta(M-e) + \beta(M/e) \\
&= \beta(I) + \beta(L) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Suponha que a igualdade vale para $|E(M)| = n$, provaremos para $|E(M)| = n+1$. Como M não possui laços ou colaços, consequentemente M^* também não possui laços ou colaços, então, podemos aplicar a fórmula de deleção-contração para Beta Invariante na matróide M^*,

$$\beta(M^*) = \beta(M^* - e) + \beta(M^*/e),$$

pela **Proposição 1.25**, $M^*/T = (M-T)^*$, e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\beta(M^*) &= \beta(M^* - e) + \beta(M^*/e) \\
&= \beta((M/e)^*) + \beta((M-e)^*)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta(M/e) + \beta(M-e) \\
&= \beta(M)
\end{aligned}
$$

■

Capítulo 3

O Polinômio de Tutte

3.1 Introdução

A teoria dos invariantes numéricos para matróides é um dos muitos aspectos da teoria das matróides que teve a sua origem na teoria dos grafos. De fato, muitas das idéias fundamentais em teoria dos invariantes em matróides foram desenvolvidas para grafos por Veblen (1912), Birkhoff (1912-13), Whitney (1933c) e Tutte (1947;1954) quando consideraram coloração e fluxo em grafos. As aplicações da teoria dos invariantes em matróides agora extendem-se bem além de grafos, alcançando campos como teoria dos códigos, teoria das redes elétricas e muitas novas aplicações tem sido descobertas. Neste capítulo estudaremos a teoria dos invariantes para matróides e daremos algumas aplicações.

Definição 3.1 *Duas matróides,* $(E,\mathscr{I})$ *e* $(F,\mathscr{J})$ *são isomorfas quando existe uma bijeção* $\Psi : E \to F$ *tal que,* $I \in \mathscr{I}$ *se, e somente se,* $\Psi(I) = \{\Psi(e), e \in I\} \in \mathscr{J}$.

Definição 3.2 *Seja* f *uma função sobre a classe de todas as matróides. Dizemos que* f *é um isomorfismo invariante, se*

$$f(M) = f(N) \quad sempre \ \ que \quad M \cong N \tag{3.1}$$

A matróide M, cujo conjunto básico é E, será denotada por $M(E)$.

Observemos que vários números associados a matróide $M(E)$, tais como, os números de base,

de conjuntos independentes e conjuntos geradores, são isomorfismos invariantes e satisfazem as seguintes propriedades básicas:
Para todo elemento e de $E(M)$,

$$f(M) = f(M-e) + f(M/e) \quad \text{se } e \text{ não é laço, nem colaço} \tag{3.2}$$

$$f(M) = f(M(e))f(M-e) \quad \text{caso contrário} \tag{3.3}$$

Notação:

(1) Se $T \subseteq E$, então $M(T)$ denota a submatróide de M com conjunto básico T;

(2) $\mathscr{K}$ é uma classe de matróides fechada sobre isomorfimo e a menores, ou seja, para toda matróide M pertencente a $\mathscr{K}$ e para toda matróide N isomorfa a M, a matróide N pertence a $\mathscr{K}$, e mais, todo menor de M também pertence a $\mathscr{K}$.

3.2 T-G invariante

Definição 3.3 *Se f é uma função em $\mathscr{K}$ satisfazendo* (3.1), (3.2) *e* (3.3), *então f é chamada* **Tutte-Grothendieck** *invariante ou, abreviadamente,* **T-G invariante**.

O resultado fundamental dessa teoria é que todo T-G invariante f é o cálculo de um certo polinômio com duas variáveis $t(x,y)$ no qual definiremos

$$f(I) = x \quad e \quad f(L) = y \tag{3.4}$$

Lembrando que I representa um colaço e L representa um laço.
Seja $M(E)$ uma matróide arbitrária com função posto r e função nulidade, n.

Definição 3.4 *Chamaremos de polinômio gerador de M associado ao posto r, e denotamos por $S(M;x,y)$, a expressão:*

$$S(M;x,y) = \sum_{X \subseteq E} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \sum_{X \subseteq E} x^{r(E)-r(X)} y^{|X|-r(X)} \tag{3.5}$$

Para exemplificar este conceito, calcularemos o polinômio gerador da conhecida matróide $U_{2,4}$.

Exemplo 6 *Seja $M = U_{2,4}$, a matróide uniforme sobre um conjunto de 4 elementos e posto 2, cuja respresentação geométrica encontra-se na Figura 3.1 abaixo. Calcularemos $S(U_{2,4};x,y)$,*

$$\begin{aligned} S(U_{2,4};x,y) &= 1x^2y^0 + 4x^1y^0 + 6x^0y^0 + 4x^0y^1 + 1x^0y^2 \\ &= x^2 + 4x + 6 + 4y + y^2. \end{aligned}$$

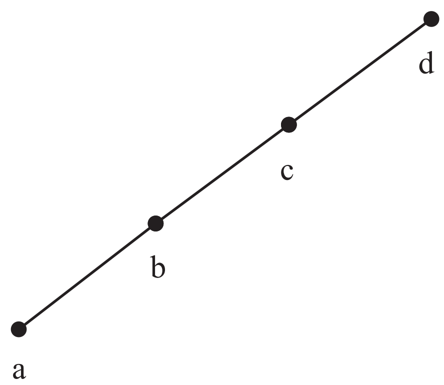

Figura 3.1: Representação geométrica de $U_{2,4}$

Fazendo

$$r(E) - r(X) = i \quad \Rightarrow r(X) = r(E) - i = r(M) - i \quad \text{e}$$

$$n(X) = j$$

obtemos

$$S(M;x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j \tag{3.6}$$

onde a_{ij} é o número de submatróides de M de posto $r(M) - i$ e nulidade j.

Em 1982, Brylawski [1] chamou $S(M;x,y)$ de polinômio coposto-nulidade de M, lembrando que o coposto de um conjunto X em M é dado por $r(E) - r(X)$. Note que essa nomenclatura é diferente da que foi utilizada em 1976 por Welsh [4], na qual coposto significa posto da matróide dual. Portanto, podemos identificar $S(M;x,y)$, como sendo polinômio coposto-nulidade ou como polinômio gerador associado ao posto.

Claramente, $S(M;x,y)$ é um isomorfismo invariante para a classe de todas as matróides, ou seja, se M é isomorfa a N, então $S(M;x,y) = S(N;x,y)$.

Lema 3.1 *Seja I um colaço e L um laço de uma matróide M, então*

$$S(I;x,y) = x+1 \quad e \quad S(L;x,y) = y+1. \tag{3.7}$$

Prova. De fato, note que as únicas submatróides de I são $\varnothing$ e I. Assim,

$$\begin{aligned} S(I;x,y) &= \sum_{X \subseteq E} x^{r(I)-r(X)} y^{|X|-r(X)} \\ &= 1x^{1-0}y^{0-0} + 1x^{1-1}y^{1-1} \\ &= x+1 \end{aligned}$$

Da mesma forma, as únicas submatróides de L são $\varnothing$ e L. Portanto,

$$\begin{aligned} S(L;x,y) &= \sum_{X \subseteq E} x^{r(L)-r(X)} y^{|X|-r(X)} \\ &= 1x^{0-0}y^{0-0} + 1x^{0-0}y^{1-0} \\ &= 1+y \end{aligned}$$

∎

Lema 3.2 *$S(M;x,y)$ é um T-G invariante para a classe de todas as matróides.*

Prova. Seja e um elemento da matróide M. Claramente,

$$S(M;x,y) = \underbrace{\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}}_{A} + \underbrace{\sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}}_{B} \tag{3.8}$$

Para facilitar nossa demonstração identificaremos as parcelas do segundo membro da igualdade acima de A e B, respectivamente.

Claramente,

$$A = \sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)}.$$

Além disso,

$$r(E) = \begin{cases} r(E-e)+1, & \text{se } e \text{ é um colaço} \\ r(E-e), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, substituindo esses valores em A, obtemos

$$A = \begin{cases} \displaystyle\sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E-e)+1-r(X)} y^{n(X)}, & \text{se } e \text{ é um colaço} \\ \displaystyle\sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E-e)-r(X)} y^{n(X)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou ainda,

$$A = \begin{cases} x \displaystyle\sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E-e)-r(X)} y^{n(X)}, & \text{se } e \text{ é um colaço} \\ \displaystyle\sum_{X \subseteq E-e} x^{r(E-e)-r(X)} y^{n(X)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, temos

$$A = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \notin X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} xS(M-e;x,y), & \text{se } e \text{ é um colaço} \\ S(M-e;x,y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Agora analisaremos a expressão denotada por B,

$$B = \sum_{Y \subseteq E-e} x^{r((E-e)\cup e)-r(Y\cup e)} y^{n(Y\cup e)}.$$

Sejam r'e n' as funções posto e nulidade de M/e. Então, para todo $Y \subseteq E-e$,

$$r'(Y) = \begin{cases} r(Y\cup e), & \text{se } e \text{ é um laço} \\ r(Y\cup e)-1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$n'(Y) = \begin{cases} n(Y\cup e)-1, & \text{se } e \text{ é um laço} \\ n(Y\cup e), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$r((E-e)\cup e) = \begin{cases} r'(E-e), & \text{se } e \text{ é um laço} \\ r'(E-e)+1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considerando as igualdades acima e substituindo em B, temos

$$B = \begin{cases} \displaystyle\sum_{Y \subseteq E-e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)+1}, & \text{se } e \text{ é um laço} \\ \displaystyle\sum_{Y \subseteq E-e} x^{r'(E-e)+1-(r'(Y)+1)} y^{n'(Y)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$B = \begin{cases} y \displaystyle\sum_{Y \subseteq E-e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)}, & \text{se } e \text{ é um laço} \\ \displaystyle\sum_{Y \subseteq E-e} x^{r'(E-e)-r'(Y)} y^{n'(Y)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$B = \sum_{\substack{X \subseteq E \\ e \in X}} x^{r(E)-r(X)} y^{n(X)} = \begin{cases} yS((M/e);x,y), & \text{se } e \text{ é um laço} \\ S((M/e);x,y), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Substituindo as expressões de A e B obtidas nas equações (3.9) e (3.10), respectivamente na expressão (3.8), obtemos

$$\text{S(M;x,y)=}\begin{cases} S(M-e;x,y)+S(M/e;x,y), & \text{se } e \text{ não é colaço, nem laço} \\ xS(M-e;x,y)+S(M/e;x,y), & \text{se } e \text{ é colaço} \\ S(M-e;x,y)+yS(M/e;x,y), & \text{se } e \text{ é laço.} \end{cases}$$

Por outro lado, sabemos do **Corolário 1.28** que no caso do elemento e ser um laço ou um colaço de M, então $M-e=M/e$. Então

$$\begin{cases} xS(M-e;x,y)+S(M/e;x,y)=(x+1)S(M-e;x,y), & \text{se } e \text{ é colaço} \\ S(M-e;x,y)+yS(M/e;x,y)=(y+1)S(M-e;x,y), & \text{se } e \text{ é laço.} \end{cases}$$

Além disso, pelo **Lema 3.1**, $S(I;x,y)=x+1$ e $S(L;x,y)=y+1$. Logo,

$$\begin{cases} xS(M-e;x,y)+S(M/e;x,y)=S(I;x,y)S(M-e;x,y), & \text{se } e \text{ é colaço} \\ S(M-e;x,y)+yS(M/e;x,y)=S(L;x,y)S(M-e;x,y), & \text{se } e \text{ é laço.} \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever a expressão, substituindo I e L, por $M(e)$, que é a matróide restrita ao elemento e, obtendo

$$S(M;x,y)=\begin{cases} S(M-e;x,y)+S(M/e;x,y), & \text{se } e \text{ não é colaço, nem laço} \\ S(M(e);x,y)S(M-e;x,y), & \text{se } e \text{ é laço ou colaço.} \end{cases}$$

Donde, concluimos que $S(M;x,y)$ é um T-G invariante. ■

O próximo teorema, extende o lema precedente, mostrando que $S(M;x,y)$ não é apenas um T-G invariante mas, um T-G invariante universal.

Os conjuntos das classes das matróides isomorfas e matróides não-vazias serão denotadas por $\mathscr{M}$ e $\mathscr{M}'$, respectivamente.

Teorema 3.5 *Existe uma única função t de $\mathscr{M}$ sobre o anel de polinômio $\mathbb{Z}[x,y]$ com as seguintes propriedades:*

(i) $t(I;x,y)=x$ e $t(L;x,y)=y$;

(ii) (Deleção-contração) Se e é um elemento da matróide M e e não é laço, nem colaço, então

$$t(M;x,y)=t(M-e;x,y)+t(M/e;x,y);$$

(iii) Se e é laço ou colaço da matróide M, então

$$t(M;x,y)=t(M(e);x,y)t(M-e;x,y).$$

Entretanto, seja $\mathscr{R}$ um anel comutativo e suponha que f é uma função de $\mathscr{M}'$ sobre $\mathscr{R}$. Se f satisfaz as equações (3.2) *e* (3.3) *sempre que $|E| \geq 2$, então para toda matróide M,*

$$f(M) = t(M; f(I), f(L)).$$

Prova. Pelo **Lema 3.2**, se $t(M;x,y) = S(M;x-1,y-1)$, então vale *(i)-(iii)*. De fato,

(i)

$$t(I;x,y) = S(I;x-1,y-1) = (x-1)+1 = x$$

$$t(L;x,y) = S(L;x-1,y-1) = (y-1)+1 = y;$$

(ii) Se e não é laço, nem colaço, temos

$$\begin{aligned} t(M;x,y) &= S(M;x-1,y-1) \\ &= S(M-e;x-1,y-1) + S(M/e;x-1,y-1) \\ &= t(M-e;x,y) + t(M/e;x,y); \end{aligned}$$

(iii) Se e é laço ou colaço, temos

$$\begin{aligned} t(M;x,y) &= S(M;x-1,y-1) \\ &= S(M(e);x-1,y-1)S(M-e;x-1,y-1) \\ &= t(M(e);x,y)t(M-e;x,y). \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que t é única usando indução sobre a cardinalidade de $E(M)$.
Suponha que $|E(M)| = 1$, e se t' é uma função satisfazendo os itens *(i), (ii)* e *(iii)*, então e é laço ou colaço. Dessa forma, temos

$$t(I;x,y) = x = t'(I;x,y) \quad \text{e}$$

$$t(L;x,y) = y = t'(L;x,y)$$

Suponha, por hipótese de indução, que a igualdade vale para $|E(M)| = n$. Provaremos então que vale para $|E(M)| = n+1$.

Com efeito, observe que se $|E(M)| = n+1$, então $|E(M-e)| = |E(M/e)| = n$. Se e não é laço, nem colaço

$$\begin{aligned} t'(M;x,y) &= t'(M-e;x,y) + t'(M/e;x,y) \\ &= t(M-e;x,y) + t(M/e;x,y) \\ &= t(M;x,y). \end{aligned}$$

Caso e seja laço ou colaço

$$\begin{aligned} t'(M;x,y) &= t'(M(e);x,y)t'(M-e;x,y) \\ &= t(M(e);x,y)t(M-e;x,y) \\ &= t(M;x,y) \end{aligned}$$

Donde, conclui-se que t é única.

Resta-nos mostrar que, sendo $\mathscr{R}$ um anel comutativo e f uma função de $\mathscr{M}'$ sobre $\mathscr{R}$ que satisfaz (3.2) e (3.3) sempre que $|E(M)| \geq 2$, então para toda matróide M,

$$f(M) = t(M; f(I), f(L)).$$

Provaremos que a igualdade é válida para $|E(M)| = 2$.

Se e não é laço, nem colaço, $M-e$ e M/e são colaço e laço, respectivamente. Assim de (3.2) segue que

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M-e) + f(M/e) \\ &= t(M-e; f(I), f(L)) + t(M/e; f(I), f(L)) \\ &= t(M; f(I), f(L)). \end{aligned}$$

No caso em que e é laço ou colaço, $M-e$ é laço ou colaço. Assim de (3.3) segue que,

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M(e))f(M-e) \\ &= t(M(e); f(I), f(L))t(M-e; f(I), f(L)) \\ &= t(M; f(I), f(L)) \end{aligned}$$

Suponha por hipótese de indução que $f(M) = t(M; f(I), f(L))$ para $|E(M)| = n$. Devemos mostrar que a igualdade vale para $|E(M)| = n+1$. Observe que se $|E(M)| = n+1$, então $|E(M-e)| = |E(M/e)| = n$. Então, se e não é laço, nem colaço,

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M-e) + f(M/e) \\ &= t(M-e; f(I), f(L)) + t(M/e; f(I), f(L)) \\ &= t(M; f(I), f(L)). \end{aligned}$$

Entretanto, se e é laço ou colaço,

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M(e))f(M-e) \\ &= t(M(e); f(I), f(L))t(M-e; f(I), f(L)) \\ &= t(M; f(I), f(L)). \end{aligned}$$

■

Observação 3.1 *Note que os itens (ii) e (iii) do teorema anterior não são mais que reafirmações das equações* (3.2) *e* (3.3).

3.3 A forma de calcular o Polinômio de Tutte

Chamaremos a função $t(M;x,y)$ de Polinômio de Tutte de M. Evidentemente, $t(M;x,y)$ pode ser escrito como

$$\sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j$$

onde $b_{ij} \geq 0$ para todo i e j. Usualmente abreviamos esse duplo somatório por $\sum b_{ij} x^i y^j$. E segue imediatamente da última prova que

$$t(M;x,y) = S(M;x-1,y-1) \tag{3.11}$$

Portanto,

$$t(M;x,y) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)} (y-1)^{n(X)} \tag{3.12}$$

O Polinômio de Tutte pode ser calculado diretamente desse somatório, ou alternativamente, pode ser determinado usando repetidamente *(ii)* e *(iii)* do **Teorema 3.5**. Esta última maneira de determinar o polinômio de Tutte será ilustrada no exemplo a seguir.

Exemplo 7 *Por aplicações repetidas do* **Teorema 3.5** *(ii) e (iii), temos:*

$$\begin{aligned}
t(U_{2,4};x,y) &= t(U_{2,4}-a;x,y)+t(U_{2,4}/a;x,y)\\
&= t(U_{2,3};x,y)+t(U_{1,3};x,y)\\
&= [t(U_{2,3}-b;x,y)+t(U_{2,3}/b;x,y)]+[t(U_{1,3}-b;x,y)+t(U_{1,3}/b;x,y)]\\
&= [t(U_{2,2};x,y)+t(U_{1,2};x,y)]+[t(U_{1,2};x,y)+t(U_{0,2};x,y)]\\
&= xt(U_{1,1};x,y)+2t(U_{1,2};x,y)+yt(U_{0,1};x,y)]\\
&= x^2+2[t(U_{1,2}-c;x,y)+t(U_{1,2}/c;x,y)]+y^2\\
&= x^2+2[t(U_{1,1};x,y)+t(U_{0,1};x,y)]+y^2\\
&= x^2+2(x+y)+y^2\\
&= x^2+2x+2y+y^2
\end{aligned}$$

Evidentemente $t(U_{2,4};x,y)$ é simétrico com respeito a x e y.
Conhecendo o valor de $S(U_{2,4};x-1,y-1)$ que já foi calculado no **Exemplo 6** e aplicando a expressão (3.11), obtemos o Polinômio de Tutte da matróide $U_{2,4}$.

$$\begin{aligned}
t(U_{2,4};x,y) &= S(U_{2,4};x-1,y-1)\\
&= (x-1)^2+4(x-1)+6+4(y-1)+(y-1)^2\\
&= x^2+2x+2y+y^2
\end{aligned}$$

Proposição 3.6 *Para toda matróide M,*

$$t(M^*;x,y)=t(M;y,x)$$

Prova. Por (3.12), e usando a **Proposição 1.22**,

$$t(M^*;x,y) = \sum_{X\subseteq E}(x-1)^{r^*(E)-r^*(X)}(y-1)^{n^*(X)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{X\subseteq E}(x-1)^{|E|-r(E)-[|X|-r(E)+r(E-X)]}(y-1)^{|X|-[|X|-r(E)+r(E-X)]}\\
&= \sum_{X\subseteq E}(x-1)^{|E-X|-r(E-X)}(y-1)^{r(E)-r(E-X)}
\end{aligned}
$$

Fazendo $E-X=Y$, claramente $Y\subseteq E$. Daí,

$$
\begin{aligned}
t(M^*;x,y) &= \sum_{Y\subseteq E}(x-1)^{|Y|-r(Y)}(y-1)^{r(E)-r(Y)}\\
&= \sum_{Y\subseteq E}(x-1)^{n(Y)}(y-1)^{r(E)-r(Y)}\\
&= t(M;y,x)
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.7 *Para matróides $M_1(E_1)$ e $M_2(E_2)$ onde E_1 e E_2 são disjuntos,*

$$t(M_1\oplus M_2;x,y)=t(M_1;x,y)t(M_2;x,y)$$

Prova. Temos, $M=M_1\oplus M_2$. Faremos a demonstração por indução sobre a cardinalidade de $E(M_1)$.

Provaremos para $|E(M_1)|=1$.

Seja e o único elemento de M_1, então e será um laço ou um colaço. Claramente, $M_1\oplus M_2=M$. Daí,

$$t(M_1\oplus M_2;x,y)=t(M;x,y)=t(M-e;x,y)t(M(e);x,y)$$

Provaremos, agora que a igualdade é válida para $|E(M_1)|=n$, supondo pela hipótese de indução que a sentença é verdadeira para cardinalidade de $E(M_1)$ igual a $n-1$. Escolha $e\in E(M_1)$ temos $M-e=(M_1-e)\oplus M_2$ e $M/e=(M_1/e)\oplus M_2$. Assim, se e não é laço, nem colaço,

$$
\begin{aligned}
t(M_1\oplus M_2;x,y) &= t((M_1\oplus M_2)-e;x,y)+t((M_1\oplus M_2)/e;x,y)\\
&= t((M_1-e)\oplus M_2;x,y)+t((M_1/e\oplus M_2;x,y)\\
&= t(M_1-e;x,y)t(M_2;x,y)+t(M_1/e;x,y)t(M_2;x,y)\\
&= [t(M_1-e;x,y)+t(M_2-e;x,y)]t(M_2;x,y)\\
&= t(M_1;x,y)t(M_2;x,y)
\end{aligned}
$$

se e é laço ou colaço,

$$\begin{aligned} t(M_1 \oplus M_2; x, y) &= t((M_1 \oplus M_2) - e; x, y) t((M_1 \oplus M_2)(e); x, y) \\ &= t((M_1 - e) \oplus M_2; x, y) t(M_1(e); x, y) \\ &= t(M_1 - e; x, y) t(M_2; x, y) t(M_1(e); x, y) \\ &= t[(M_1 - e; x, y) t(M_1(e); x, y)] t(M_2; x, y) \\ &= t(M_1; x, y) t(M_2; x, y) \end{aligned}$$

■

Observe que o item *(iii)* do **Teorema 3.5** é um caso particular da fórmula de soma direta apresentada na **Proposição 3.7**. Exemplificaremos o resultado precedente, utilizando a matróide $U_{2,4} \oplus U_{2,4}$ cuja representação geométrica encontra-se na Figura 3.2.

Exemplo 8 *Calcularemos o Polinômio de Tutte para a matróide $U_{2,4} \oplus U_{2,4}$.*

$$\begin{aligned} t(U_{2,4} \oplus U_{2,4}; x, y) &= t(U_{2,4}; x, y) t(U_{2,4}; x, y) \\ &= (x^2 + 2x + 2y + y^2)(x^2 + 2x + 2y + y^2) \\ &= x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^2y + 2x^2y^2 + 8xy + 4y^2x + 4y^2 + 4y^3 + y^4 \end{aligned}$$

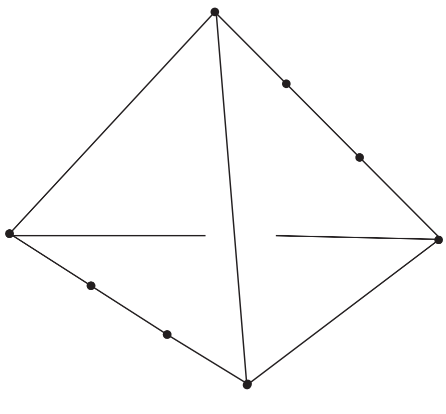

Figura 3.2: $U_{2,4} \oplus U_{2,4}$

3.4 T-G invariante generalizado

Definição 3.8 *Seja f um isomorfismo invariante para matróides que satisfaz* (3.3) *e a seguinte generalização de* (3.2)*: Para números fixos σ, τ, não-nulos, temos que*

$$f(M) = \sigma f(M-e) + \tau f(M/e) \tag{3.13}$$

desde que e não seja um laço, nem um colaço. Então f é chamado T-G invariante generalizado.

Uma simples extensão do **Teorema 3.5**, nos permitirá caracterizar todos os T-G invariantes generalizados.

Corolário 3.9 *Seja σ e τ elementos não-nulos do corpo F. Então existe uma única função t' de $\mathscr{M}$ sobre o anel de polinômio $F[x,y]$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $t'(I;x,y) = x$ e $t'(L;x,y) = y$

(ii) Seja e um elemento da matróide M. Se e não é um laço, nem um colaço, então

$$t'(M;x,y) = \sigma t'(M-e;x,y) + \tau t'(M/e;x,y)$$

(iii) Seja e um laço ou um colaço da matróide M, então

$$t'(M;x,y) = t'(M(e);x,y)t'(M-e;x,y)$$

Além disso, essa função t' é dada por

$$t'(M;x,y) = \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M;x/\tau,y/\sigma)$$

Prova. Defina $t'(M;x,y) = \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M;x/\tau,y/\sigma)$. Essa função está bem definida, uma vez que, σ e τ são elementos não-nulos do corpo F. Mostraremos que t' satisfaz as condições *(i), (ii)* e *(iii)*. De fato,

$$\begin{aligned}
t'(I;x,y) &= \sigma^{|I|-r(I)}\tau^{r(I)}t(I;x/\tau,y/\sigma) \\
&= \sigma^{1-1}\cdot\tau^{1}\cdot x/\tau \\
&= \tau\cdot x/\tau \\
&= x
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} t'(L;x,y) &= \sigma^{|L|-r(L)}\tau^{r(L)}t(L;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma^{1-0}\cdot\tau^{0}\cdot y/\sigma \\ &= \sigma\cdot y/\sigma \\ &= y \end{aligned}$$

e concluimos que t' satisfaz *(i)*.

Mostraremos que t' satisfaz *(ii)*. Suponha que e não é um laço, nem um colaço. Assim,

$$\begin{aligned} t'(M;x,y) &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}[t(M-e;x/\tau,y/\sigma)+t(M/e;x/\tau,y/\sigma)] \\ &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M-e;x/\tau,y/\sigma)+\sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M/e;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E-e|+1-r(E-e)}\tau^{r(E-e)}t(M-e;x/\tau,y/\sigma)+ \\ &\quad \sigma^{|E-e|+1-[r(E-e)+1]}\tau^{r(E-e)+1}t(M/e;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma t'(M-e;x/\tau,y/\sigma)+\tau t'(M/e;x/\tau,y/\sigma) \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que t' satisfaz *(iii)*.

Suponha que e seja um laço,

$$\begin{aligned} t'(M;x,y) &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}[t(M(e);x/\tau,y/\sigma)t(M-e;x/\tau,y/\sigma)] \\ &= \sigma^{|E-e|+1-r(E-e)}\tau^{r(E-e)}[t(M(e);x/\tau,y/\sigma)t(M-e;x/\tau,y/\sigma)] \\ &= \sigma t(L;x/\tau,y/\sigma)\sigma^{|E-e|-r(E-e)}\tau^{r(E-e)}t(M-e;x/\tau,y/\sigma) \\ &= t'(L;x,y)t'(M-e;x,y) \\ &= t'(M(e);x,y)t'(M-e;x,y) \end{aligned}$$

Caso e seja colaço,

$$\begin{aligned} t'(M;x,y) &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}t(M;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E|-r(E)}\tau^{r(E)}[t(M(e);x/\tau,y/\sigma)t(M-e;x/\tau,y/\sigma)] \\ &= \sigma^{|E-e|+1-[r(E-e)+1]}\tau^{r(E-e)+1}t(M-e;x/\tau,y/\sigma)t(I;x/\tau,y/\sigma) \\ &= \sigma^{|E-e|-r(E-e)}\tau^{r(E-e)}t(M-e;x/\tau,y/\sigma)\tau t(I;x/\tau,y/\sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= t'(M-e;x,y)t'(I;x,y) \\ &= t'(M(e);x,y)t'(M-e;x,y) \end{aligned}$$

Donde, conclui-se que se e é laço ou colaço,

$$t'(M;x,y) = t'(M(e);x,y)t'(M-e;x,y).$$

A unicidade de t' decorre da unicidade de t, a qual é garantida pelo **Teorema 3.5**. ■

Proposição 3.10 *O Polinômio Característico é um T-G invariante generalizado.*

Prova. Sabemos pelo **Teorema 2.6** que $p(M;\lambda)$ satisfaz a fórmula da deleção-contração. Por outro lado, fazendo $\sigma = 1$ e $\tau = -1$ temos que $p(M;\lambda)$ satisfaz o item *(ii)* do **Corolário 3.9**. Para concluirmos a prova, resta-nos mostrar que $p(M;\lambda) = p(M-e;\lambda)p(M(e);\lambda)$. De fato, suponha que e seja um laço ou um colaço,

$$\begin{aligned} p(M;\lambda) &= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)} \\ &= \sum_{X_1\subseteq E-e}\sum_{X_2\subseteq\{e\}} (-1)^{|X_1|+|X_2|}\lambda^{r(E-e)+r(e)-(r(X_1)+r(X_2))} \\ &= \sum_{X_1\subseteq E-e} (-1)^{|X_1|}\lambda^{r(E-e)-(r(X_1))} \sum_{X_2\subseteq\{e\}} (-1)^{|X_2|}\lambda^{r(e)-r(X_2)} \\ &= p(M-e;\lambda)p(M(e);\lambda). \end{aligned}$$

Logo, o Polinômio Característico é um T-G invariante generalizado. ■

3.5 Grupo invariante

Definição 3.11 *A classe dos isomorfismos invariantes de matróides que satisfaz a equação* (3.2)*, mas não necessariamente a equação* (3.3) *é chamado T-G grupo invariante.*

Proposição 3.12 *O Beta Invariante é um membro do T-G grupo invariante.*

Prova. De fato, foi mostrado no **Teorema 2.9** que o Beta Invariante satisfaz (3.2) ■

O próximo resultado mostra que a teoria desenvolvida até aqui é suficiente para caracterizar invariantes do tipo T-G grupo invariante.

Proposição 3.13 *Se A é um grupo abeliano, então existe uma única função g de $\mathscr{M}'$ em A tal que*

(i) $g(M) = g(M-e) + g(M/e)$ se e não é laço, nem colaço da matróide M

(ii) $g(U_{i,i} \oplus U_{0,j}) = \alpha_{ij}$ para todo i e j tais que $i + j > 0$.

Além disso, se $t(M;x,y) = \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j$, então $g(M) = \sum_i \sum_j b_{ij} \alpha_{ij}$

Prova. Defina $g(M) = \sum_i \sum_j b_{ij} \alpha_{ij}$, onde b_{ij} são os coeficientes do Polinômio de Tutte relativo a uma matróide M.

Suponha que e seja um elemento da matróide que não é um laço, nem um colaço, então

$$t(M;x,y) = t(M-e;x,y) + t(M/e;x,y).$$

E mais, podemos escrever

$$t(M-e;x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j \tag{3.14}$$

e

$$t(M/e;x,y) = \sum_i \sum_j c_{ij} x^i y^j \tag{3.15}$$

Assim,

$$\begin{aligned} t(M;x,y) &= t(M-e;x,y) + t(M/e;x,y) \\ \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j &= \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j + \sum_i \sum_j c_{ij} x^i y^j \\ \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j &= \sum_i \sum_j [a_{ij} + c_{ij}] x^i y^j \end{aligned}$$

Logo, $b_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$.

Mas, das expressões (3.14) e (3.15) obtidas acima temos que

$$\begin{aligned} g(M-e) &= \sum_i \sum_j a_{ij}\alpha_{ij} \\ g(M/e) &= \sum_i \sum_j c_{ij}\alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned} g(M-e)+g(M/e) &= \sum_i \sum_j a_{ij}\alpha_{ij} + \sum_i \sum_j c_{ij}\alpha_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j [a_{ij}+c_{ij}]\alpha_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j b_{ij}\alpha_{ij} \\ &= g(M), \end{aligned}$$

o que demonstra *(i)*

Agora mostraremos *(ii)*. Temos que

$$\begin{aligned} t(U_{i,i}\oplus U_{0,j};x,y) &= t(U_{i,i};x,y)t(U_{0,j};x,y) \\ &= x^i y^j \end{aligned}$$

pois, todos os elementos de $U_{i,i}$ são colaços e todos os elementos de $U_{0,j}$ são laços. Daí, como $t(U_{i,i}\oplus U_{0,j};x,y) = x^i y^j$, então $g(U_{i,i}\oplus U_{0,j}) = \alpha_{ij}$.

Resta-nos mostrar a unicidade de g. Suponha que existe $g' : \mathscr{M}' \to A$ satisfazendo *(i)* e *(ii)*. Provaremos que $g' = g$.

Seja $L(M)$ o conjunto de laços de M e $l = |L(M)|$. Observe que $L(M^*)$ é o conjunto de colaços de M, e denotaremos a sua cardinalidade por l^*. Vamos fazer a prova por indução em $n(M) = |E(M)-[L(M)\cup L(M^*)]|$. Se $n(M)=0$, então $M \cong M_{0,l}\oplus M_{l^*,l^*}$. Neste caso,

$$g'(U_{0,l}\oplus U_{l^*,l^*};x,y) = \alpha_{ll^*} = g(U_{0,l}\oplus U_{l^*,l^*};x,y),$$

Suponha $n(M)>0$ e assuma o resultado válido para todas as matróides N tais que $n(M)<n(M)$. Escolha $e\in E(M)-[L(M)\cup L(M^*)]$. Daí, temos

$$\begin{aligned} g'(M) &= g'(M-e)+g'(M/e) \\ &= g(M-e)+g(M/e) \\ &= g(M). \end{aligned}$$

■

Proposição 3.14 *Seja $i_{r-k}(M)$ o número de conjuntos independentes de M de posto $r-k$, para um número inteiro não-negativo k. O isomorfismo invariante $i_{r-k}(M)$ é um grupo invariante e, se $t(M;x,y) = \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j$, então*

$$i_{r-k}(M) = \sum_i \sum_j b_{ij} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$$

Prova. Seja e um elemento de M e suponha que e não é laço, nem colaço. Particione o conjunto $\mathscr{I}_{r(M)-k}$, dos conjuntos independentes de M que tem $r(M)-k$ elementos, em subconjuntos $\mathscr{I}'_{r(M)-k}$ e $\mathscr{I}''_{r(M)-k}$ consistindo de elementos de $\mathscr{I}_{r(M)-k}$ que contém o elemento e e de elementos de $\mathscr{I}_{r(M)-k}$ que não contém o elemento e, respectivamente.

Evidentemente, $\mathscr{I}''_{r(M)-k}$ tem uma correspondência injetiva com o conjunto de independentes de $M-e$ que tem $r(M-e)-k$ elementos. Assim como, $\mathscr{I}'_{r(M)-k}$ tem correspondência injetiva com o conjunto de independentes de M/e que tem $r(M/e)-k$ elementos. Daí, temos que

$$i_{r-k}(M) = i_{r-k}(M-e) + i_{r-k}(M/e).$$

Logo, $i_{r-k}(M)$ é um Grupo Invariante.

Claramente,

$$i_{r-k}(U_{i,i} \oplus U_{0,j}) = \begin{pmatrix} i \\ i-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$$

e pela **Proposição 3.13**, conclui-se que para toda matróide M,

$$i_{r-k}(M) = \sum_i \sum_j b_{ij} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$$

■

Pela expressão (3.5), $i_{r-k}(M)$ é o coeficiente de x^k em $S(M;x,y)$. De fato, a precedente proposição é justamente o caso especial do resultado que todo coeficiente de $S(M;x,y)$ é um grupo invariante.

O **Teorema 3.5** e o **Corolário 3.9** nos dão caracterizações de T-G invariante e T-G invariante generalizado que são expressos em termos do Polinômio de Tutte.

3.6 Invariante de Tutte

Lembrando que $\mathscr{M}$ denota a classe das matróides não vazias, definamos Invariante de Tutte.

Definição 3.15 *Seja Ω um conjunto qualquer. Uma função $f : \mathscr{M} \to \Omega$ que satisfaz a seguinte propriedade: $f(M) = f(N)$ sempre que M e N têm o mesmo polinômio de Tutte. Tal função f será chamada de Invariante de Tutte.*

O Invariante de Tutte nos permite identificar quais invariantes de matróides isomorfas podem ser determinados pelo Polinômio de Tutte. Claramente, temos dois exemplos de Invariantes de Tutte.

Exemplo 9 *T-G generalizados*

Exemplo 10 *Grupos invariantes*

Existem muitos outros exemplos que não são desse tipo, como veremos a seguir.

$$t(M;x,y) = S(M;x-1,y-1) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)}(y-1)^{n(X)}$$

$$r(E) \quad \text{é a maior potência de } x \text{ em} \quad t(M;x,y) \tag{3.16}$$

enquanto que

$$n(E) \quad \text{é a maior potência de } y \text{ em} \quad t(M;x,y) \tag{3.17}$$

Portanto, posto e nulidade são invariantes de Tutte. Como, $\mid E \mid = r(E) + n(E)$, a cardinalidade do conjunto básico é também um invariante de Tutte.

O próximo resultado caracteriza todos os invariantes de Tutte, embora esse seja uma reafirmação da definição. Não a demonstraremos, mas essa proposição pode ser encontrada em Brylawski [1].

Proposição 3.16 *Seja Ω um conjunto qualquer e f uma função de $\mathscr{M}'$ em Ω tal que $f(M) = f(N)$ sempre que $t(M;x,y) = t(N;x,y)$. Então $f(M)$ é uma função dos coeficientes b_{ij} de $t(M;x,y)$.* ■

Note que essa proposição não afirma que podemos encontrar uma fórmula explícita para um invariante de Tutte em termos dos coeficientes do polinômio de Tutte. Contudo, muitos dos exemplos de invariante de Tutte que consideraremos terá tal fórmula. Por exemplo, por (3.16) e (3.17), temos

$$r(E) = \max\{i;\ b_{ij} > 0 \quad \text{para algum j}\} \tag{3.18}$$

e

$$n(E) = \max\{j;\ b_{ij} > 0 \quad \text{para algum i}\} \tag{3.19}$$

3.7 Aplicações

Tendo desenvolvido caracterizações diversas sobre os conceitos de T-G invariante, T-G invariante generalizado, grupo invariante e invariante de Tutte, faremos algumas das aplicações mais básicas desses resultados.

Para uma matróide M, denotaremos por $b(M)$, $i(M)$ e $s(M)$, os números de bases, conjuntos independentes, e conjuntos geradores, respectivamente, de M.

Proposição 3.17 *Seja M uma matróide sobre o conjunto básico E, então*

(i) $b(M) = t(M;1,1) = S(M;0,0)$*;*

(ii) $i(M) = t(M;2,1) = S(M;1,0)$*;*

(iii) $s(M) = t(M;1,2) = S(M;0,1)$ *e*

(iv) $2^{|E|} = t(M;2,2) = S(M;1,1)$.

Prova.

(i) Seja e um elemento da matróide M e suponha que e não é um laço, nem um colaço. Particione o conjunto de bases de M em subconjuntos $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}''$, onde $\mathscr{B}'$ contém todas as bases que contém o elemento e, enquanto que $\mathscr{B}''$ é constituido das bases que não contém e.

Assim, temos que $\mathscr{B}''$ é igual ao conjunto de bases de $M-e$, enquanto o conjunto de bases de M/e é $\{B-e; B \in \mathscr{B}'\}$.

Observe que $|\mathscr{B}''| = b(M-e)$ e $|\mathscr{B}'| = b(M/e)$.

Como e não é um laço, nem um colaço, $|\mathscr{B}| = |\mathscr{B}'| + |\mathscr{B}''|$, ou seja,

$$b(M) = b(M-e) + b(M/e).$$

Suponha que e seja um laço ou um colaço, então $b(M) = b(M(e))b(M-e)$. Assim, $b(M)$ satisfaz as equações (3.2) e (3.3).

Pelo **Teorema 3.5**, pela expressão (3.11) e pelo fato de $b(I) = b(L) = 1$, se $\mid E \mid \geq 2$, então

$$\begin{aligned} b(M) &= t(M;b(I),b(L)) \\ &= t(M;1,1) \\ &= S(M;0,0) \end{aligned}$$

(ii) Seja e um elemento da matróide e suponha que e não é um laço, nem um colaço. Particione o conjunto dos independentes de M em subconjuntos $\mathscr{I}'(M)$ e $\mathscr{I}''(M)$, onde $\mathscr{I}'(M)$ contém os conjuntos independentes de M que contém o elemento e, enquanto que $\mathscr{I}''(M)$ é constituido dos conjuntos independentes que não contém e.

Assim, temos que $\mathscr{I}''(M)$ é igual ao conjunto de independentes de $M - e$ e o conjunto de independentes de M/e é $\{I - e; I \in \mathscr{I}'\}$.

Observe que, se e não é um laço, nem um colaço, temos

$$\begin{aligned} \mid \mathscr{I}(M) \mid &= \mid \mathscr{I}''(M) \mid + \mid \mathscr{I}'(M) \mid \\ i(M) &= i(M-e) + i(M/e) \end{aligned}$$

Seja e um laço, $i(M) = i(M-e)$ e $i(M(e)) = 1$. Daí, $i(M) = i(M-e) \cdot i(M(e))$

Caso o elemento e seja um colaço, $i(I) = 2$ e

$$i(M) = i(M-e) \cup |\{I \cup e; I \subset \mathscr{I}(M-e)\}| = 2 \cdot i(M-e) = i(M(e)) \cdot i(M-e)$$

Provamos que, $i(M)$ satisfaz as expressões (3.2) e (3.3) da definição de isomorfismo invariante.

Pelo **Teorema 3.5**, pela expressão (3.11) e pelo fato de $i(I) = 2$ e $i(L) = 1$, se $\mid E \mid \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} i(M) &= t(M;i(I),i(L)) \\ &= t(M;2,1) \\ &= S(M;1,0) \end{aligned}$$

(iii) Note que $s(M) = i(M^*)$.

De fato, suponha X um gerador de M, então existe B, base de M, tal que $B \subseteq X$ e existe B^* de M^*, tal que $B^* = E - B$, ou seja, $E - X \subseteq B^*$. Portanto, $E - X$ é independente em M^*.

Reciprocamente, seja $E - X$ independente em M^*, então existe B^*, base de M^*, e B, base de M, tal que $E - X \subseteq B^* = E - B$. Daí, temos $B \subseteq X$, e portanto X é gerador de M.

Donde concluímos que $s(M) = i(M^*)$, pois dado um gerador de M, existe um independente de M^* relacionado e vice-versa.

Dessa maneira, pelo item *(ii)* e pela **Proposição 3.6**, temos:

$$\begin{aligned} s(M) &= i(M^*) \\ &= t(M^*; 2, 1) \\ &= t(M; 1, 2) \end{aligned}$$

e mais, pela expressão (3.11), temos

$$\begin{aligned} t(M; 1, 2) &= S(M; 1-1, 2-1) \\ &= S(M; 0, 1) \end{aligned}$$

(iv) Sabemos que E possui $2^{|E|}$ subconjuntos. Dessa forma,

$$\begin{aligned} S(M; 1, 1) &= t(M; 2, 2) \\ &= \sum_{X \subseteq E} (2-1)^{r(E)-r(X)} (2-1)^{n(X)} \\ &= \sum_{X \subseteq E} 1^{r(E)-r(X)} 1^{n(X)} \\ &= \sum_{X \subseteq E} 1 \\ &= 2^{|E|} \end{aligned}$$

■

Faremos agora uma aplicação da **Proposição 3.13**.

Exemplo 11 *Foi apresentado na proposição anterior o valor de $b(M)$ em função do Polinômio de Tutte, $b(M) = t(M;1,1)$, e lembrando que $t(M;x,y) = \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j$, segue da* **Proposição 3.13** *que $b(M) = \sum_i \sum_j b_{ij}$.*

O Polinômio Característico, a Função de Möbius e a Beta Invariante foram estudadas com bastante detalhes no **Capítulo 2**. Agora relacionaremos cada uma dessas funções com o Polinômio de Tutte.

Usando as expressões (2.1), (3.12) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
p(M;\lambda) &= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(E)-r(X)} \\
&= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{r(E)-r(E)+r(X)-r(X)+|X|} \lambda^{r(E)-r(X)} \\
&= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{r(E)-r(X)+|X|} (-1)^{-r(E)+r(X)} \lambda^{r(E)-r(X)} \\
&= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{r(E)-r(X)+|X|} [(-1)^{r(E)-r(X)} \lambda^{r(E)-r(X)}] \\
&= \sum_{X\subseteq E} (-1)^{r(E)-r(X)+|X|} (-\lambda)^{r(E)-r(X)} \\
&= (-1)^{r(E)} \sum_{X\subseteq E} (-1)^{-r(X)+|X|} (-\lambda)^{r(E)-r(X)} \\
&= (-1)^{r(E)} t(M; 1-\lambda, 0) \\
&= (-1)^{r(E)} S(M; -\lambda, -1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$p(M;\lambda) = (-1)^{r(E)} t(M;1-\lambda,0) = (-1)^{r(E)} S(M;-\lambda,-1) \tag{3.20}$$

A partir do Polinômio Característico, faremos a relação entre a Função de Möbius e o Polinômio de Tutte. Usando a equação (2.1), temos

$$p(M;\lambda) = \sum_{X\subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{r(E)-r(X)}$$

$$= \sum_{\substack{X\subseteq E\\ clX=E}} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)} + \sum_{\substack{X\subseteq E\\ clX\neq E}} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)}$$

$$= \sum_{\substack{X\subseteq E\\ clX=E}} (-1)^{|X|} + \sum_{\substack{X\subseteq E\\ clX\neq E}} (-1)^{|X|}\lambda^{r(E)-r(X)}$$

Fazendo $\lambda = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} p(M;0) &= \sum_{\substack{X\subseteq E\\ clX=E}} (-1)^{|X|} \\ &= \mu_M(\emptyset, E) \\ &= \mu(M). \end{aligned}$$

Então a Função de Möbius é um T-G invariante generalizado e pela expressão (3.20), temos

$$\begin{aligned} \mu(M) &= p(M;0) \\ &= (-1)^{r(E)} t(M;1,0) \\ &= (-1)^{r(E)} S(M;0,-1) \end{aligned}$$

Proposição 3.18 *$\beta(M)$ é um grupo invariante cujo valor é b_{10}. Entretanto, para $|E| \geq 2$, então $b_{10} = b_{01}$.*

Prova. Pelo **Teorema 2.9**, $\beta(M)$ satisfaz a fórmula de deleção-contração, dessa forma, $\beta(M)$ é um grupo invariante.

Observe que

$$\beta(U_{i,i} \oplus U_{0,j}) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

então pelo item *(ii)* da **Proposição 3.13**, $\beta(M) = b_{10}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \beta(U_{i,i} \oplus U_{0,j})^* &= \beta(U_{i,i}^* \oplus U_{0,j}^*) \\ &= \beta(U_{0,i} \oplus U_{j,j}) \end{aligned}$$

Mas, sabemos que

$$\beta(U_{0,i} \oplus U_{j,j}) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0 \text{ e } j = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E, novamente, pelo item *(ii)* da **Proposição 3.13**, podemos concluir que $\beta(M^*) = b_{01}$.

Resta-nos mostrar que para $|E| \geq 2$, temos que $b_{10} = b_{01}$.

Se M não tem laço, nem colaço, então pelo item *(iv)* da **Proposição 2.10**, temos $\beta(M) = \beta(M^*)$, logo $b_{10} = b_{01}$.

Se M tem laço, então M^* tem colaço, e são ambas desconexas, então pelo item *(iii)* da **Proposição 2.10**, temos $\beta(M) = \beta(M^*) = 0$ e $b_{10} = b_{01}$. De modo análogo, se M tem colaço, M^* tem laço, e concluimos que $b_{10} = b_{01}$. ■

A identidade $b_{10} = b_{01}$ é uma das inúmeras que vale para os coeficientes b_{ij} do polinômio de Tutte. O próximo resultado, o qual não demonstraremos, caracteriza todas as identidades da forma $\sum_i \sum_j \alpha_{ij} b_{ij} = \gamma$, com todos os α_{ij} constantes.

Teorema 3.19 *As seguintes identidades formam a base para as relações lineares afins que valem sobre os coeficientes b_{ij} no polinômio de Tutte*

$$t(M;x,y) = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} b_{ij} x^i y^j$$

sendo M uma geometria (matróide simples) de posto r, sem colaços e m elementos.

(i) $b_{ij} = 0$, *para todo* $i > r$ *e para todo* $j \geq 0$;

(ii) $b_{r0} = 1$, $b_{rj} = 0$ *para todo* $j > 0$;

(iii) $b_{r-1,0} = m - r$, $b_{r-1,j} = 0$ *para todo* $j > 0$;

(iv) $b_{ij} = 0$, *para todo* i *e* j *tal que* $1 \leq i \leq r-2$ *e* $j \geq m - r$;

(v) $b_{0,m-r} = 1$, $b_{0j} = 0$ *para todo* $j > m - r$;

(vi) $\displaystyle\sum_{s=0}^{k} \sum_{t=0}^{k-s} (-1)^t \binom{k-s}{t} b_{st} = 0$ *para todo* k *tal que* $0 \leq k \leq m - 3$.

Entretanto, (vi) vale para toda matróide $M(E)$ *tal que* $|E| > k$. *Então,*

(vii) $b_{00} = 0$, *se* $|E| \geq 1$;

(viii) $b_{10} = b_{01}$, *se* $|E| \geq 2$;

(ix) $b_{20} - b_{11} + b_{02} = b_{10}$, *se* $|E| \geq 3$; *e*

(x) $b_{30} - b_{21} + b_{12} - b_{03} = b_{11} - 2b_{02} + b_{10}$, *se* $|E| \geq 4$. ■

Já sabemos que matróides isomorfas possuem o mesmo Polinômio de Tutte. Uma pergunta elementar é se matróides que possuem o mesmo Polinômio de Tutte necessariamente são isomorfas. A resposta para essa indagação é esclarecida no próximo exemplo em que temos duas matróides não isomorfas com o mesmo Polinômio de Tutte.

Exemplo 12 *Seja M_1 e M_2 matróides cujas representações geométricas são mostradas na* Figura 3.3. *Observe que $t(M_1;x,y) = t(M_2;x,y)$, pois $M_1 - e \cong M_2 - e$ e $M_1/e \cong M_2/e$, para todo elemento e. Agora listaremos propriedades que não são comuns a M_1 e M_2, as quais confirmam que M_1 não é isomorfa a M_2.*

(i) $M_1 \cong M_\Gamma$ para um grafo planar Γ, então M_1 é gráfica e cográfica e mais é unimodular e binária. Por outro lado, M_2 tem uma linha com 4 pontos, como uma restrição de M_2 não é binária, temos que M_2 não é binária. Logo, M_2 não é isomorfa a M_1, já que M_1 é binária.

(ii) M_1 tem duas linhas com dois elementos enquanto que M_2 tem três. Portanto, M_1 e M_2 não tem o mesmo número de conjuntos fechados, nem o mesmo número de hiperplanos.

(iii) M_1 e M_2 possuem um circuito de dois elementos, e seis com três elementos, mas M_1 tem cinco circuitos com quatro elementos, enquanto que M_2 tem seis circuitos com quatro elementos. Assim, M_1 e M_2 tem diferentes números de circuitos.

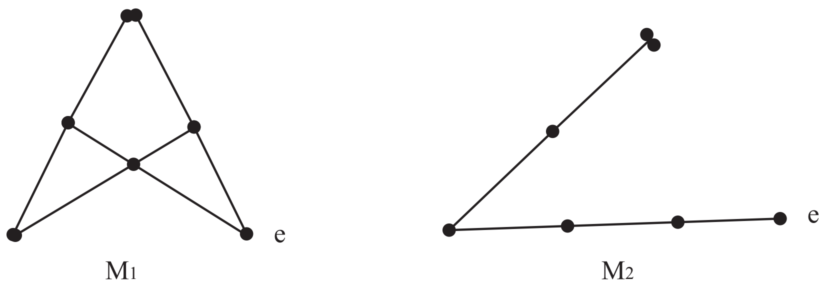

Figura 3.3:

Retornando para a fórmula de deleção-contração básica, $f(M) = f(M-e) + f(M/e)$, notamos que existem várias técnicas que são usadas para mostrar que, quando $f(M)$ enumerar a família $\mathscr{F}(M)$,

$$|\mathscr{F}(M)| = |\mathscr{F}(M-e)| + |\mathscr{F}(M/e)|.$$

Citaremos três, das quais apenas a primeira foi utilizada neste trabalho.

(1) Existe uma bijeção $\varphi : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M-e) \sqcup \mathscr{F}(M/e)$. Assim, $\mathscr{F}(M)$ é particionado em duas classes correspondendo as famílias referentes a deleção e contração, ou seja, $\mathscr{F}(M) = \varphi^{-1}(\mathscr{F}(M-e) \sqcup \varphi^{-1}(\mathscr{F}(M/e)$. Essa técnica foi utilizada na prova da **Proposição 3.17**.

As duas subsequentes serão utilizadas na aplicação de Polinômio de Tutte para grafos.

(2) Existe uma injeção $i : \mathscr{F}(M/e) \to \mathscr{F}(M-e)$ tal que

$$|\mathscr{F}(M)| = \sum_{x \in \mathscr{F}(M-e)} m(x),$$

sendo

$$m(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \text{ está na imagem de } i, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(3) Existem duas sobrejeções $\pi_1 : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M/e)$ e $\pi_2 : \mathscr{F}(M-e) \to \mathscr{F}(M/e)$, tais que, para todo x em $\mathscr{F}(M/e)$, $|\pi_1^{-1}(x)| = |\pi_2^{-1}(x)| + 1$.

Muitos T-G invariantes, f, são calculados do polinômio de Tutte, $t(M;x,y)$, quando y, ou dualmente x, é igual a 0, 1 ou 2. Relembrando que por definição, $f(I) = x$ e $f(L) = y$, sendo I um colaço e L um laço de uma matróide, provaremos algumas características importantes para estes invariantes f.

(1) $y = 0$ se, e somente se, $f(M) = 0$, sempre que M tem laços, ou equivalentemente, sempre que elementos em paralelos podem ser ignorados. De fato, suponha que e é um laço, pela expressão (3.4), $f(L) = y$, temos

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M(e))f(M-e) \\ &= f(L)f(M-e) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \cdot f(M-e) \\
f(M) &= 0.
\end{aligned}
$$

E, se M possui elementos em paralelo, suponha que e e f são elementos em paralelo, M/e contém laços, o que implica que $f(M/e) = 0$, e consequentemente, $f(M) = f(M-e)$, donde concluimos que pode-se ignorar elementos em paralelo. Nesse caso, obtemos a recursão $f(G) = f(G-e) + f(\overline{G/e})$ para alguma geometria G e algum elemento e que não seja colaço. Onde $\overline{G/e}$ denota a simplificação da matróide G/e.

(2) $y = 1$ se, e somente se, laços podem ser ignorados de tal forma que $f(M) = f(\tilde{M})$, onde $\tilde{M}$ é obtido de M pela deleção de seus laços. De fato, se e é laço, então,

$$
\begin{aligned}
f(M) &= f(M(e))f(M-e) \\
&= 1 \cdot f(M-e) \\
&= f(M-e).
\end{aligned}
$$

Assim, se A é um conjunto de elementos em paralelo de M que não é uma componente conexa, então

$$f(M) = f(M-A) + |A|f(M/A).$$

Com efeito, seja $A = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Sem perda de generalidade tome primeiramente o elemento $e_1 \in A$, e_1 não é um laço, nem um colaço. Então,

$$f(M) = f(M-e_1) + f(M/e_1) \tag{3.21}$$

Como na contração do elemento e_1, todos os elementos de A, exceto e_1, se tornam laços, obtemos

$$f(M/e_1) = y^{|A|-1} f(M/A) \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) em (3.21)

$$f(M) = f(M-e_1) + y^{|A|-1} f(M/A) \tag{3.23}$$

Agora, escolha $e_2 \in A$ na matróide original, então

$$
\begin{aligned}
f(M-e_1) &= f(M - \{e_1, e_2\}) + f((M-e_1)/e_2) \\
&= f(M - \{e_1, e_2\}) + y^{|A|-2} f(M/A)
\end{aligned}
$$

pelo mesmo argumento utilizado para obter (3.22).

Mas,

$$f(M-\{e_1,e_2\}) = f(M-\{e_1,e_2,e_3\}) + y^{|A|-3}f(M/A)$$

e assim, usando esse procedimento chegamos que

$$f(M-\{e_1,e_2,...,e_{n-1}\} = f(M-A) + y^{|A|-|A|}f(M/A)$$

e

$$f(M) = f(M-A) + (y^{|A|-|A|} + ... + y^{|A|-3} + y^{|A|-2} + y^{|A|-1})f(M/A).$$

E fazendo $y = 1$, o resultado segue.

(3) $y = 2$ se, e somente se, $f(M) = f(M-e) + f(M/e)$, é verdade não somente quando e não é laço, nem colaço, mas também se e é laço. Com efeito, se e é laço, então $f(M(e)) = y = 2$ e $M-e \cong M/e$, então

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M(e))f(M-e) \\ &= 2 \cdot f(M-e) \\ &= f(M-e) + f(M/e). \end{aligned}$$

Em algumas das aplicações de T-G é conveniente trabalhar com a versão de polinômio de Tutte com quatro variáveis. Essa é definida na classe $\mathscr{M}_p$ de matróides pontuais, que é, matróides M_d tendo um ponto distinguível d. Evidentemente, se e é um elemento de M_d diferente de d, então $M_d - e$ e M_d/e são membros de $\mathscr{M}_p$, onde o ponto distinguível de cada um desses é d.

Proposição 3.20 *Existe uma única função t_p de $\mathscr{M}_p$, sobre o anel de polinômio $\mathbb{Z}[x',x,y',y]$ tendo as seguintes propriedades:*

(i) $t_p(M_d(d)) = x'$ se $M_d(d)$ é um colaço, e

$t_p(M_d(d)) = y'$ se $M_d(d)$ é um laço.

(ii) Se e é um elemento de um membro M_d de $\mathscr{M}_p$ e $e \neq d$, então

$$t_p(M_d) = t_p(M_d - e) + t_p(M_d/e)$$

(iii) Se e é um laço ou colaço do membro M_d de $\mathscr{M}_p$ e $e \neq d$, então

$$t_p(M_d) = t_p(M_d - e)t_p(M_d(e)).$$

Em particular, $t_p(M_d(e)) = t(M_d(e))$.

Prova. Defina $t_p(M_d;x',x,y',y) = t(M_d(d);x',y')t(M_d - d;x,y)$. Assim,

$$t_p(M_d(d);x',x,y',y) = t(M_d(d);x',y') = \begin{cases} x', & \text{se } M_d(d) \text{ é colaço,} \\ y', & \text{se } M_d(d) \text{ é laço.} \end{cases}$$

e *(i)* vale.

Se $e \neq d$, claramente, $t_p(M_d(e);x',x,y',y) = t(M_d(e);x,y)$.

Se $e \in M_d - d$ e e não é laço, nem colaço, temos

$$\begin{aligned} t_p(M_d;x',x,y',y) &= t(M_d(d);x',y')t(M_d - d;x,y) \\ &= t(M_d(d);x',y')[t((M_d - d) - e;x,y) + t((M_d - d)/e;x,y)] \\ &= t(M_d(d);x',y')t((M_d - e) - d;x,y) + t(M_d(d);x',y')t((M_d/e) - d;x,y) \\ &= t_p(M_d - e;x',x,y',y) + t_p(M_d/e;x',x,y',y). \end{aligned}$$

Já, se e é laço ou colaço,

$$\begin{aligned} t_p(M_d;x',x,y',y) &= t(M_d(d);x',y')t(M_d - d;x,y) \\ &= t(M_d(d);x',y')[t(M_d(e);x,y)t((M_d - e) - d;x,y)] \\ &= [t(M_d(d);x',y')t((M_d - e) - d;x,y)]t(M_d(e);x',y') \\ &= t_p(M_d - e;x',x,y',y)t_p(M_d(e);x',x,y',y). \end{aligned}$$

E a unicidade de t_p, decorre da unicidade de t. ∎

O polinômio $t_p(M_d;x',x,y',y)$ é chamado Polinômio de Tutte Pontual. A seguinte proposição, resume algumas das propriedades básicas desse polinômio.

Proposição 3.21 *Suponha que $M_d \in \mathscr{M}_p$. Então* *(i) Para algum f e g em $\mathbb{Z}[x,y]$,*

$$t_p(M_d;x',x,y',y) = x'f(x,y) + y'g(x,y).$$

Entretanto, para esse f e g,

(ii) $t(M_d;x,y) = xf(x,y) + yg(x,y)$;

(iii) $t_p(M_d^*;x',x,y',y) = t_p(M_d;y',y,x',x) = x'g(y,x) + y'f(x,y)$;

(iv) Se d não é laço, nem colaço de M_d, então
$t(M_d - d;x,y) = (x-1)f(x,y) + g(x,y)$ e
$t(M_d/d;x,y) = xf(x,y) + (y-1)g(x,y)$;

(v) Se d é laço ou colaço de M_d, então
$$t(M_d - d;x,y) = t(M_d/d;x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } d \text{ é colaço,} \\ g(x,y), & \text{se } d \text{ é laço.} \end{cases}$$

Prova. Inicialmente provaremos o item *(ii)*, no qual aparecerá os polinômios $f(x,y)$ e $g(x,y)$ que serão utilizados nas provas dos itens subsequentes.

Defina
$$t_p(M_d;x',x,y',y) = \sum_i t(M_d^{(i)}(d);x',y')t(M_d^{(i)} - d;x,y), \tag{3.24}$$

sendo $M_d^{(i)}$ matróides cujos elementos são todos laços e/ou colaços. Denotaremos também, por $I(M_d^{(i)})$ e $L(M_d^{(i)})$ os colaços e laços de $M_d^{(i)}$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
t_p(M_d;x',x,y',y) &= \sum_i t(M_d^{(i)}(d);x',y')t(M_d^{(i)} - d;x,y) \\
&= \sum_{\substack{i \\ d\in I(M_d^{(i)})}} t(M_d^{(i)}(d);x',y')t(M_d^{(i)} - d;x,y) \\
&+ \sum_{\substack{j \\ d\in L(M_d^{(j)})}} t(M_d^{(j)}(d);x',y')t(M_d^{(j)} - d;x,y) \\
&= \sum_i x't(M_d^{(i)} - d;x,y) + \sum_j y't(M_d^{(j)} - d;x,y) \\
&= x'\sum_i t(M_d^{(i)} - d;x,y) + y'\sum_j t(M_d^{(j)} - d;x,y)
\end{aligned}$$

$$= \quad x' \sum_i x^{|I(M_d^{(i)}-d)|} y^{|L(M_d^{(i)}-d)|} + y' \sum_j x^{|I(M_d^{(j)}-d)|} y^{|L(M_d^{(j)}-d)|}$$

Fazendo, $\sum_i x^{|I(M_d^{(i)}-d)|} y^{|L(M_d^{(i)}-d)|} = f(x,y)$ e $\sum_j x^{|I(M_d^{(j)}-d)|} y^{|L(M_d^{(j)}-d)|} = g(x,y)$, e substituindo na equação acima, obtemos

$$t_p(M_d; x', x, y', y) = x' f(x,y) + y' g(x,y)$$

Note que a partir do item *(ii)* precisaremos de f e g como definidos no item *(i)*. Agora, provaremos *(ii)*,

$$\begin{aligned}
t(M_d; x, y) &= \sum_i t(M_d^{(i)}; x, y) \\
&= \sum_i t(M_d^{(i)}(d); x, y) t(M_d^{(i)} - d; x, y) \\
&= \sum_{\substack{i \\ d \in I(M_d^{(i)})}} t(M_d^{(i)}(d); x, y) t(M_d^{(i)} - d; x, y) \\
&+ \sum_{\substack{j \\ d \in L(M_d^{(j)})}} t(M_d^{(j)}(d); x, y) t(M_d^{(j)} - d; x, y) \\
&= \sum_i x t(M_d^{(i)} - d; x, y) + \sum_j y t(M_d^{(j)} - d; x, y) \\
&= x \sum_i t(M_d^{(i)} - d; x, y) + y \sum_j t(M_d^{(j)} - d; x, y) \\
&= x \sum_i x^{|I(M_d^{(i)}-d)|} y^{|L(M_d^{(i)}-d)|} + y \sum_j x^{|I(M_d^{(j)}-d)|} y^{|L(M_d^{(j)}-d)|} \\
&= x f(x,y) + y g(x,y)
\end{aligned}$$

A demonstração de *(iii)* será feita por etapas. Primeiramente provaremos a igualdade $t_p(M_d^*; x', x, y', y) = t_p(M_d; y', y, x', x)$, o que faremos aplicando a definição (3.24) a matróide M_d^* e utilizamos a **Proposição 1.25** e a **Proposição 3.6**,

$$\begin{aligned}
t_p(M_d^*; x', x, y', y) &= \sum_i t(M_d^{(i)*}(d); x', y') t((M_d^{(i)} - d)^*; x, y) \\
&= \sum_i t(M_d^{(i)*}(d); x', y') t(M_d^{(i)*}/d; x, y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i t(M_d^{(i)**}(d);y',x')t((M_d^{(i)*}/d)^*;y,x) \\
&= \sum_i t(M_d^{(i)}(d);y',x')t((M_d^{(i)}-d);y,x) \\
&= t_p(M_d;y',y,x',x)
\end{aligned}
$$

Para completar a demonstração do item *(iii)*, resta-nos mostrar que $t_p(M_d;y',y,x',x) = y'f(y,x) + x'g(y,x)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
t_p(M_d;y',y,x',x) &= \sum_i t(M_d^{(i)}(d);y',x')t(M_d^{(i)}-d;y,x) \\
&= \sum_{\substack{i \\ d\in I(M_d^{(i)})}} t(M_d^{(i)}(d);y',x')t(M_d^{(i)}-d;y,x) \\
&+ \sum_{\substack{j \\ d\in L(M_d^{(j)})}} t(M_d^{(j)}(d);y',x')t(M_d^{(j)}-d;y,x) \\
&= y'\sum_i t(M_d^{(i)}-d;y,x) + x'\sum_j t(M_d^{(j)}-d;y,x) \\
&= y'\sum_i y^{|I(M_d^{(i)}-d)|}x^{|L(M_d^{(i)}-d)|} + x'\sum_j y^{|I(M_d^{(j)}-d)|}x^{|L(M_d^{(j)}-d)|} \\
&= y'f(y,x) + x'g(y,x)
\end{aligned}
$$

■

Vimos que o polinômio gerador associado ao posto é fundamental na classe T-G invariante. Mais um polinômio relacionado que aparece em aplicações de T-G é o polinômio coposto-cardinalidade $S_{KC}(M;x,y)$. Esse é definido por

$$S_{KC}(M;x,y) = \sum_{X\subseteq E} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \tag{3.25}$$

Proposição 3.22 *$S_{KC}(M;x,y)$ é T-G invariante generalizado.*

Prova. Inicialmente calcularemos os valores do polinômio coposto-cardinalidade, $S_{KC}(M;x,y)$, quando a matróide M possui um único elemento, neste caso, $M = I$ ou $M = L$.

Se $M = I$, as únicas submatróides são $\emptyset$ e I, então

$$S_{KC}(I;x,y) = x^{|\emptyset|}y^{r(I)-r(\emptyset)} + x^{|I|}y^{r(I)-r(I)}$$

$$\begin{aligned} &= x^0y^1 + x^1y^0 \\ &= x+y \end{aligned}$$

Analogamente, se $M = L$ as únicas submatróides de L são $\emptyset$ e L, então

$$\begin{aligned} S_{KC}(L;x,y) &= x^{|\emptyset|}y^{r(L)-r(\emptyset)} + x^{|L|}y^{r(L)-r(L)} \\ &= x^0y^0 + x^1y^0 \\ &= x+1 \end{aligned}$$

Para $|E| \geq 2$, suponha que $e \in E(M)$ não é laço, nem colaço. Queremos mostrar que $S_{KC}(M;x,y)$ satisfaz a generalização de (3.2) como descrito na **Definição 3.8**.

$$\begin{aligned} S_{KC}(M;x,y) &= \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\notin X}} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} + \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\in X}} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \\ &= \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} + \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X\cup e|}y^{r(E)-r(X\cup e)} \\ &= \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} + x\sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r'(E-e)+1-(r'(X)+1)} \\ &= S_{KC}(M-e;x,y) + xS_{KC}(M/e;x,y) \end{aligned}$$

Se e é um laço ou um colaço, provaremos que $S_{KC}(M;x,y)$ satisfaz (3.3).

Caso e seja um laço,

$$\begin{aligned} S_{KC}(M;x,y) &= \sum_{X\subseteq E} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \\ &= \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\in X}} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} + \sum_{\substack{X\subseteq E \\ e\notin X}} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \\ &= \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X\cup e|}y^{r(E)-r(X\cup e)} + \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \\ &= x\sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} + \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} \\ &= (x+1)\sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} \\ &= S_{KC}(L;x,y)S_{KC}(M-e;x,y) \end{aligned}$$

Caso e seja um colaço,

$$\begin{aligned}
S_{KC}(M;x,y) &= \sum_{X\subseteq E} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \\
&= \sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\in X}} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} + \sum_{\substack{X\subseteq E\\ e\notin X}} x^{|X|}y^{r(E)-r(X)} \\
&= \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X\cup e|}y^{r(E-e)+1-(r(X)+1)} + \sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)+1-r(X)} \\
&= x\sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} + y\sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} \\
&= (x+y)\sum_{X\subseteq E-e} x^{|X|}y^{r(E-e)-r(X)} \\
&= S_{KC}(I;x,y)S_{KC}(M-e;x,y)
\end{aligned}$$

Logo, $S_{KC}(M;x,y)$ é um T-G generalizado. ■

Como aplicação final do nosso trabalho explicitaremos a forma em que o polinômio coposto-cardinalidade é escrito em função do Polinômio de Tutte.

Proposição 3.23 $S_{KC}(M;x,y) = x^r t(M;\frac{x+y}{x},x+1)$.

Prova. Nossa prova será feita por indução sobre a cardinalidade de $E(M)$. Verificaremos se a igualdade vale para $|E(M)| = 1$. Dessa forma, e é laço ou colaço

$$\begin{aligned}
S_{KC}(I;x,y) &= x^{r(I)}t(I;\frac{x+y}{x},x+1) \\
&= x\cdot\frac{x+y}{x} \\
&= x+y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{KC}(L;x,y) &= x^{r(L)}t(L;\frac{x+y}{x},x+1) \\
&= x+1
\end{aligned}$$

e a igualdade se verifica.

Suponha, por hipótese de indução, que a igualdade vale para $|E(M)| = n$. Mostraremos para

$|E(M)| = n+1$. Se e não é um laço, nem um colaço,

$$\begin{aligned}
S_{KC}(M;x,y) &= S_{KC}(M-e;x,y) + xS_{KC}(M/e;x,y) \\
&= x^{r(E-e)}t(M-e;\frac{x+y}{x},x+1) + x \cdot x^{r(E/e)}t(M/e;\frac{x+y}{x},x+1) \\
&= x^{r(E)}t(M-e;\frac{x+y}{x},x+1) + x^{r(E)}t(M/e;\frac{x+y}{x},x+1) \\
&= x^{r(E)}[t(M-e;\frac{x+y}{x},x+1) + t(M/e;\frac{x+y}{x},x+1)] \\
S_{KC}(M;x,y) &= x^{r(E)}t(M;\frac{x+y}{x},x+1)
\end{aligned}$$

Por fim, se e é laço ou colaço,

$$\begin{aligned}
S_{KC}(M;x,y) &= S_{KC}(M-e;x,y)S_{KC}(M(e);x,y) \\
&= x^{r(E-e)}t(M-e;\frac{x+y}{x},x+1) \cdot x^{r(\{e\})}t(M/e;\frac{x+y}{x},x+1) \\
&= x^{r(E-e)+r(\{e\})}[t(M-e;\frac{x+y}{x},x+1)t(M(e);\frac{x+y}{x},x+1)] \\
&= x^{r(E)}t(M;\frac{x+y}{x},x+1)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] BRYLAWSKI, T., OXLEY, J.G., *The Tutte Polynomial and Its Applications*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **40**, p. 123-225. Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[2] CRAPO, H., *The Tutte Polynomial*, Aequations Mathematicae, **3**, p. 211-229. University of Waterloo (1969).

[3] OXLEY, J.G., *Matroid Theory*. Oxford University Press, Oxford (1992).

[4] WELSH, D.J.A., *Matroid Theory*. Academic Press, London (1976).

[5] WHITE, N. (ed), *Theory of Matroids*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **26**, Cambrigde University Press, Cambrigde (1986).

[6] ZASLAVSKY, T., *The Möbius Function and the Characteristic Polynomial*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **29**, p. 114-138, Cambrigde University Press, Cambrigde (1987).