

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais para Álgebra de Grassmann

por

Nancy Lima Costa

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Agosto/2012

# Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais para Álgebra de Grassmann

por

Nancy Lima Costa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior - UFCG**

---

**Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas - UnB**

---

**Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

Agosto/2012

# Abstract

In this dissertation we study the ordinary polynomial identities for the Grassmann Algebra with unity, denoted by  $E$ , and without unity, denoted by  $E'$ , for fields of characteristic different from 2. We also study the  $\mathbb{Z}_2$ -graded identities of the algebra  $E$  over fields of positive characteristic. Finally, we describe the T-space of the central polynomials of  $E$  for fields of characteristic zero and also for fields of positive characteristic, moreover we describe the T-space of the central polynomials of  $E'$  for fields of positive characteristic.

**Keywords:** PI-Algebras, Graded Algebras, Graded Polynomial Identities, Central Polynomials.

# Resumo

Neste trabalho de dissertação estudamos as identidades polinomiais ordinárias para a Álgebra de Grassmann com unidade, denotada por  $E$ , e sem unidade, denotada por  $E'$ , para corpos de característica diferente de 2. Além disso, também estudamos as identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas da álgebra  $E$  no caso em que o corpo tem característica positiva. Por fim, descrevemos o T-espço dos polinômios centrais de  $E$  tanto para corpos de característica zero, quanto para corpos de característica positiva e descrevemos também os polinômios centrais de  $E'$  para corpos de característica positiva.

**Palavras-Chave:** PI-Álgebras, Álgebras Graduadas, Identidades Polinomiais Graduadas, Polinômios Centrais.

# Agradecimentos

Por trás de uma conquista pessoal sempre existe uma grande equipe. Por isso agradeço a todos que contribuíram para essa realização.

Agradeço a Deus por estar sempre presente em minha vida.

A minha família pelo apoio e por entender minha ausência nestes dois anos.

Ao meu noivo, Benevaldo, pela compreensão, paciência e por ter sido meu porto seguro nos muitos momentos de desesperos proporcionados pelo mestrado.

A Fiuza por ter me recebido tão carinhosamente nesta cidade até então desconhecida, a Iris e sua família por terem me acolhido, a convivência com vocês tornaram minha estadia em Campina Grande mais agradável.

Ao meu orientador, Prof. Diogo Diniz, pela paciência, dedicação e por ter me apresentado de modo encantador a PI-álgebra.

Aos professores do programa de pós graduação em matemática da UFCG, que contribuíram para minha formação, em especial: Antônio Brandão, Henrique Fernandes, Diogo Diniz, Daniel Cordeiro e Angelo Roncalli.

Aos professores e colegas da Universidade Estadual de Feira de Santana pelos ensinamentos, dentre eles preciso destacar o Prof., e amigo, João Cardeal por ter acreditado em mim e por ter despertado um sonho que já estava adormecido.

Aos professores Antônio Brandão e José Antônio, por terem aceito avaliar meu trabalho e pelas sugestões dadas.

A todos meus colegas do mestrado, em especial: Fabio e Michel pela ajuda com o Latex, a Luís, Brito e Arthur por tornarem as longas horas de estudo divertidas.

A Tatá, Sirlene (minha irmã acadêmica) e Elizabete, pela amizade, vocês três certamente foram umas das melhores conquistas durante esses dois anos.

Aos todos os funcionários do DME/UFCG, em particular a Renato e Rodrigo pela ajuda com o data show.

A CAPES pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

Às maiores mulheres que conheci  
voinha Mercês (in memoria) e voinha  
Lurdes.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>10</b>
1.1 Álgebras e Álgebras Envolventes . . . . .	10
1.2 PI-Álgebras, T-ideais e Variedades de Álgebras . . . . .	19
1.3 Álgebras Graduadas . . . . .	21
1.4 Polinômios Multihomogêneos, Multilineares e Próprios . . . . .	25
1.5 Polinômios Centrais e T-espaços . . . . .	28
1.6 Tabelas de Young e a Ação do Grupo Linear Geral $GL_m$ . . . . .	30
<b>2 Identidades Polinomiais para a Álgebra de Grassmann</b>	<b>35</b>
2.1 Identidades Polinomiais para $E$ , $charK = 0$ . . . . .	35
2.2 Identidades Polinomiais para $E$ , $charK = p > 0$ . . . . .	37
2.3 Identidades para a Álgebra de Grassmann sem unidade . . . . .	42
<b>3 Identidades <math>\mathbb{Z}_2</math>-graduadas para <math>E</math>, <math>charK = p</math></b>	<b>45</b>
3.1 $\mathbb{Z}_2$ -gradações para $E$ . . . . .	45
3.2 Polinômios Y-próprios . . . . .	47
3.3 Identidades Graduadas para $E_{k^*}$ . . . . .	49
3.4 Identidades Graduadas para $E_\infty$ . . . . .	56
3.5 Identidades Graduadas para $E$ . . . . .	58
3.6 Identidades $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para $E_k$ . . . . .	59
3.6.1 A estrutura $\Gamma_{0,m}(E_k)$ . . . . .	62
3.6.2 A estrutura $\Gamma_{1,m}(E_k)$ . . . . .	72
3.6.3 O $T_2$ -ideal para $E_k$ . . . . .	74

<b>4</b>	<b>Polinômios Centrais para a Álgebra de Grassmann</b>	<b>78</b>
4.1	Preliminares . . . . .	78
4.2	$C(E)$ quando $\text{char}K = 0$ . . . . .	83
4.3	$C(E)$ quando $\text{char}K > 2$ . . . . .	84
4.4	Álgebra de Grassmann não-unitária . . . . .	91
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

# Introdução

A PI-teoria (do inglês Polynomial Identity) é uma sub-área importante e recente da teoria de anéis, que trata de álgebras com identidades polinomiais. Sendo  $A$  uma álgebra dizemos que o polinômio  $f(x_1, \dots, x_n)$  nas variáveis não-comutativas  $x_1, \dots, x_n$  é uma **identidade polinomial** para  $A$  se  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  para quaisquer elementos de  $A$ . Se existe uma identidade não nula,  $A$  é dita uma PI-álgebra. As álgebras comutativas, álgebras de dimensão finita, álgebras nilpotentes e a álgebra de Grassmann são exemplos de PI-álgebras.

Historicamente, o desenvolvimento da PI-Teoria teve início por volta de 1930, embora de forma implícita, com os trabalhos dos matemáticos Dehn [13] e Wagner [49], mas foi a partir de 1948 que esta teoria desenvolveu-se mais intensamente após o artigo de Kaplansky [22], onde o autor mostrou que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples e de dimensão finita. No mesmo período ele levantou o seguinte questionamento: "qual seria o menor grau de identidade polinomial satisfeita pela álgebra das matrizes de ordem  $n$  sobre um corpo?" A resposta para este questionamento foi dada por Amitsur e Levitzki [2], em 1950, quando eles mostraram que o polinômio  $s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}$  (polinômio standard de grau  $2n$ ) é a identidade de menor grau satisfeita pela álgebra das matrizes de ordem  $n$ , a menos de multiplicação por escalar. Anos mais tarde, outros matemáticos como Swan [46], Razmyslov [36] e Rosset [40] apresentaram outras demonstrações para este resultado. Rosset conseguiu dar uma prova mais concisa usando propriedades básicas da álgebra de Grassmann e do traço matricial.

O Teorema de Amitsur e Levitzki foi de extrema importância no desenvolvimento da PI-álgebra e motivou outros trabalhos, dentre eles o Teorema de Amitsur [1], o qual

garante que dada uma PI-álgebra existem  $k, m \geq 0$  tais que  $s_k^m(x_1, \dots, x_k)$  é uma identidade para esta álgebra. No entanto, a álgebra de Grassmann  $E$  de um espaço vetorial de dimensão infinita sobre um corpo de característica zero não satisfaz nenhuma identidade standard. Mas, veremos no Capítulo 2 que sobre um corpo de característica positiva  $p > 2$  a álgebra de Grassmann  $E$  satisfaz a identidade standard  $s_{p+1}$ .

Denotaremos por  $Id(A)$  o conjunto de todas as identidades polinomiais satisfeitas pela álgebra  $A$ . É fácil ver que  $Id(A)$  é um T-ideal, ou seja, um ideal invariante por todos os endomorfismos de  $K\langle X \rangle$ . Deste modo, se desejarmos descrever todas as identidades satisfeitas por  $A$  basta encontrar os geradores de  $Id(A)$  como T-ideal. A questão da existência de um conjunto finito de geradores para  $Id(A)$  levantada por W. Specht, em 1950, ficou conhecida como *problema de Specht* e foi solucionada por Kemer em [25] e [26]. Vale ressaltar que nesses trabalhos Kemer não mostrou como determinar tais geradores, problema este que ainda se encontra em aberto para muitas álgebras associativas.

Em nosso trabalho iremos descrever as identidades e os polinômios centrais para a Álgebra de Grassmann (ou Álgebra exterior). A estrutura dessa álgebra foi introduzida em 1844 por Hermann Grassmann (1809-1877), em sua obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* que pode ser traduzida como “teoria da extensão” ou “teoria das magnitudes extensivas”. A Álgebra exterior que hoje leva o nome de seu criador surgiu para solucionar o seguinte problema: dado um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo  $K$  é possível construir, da maneira mais geral possível, uma álgebra  $A$  gerada por  $V$  de modo que  $v^2 = 0$  em  $A$ , para todo  $v \in V$ .

Dizemos que uma álgebra  $A$  é  $\mathbb{Z}_2$ -graduada (ou superálgebra) se pode ser decomposta como soma direta de subespaços  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$  tais que  $A^{(i)}A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$  para  $i = 0, 1$ . A álgebra de Grassmann com a sua  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural é um exemplo importante de superálgebra. Dada uma superálgebra qualquer  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$  podemos obter uma nova superálgebra a partir da  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural de  $E$ , a qual é chamada de *envolvente de Grassmann* de  $A$  e é definida por  $E(A) := (E^{(0)} \otimes A^{(0)}) \oplus (E^{(1)} \otimes A^{(1)})$ . A envolvente de Grassmann é uma ferramenta básica para o estudo de *variedades de álgebras* (i. é, uma classe de álgebras que satisfazem um conjunto dado de identidades) que não podem ser geradas por álgebras finitamente geradas. Kemer em [25] mostrou que toda variedade pode ser gerada pela envolvente de Grassmann de uma superálgebra

de dimensão finita. Em nosso trabalho não iremos abordar essa questão, e caso o leitor queira mais detalhes veja [25] e [27].

Além das identidades polinomiais, outro conceito importante em PI-teoria é o de **polinômios centrais**. Um polinômio  $f(x_1, \dots, x_n)$  é dito central para uma álgebra  $A$ , se quando avaliado em quaisquer elementos de  $A$  resulta em um elemento pertencente ao centro de  $A$ .

Em 1956, Kaplansky [23] apresentou uma lista de problemas que motivou uma série de pesquisas relevantes durante décadas. Um desses problemas envolvia a existência de polinômios centrais para a álgebra de matrizes  $M_n(K)$  para  $n > 2$  (para o caso  $n = 2$  já era conhecido o polinômio central de Hall). Este problema foi solucionado em 1972-1973, por Formanek [17] e Razmyslov [37]. Posteriormente baseado em resultados de Amitsur, Kharchenko [29] obteve uma outra prova da existência de polinômios centrais para  $M_n(K)$ . Para mais resultados sobre os polinômios centrais veja [16] e [19].

A importância da álgebra de Grassmann tanto em PI-teoria como em outras áreas nos motivou a estudar os conceitos de identidades polinomiais ordinárias, identidades polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas e polinômios centrais para esta álgebra.

Nosso trabalho está organizado em quatro capítulos. No capítulo nos preocupamos em apresentar as definições e os resultados necessários para a leitura dos demais capítulos, e para não sobrecarregar a leitura algumas demonstrações foram omitidas (as quais podem ser encontradas em [19] e [15]).

No capítulo 2, fizemos um estudo sobre o T-ideal para a álgebra de Grassmann sobre um corpo de característica zero e sobre um corpo de característica positiva diferente de dois. Além disso apresentamos os principais resultados sobre o T-ideal da álgebra de Grassmann sem unidade, os quais serão utilizados no capítulo 3.

No terceiro capítulo trabalhamos com o artigo de Centrone [8], no qual, usando argumentos similares aos de Di Vincenzo e Da Silva [48], ele determina uma base para as identidades graduadas de cada uma das  $\mathbb{Z}_2$ -gradações de  $E$  sobre um corpo de característica positiva em que os geradores  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , são homogêneos.

No quarto capítulo apresentamos a descrição dos polinômios centrais feita em [7]. Neste artigo os autores provaram que quando lidamos com um corpo de característica zero  $C(E)$  (o T-espço dos polinômios centrais) é um T-espço finitamente gerado o

que não ocorre quando a característica é positiva. A saber, esse é o primeiro exemplo de uma álgebra associativa cujo  $T$ -espaço dos polinômios centrais não é finitamente gerado.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos e resultados relevantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. Em todo capítulo  $K$  denotará um corpo e, a menos de menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre  $K$ .

### 1.1 Álgebras e Álgebras Envolventes

**Definição 1.1.1** *Uma  $K$ -álgebra (ou álgebra sobre  $K$  ou simplesmente álgebra) é um par  $(A, *)$ , onde  $A$  é um  $K$ -espaço vetorial e “ $*$ ” é uma operação bilinear em  $A$ , ou seja  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  satisfaz:*

$$(i) (a + b) * c = a * c + b * c;$$

$$(ii) a * (b + c) = a * b + a * c;$$

$$(iii) (\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b).$$

para quaisquer  $a, b, c \in A$  e  $\lambda \in K$ .

A operação “ $*$ ” é chamada de produto ou multiplicação. Por simplicidade a  $K$ -álgebra  $(A, *)$  será denotada por  $A$ , ficando o produto subentendido, e escreveremos  $ab$  ao invés de  $a*b$ , para  $a, b \in A$ . Dados  $a, b, c \in A$  definimos  $abc$  como sendo  $(ab)c$  e, de um modo geral, definimos  $a_1 a_2 \dots a_n \in A$  como sendo  $(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n$ , para quaisquer  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ .

**Definição 1.1.2** *Seja  $A$  uma  $K$ -álgebra. Uma **base** de  $A$  é definida como sendo uma base do espaço vetorial  $A$ . Definimos a **dimensão** de  $A$  ( $\dim A$ ) como sendo a dimensão do espaço vetorial  $A$ .*

**Definição 1.1.3** *Seja  $A$  uma  $K$ -álgebra. Diremos que a álgebra  $A$  é :*

- (i) **Associativa**, se  $(ab)c = a(bc)$  para quaisquer  $a, b, c \in A$ ;
- (ii) **Comutativa**, se  $ab = ba$  para quaisquer  $a, b \in A$ ;
- (iii) **Unitária** (ou com unidade) se existe  $1_A \in A$  tal que  $1_A a = a 1_A = a$  para todo  $a \in A$ ;
- (iv) **Álgebra de Lie** se valem  $a^2 = aa = 0$  e  $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$  (identidade de Jacobi) para quaisquer  $a, b, c \in A$

**Observação 1.1.4** *Sejam  $A$  uma álgebra e  $S$  um conjunto gerador de  $A$  (como espaço vetorial). Não é difícil mostrar que:*

- (i)  $A$  é associativa se, e somente se,  $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$ , para quaisquer  $x_1, x_2, x_3 \in S$ .
- (ii)  $A$  é comutativa se, e somente se,  $x_1 x_2 = x_2 x_1$ , para quaisquer  $x_1, x_2 \in S$ .
- (iii)  $A$  é unitária se, e somente se, existe  $1_A \in A$  tal que  $1_A x = x 1_A = x$ , para todo  $x \in S$ .

Sendo  $A$  uma álgebra unitária e  $\lambda \in K$ , identificaremos  $\lambda$  com o elemento  $\lambda 1_A$  de  $A$  e o corpo  $K$  como o subconjunto  $\{\lambda 1_A; \lambda \in K\}$  (subespaço gerado por  $1_A$ ). Apresentaremos a seguir exemplos importantes de álgebras.

**Exemplo 1.1.5** *Sendo  $K$  um corpo e  $n \in \mathbb{N}$ , o  $K$ -espaço vetorial  $M_n(K)$  munido de seu produto usual é uma  $K$ -álgebra associativa com unidade. Destacamos nesta álgebra as matrizes elementares  $E_{i,j}$  que possui 1 na entrada da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna e 0 nas demais. É fácil ver que elas formam uma base para  $M_n(K)$  e assim  $\dim_K M_n(K) = n^2$ . De um modo geral, se  $A$  é uma  $K$ -álgebra, o  $K$ -espaço vetorial de todas as matrizes de ordem  $n \times n$  com entradas em  $A$ , munido do produto usual de matrizes é uma  $K$ -álgebra.*

**Exemplo 1.1.6** *Sejam  $V$  um  $K$ -espaço e  $\mathcal{L}(V)$  o  $K$ -espaço vetorial dos operadores lineares de  $V$ . Munido da composição,  $\mathcal{L}(V)$  é uma  $K$ -álgebra associativa unitária.*

**Exemplo 1.1.7** *O espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido do produto vetorial é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra, em particular é uma álgebra de Lie.*

**Exemplo 1.1.8** O espaço vetorial  $K[x]$  dos polinômios na variável  $x$  com coeficientes em  $K$ , munido do produto usual de polinômios é uma álgebra associativa, comutativa e unitária. De um modo geral, considerando o conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  podemos definir a álgebra comutativa dos polinômios em  $n$  variáveis, a qual denotaremos por  $K[x_1, \dots, x_n]$ .

Agora veremos o nosso principal objeto de estudo nesse trabalho.

**Exemplo 1.1.9 (Álgebra de Grassmann ou Álgebra Exterior)** Sejam  $K$  um corpo e  $V$  o espaço vetorial sobre  $K$  de dimensão infinita enumerável com base  $e_1, e_2, \dots$ . Denotamos a álgebra exterior sobre  $K$  por  $E$ , a qual é associativa e unitária e tem como base o conjunto

$$\{1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid m \in \mathbb{N}, i_1 < i_2 < \dots < i_m\}$$

e com a multiplicação induzida por  $e_i^2 = 0$  e  $e_i e_j = -e_j e_i$ . Destacamos em  $E$  os subespaços:

$$E^{(0)} = \langle 1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid m \text{ é par}, i_1 < i_2 < \dots < i_m \rangle \text{ e}$$

$$E^{(1)} = \langle e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid m \text{ é ímpar}, i_1 < i_2 < \dots < i_m \rangle.$$

Claramente  $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ . Uma vez que  $e_i e_j = -e_j e_i$ , temos

$$(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m})(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_n}) = (-1)^{mn}(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_n})(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m}),$$

para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ . Daí  $ab = ba$  para quaisquer  $a, b \in E^{(0)}$  e  $xy = -yx$  para quaisquer  $x, y \in E^{(1)}$ . Note que se  $\text{char}K = 2$ , então  $E$  é uma álgebra comutativa, o que não será interessante neste trabalho, por isso iremos considerar  $\text{char}K \neq 2$ .

Considere  $E'$  o subespaço de  $E$  gerado por  $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid m \in \mathbb{N}, i_1 < \dots < i_m\}$ . Temos que  $E'$ , munido da operação de  $E$ , é uma álgebra chamada álgebra exterior sem unidade. Observe que  $E' = E'^{(0)} \oplus E'^{(1)}$ , onde  $E'^{(0)}$  é o subespaço gerado por  $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid m \text{ é par}, i_1 < i_2 < \dots < i_m\}$ .

**Exemplo 1.1.10** Seja  $A$  uma  $K$ -álgebra sem unidade e considere o produto direto dos  $K$ -espaços vetoriais  $K$  e  $A$ ,  $K \times A = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in K \text{ e } a \in A\}$ . Defina o produto:

$$(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1a_2 + \lambda_2a_1 + a_1a_2).$$

Munido deste produto,  $K \times A$  é uma  $K$ -álgebra, a qual denotaremos por  $K \oplus A$ . Observe que  $K \oplus A$  possui unidade, a saber  $(1_A, 0_A)$  e tal construção é chamada de **adjunção formal da unidade** a  $A$ .

Assim, a álgebra exterior  $E$  pode ser vista como  $E = K \oplus E'$ .

Sejam  $a, b \in A$ , definimos o **comutador** de  $a$  e  $b$ , denotado por  $[a, b]$ , como sendo  $[a, b] = ab - ba$ . De um modo geral, definimos o comutador de comprimento  $n$  como sendo  $[a_1, a_2, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$ , onde  $a_i \in A$ . A partir de um cálculo direto, podemos mostrar que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b. \quad (1.1)$$

Fazendo indução sobre  $n$  podemos mostrar que:

$$[a_1 a_2 \dots a_n, c] = \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \dots a_n. \quad (1.2)$$

O próximo resultado nos permite obter uma estrutura de álgebra a partir de um espaço vetorial, desde que se conheça uma base para o mesmo.

**Proposição 1.1.11** *Sejam  $A$  um espaço vetorial e  $\beta$  uma base de  $A$ . Dada  $f : \beta \times \beta \rightarrow A$ , existe uma única aplicação bilinear  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  tal que  $u_1 * u_2 = f(u_1, u_2)$  para quaisquer  $u_1, u_2 \in \beta$ .*

**Demonstração:** Tomemos  $a \in A$ . Então  $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$ , onde  $\alpha_u \in K$  e o conjunto  $\{u \in \beta; \alpha_u \neq 0\}$  é finito. Desta forma, dados  $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$ , e  $b = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \in A$ , defina  $*$  :  $A \rightarrow A$  da seguinte maneira:

$$a * b = \sum_{u, v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v),$$

observe que “ $*$ ” está bem definida pois se  $\sum_{v \in \beta} \gamma_v v = \sum_{v \in \beta} \gamma'_v v$ , com  $\lambda_v, \lambda'_v \in K$ , então  $\lambda_v = \lambda'_v$  para todo  $v \in \beta$ . Considerando agora  $\mu \in \beta$  e  $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$ ,  $a_1 = \sum_{u \in \beta} \alpha'_u u$ ,  $b = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v$ , temos

$$\begin{aligned} (a + a_1) * b &= \sum_{u \in \beta} (\alpha_u + \alpha'_u) u * \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \\ &= \sum_{u, v \in \beta} (\alpha_u + \alpha'_u) \lambda_v f(u, v) \\ &= \sum_{u, v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) + \sum_{u, v \in \beta} \alpha'_u \lambda_v f(u, v) \\ &= (a * b) + (a_1 * b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu(a * b) &= \sum_{u \in \beta} \mu \alpha_u \lambda_v f(u, v) \\ &= \sum_{u \in \beta} (\mu \alpha_u) u * \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \\ &= (\mu a) * b. \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo, mostra-se que  $\mu(a * b) = a * (\mu b)$  e que  $a * (b_1 + b_2) = a * b_1 + a * b_2$ , para quaisquer  $b_1, b_2 \in A$ . Logo, “ $*$ ” é bilinear.

Considerando agora  $u_1, u_2 \in \beta$ , temos que  $u_1 = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$ , onde  $\alpha_u = 1$  se  $u = u_1$ , e  $\alpha_u = 0$  se  $u \neq u_1$  e  $u_2 = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v$ , onde  $\lambda_v = 1$  se  $v = u_2$  e  $\lambda_v = 0$  se  $v \neq u_2$ . Daí,

$$u_1 * u_2 = \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) = \alpha_{u_1} \lambda_{u_2} f(u, v) = f(u, v),$$

e obtemos que  $*$  estende  $f$ .

Mostremos agora a unicidade da aplicação. Suponha que  $\star : A \times A \rightarrow A$  estende  $f$ . Então deveríamos ter

$$\begin{aligned} a \star b &= \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v (u * v) \\ &= \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) \\ &= a * b. \end{aligned}$$

Portanto, “ $*$ ” e “ $\star$ ” são iguais. ■

**Definição 1.1.12** *Seja  $A$  uma  $K$ -álgebra. Dizemos que :*

- (i) *um subespaço  $B$  de  $A$  é uma **subálgebra** de  $A$  se é multiplicativamente fechado, isto é,  $b_1 b_2 \in B$  para quaisquer  $b_1, b_2 \in B$ ;*
- (ii) *um subespaço  $I$  de  $A$  é um **ideal**(bilateral) de  $A$  se  $AI, IA \subseteq I$ , ou seja, se  $ax, xa \in I$  para quaisquer  $a \in A$  e  $x \in I$ .*

**Observação 1.1.13** *Definimos também ideais unilaterais.  $I$  é dito ideal à direita (respectivamente à esquerda) se  $IA \subseteq I$  (respectivamente  $AI \subseteq I$ ).*

**Exemplo 1.1.14** *Considere  $k \in \mathbb{N}$  e  $E_k$  o subespaço de  $E$  gerado por  $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_l} \mid l \leq k\}$ . Temos que  $E_k$  é uma subálgebra de  $E$ .*

**Exemplo 1.1.15** *Seja  $A$  uma álgebra associativa. O conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in A\}$$

*é uma subálgebra de  $A$  chamado de **centro de  $A$** . Da Álgebra Linear, temos que dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K\}$ . Pelo Exemplo 1.1.9, obtemos que  $Z(E) = E^0$ .*

**Observação 1.1.16** *Seja  $A$  uma álgebra,  $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  uma família de ideais de  $A$  e  $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$  uma família de subálgebras de  $A$ , é fácil ver que  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$  é um ideal de  $A$  e  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$  é uma subálgebra de  $A$ .*

Sejam  $A$  uma álgebra e  $I$  um ideal de  $A$ . Definimos a relação de congruência módulo  $I$  por:

**Definição 1.1.17** Sendo  $a, b \in A$ ,  $a$  é dito congruente a  $b$  módulo  $I$  se  $a - b \in I$ .

Tal relação será denotada por  $a \equiv b \pmod{I}$  ou  $a \equiv_I b$ . O conjunto  $\{a + i | i \in I\}$  é chamado de *classe de equivalência de  $a$  módulo  $I$*  e será denotado por  $\bar{a}$  ou  $a + I$ . O conjunto de todas as classes de equivalência módulo  $I$  de  $A$  será representado por  $A/I$ .

Considere o  $K$ -espaço vetorial  $A/I$ , cujas operações são dadas por:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \text{ e } \lambda \bar{a} = \overline{\lambda a},$$

para quaisquer  $a, b \in A$  e  $\lambda \in K$ . Considerando agora, a multiplicação

$$\begin{aligned} \cdot : A/I \times A/I &\rightarrow A/I \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \overline{a \cdot b} = \bar{a} \bar{b} \end{aligned}$$

como  $I$  é um ideal, temos que ela está bem definida e faz de  $A/I$  uma álgebra chamada de **Álgebra Quociente de  $A$  por  $I$** .

**Definição 1.1.18** Sendo  $A$  uma álgebra e  $S$  um subconjunto não vazio de  $A$ . Definimos:

- (i) A **subálgebra de  $A$  gerada por  $S$** , denotada por  $K\langle S \rangle$ , como sendo a interseção de todas as subálgebras de  $A$  que contêm  $S$  (ou  $S \cup 1_A$ , caso  $A$  seja unitária).
- (ii) O **ideal de  $A$  gerado por  $S$** , denotado por  $I_S$ , como sendo a interseção de todos os ideais de  $A$  que contêm  $S$ .

Da Definição anterior, segue que  $K\langle S \rangle$  é a “menor” subálgebra de  $A$  que contém  $S$ , e o ideal de  $A$  gerado por  $S$  é o “menor” ideal de  $A$  contendo  $S$ . Se  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq A$ , então  $K\langle S_1 \rangle \subseteq K\langle S_2 \rangle \subseteq A$  e o ideal gerado por  $S_1$  está contido no ideal gerado por  $S_2$ .

Sendo  $A$  uma álgebra, dizemos que  $S \subseteq A$  gera  $A$  (como álgebra) ou é um *um conjunto gerador para a álgebra  $A$* , se  $K\langle S \rangle = A$ . Além disso,  $A$  é dita *uma álgebra finitamente gerada* se existe  $S \subseteq A$  finito tal que  $K\langle S \rangle = A$ . Sendo  $A$  uma álgebra associativa unitária, não é difícil ver que,  $K\langle S \rangle$  coincide com o subespaço de  $A$  gerado por  $\{s_1 s_2 \dots s_n | n \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$  e o ideal de  $A$  gerado por  $S$  coincide com o subespaço de  $A$  gerado por  $\{asb | a, b \in A, s \in S\}$ .

**Definição 1.1.19** *Sejam  $A$  e  $B$  duas álgebras. Uma transformação linear  $\Phi : A \rightarrow B$  é dita um **homomorfismo de álgebras** se  $\Phi(a_1a_2) = \Phi(a_1)\Phi(a_2)$  para quaisquer  $a_1, a_2 \in A$ . Se  $A$  e  $B$  possuem unidade, exigimos que  $\Phi(1_A) = 1_B$*

Dizemos que  $\Phi$  é:

- (i) *um monomorfismo de álgebra* (ou mergulho, ou imersão) se  $\Phi$  é um homomorfismo injetor;
- (ii) *um isomorfismo de álgebras* se  $\Phi$  é um homomorfismo de álgebras bijetor, neste caso diremos que  $A$  e  $B$  são álgebras isomorfas e denotaremos  $A \simeq B$ ;
- (iii) *um automorfismo da álgebra  $A$*  se  $\Phi : A \rightarrow A$  é um isomorfismo;
- (iv) *um endomorfismo da álgebra  $A$*  se  $\Phi : A \rightarrow A$  é um homomorfismo. Denotaremos por  $End(A)$  o conjunto de todos os endomorfismos de  $A$ .

Seja  $\Phi : A \rightarrow B$  um homomorfismo de álgebras denotamos o **núcleo** de  $\Phi$  por  $Ker\Phi = \{x \in A; \Phi(x) = 0_B\}$  e a **imagem** de  $\Phi$  por  $Im\Phi = \{b \in B; \Phi(a) = b\}$ . É fácil mostrar que  $Ker\Phi$  é um ideal de  $A$  e  $Im\Phi$  é uma subálgebra de  $B$ .

A seguir definiremos álgebras livres em uma classe de álgebras associativas unitárias. Os conceitos básicos de PI-teoria, que serão apresentados nas próximas seções, estão definidos nestas álgebras.

**Definição 1.1.20** *Seja  $\mathfrak{B}$  uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra  $F \in \mathfrak{B}$  é uma **álgebra livre** de  $\mathfrak{B}$  se existe um subconjunto  $X$  que gera  $F$  (como álgebra) tal que para toda álgebra  $A \in \mathfrak{B}$  e toda aplicação  $h : X \rightarrow A$  existe um único homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow A$  estendendo  $h$ . Nestas condições dizemos que  $F$  é livremente gerada por  $X$  na classe  $\mathfrak{B}$ .*

**Exemplo 1.1.21** *Considerando a álgebra  $K[x_1, \dots, x_n]$ , note que esta álgebra é gerada pelo conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Sejam  $A$  uma álgebra,  $a \in A$  e a aplicação  $h : X \rightarrow A$ ,  $h(x_i) = a_i$ . Temos que o homomorfismo  $\varphi : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$  dado por  $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(a_1, \dots, a_n)$  estende  $h$ . Portanto,  $K[x_1, \dots, x_n]$  é uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas, comutativas e unitárias, livremente gerada pelo conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .*

Agora construiremos uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. Para isso considere  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  um conjunto não-vazio e enumerável

cujos elementos iremos chamar de variáveis não-comutativas. Uma palavra em  $X$  é uma sequência  $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_{i_j} \in X$ , se  $n = 0$  diremos que a palavra é vazia, a qual denotaremos por 1. Definimos o tamanho da palavra  $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$  como sendo  $n$ . Dizemos que as palavras  $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$  e  $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$  são iguais se  $n = m$  e  $i_1 = j_1 \dots i_n = j_m$ .

Seja  $K\langle X \rangle$  o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras em  $X$ . Tal espaço munido do produto (chamado de concatenação)

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$$

é uma álgebra associativa unitária e  $X$  gera  $K\langle X \rangle$  como álgebra.

Os elementos da álgebra  $K\langle X \rangle$  são chamados de *polinômios*, os quais são somas formais de *monômios* que por sua vez são produtos formais de um escalar por uma palavra em  $X$ .

**Proposição 1.1.22** *A álgebra  $K\langle X \rangle$  é livre na classe das álgebras associativas unitárias e livremente gerada por  $X$*

**Demonstração:** Sejam  $\mathfrak{B}$  a classe das álgebras associativas unitárias e  $A \in \mathfrak{B}$ . Considere a aplicação  $h : X \rightarrow A$ , dada por  $h(x_i) = a_i$ , para  $i \in \mathbb{N}$ . Então existe uma única aplicação linear  $\varphi_h : K\langle X \rangle \rightarrow A$  tal que  $\varphi_h(1) = 1_A$  e  $\varphi_h(x_1 \dots x_n) = a_1 \dots a_n$ . Temos que  $\varphi_h$  é o único homomorfismo que estende  $h$ . Portanto,  $K\langle X \rangle$  é livre na classe das álgebras associativas unitárias. ■

Se  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ , denotaremos por  $f(a_1, \dots, a_n)$  a imagem de  $f$  por  $\varphi_h$ , onde  $f(a_1, \dots, a_n)$  é um elemento de  $A$  obtido pela substituição de  $x_i$  por  $a_i$  em  $f$ .

Denotaremos por  $K_1\langle X \rangle$  a subálgebra sem unidade de  $K\langle X \rangle$ . De modo análogo à proposição anterior temos que  $K_1\langle X \rangle$  é livre na classe de todas as álgebras associativas. Note que  $K\langle X \rangle = K_1\langle X \rangle \oplus \langle 1 \rangle$ , onde  $\langle 1 \rangle$  é o subespaço de  $K\langle X \rangle$  gerado pela unidade.

Dada uma álgebra  $A$  associativa, podemos obter uma nova álgebra  $A^-$  munida do produto  $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ . Conforme vimos na Definição 1.1.3,  $A^-$  é uma álgebra de Lie.

**Definição 1.1.23** *Se uma álgebra de Lie  $G$  é isomorfa a uma subálgebra de  $A^-$  dizemos que  $A$  é uma **Álgebra Envolvente** de  $G$ .*

**Exemplo 1.1.24** *Seja  $G$  uma álgebra de Lie com base  $\{u, v\}$  tal que  $u * v = v$ . A álgebra  $M_2(K)$  é uma álgebra envolvente de  $G$ , pois a subálgebra  $M_2(K)^-$  gerada por  $\{E_{11}, E_{12}\}$  é isomorfa a  $G$ .*

**Definição 1.1.25** *Seja  $G$  uma álgebra de Lie. Dizemos que a álgebra associativa  $U = U(G)$  é uma **álgebra universal envolvente de  $G$**  se  $G$  é uma subálgebra de  $U(G)^-$  e além disso,  $U$  satisfaz a propriedade universal, a qual assegura que para qualquer álgebra associativa  $A$  e qualquer homomorfismo  $\Phi : G \rightarrow A^-$  existe um único homomorfismo  $\varphi : U(G) \rightarrow A$  que estende  $\Phi$ .*

**Exemplo 1.1.26** *Seja  $G$  a álgebra de Lie abeliana (isto é  $[g_1, g_2] = 0$  para todos  $g_1, g_2 \in G$ ) com  $\dim G = n$ . Considere  $\{g_1, \dots, g_n\}$  uma base de  $G$ , a álgebra  $K[g_1, \dots, g_n]$  contém  $G$  e é uma álgebra envolvente de  $G$ . Não é difícil ver que  $K[g_1, \dots, g_n]$  satisfaz a propriedade universal, portanto é uma álgebra universal envolvente de  $G$ .*

Os próximos resultados serão úteis na Seção 1.4 e nos auxiliará a determinar uma base para  $K\langle X \rangle$ , essa ferramenta também será utilizada nos Capítulos 2 e 3.

**Teorema 1.1.27 (Poincaré - Birkoff - Witt)** *Toda álgebra de Lie possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envolvente  $U(G)$ . Se  $G$  tem base  $\{e_i | i \in I\}$  e o conjunto de índices é ordenado, então  $U(G)$  tem base*

$$e_{i_1} \dots e_{i_p} | i_1 \leq \dots \leq i_p, p = 0, 1, \dots$$

**Demonstração:** Veja a prova em [15], p.11. ■

**Teorema 1.1.28 (Witt)** *A subálgebra de Lie  $L(X)$  de  $K\langle X \rangle^-$  gerada por  $X$  é livre na classe das álgebras de Lie com  $X$  como conjunto de geradores livres. Além disso,  $U(L(X)) = K\langle X \rangle$ .*

**Demonstração:** Inicialmente mostraremos que  $L(X)$  é livre na classe das álgebras de Lie. Considere  $G$  uma álgebra de Lie e a aplicação  $h : X \rightarrow G$ , dada por  $h(x_i) = g_i$ . Sejam  $A$  uma álgebra envolvente de  $G$  e o homomorfismo  $\psi : K\langle X \rangle \rightarrow A$  que estende  $h$ . Obtemos então um homomorfismo  $\psi : K\langle X \rangle^- \rightarrow A^-$  de álgebras de Lie e denotaremos por  $\phi : L(X) \rightarrow A^-$  a restrição de  $\psi$  a  $L(X)$ .

Note que  $\phi(x_i) = g_i$  e  $X = \{x_i; i \in I\}$  gera  $L(X)$ . Portanto,  $\phi(L(X)) \subseteq G$  e obtemos um homomorfismo  $\psi : L(X) \rightarrow G$ , com  $\psi(x_i) = g_i$ .

Mostremos agora que  $U(L(X)) = K\langle X \rangle$ . É imediato que  $L(X) \subseteq K\langle X \rangle$ . Suponha que  $\phi : L(X) \rightarrow A^-$  é um homomorfismo de álgebras de Lie, onde  $A$

é uma álgebra associativa. Seja  $\psi : K\langle X \rangle \rightarrow A$  o único homomorfismo tal que  $\psi(x_i) = \phi(x_i) = a_i, i \in I$ . Como  $\psi(x_i) = \phi(x_i)$  para todo  $x_i \in X$ ,  $X$  gera  $L(X)$ ,  $\psi$  é o único estendendo  $\phi$ . Portanto  $U(L(X)) = K\langle X \rangle$ . ■

## 1.2 PI-Álgebras, T-ideais e Variedades de Álgebras

De agora em diante, a menos que se mencione o contrário  $X$  irá denotar o conjunto enumerável  $\{x_1, x_2, \dots\}$ .

**Definição 1.2.1** *Sejam  $A$  uma álgebra associativa e  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ . Dizemos que  $f = 0$  é uma **identidade polinomial de  $A$**  (ou **identidade polinomial ordinária de  $A$** ) se  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Neste caso diremos que  $A$  satisfaz a identidade  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .*

É imediato que o polinômio  $f \equiv 0$  é uma identidade polinomial para qualquer álgebra  $A$ .

**Observação 1.2.2** *É possível mostrar que  $f$  é uma identidade polinomial de  $A$  se, e somente se,  $f$  pertence aos núcleos de todos homomorfismos de  $K\langle X \rangle$  em  $A$ .*

**Definição 1.2.3** *Se  $A$  satisfaz uma identidade polinomial  $f \neq 0$ , dizemos que  $A$  é uma **PI-álgebra**.*

Denotaremos por  $T(A)$  o conjunto de todas as identidades polinomiais para  $A$ . Sendo  $A$  e  $B$  álgebras, dizemos que  $A$  e  $B$  são **PI-equivalentes** se  $T(A) = T(B)$ .

**Exemplo 1.2.4** *Seja  $A$  uma álgebra comutativa. Então  $[x_1, x_2] \in K\langle X \rangle$  é uma identidade polinomial de  $A$ . Em particular, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

**Exemplo 1.2.5** *Seja  $A$  uma álgebra associativa de dimensão finita e  $\dim A < n$ . Então  $A$  satisfaz a **identidade standard** de grau  $n$*

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde  $S_n$  é o grupo simétrico de grau  $n$ . Assim toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.

**Exemplo 1.2.6 (Teorema Amitsur-Levitzki)** *A álgebra  $M_n(K)$  das matrizes de ordem  $n \times n$  satisfaz a identidade standard de grau  $2n$ . Portanto,  $M_n(K)$  é uma PI-álgebra. Para mais detalhes veja [15], p.79.*

**Exemplo 1.2.7** A álgebra de Grassmann  $E$  satisfaz a identidade  $[x_1, x_2, x_3]$ . De fato, sejam  $e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_m}$  e  $e_{k_1} \dots e_{k_l}$  elementos da base de  $E$ . Observe que:

$$[e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_m}] = (1 - (-1)^{n \cdot m}) e_{i_1} \dots e_{i_n} e_{j_1} \dots e_{j_m}.$$

Se  $[e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_m}] \neq 0$ , então  $n$  e  $m$  são ímpares assim  $e_{i_1} \dots e_{i_n} e_{j_1} \dots e_{j_m} \in E^{(0)}$  dessa forma  $[e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_m}, e_{k_1} \dots e_{k_l}] = 0$  para qualquer  $l \in \mathbb{N}$ .

Se  $[e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_m}] = 0$ , então  $[e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_m}, e_{k_1} \dots e_{k_l}] = 0$ . Portanto,  $E$  é uma PI-álgebra.

**Definição 1.2.8** Um ideal  $I$  de  $K\langle X \rangle$  é um  $T$ -ideal se  $\varphi(I) \subseteq I$ , para todo  $\varphi \in \text{End}(K\langle X \rangle)$ .

**Proposição 1.2.9** Se  $A$  é uma álgebra então  $T(A)$  é um  $T$ -ideal de  $K\langle X \rangle$ . Reciprocamente, se  $I$  é um  $T$ -ideal de  $K\langle X \rangle$ , então existe alguma álgebra  $B$  tal que  $T(B) = I$ .

**Demonstração:** É fácil ver que  $T(A)$  é um ideal de  $K\langle X \rangle$ . Resta mostrar que  $T(A)$  é invariante para todo endomorfismo  $\varphi \in \text{End}(K\langle X \rangle)$ , tomemos arbitrariamente  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in T(A)$  e  $\varphi \in \text{End}(K\langle X \rangle)$ . Note que se  $\psi : K\langle X \rangle \rightarrow A$  é um homomorfismo qualquer de álgebras, então  $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$  pois  $\psi \circ \varphi : K\langle X \rangle \rightarrow A$  é um homomorfismo de álgebras e  $f \in T(A)$ . Portanto,  $\varphi(f) \in \text{Ker} \psi$  e deste modo  $\varphi(f) \in T(A)$ .

Dado  $I$  um  $T$ -ideal de  $K\langle X \rangle$ , consideremos a álgebra quociente  $B = K\langle X \rangle / I$  e a projeção canônica  $\pi : K\langle X \rangle \rightarrow K\langle X \rangle / I$ . Se  $f \in T(B)$ , então  $f \in \text{Ker} \pi$ . Como  $\text{Ker} \pi = I$ , temos que  $T(B) \subseteq I$ . Por outro lado, se  $f(x_1, \dots, x_n) \in I$  e  $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$ , então  $f(g_1, \dots, g_n) \in I$  e daí  $f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \dots, g_n)} = \overline{0}$ . Assim,  $I \subseteq T(B)$  e como queríamos demonstrar  $T(B) = I$ . ■

É possível mostrar que a interseção de uma família qualquer de  $T$ -ideais ainda é um  $T$ -ideal. Portanto, dado um subconjunto  $S$  qualquer de  $K\langle X \rangle$ , podemos definir o  **$T$ -ideal gerado por  $S$** , o qual denotaremos por  $\langle S \rangle^T$ , como sendo a interseção de todos os  $T$ -ideais de  $K\langle X \rangle$  que contêm  $S$ . Assim,  $\langle S \rangle^T$  é o menor  $T$ -ideal de  $K\langle X \rangle$  contendo  $S$ .

**Exemplo 1.2.10** ([15], Teorema 5.2.1) Sejam  $K$  um corpo infinito e  $U_k(K)$  a álgebra das matrizes  $k \times k$  triangular superiores. Então  $T(U_k(K)) = \langle [x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \rangle^T$ . Dizemos que todas as identidades de  $U_k(K)$  seguem (ou são consequência) do polinômio  $[x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}]$ .

**Exemplo 1.2.11** Sendo  $K$  um corpo de característica zero, em 1973 Razmyslov exibiu uma base com nove identidades para  $M_2(K)$ . Usando este fato, em 1981, Drensky reduziu esse resultado, também para  $\text{char}K = 0$ , e mostrou que  $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ e } [[x_1, x_2]^2, x_1]^T \rangle$ . Em 2001, Koshlukov generalizou o resultado de Drensky para  $K$  infinito e de característica diferente de 2. Se  $\text{char}K = 3$  é necessário uma terceira identidade (veja [10]). Até o momento, a descrição de  $T(M_2(K))$  está em aberto para  $\text{char}K = 2$ .

No Capítulo 2, iremos descrever o T-ideal da álgebra de Grassmann  $E$  quando a característica do corpo for zero ou positiva e diferente de 2.

**Definição 1.2.12** Seja  $\{f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in K\langle X \rangle \mid i \in I\}$  um conjunto de polinômios da álgebra associativa  $K\langle X \rangle$ . A classe  $\mathfrak{B}$  de todas as álgebras associativas que satisfazem as identidades  $f_i = 0$ ,  $i \in I$ , é dita **variedade** (de álgebras associativas) determinada pelo sistema de identidades  $\{f_i \mid i \in I\}$ .

**Exemplo 1.2.13** A variedade determinada por  $S = \{[x_1, x_2]\}$  é a classe das álgebras associativas e comutativas.

## 1.3 Álgebras Graduadas

Nesta seção iremos apresentar conceitos e resultados relevantes sobre álgebras graduadas que serão utilizados no Capítulo 3.

**Definição 1.3.1** Seja  $G$  um grupo, uma álgebra  $A$  é dita  **$G$ -graduada**, se

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)} \quad \text{e} \quad A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)},$$

para quaisquer  $g, h \in G$ .

Na Definição acima, o subespaço  $A^{(g)}$  é chamado de **componente homogênea de grau  $g$**  e seus elementos são chamados de elementos homogêneos de grau  $g$ .

**Exemplo 1.3.2** Seja  $\epsilon$  o elemento neutro do grupo  $G$ , definindo  $A^{(g)} = \{0\}$ , se  $g \neq \epsilon$  e  $A^{(\epsilon)} = A$ . Então  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$  é uma  $G$ -graduação (chamada graduação trivial).

**Exemplo 1.3.3** Considere a álgebra de Grassmann  $E$  e os subespaços  $E^{(0)} = \langle 1_E, e_{i_1} \dots e_{i_{2n}} \mid n \geq 1 \rangle$  e  $E^{(1)} = \langle e_{i_1} \dots e_{i_{2n+1}} \mid n \geq 0 \rangle$ . Sabemos que  $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$  e  $E^{(i)}E^{(j)} \subseteq E^{(i+j)}$  para quaisquer  $i, j \in \mathbb{Z}_2$ . Assim  $E$  admite uma  $\mathbb{Z}_2$ -graduação, a qual chamamos de  **$\mathbb{Z}_2$ -graduação canônica ou natural**. Outra  $\mathbb{Z}_2$ -graduação para  $E$  bastante conhecida é a **trivial** na qual  $E = E \oplus 0$ . Veremos as demais  $\mathbb{Z}_2$ -graduações para  $E$  na Seção 3.1.

**Exemplo 1.3.4** Considere o monóide aditivo  $\mathbb{N}_0$  ( $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) e a álgebra  $K[x]$ . Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , defina  $W^{(n)} = \langle x^n \rangle$ . Não é difícil ver que  $K[x] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} W^{(n)}$  é uma álgebra  $\mathbb{N}_0$ -graduada.

**Exemplo 1.3.5** Considere  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , a álgebra  $M = M_n(K)$  e o grupo  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ . Dado  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ , defina  $M^{(\alpha)} = \langle E_{ij} \mid \overline{j-i} = \alpha \rangle$ . A decomposição  $M_n(K) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} M^{(\alpha)}$  é uma  $\mathbb{Z}_n$ -gradação.

Tomemos agora o grupo  $\mathbb{Z}$ . Sendo  $k \in \mathbb{Z}$ , definimos  $M^{(k)} = \langle E_{ij} \mid j - i = k \rangle$ , se  $-(n-1) \leq k \leq n-1$ , e  $M^{(k)} = 0$  se  $|k| \geq n$ . Não é difícil mostrar que  $M_n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M^{(k)}$  é uma  $\mathbb{Z}$ -gradação.

**Proposição 1.3.6** Se  $A$  é uma álgebra  $G$ -graduada então  $1_A \in A^{(\epsilon)}$ , onde  $\epsilon$  é o elemento neutro de  $G$ .

**Demonstração:** Como  $1_A \in A$ , temos que existem  $g_1, \dots, g_n \in G$  tais que

$$1_A = a_\epsilon + a_{g_1} + \dots + a_{g_n} \quad (1.3)$$

com  $a_\epsilon \in A^{(\epsilon)}$  e  $a_{g_i} \in A^{(g_i)}$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Tomando agora  $h \in G$  e  $a_h \in A^{(h)}$ , arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_\epsilon + a_h a_{g_1} + \dots + a_h a_{g_n}$$

Observando que  $a_h a_\epsilon \in A^{(h)}$ ,  $a_h a_{g_i} \in A^{(h+g_i)}$  e  $h, h+g_1, \dots, h+g_n$  são dois a dois distintos, podemos concluir que  $a_h a_{g_i} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $a_h a_\epsilon = a_h$ . De modo totalmente análogo mostramos que  $a_\epsilon a_h = a_h$  e assim concluímos que  $a_\epsilon = 1_A$ .

■

**Definição 1.3.7** Sejam  $A$  e  $B$  álgebras  $G$ -graduadas. Dizemos que o homomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  é um **homomorfismo  $G$ -graduado** se  $\varphi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$ , para todo  $g \in G$ . De modo análogo definimos isomorfismo, endomorfismo e automorfismo  $G$ -graduado.

Para definir identidades polinomiais e  $T$ -ideais  $G$ -graduados, será necessário o conceito de álgebra livre graduada. Considere a família dos conjuntos enumeráveis, dois a dois disjuntos,  $\{X^{(g)}\}_{g \in G}$ . Seja  $X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)}$  e  $K\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre. Definimos:

$$\alpha(1) = \epsilon, \quad \alpha(x_i) = g \text{ se } x_i \in X^{(g)} \text{ e } \alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = \alpha(x_{i_1}) \dots \alpha(x_{i_n}).$$

Tomando  $K\langle X \rangle^{(g)} = \langle x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid \alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = g \rangle$ , temos  $K\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X \rangle^{(g)}$  e  $K\langle X \rangle^{(g)} K\langle X \rangle^{(h)} \subseteq K\langle X \rangle^{(gh)}$ , e assim  $K\langle X \rangle$  é uma álgebra  $G$ -graduada, denominada **álgebra associativa livre  $G$ -graduada**.

**Notação 1.3.8** Se  $f \in K\langle X \rangle^{(g)}$ , então  $\alpha(f) = g$ .

**Definição 1.3.9** Sendo  $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$  uma álgebra  $G$ -graduada e  $K\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre  $G$ -graduada. Dizemos que um polinômio  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$  é uma **identidade  $G$ -graduada** de  $A$  se  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  para quaisquer  $a_i \in A$  tais que  $\alpha(a_i) = \alpha(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Exemplo 1.3.10** Sendo  $E$  a álgebra de Grassmann munida da  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural, o polinômio  $f(x_1, x_2) = x_1 \circ x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$  (chamamos “ $\circ$ ” de produto de Jordan), com  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 1$ , é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada de  $E$ .

**Definição 1.3.11** Seja  $K\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre  $G$ -graduada. Um ideal  $I$  de  $K\langle X \rangle$  é um  $T_G$ -**ideal** se  $\varphi(I) \subseteq I$  para todos endomorfismos  $G$ -graduados  $\varphi$  de  $K\langle X \rangle$ .

Dado um subconjunto  $S$  de  $K\langle X \rangle$ , definimos o  $T_G$ -ideal gerado por  $S$ , o qual denotaremos por  $\langle S \rangle^{T_G}$ , como sendo a interseção de todos os  $T_G$ -ideais de  $K\langle X \rangle$  que contêm  $S$ .

**Observação 1.3.12** Quando  $G = \mathbb{Z}_n$ , denotaremos o  $T_G$ -ideal por  $T_n$ .

O próximo resultado estabelece uma relação importante entre  $T$ -ideais ordinários e  $T$ -ideais graduados.

**Proposição 1.3.13** Sejam  $A$  e  $B$  duas álgebras  $G$ -graduadas tais que  $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ . Então  $T(A) \subseteq T(B)$ . Ademais, se  $T_G(A) = T_G(B)$ , então  $T(A) = T(B)$ .

**Demonstração:** Consideremos a álgebra associativa livre  $K\langle Y \rangle$ , onde  $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$  e seja  $f(y_1, \dots, y_n) \in T(A)$ . Dados  $b_1, \dots, b_n \in B$ , tomemos  $b_{i_g} \in B^{(g)}$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $g \in G$ , tais que  $b_i = \sum_{g \in G} b_{i_g}$ . Para cada  $b_{i_g} \neq 0$ , tomemos  $x_{i_g} \in X^{(g)}$  e consideremos o polinômio  $f_1 = f\left(\sum_{g \in G} x_{i_g}, \dots, \sum_{g \in G} x_{n_g}\right) \in K\langle X \rangle$ . Como  $f \in T(A)$ , temos  $f_1 \in T_G(A)$  e daí  $f_1 \in T_G(B)$ . Fazendo então as substituições  $x_{i_g} = b_{i_g}$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $g \in G$ , temos

$$f(b_1, \dots, b_n) = f\left(\sum_{g \in G} b_{i_g}, \dots, \sum_{g \in G} b_{n_g}\right) = 0$$

e assim  $f \in T(B)$ .

Se  $T_G(A) = T_G(B)$ , então  $T_G(A) \subseteq T_G(B)$  e  $T_G(B) \subseteq T_G(A)$ , e daí segue a última afirmação. ■

**Observação 1.3.14** A recíproca da proposição não é verdadeira. Como contra-exemplo, dado  $n \in \mathbb{N}$ , tomemos o subespaço  $E_n$  de  $E$  gerado pelo conjunto  $\{1_E, e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ .  $E_n$  é uma subálgebra de  $E$ , e a partir da  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural de  $E$  (veja o Exemplo 1.3.3), podemos definir uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação para  $E_n$  dada por:  $E_n = E_n^{(0)} \oplus E_n^{(1)}$ , onde  $E_n^{(0)} = E_n \cap E^{(0)}$  e  $E_n^{(1)} = E_n \cap E^{(1)}$ . Tomando  $n$  par e as álgebras  $E_n$  e  $E_{n+1}$  (sendo  $K$  um corpo de característica diferente de 2) com suas  $\mathbb{Z}_2$ -gradações naturais, temos que  $T(E_n) \neq T(E_{n+1})$  (veja Observação 2.2.8), mas  $T_2(E_n) = T_2(E_{n+1})$ , pois  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ , com  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \dots = \alpha(x_{n+1}) = 1$  é identidade para  $E_n$ , mas não é para  $E_{n+1}$ .

**Definição 1.3.15** Dizemos que uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$  é **supercomutativa** se  $ab = (-1)^{ij}ba$  para quaisquer  $a \in A^{(i)}$  e  $b \in A^{(j)}$ .

Pela Definição acima, dizer que  $A$  é uma álgebra supercomutativa equivale a dizer que  $A^{(0)} \subseteq Z(A)$  e  $ab = -ba$  para quaisquer  $a, b \in A^{(1)}$ .

**Exemplo 1.3.16** A álgebra de Grassmann  $E$ , com sua  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural  $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ , é um exemplo de álgebra supercomutativa. A álgebra exterior  $E_n$  de dimensão  $2^n$ , com sua  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural  $E_n = E_n^{(0)} \oplus E_n^{(1)}$ , também é um exemplo de álgebra supercomutativa.

**Exemplo 1.3.17** Seja  $L$  uma álgebra de Lie nilpotente de classe 2 (isto é, o produto  $(a_1 a_2) a_3$  é nulo para quaisquer  $a_1, a_2, a_3 \in L$ ) e seja  $L_1$  um subespaço tal que  $L = Z(L) \oplus L_1$  (como espaço vetorial), onde  $Z(L) = \{x \in L; xa = 0 \text{ para todo } a \in L\}$ . Considerando a álgebra  $H_L = K \oplus L$ , cujo produto é dado por  $(\lambda_1, x)(\lambda_2, y) = (\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 y + \lambda_2 x + xy)$ , para quaisquer  $x, y, z \in L$  (veja Exemplo 1.1.10), temos que  $H_L$  é associativa e unitária.

Tomando agora  $V^{(0)} = \{(\lambda, x); \lambda \in K, x \in Z(L)\}$  e  $V^{(1)} = \{(0, y); y \in L_1\}$ , observamos que  $H_L = V^{(0)} \oplus V^{(1)}$  e que esta decomposição define uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação em  $H_L$ . Além disso,  $V^{(0)} = Z(H_L)$  e  $uv = -vu$  para quaisquer  $u, v \in V^{(1)}$ . Logo,  $H_L$  é supercomutativa.

Denotaremos por  $K\langle Y, Z \rangle$  a álgebra associativa livre  $\mathbb{Z}_2$ -graduada gerada por  $X = Y \cup Z$ , onde  $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$  e  $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$  são conjuntos enumeráveis de variáveis disjuntos. A álgebra  $K\langle Y, Z \rangle$  satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ , toda função

$$\begin{aligned} \phi : Y \cup Z &\rightarrow A \\ Y &\mapsto A^{(0)} \\ Z &\mapsto A^{(1)} \end{aligned}$$

pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebras.

## 1.4 Polinômios Multihomogêneos, Multilineares e Próprios

Os conceitos e resultados apresentados aqui serão ferramentas básicas para o estudo dos Capítulos 2 e 3.

**Definição 1.4.1** *Sejam  $m \in K\langle X \rangle$  um monômio e  $x_i \in X$ . Definimos o grau de  $m$  em  $x_i$ , denotado por  $\deg_{x_i} m$ , como sendo o número de ocorrências de  $x_i$  em  $m$ . Um polinômio  $f \in K\langle X \rangle$  é dito **homogêneo** em  $x_i$  se todos os seus monômios têm o mesmo grau em  $x_i$ . Por sua vez,  $f$  é dito **multihomogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis.*

Dado  $m = m(x_1, \dots, x_k)$  um monômio de  $K\langle X \rangle$ , definimos o **multigrau** de  $m$  como sendo a  $k$ -upla  $(a_1, \dots, a_k)$ , onde  $a_i = \deg_{x_i} m$ . Seja  $g \in K\langle X \rangle$  a soma de todos os monômios de  $g$  com um dado multigrau é chamada de **componente multihomogênea** de  $g$ . Quando  $g \in K\langle X \rangle$  é homogêneo em cada uma de suas  $k$ -variáveis (ou seja, possui uma única componente multihomogênea) dizemos que  $f$  é **multihomogêneo**.

**Exemplo 1.4.2** *O polinômio  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2 + x_2x_1x_3^2$  é homogêneo em  $x_1$ , mas não é multihomogêneo.*

**Teorema 1.4.3** *Sejam  $I$  um T-ideal de  $K\langle X \rangle$  e  $f(x_1, \dots, x_k) \in I$ . Se  $K$  é infinito, então cada componente multihomogênea de  $f$  pertence a  $I$ . Consequentemente,  $I$  é gerado por seus polinômios multihomogêneos.*

**Demonstração:** Seja  $n$  o maior grau em  $x_i$  de algum monômio de  $f$ . Para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ , tomemos  $f_i(x_1, \dots, x_k)$  como sendo a soma de todos os monômios que tenham grau  $i$  em  $x_1$ , e assim  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ . Como  $K$  é infinito, podemos escolher  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  todos distintos. Para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ , temos  $g_j = f(\lambda_j x_1, x_2, \dots, x_k) = f_0 + \lambda_j f_1 + \dots + \lambda_j^n f_n$  e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Observe que  $g_0, g_1, \dots, g_n \in I$ , pois  $I$  é um T-ideal. Além disso, a primeira matriz da equação acima é uma matriz de Vandermonde invertível. Logo, devemos ter  $f_0, f_1, \dots, f_n \in I$ .

Agora, para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $t = 0, 1, \dots$ , tomemos  $f_{it}$  como sendo a componente homogênea em  $f_i$  de grau  $t$  em  $x_2$ . Usando os mesmos argumentos acima, concluímos que  $f_{it} \in I$  e assim, repetindo o processo para cada variável, obtemos a primeira afirmação. Finalmente, observando que  $f$  é a soma de suas componentes multihomogêneas, concluímos que  $I$  é gerado por seus polinômios multihomogêneos. ■

**Definição 1.4.4** Um polinômio  $f(x_1, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$  é **multilinear** se é multihomogêneo com multigrado  $(1, 1, \dots, 1)$ . Neste caso  $f$  tem a forma

$$\sum_{\sigma \in S_k} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(k)} \text{ com } \alpha_{\sigma} \in K.$$

Denotaremos por  $P_n$  o espaço vetorial dos polinômios multilineares de  $K\langle X \rangle$  nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ . É fácil ver que  $\beta = \{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}; \sigma \in S_n\}$  é uma base para  $P_n$ , donde  $\dim P_n = n!$ .

**Definição 1.4.5** Seja  $A$  uma álgebra. O número inteiro não negativo

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$$

é chamado  $n$ -ésima codimensão para a álgebra  $A$ .

**Observação 1.4.6** Seja  $A$  uma álgebra. Então  $A$  é uma PI-álgebra se e, somente se,  $c_n(A) < n!$ , para algum  $n \geq 1$ .

**Proposição 1.4.7** Seja  $K$  um corpo de característica 0 (ou  $\text{char} K = p > \deg f$ ), então  $f = 0$  é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomiais multilineares.

**Demonstração:** Usaremos o processo de linearização. Seja  $I = \langle f \rangle^T$ , pelo Teorema 1.4.3 temos que  $f$  é equivalente a um conjunto de polinômios multihomogêneos. Assim, para provar o resultado basta mostrar que todo polinômio multihomogêneo é equivalente a um multilinear. Suponha  $f$  multihomogêneo e seja  $d = \deg_{x_i} f$ . Escreva  $f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) \in I$  na forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^d f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m),$$

onde  $f_i$  é a componente homogênea de grau  $i$  em  $y_1$ . Temos que  $f_i \in I$  para  $i = 0, 1, \dots, d$ . Como  $\deg_{y_j} f_i < d$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ ,  $j = 1, 2$ , podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de consequências multilineares de  $f$ .

Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a  $f = 0$ , é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_m) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de zero, pois temos por hipótese que  $\text{char}K = 0$  (ou  $\text{char}K = p > \deg f$ ). ■

**Definição 1.4.8** *Seja  $f \in K\langle X \rangle$ . Dizemos que  $f$  é um **polinômio próprio** (ou comutador), se é uma combinação linear de produtos de comutadores, ou seja,*

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum \alpha_{i_1, \dots, j} [x_{i_1}, \dots, x_{i_p}] \dots [x_{j_1}, \dots, x_{j_q}], \alpha_{i_1, \dots, j} \in K.$$

Os polinômios próprios foram abordados pela primeira vez por Malcev e Specht em 1950, e desempenham um papel importante no estudo das identidades polinomiais de álgebras associativas unitárias. Iremos denotar por  $B$  o conjunto de todos os polinômios próprios em  $K\langle X \rangle$  e por  $\Gamma_n = B \cap P_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , o conjunto de todos os polinômios próprios multilineares de grau  $n$ .

**Definição 1.4.9** *Seja  $A$  uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero, dizemos que*

$$\gamma_n(A) = \dim \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap T(A)}$$

com  $n = 1, 2, \dots$ , é a  $n$ -ésima codimensão própria de  $A$ .

**Teorema 1.4.10** *Se  $A$  é uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero, então a sequência de codimensões é dada por*

$$c_n(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k(A).$$

**Demonstração:** Ver [15], p. 47. ■

No capítulo 2 mostraremos que  $c_n(E) = 2^{n-1}$ . Em [15], Drensky provou os próximos resultados que nos permite encontrar uma base de  $K\langle X \rangle$ .

**Proposição 1.4.11** *Suponha que os elementos*

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$$

*formam uma base ordenada de  $L(X)$ , onde os elementos  $x_1, x_2, \dots$  precedem os comutadores. Então*

(i) O espaço vetorial  $K\langle X \rangle$  tem base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \dots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c,$$

onde  $a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$  e  $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$  na ordenação da base de  $L(X)$ ;

(ii) Os elementos desta base tais que  $a_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ , formam uma base para o espaço vetorial  $B$ .

**Demonstração:** Veja [15], p. 43. ■

**Proposição 1.4.12** *Se  $A$  é uma PI-álgebra associativa com unidade sobre um corpo infinito  $K$ , então todas as identidades polinomiais de  $A$  seguem de suas identidades próprias. Se  $\text{char}K = 0$ , então todas as identidades polinomiais de  $A$  seguem de suas identidades próprias multilineares.*

**Demonstração:** Ver prova em [15], p.43 ■

## 1.5 Polinômios Centrais e T-espços

**Definição 1.5.1** *Sejam  $A$  uma álgebra e  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ . Dizemos que  $f$  é um **polinômio central** para  $A$  se  $f$  tem termo constante nulo e  $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$  para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$ .*

Deste modo, dizer que  $f$  é um polinômio central para  $A$  significa dizer que  $[f, g]$  é uma identidade para  $A$  para todo  $g \in K\langle X \rangle$ .

**Exemplo 1.5.2** *O polinômio  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ , conhecido como polinômio de Hall, é um polinômio central para a álgebra  $M_2(K)$ . Okithin em [35] descreveu os polinômios centrais para a álgebra  $M_2(K)$ , quando  $\text{char}K = 0$ , e Colombo e Koshlukov em [12] generalizaram esta descrição, quando  $\text{char}K = p > 0$  e  $p \neq 2$ .*

No Capítulo 4 iremos apresentar a descrição dos polinômios centrais para a álgebra de Grassmann obtida por Brandão, Koshlukov, Krasilnikov e Da Silva, em [7].

**Definição 1.5.3** *Um subespaço  $V$  de  $K\langle X \rangle$  é dito um **T-espaço** se  $\varphi(V) \subseteq V$  para todo  $\varphi \in \text{End}(K\langle X \rangle)$ .*

**Exemplo 1.5.4** *Todo T-ideal de  $K\langle X \rangle$  é um T-espaço. O subespaço  $K = \{\alpha 1 \mid \alpha \in K\}$  é também um exemplo de T-espaço de  $K\langle X \rangle$ .*

**Exemplo 1.5.5** Se  $A$  é uma álgebra e  $W$  um subespaço de  $A$ , então o conjunto

$$B = \{f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle \mid f(a_1, \dots, a_n) \in W \text{ para todo } a_1, \dots, a_n \in A\}$$

é um  $T$ -espaço de  $K\langle X \rangle$ . Quando  $W = Z(A)$ , o  $T$ -espaço  $B$  é chamado de espaço dos polinômios centrais de  $A$ , o qual denotaremos por  $C(A)$ .

Não é difícil ver que a interseção e a soma de uma família qualquer de  $T$ -espaços ainda é um  $T$ -espaço. Desta forma, dado um subconjunto  $S$  de  $K\langle X \rangle$ , podemos definir o  $T$ -espaço gerado por  $S$  como sendo a interseção de todos os  $T$ -espaços que contêm  $S$ .

**Proposição 1.5.6** Se  $S \subseteq K\langle X \rangle$  e  $V$  é o  $T$ -espaço de  $K\langle X \rangle$  gerado por  $S$ , então  $V$  é exatamente o subespaço de  $K\langle X \rangle$  gerado por

$$\{f(g_1, \dots, g_n) \mid f \in S, g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle\}.$$

**Demonstração:** Observe que este conjunto é igual a

$$(End(K\langle X \rangle))S = \{\varphi(f) \mid f \in S, \varphi \in End(K\langle X \rangle)\}.$$

Tomemos  $V_1$  como sendo o subespaço de  $K\langle X \rangle$  gerado por  $(End(K\langle X \rangle))S$ . Como  $S \subseteq V$  e  $V$  é um  $T$ -espaço, temos que  $\varphi(f) \in V$  para qualquer  $\varphi \in End(K\langle X \rangle)$ . Portanto  $V_1 \subseteq V$ .

Por outro lado, como  $\psi(g) \in (End(K\langle X \rangle))S$ , para quaisquer  $\psi \in End(K\langle X \rangle)$  e  $g \in (End(K\langle X \rangle))S$ , concluímos que  $V_1$  é um  $T$ -espaço de  $K\langle X \rangle$ . Além disso,  $S \subseteq V_1$ . Assim,  $V \subseteq V_1$ , e isto completa a prova. ■

Sejam  $S \subseteq K\langle X \rangle$  e  $J$  o  $T$ -ideal gerado por  $S$ . Tomando

$$S_1 = \{x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n)x_{n+2}; f \in S\}$$

temos que  $J$  é exatamente o  $T$ -espaço de  $K\langle X \rangle$  gerado por  $S_1$ . Assim, a partir de uma base de um  $T$ -ideal é possível construir um conjunto capaz de gerá-lo como  $T$ -espaço.

Pelo que vimos até aqui, o conjunto  $C(A)$  é sempre um  $T$ -espaço de  $K\langle X \rangle$  para toda álgebra  $A$ . Quando buscamos descrever os polinômios centrais de  $A$ , nosso objetivo é determinar um subconjunto de  $C(A)$  que possa gerá-lo como  $T$ -espaço.

## 1.6 Tabelas de Young e a Ação do Grupo Linear Geral $GL_m$

Nesta seção apresentaremos os resultados sobre a teoria de Young e a ação do grupo linear geral  $GL_m$  que serão utilizados na Seção 3.6 (para mais detalhes veja o livro [15]). Em toda seção, a menos que se mencione o contrário,  $K$  denotará um corpo de característica zero.

**Definição 1.6.1** *Seja  $n \geq 1$  um inteiro. Definimos uma partição de  $n$  como sendo uma  $r$ -upla  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  de números naturais tais que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$  e  $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$ .*

**Notação 1.6.2** *Usamos a notação  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$  para dizer que  $\lambda$  é uma partição de  $n$ .*

**Definição 1.6.3** *Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ , definimos o diagrama de Young  $D_\lambda$  da partição  $\lambda$  como sendo o conjunto*

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Graficamente representa-se  $D_\lambda$  por  $n$  quadrados distribuídos em  $r$  filas horizontais, chamadas de linhas sendo a  $i$ -ésima linha composta por  $\lambda_i$  quadrados. Da esquerda para a direita, os primeiros quadrados das linhas aparecem numa mesma coluna (fila vertical). Sendo  $(i, j)$  um elemento de  $D_\lambda$ , o quadrado correspondente a ele está na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna. A numeração das linhas cresce de cima para baixo e a das colunas da esquerda para a direita. Denotando por  $c_j$  o número de células da  $j$ -ésima coluna, temos  $c_j = \max\{i \in \{1, 2, \dots, r\} \mid \lambda_i \geq j\}$ .

**Exemplo 1.6.4** *A representação do diagrama de Young da partição  $\lambda = (4, 3, 1) \vdash 8$  é dada por*

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

**Definição 1.6.5** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ . Definimos uma tabela de Young do diagrama  $D_\lambda$  como sendo uma função bijetora  $T : D_\lambda \rightarrow I_n$ , onde  $I_n = \{1, \dots, n\}$ . Dizemos que uma tabela de Young  $T$  é standard se satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $T(i, j) < T(i, j + 1)$  para  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j \leq \lambda_i - 1$ ;

(ii)  $T(i, j) < T(i + 1, j)$  para  $1 \leq j \leq \lambda_1$  e  $1 \leq i \leq c_j - 1$ .

Em outras palavras, dizer que uma tabela de Young  $T$  é standard significa dizer que as entradas crescem em cada linha da esquerda para a direita, e em cada coluna de cima para baixo.

**Exemplo 1.6.6** Considere as seguintes tabelas de Young

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

e

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

Observe que a segunda tabela  $T_2$  é standard mas a primeira não é.

**Definição 1.6.7** Dada uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ , definimos a  $\lambda$ -tabela  $T_\lambda$  de conteúdo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , onde  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$ , como sendo o diagrama de Young  $D_\lambda$  cujas células são preenchidas com  $\alpha_1$  números 1,  $\alpha_2$  números 2,  $\dots$ ,  $\alpha_m$  números  $m$ .

**Definição 1.6.8** Uma tabela  $T_\lambda$  é semi-standard se as entradas não decrescem da esquerda para a direita nas linhas e crescem de cima para baixo nas colunas.

**Exemplo 1.6.9** Dadas as tabelas  $T_1$  de conteúdo  $(2, 3, 1, 1)$  e  $T_2$  de conteúdo  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

e

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 6 & 5 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

temos que  $T_1$  é uma tabela de Young semi-standard, mas  $T_2$  não é.

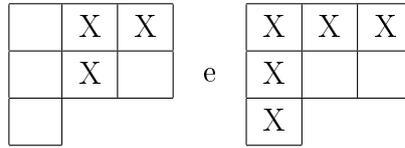
Para cada partição  $\lambda$  de  $n$  existem  $n!$  tabelas distintas associadas ao diagrama de Young  $D_\lambda$ , dentre elas estão as tabelas standard que desempenham um papel importante em PI-teoria. Ainda em relação ao Diagrama de Young, um outro conceito relevante é o de *gancho*, o qual será apresentado a seguir.

**Definição 1.6.10** *Sejam  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$  e  $(i_0, j_0) \in D_\lambda$ . Definimos o gancho  $(i_0, j_0)$  de  $D_\lambda$  como sendo o conjunto*

$$\{(i_0, j) \mid j_0 \leq j \leq \lambda_{i_0}\} \cup \{(i, j_0) \mid i_0 \leq i \leq c_{j_0}\}.$$

Observe que o gancho  $(i_0, j_0)$  do diagrama  $D_\lambda$  é exatamente o conjunto das células da linha  $i_0$  e que estão à direita da célula  $(i_0, j_0)$  (incluindo a própria célula  $(i_0, j_0)$ ) e das células da coluna  $j_0$  que estão abaixo da célula  $(i_0, j_0)$ . Denotaremos por  $h_{i_0, j_0}$  o tamanho (número de células) do gancho  $(i_0, j_0)$ .

**Exemplo 1.6.11** *Considere a partição  $\lambda = (3, 3, 1) \vdash 7$ . Nas figuras abaixo representamos os ganchos de  $(1, 2)$  e  $(1, 1)$  do diagrama  $D_\lambda$ :*



**Definição 1.6.12** *Seja  $A$  uma álgebra. Definimos um  $A$ -módulo (ou módulo sobre  $A$ ) como sendo um espaço vetorial  $M$ , munido de um produto*

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\rightarrow M \\ (a, m) &\mapsto a.m \end{aligned}$$

que satisfaz:

$$(i) \ a_1.(a_2.m) = (a_1 a_2).m$$

$$(ii) \ 1_A.m = m$$

para quaisquer  $a_1, a_2 \in A$ ,  $m \in M$ , e “.” é uma aplicação bilinear.

**Definição 1.6.13** *Sejam  $A$  uma álgebra e  $M$  um  $A$ -módulo. Dizemos que*

(i) *Um subespaço vetorial  $N$  é um submódulo (ou  $A$ -submódulo) de  $M$  se  $a.n \in N$  para quaisquer  $a \in A$  e  $n \in N$ ;*

(ii)  *$M$  é um  $A$ -módulo irredutível (ou simples) se seus únicos submódulos são  $\{0\}$  e  $M$ .*

Seja  $K\langle X_m \rangle = K\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  a álgebra associativa livre de posto  $m$  e  $K\langle X_m \rangle^{(n)}$ , com  $n \geq 0$ , a componente homogênea de grau  $n$  para  $K\langle X_m \rangle$ . Não é difícil ver que  $K\langle X_m \rangle$  possui uma estrutura de  $GL_m$ -módulo e o espaço  $Id(A) \cap K\langle X_m \rangle^{(n)}$  é um  $GL_m$ -submódulo de  $K\langle X_m \rangle^{(n)}$ .

O próximo resultado estabelece uma relação entre os  $GL_m$ -submódulos irredutíveis de  $K\langle X_m \rangle^{(n)}$  e o conjunto das partições  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ , onde  $r \leq m$ .

**Definição 1.6.14** *Seja  $\phi$  uma representação linear de dimensão finita do grupo linear geral  $GL_m(K)$ , isto é,*

$$\phi : GL_m(K) \rightarrow GL_s(K)$$

*para algum  $s$ . A representação  $\phi$  é dita **polinomial** se as entradas  $\phi(g)_{pq}$  da matriz  $\phi(g)$  de ordem  $n \times n$  são polinômios nas entradas  $a_{kl}$  de  $g$  para  $g \in GL_m(K)$ , onde  $k, l = 1, \dots, m$  e  $p, q = 1, \dots, s$ . Dizemos que a **representação polinomial** é **homogênea** de grau  $d$  se os polinômios  $\phi(g)_{pq}$  são homogêneos de grau  $d$ .*

**Teorema 1.6.15** (Teorema 12.4.4 [15]).

- (i) *Existe uma correspondência 1 – 1 entre as  $GL_m$ -representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau  $n \geq 0$  e as partições  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  de  $n$ . Denotaremos  $W_m(\lambda)$  o  $GL_m$ -módulo irredutível relacionado a  $\lambda$ .*
- (ii) *Como um subespaço de  $K\langle X_m \rangle^{(n)}$ , o espaço vetorial  $W_m(\lambda)$  é multihomogêneo. A dimensão de sua componente multihomogênea  $W_m^{(n_1, \dots, n_m)}$  é igual ao número de  $\lambda$ -tabelas semi-standard conteúdo  $(n_1, \dots, n_m)$ .*

Seja  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$  e considere  $q_1, \dots, q_k$  os comprimentos das colunas do diagrama  $[\lambda]$ . Denotamos por  $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \dots, x_q)$  um polinômio de  $K\langle X_m \rangle$  dado por

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_q) = \prod_{j=1}^k s_{q_j}(x_1, \dots, x_{q_j})$$

onde  $s_p(x_1, \dots, x_p)$  é um polinômio standard.

**Teorema 1.6.16** (Teorema 12.4.12 [15]) *Considere  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$  e  $K\langle X_m \rangle^{(n)}$  a componente homogênea de grau  $n$  de  $K\langle X_m \rangle$*

- (i) *Os elementos  $s_\lambda(x_1, \dots, x_q)$ , definidos acima, geram um  $GL_m$ -submódulo de  $K\langle X_m \rangle^{(n)}$  isomorfo a  $W_m(\lambda)$  ( $W_m(\lambda)$  denota o  $GL_m$ -submódulo irredutível relacionado à partição  $\lambda$ ).*
- (ii) *Todo  $W_m(\lambda) \subseteq K\langle X_m \rangle^{(n)}$  é gerado por um elemento não-nulo*

$$\omega_\lambda(x_1, \dots, x_q) = s_\lambda(x_1, \dots, x_q) \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \alpha_\sigma \in K.$$

*O elemento  $\omega_\lambda(x_1, \dots, x_q)$  é dito vetor peso máximo associado a  $\lambda$ . Ele é único a menos de constante multiplicativa e está contido no espaço vetorial unidimensional dos elementos multihomogêneos de grau  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  em  $W_m(\lambda)$ .*

Dada a permutação  $\sigma \in S_n$  denotaremos por  $T(\sigma)$  a  $\lambda$ -tabela tal que a primeira coluna de  $T(\sigma)$  é preenchida de cima para baixo com os números inteiros  $\sigma(1), \dots, \sigma(q_1)$ ,  $\sigma(q_1 + 1), \dots, \sigma(q_1 + q_2)$  preenchem a segunda coluna e assim por diante.

**Proposição 1.6.17** (*Proposição 12.4.14 [15]*) *Seja  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  uma partição de  $n$  e  $W_m(\lambda) \subset K\langle X_m \rangle^{(n)}$ . O vetor peso máximo  $\omega_\lambda$  de  $W_m(\lambda)$  pode ser expresso de modo único como combinação linear de polinômios  $\omega_\sigma = s_\lambda \sigma^{-1}$ , onde as  $\sigma$ 's são tais que as  $\lambda$ -tabelas  $T(\sigma)$  são standard.*

## Capítulo 2

# Identidades Polinomiais para a Álgebra de Grassmann

Neste capítulo exibiremos uma base para  $T(E)$ . O mesmo encontra-se organizado da seguinte maneira: na Seção 2.1, consideraremos a álgebra de Grassmann  $E$  sobre um corpo infinito  $K$  de característica zero; na Seção 2.2 o corpo  $K$  terá característica positiva diferente de dois e, dada a descrição das identidades polinomiais para  $E$  seremos capazes de responder se a álgebra de Grassmann. Sobre um corpo de característica 3 satisfaz todas as identidades da álgebra das matrizes de ordem 2, questionamento levantado por Kemer em [28]. E por fim, na Seção 2.3, descreveremos as identidades para a Álgebra de Grassmann sem unidade  $E'$ , resultado obtido por Chiripov e Siderov em [9].

### 2.1 Identidades Polinomiais para $E$ , $\text{char}K = 0$

Descreveremos as identidades polinomiais para  $E$  sobre um corpo de característica zero. Seguimos a demonstração apresentada por Drensky em [15].

**Lema 2.1.1** *Seja  $T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$  o  $T$ -ideal de  $K\langle X \rangle$  gerado pela identidade  $[x_1, x_2, x_3]$ . Então os polinômios*

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

*pertencem a  $T$ .*

**Demonstração:** Usaremos a seguinte igualdade

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]. \quad (2.1)$$

Seja  $[x_1, x_2^2, x_3] \in T$ , pela equação 2.1 obtemos:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2^2, x_3] &= [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [[x_1, x_2]x_2, x_3] + [x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3] \end{aligned}$$

Como  $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0 \pmod{T}$  e  $[x_2, x_3][x_1, x_2] = [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2, [x_2, x_1]]$  então  $[x_2, x_3][x_1, x_2] \equiv [x_1, x_2][x_2, x_3] \pmod{T}$ . Assim,  $2[x_1, x_2][x_2, x_3] \equiv 0 \pmod{T}$ , e portanto  $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in T$ .

Além disso, a linearização do polinômio  $f(x) = [x_1, x][x, x_2]$  é dada por

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2) &= f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2) \\ &= [x_1, y_1][y_2, x_2] + [x_1, y_2][y_1, x_2]. \end{aligned}$$

Renomeando as variáveis concluímos que  $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$  pertence a  $T$ .

■

**Teorema 2.1.2** *O  $T$ -ideal  $T(E)$  é gerado pelo polinômio  $[x_1, x_2, x_3]$ .*

**Demonstração:** Segue do Exemplo 1.2.7 que  $[x_1, x_2, x_3]$  é uma identidade para  $E$ , portanto,  $[x_1, x_2, x_3] \in T(E)$ , daí  $T \subseteq T(E)$ .

Para completar a prova, iremos mostrar que o conjunto

$$\beta = \{[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] \mid i_1 < \cdots < i_{2k}, \text{ para } k = 0, 1, \dots\}$$

gera  $B(X)/B(X) \cap T$ , onde  $B(X)$  é o conjunto de todos os polinômios próprios em  $K\langle X \rangle$ .

Como  $[x_1, x_2, x_3] \in T$ , temos que  $B(X)/B(X) \cap T$  é gerado por

$$w = [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}], \text{ para } k = 0, 1, \dots,$$

e pelo Lema 2.1.1, podemos assumir  $i_1 < \cdots < i_{2k}$ .

Note que se  $f = \sum \alpha_i m_i \in T(E)$  com  $m_i \in \beta$ , então  $\alpha_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots$ . De fato, como  $i_1 < \cdots < i_{2k}$  podemos assumir  $\sum \alpha_i m_i$  multihomôgeneo

e desta forma  $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_{2k}}) = \alpha[x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]$ . Fazendo  $x_{i_l} = e_{i_l}$ , para  $l = 1, \dots, 2k$ , obtemos  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_{2k}}) = \alpha_i 2^k e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}$ , como  $f \in T(E)$  temos  $\alpha_i 2^k e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} = 0$ . Logo  $\alpha_i = 0$ . Portanto,  $T = T(E)$ , como queríamos demonstrar. ■

**Teorema 2.1.3** *Seja  $K$  um corpo de característica zero. Então a  $n$ -ésima codimensão de  $E$  é dada por  $c_n(E) = 2^{n-1}$ .*

**Demonstração:** Seja  $\gamma_n(E) = \dim \Gamma_n / (T(E) \cap \Gamma_n)$  a  $n$ -ésima codimensão própria. Pelo teorema anterior obtemos que  $\gamma_n(E) = 0$ , se  $n$  é ímpar, e  $\gamma_n(E) = 1$ , se  $n$  é par para, todo  $n \in \mathbb{N}$  e assim  $\gamma_n(E) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De acordo com o Teorema 1.4.10, temos

$$c_n(E) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k(E) = 2^{n-1}.$$

■

## 2.2 Identidades Polinomiais para $E$ , $\text{char}K = p > 0$

Neta seção iremos lidar com identidade polinomiais para  $E$  sobre um corpo infinito de característica positiva  $p \neq 2$ . Apresentaremos os resultados obtidos por Koshlukov e Giambruno, em [18].

Na seção anterior mostramos que a álgebra de Grassmann  $E$  satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2, x_3] \equiv 0. \tag{2.2}$$

Seja  $T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$  o T-ideal da álgebra associativa livre  $K\langle X \rangle$  gerado por  $[x_1, x_2, x_3]$ . Denotaremos por  $F = \frac{K\langle X \rangle}{T}$  a álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade determinada pela identidade ( 2.2).

**Observação 2.2.1** *Os polinômios*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4],$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_2][x_1, x_4],$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_4][x_3, x_2],$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_4, x_2][x_3, x_1]$$

*pertencem ao T-ideal  $T$ . A prova é análoga a feita no Lema 2.1.1.*

**Proposição 2.2.2** *A equação*

$$2^n s_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (2n)! [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

*é válida na álgebra  $F$ .*

**Demonstração:** O polinômio standard de grau  $2n$  pode ser reescrito da seguinte forma:

$$s_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \dots [x_{\sigma(2n-1)}, x_{\sigma(2n)}],$$

ou seja,

$$2^n s_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \dots [x_{\sigma(2n-1)}, x_{\sigma(2n)}].$$

Como  $[x_{i_1}, x_{i_2}] = -[x_{i_2}, x_{i_1}]$  e  $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] = -[x_{i_1}, x_{i_3}][x_{i_2}, x_{i_4}]$  em  $F$ , obtemos

$$2^n s_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (2n)! [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

em  $F$ . ■

Esta proposição garante que :

- (i) se  $\text{char}K < 2n$  então  $s_{2n}$  é identidade para  $E$ ;
- (ii) se  $\text{char}K = 0$  ou  $\text{char}K > 2n$ , então  $s_{2n}$  e  $[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$  são polinômios equivalentes módulo a identidade (2.2).

**Lema 2.2.3** *Os polinômios  $t_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$  não são identidades para a álgebra de Grassmann  $E$ , para  $n = 1, 2, \dots$*

**Demonstração:** Sendo  $e_1, e_2, \dots, e_{2n} \in E$ , note que

$$t_{2n}(e_1, e_2, \dots, e_{2n-1}, e_{2n}) = 2^n e_1 e_2 \dots e_{2n-1} e_{2n} \neq 0.$$

■

**Lema 2.2.4** *Se  $\text{char}K \geq p$ , o polinômio  $s_k$  é uma identidade polinomial para  $E$  se, e somente se,  $k \geq p + 1$ .*

**Demonstração:** Mostremos que se  $s_k$  não é identidade para  $E$  quando  $k \leq p$ . Considere  $k = p$ . Sabemos que :

$$s_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(i-1)} x_i s_n(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}),$$

onde a variável com chapéu  $\widehat{x}_i$  não aparece. Assim,

$$s_p(e_1 e_2, e_3, \dots, e_{p+1}) = e_1 e_2 s_{p-1}(e_3, \dots, e_{p+1}) + \sum_{i=2}^p (-1)^{(i-1)} e_i s_{p-1}(e_1 e_2, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+1}).$$

Mas,  $p-1$  é par, e portanto  $e_i s_{p-1}(e_1 e_2, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+1}) = 0$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} s_p(e_1 e_2, e_3, \dots, e_{p+1}) &= e_1 e_2 s_{p-1}(e_3, \dots, e_{p+1}) \\ &= e_1 e_2 (p-1)! e_3 \dots e_{p+1} \\ &= (p-1)! e_1 e_2 e_3 \dots e_{p+1} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo,  $s_p$  não é identidade polinomial para  $E$ , e daí  $s_k$  só é identidade para  $E$  se  $k \geq p+1$ . Reciprocamente, se  $k \geq p+1$  então pela Proposição 2.2.2  $s_k$  é identidade para  $E$ . ■

Daí,  $s_{p+1}$  é a identidade standard de menor grau satisfeita por  $E$  quando  $\text{char} K = p$ .

**Teorema 2.2.5** *Sobre um corpo infinito  $K$  de característica  $p \neq 2$  todas as identidades polinomiais para a álgebra de Grassmann  $E$  de dimensão infinita são consequências da única identidade*

$$[x_1, x_2, x_3] = 0.$$

**Demonstração:** Analisemos os seguintes casos:

- Caso 1: Se  $\text{char} K = 0$ , é o Teorema 2.1.2 .
- Caso 2: Considere  $\text{char} K = p > 2$ .

Como o corpo  $K$  é infinito, todo T-ideal em  $K\langle X \rangle$  é gerado por seus polinômios próprios. Além disso,  $E$  é unitária então é suficiente mostrar que todo polinômio próprio que é identidade para  $E$  decorre da identidade (2.2). Sendo  $f(x_1, \dots, x_n) \in B(X)$  uma identidade para  $E$ , podemos escrevê-la como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum \alpha_u u_1 \dots u_k$$

onde  $u_i$  são comutadores de comprimento  $\geq 2$ . Devido a identidade  $[x_1, x_2, x_3]$ , podemos assumir que os  $u_j$ 's são comutadores de comprimento  $\leq 2$ , os quais são centrais em  $E$ . Pelo Lema 2.1.1 podemos considerar  $f$  multilinear e aplicando o Corolário 2.2.1, o polinômio  $f$  pode ser reduzido a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{n-1}, x_n],$$

onde  $\alpha \in K$  e  $n$  é par. Daí, se  $\alpha \neq 0$ , então pelo Lema 2.2.3  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{n-1}, x_n]$  não é uma identidade para  $E$ . Portanto  $\alpha = 0$ .

■

Denote por  $T(E)$  o T-ideal da álgebra de Grassmann  $E$  em  $K\langle X \rangle$ . Como vimos no Teorema 2.1.2  $T = T(E)$ , portanto  $F \simeq \frac{K\langle X \rangle}{T(E)}$  é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade das álgebras associativas unitárias geradas por  $E$ .

**Definição 2.2.6** *Sejam  $A$  uma álgebra associativa sobre  $K$  e  $T(A)$  o T-ideal de  $A$ . Dizemos que  $T(A)$  possui a **propriedade de Specht** se  $T(A)$  possui uma base finita e todo T-ideal contendo  $T(A)$  também possui uma base finita.*

**Corolário 2.2.7** *O T-ideal  $T = T(E)$  possui a **propriedade de Specht**.*

**Demonstração:** Sendo  $T_1$  um T-ideal contendo  $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$  pelo Teorema 2.2.5, todo polinômio próprio multihomogêneo  $f \in T_1$  é consequência de  $[x_1, x_2, x_3]$  e pode ser reduzido módulo  $T(E)$  à forma  $\alpha[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{n-1}, x_n]$ . Ao escolhermos o menor  $n$  de modo que

$$\alpha[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{n-1}, x_n] \in T_1, \alpha \neq 0.$$

temos que  $T_1$ , é gerado como T-ideal pelo produto de comutadores acima e por  $[x_1, x_2, x_3]$ . ■

**Observação 2.2.8** *Seja  $V_k$  o subespaço de  $V$  (veja 1.1.9) gerado por  $e_1, e_2, \dots, e_k$  e  $E_k$  a subálgebra de  $E$  gerada por  $1_E$  e por  $V_k$ . Não é difícil mostrar que se  $p \leq k < \infty$ , onde  $p$  denota a característica de  $K$ , então*

$$T(E_k) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{n-1}, x_n] \rangle^T,$$

onde  $n = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$  e  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  é a parte inteira de  $\frac{k}{2}$ . Omitiremos a demonstração deste resultado e caso o leitor se interesse a prova pode ser encontrada em ([18], p. 311)

Portanto, as álgebras de Grassmann  $E_{2k}$  e  $E_{2k+1}$  satisfazem as mesmas identidades polinomiais, isto é,  $T(E_{2k}) = T(E_{2k+1})$ .

Agora podemos responder ao seguinte questionamento de Kemer: a álgebra de Grassmann  $E$  com unidade e com dimensão infinita, satisfaz todas as identidades para a álgebra das matrizes  $M_{(p+1)/2}$ , quando  $\text{char}K = p$ ? O próximo resultado, obtido por Giambruno e Koshlukov em [18], dá uma resposta negativa para a pergunta de Kemer quando  $\text{char}K = 3$ .

**Teorema 2.2.9** *Seja  $K$  um corpo infinito de característica 3. Então  $E$  não satisfaz todas as identidades polinomiais para a álgebra das matrizes  $M_2(K)$ , mas  $E_4$  e  $E_5$  satisfazem.*

**Demonstração:** Inicialmente como  $E$  e  $M_2(K)$  são álgebras unitárias, pela Proposição 1.4.12, podemos considerar apenas identidades próprias. Por outro lado, é fácil ver que todo polinômio multihomôgeneo próprio que não é multilinear é uma identidade para  $E$ . Essencialmente, em ([36], seção 4, Teorema 9), Razmyslov provou o seguinte resultado: toda identidade multilinear para  $M_2(K)$  segue das identidades

$$4[x_1, x_2](v_3 \circ v_4) - [x_1, v_3, v_4, x_2] - [x_1, v_4, v_3, x_2] + [x_2, v_3, x_1, v_4] + [x_2, v_4, x_1, v_3] = 0 \quad (2.3)$$

$$[v_1 \circ v_2, x_3] = 0 \quad (2.4)$$

$$[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] - [x_1, x_3] \circ [x_2, x_4] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3] = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5] + [x_1, x_2, [x_3, x_5], x_4] + [x_1, x_4, [x_2, x_5], x_3] + \\ + [x_1, x_5, [x_2, x_4], x_3] = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sum_i \alpha_i (u_i \circ [v_i, x_6]) = 0, \quad (2.7)$$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são comutadores de comprimento  $\geq 2$ . A penúltima identidade é chamada de identidade Vasilovsky <sup>1</sup>.

Observe que, as expressões (2.4), (2.6) e (2.7) são identidades para  $E$ , pois são consequências de  $[x_1, x_2, x_3]$ . Como a expressão (2.5) é igual à identidade standard de grau 4, segue do Lema 2.2.4 que (2.5) é identidade para  $E$ . Mas  $E$  não satisfaz a

---

<sup>1</sup>em ([41], Teorema 1), Vasilovsky provou que sobre todo corpo  $K$  infinito com  $\text{char}K = p \neq 2$  as identidades para a álgebra  $Sl_2$  seguem da identidade (2.6).

expressão(2.3), pois a primeira parcela da equação não se anula em  $E$ . De fato, veja que:

$$4[e_1, e_2]([e_3, e_4] \circ [e_5, e_6]) = 64e_1e_2e_3e_4e_5e_6.$$

Por outro lado, pelo que mencionamos anteriormente, a expressão (2.3) é identidade para as álgebras de Grassmann de dimensão finita  $E_4$  e  $E_5$ . ■

Até o momento se encontra em aberto a seguinte versão do questionamento de Kemer: A álgebra de Grassmann  $E_{2p-2}$  satisfaz todas as identidades polinomiais para a álgebra das matrizes  $M_{\frac{p+1}{2}}$ , quando  $\text{char}K = p$  e  $p \neq 3$ ?

## 2.3 Identidades para a Álgebra de Grassmann sem unidade

Nesta seção descreveremos uma base de identidades polinomiais para a álgebra de Grassmann sem unidade  $E'$ . Os resultados que apresentaremos foram publicados em russo por Chiripov e Siderov, em [9], e em 2008 Da Silva [43] apresentou esses resultados em português em sua tese de doutorado. Em toda seção iremos considerar  $K$  um corpo infinito,  $p$  primo e  $\text{char}K = p \geq 0$ .

**Lema 2.3.1** *Se  $\text{char}K = p > 0$ , então  $E'$  satisfaz as identidades*

$$\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_p)} \tag{2.8}$$

$$x^p \tag{2.9}$$

$$[x_1, x_2, x_3] \tag{2.10}$$

**Demonstração:** Para provarmos que (2.8) é identidade para  $E'$  considere  $w_1, \dots, w_p$  pertencentes a  $\{e_{i_1} \dots e_{i_m} \mid m \in \mathbb{N}, i_1 < \dots < i_m\}$  e analisemos os seguintes casos:

- Caso 1. Se no máximo um dos elementos  $w_1, \dots, w_p$  possui comprimento ímpar, então

$$\sum_{\sigma \in S_p} w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(p)} = p!w_1 \cdots w_p,$$

uma vez que os elementos de tamanho par pertencem ao centro de  $E'$ . Como  $\text{char}K = p$ , segue que  $\sum_{\sigma \in S_p} w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(p)} = 0$ .

- Caso 2. Suponha que  $w_i$  e  $w_j$  sejam elementos de comprimento ímpar. Então para todo elemento  $b$  pertencente à base de  $E'$  segue que  $w_i b w_j = -w_j b w_i$ . Portanto,  $\sum_{\sigma \in S_p} w_{\sigma(1)} \dots w_{\sigma(p)} = 0$ .

Desta forma,  $E'$  satisfaz a identidade  $\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)} = 0$ .

Mostremos que (2.9) é identidade para  $E'$ . Se  $w \in E'$ , então  $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i b_i$ , onde  $\alpha_i \in K$  e  $b_i$  é um elemento da base de  $E'$ , e daí  $w^p = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} b_{i_1} \dots b_{i_p}$ .

Se  $r < p$ , então para cada termo  $b_{i_1} \dots b_{i_p}$  pelo menos dois dos  $(b_i)$ 's são iguais. Portanto,  $b_{i_1} \dots b_{i_p} = 0$ , e daí  $w^p = 0$ .

Se  $r \geq p$ , então

$$\begin{aligned} w^p &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} b_{i_1} \dots b_{i_p} \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \sum_{\sigma \in S_p} b_{i_{\sigma(1)}} \dots b_{i_{\sigma(p)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $E'$  satisfaz a identidade  $x^p = 0$ .

É imediato que (2.10) é identidade para  $E'$ , já que  $E' \subseteq E$ . ■

O polinômio  $\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(i_1)} \dots x_{\sigma(i_p)}$  é a completa linearização de  $x^p$ , denote por  $Q$  o T-ideal de  $K_1\langle X \rangle$  gerado por  $[x_1, x_2, x_3]$  e  $x^p$ . Seja  $T(E')$  o T-ideal de  $E'$  em  $K_1\langle X \rangle$ .

**Lema 2.3.2** *O T-ideal  $Q$  está contido em  $T(E')$ .*

**Demonstração:** A prova segue do Lema 2.3.1. ■

Seja  $D = \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}] x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} \mid m, q \geq 0, \epsilon_l \in \{1, \dots, p-1\} (1 \leq l \leq m), \lambda_t \in \{0, \dots, p-1\} (1 \leq t \leq 2q), i_1 < \dots < i_m, j_1 < \dots < j_{2q}, i_r \neq j_s (1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq 2q)\}$ .

**Lema 2.3.3** *O conjunto  $\{d + Q \mid d \in D\}$  gera  $K\langle X \rangle / Q$  como espaço vetorial sobre  $K$ .*

**Demonstração:** Seja  $f = x_{k_1} \dots x_{k_m} \in K\langle X \rangle$ . É fácil ver que  $[x_i, x_j]$  é central módulo  $T(E)$ , e consequentemente também é central módulo  $Q$  e  $x^p \in Q$ . Pelo Lema 2.1.1,  $[x_1, x_2][x_2, x_4]$  pertence a  $T$ , portanto também pertence a  $Q$ . Deste modo, pela Proposição 1.4.11, podemos reescrever  $f$  como combinação linear de elementos do tipo

$$x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2q-1}}, x_{j_{2q}}] x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_{2q}}^{\delta_{2q}} + Q$$

onde  $i_1 < \dots < i_m$ ,  $1 \leq \epsilon_i < p$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $x_{j_l} \neq x_{j_r}$ , para  $l \neq r$ ,  $0 < \delta_l < p$  ( $1 \leq l \leq 2q$ ). Segue do Corolário 2.2.1, que podemos assumir  $j_1 < \dots < j_{2q}$ . Portanto,  $\{d + Q \mid d \in D\}$  gera  $K\langle X \rangle / Q$ . ■

O próximo corolário nos dá um candidato a base de  $K\langle X \rangle / T(E')$ .

**Corolário 2.3.4** *O conjunto  $\{d + Q \mid d \in D\}$  gera  $K\langle X \rangle / T(E')$  como espaço vetorial sobre  $K$ .*

**Demonstração:** A prova segue imediatamente dos Lemas 2.3.2 e 2.3.3. ■

**Lema 2.3.5** *Os elementos de  $D$  são linearmente independentes módulo  $T(E')$ .*

**Demonstração:** Ver prova em [43], p.32. ■

Com esses resultados podemos provar o principal resultado da seção.

**Proposição 2.3.6** ([9], Teorema 3) *Seja  $K$  um corpo arbitrário de característica  $p > 2$ . Então  $T(E') = Q$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 2.3.2,  $Q \subseteq T(E')$ . No Lema 2.3.3 mostramos que  $\{d + Q \mid d \in D\}$  gera  $K\langle X \rangle / Q$ . Segue do Corolário 2.3.4 e do Lema 2.3.5 que o conjunto  $\{d + Q \mid d \in D\}$  é base de  $K\langle X \rangle / T(E')$ . Portanto  $T(E') = Q$ . ■

No mesmo trabalho, Chiripov e Siderov provaram que a variedade gerada pela álgebra de Grassmann sem unidade  $E'$  também possui a propriedade de Specht.

## Capítulo 3

# Identidades $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para $E$ , $\text{char } K = p$

Neste capítulo iremos apresentar os resultados obtidos por Centrone ([8], 2011), os quais abordam a estrutura das identidades polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para a álgebra de Grassmann  $E$ . Uma descrição completa para a estrutura das identidades polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas de  $E$  em característica zero para qualquer  $\mathbb{Z}_2$ -gradação foi dada, em 2009, por Di Vincenzo e Da Silva [48]. Centrone, resolveu um problema análogo, descrevendo um conjunto gerador das identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas de  $E$  sobre um corpo infinito de característica positiva e diferente de dois.

No decorrer do capítulo veremos que existe uma relação direta entre os polinômios geradores do  $T_2$ -ideal, o número  $k$  de elementos homogêneos na base  $E$  de grau 0 ou 1 e o fato de  $p \leq k$  ou  $p > k$ .

### 3.1 $\mathbb{Z}_2$ -gradações para $E$

Sejam  $K$  um corpo infinito de característica  $p \neq 2$  e  $V$  um espaço vetorial de dimensão infinita sobre  $K$ . Considere  $E$  a álgebra de Grassmann gerada por  $V$ ,  $\beta = \{e_1, e_2, \dots\}$  uma base para  $V$  e  $\{1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$  uma base para a álgebra de Grassmann gerada por  $V$ . Nesta seção iremos apresentar as  $\mathbb{Z}_2$ -gradações para  $E$ , nas quais os geradores  $e_i$  com  $i = 1, 2, \dots$  são homogêneos.

Isto equivale a considerar a aplicação

$$\| \cdot \|: \beta \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Se  $w = e_1 e_2 \dots e_k$  é um elemento da base de  $E$ , então o conjunto  $Supp(w) := \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$  é dito o **suporte de  $w$** , e definimos a  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $w$  por

$$\| w \| = \| e_{i_1} \| + \dots + \| e_{i_k} \|,$$

onde a componente par de  $E$  com respeito a esta graduação é o subespaço gerado pelos elementos  $w$  tais que  $\| w \| = 0$  e a componente ímpar é linearmente gerada pelos elementos  $w$  tais que  $\| w \| = 1$ .

Quando, para todo  $e_i \in \beta$ , tem-se  $\| e_i \| = 1 \in \mathbb{Z}_2$  obtemos a  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural para  $E$  dada por

$$\| e_{i_1} \dots e_{i_k} \| := \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é par} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

como foi visto no Exemplo 1.3.3.

Por outro lado, se para todo  $e_i \in \beta$  tivermos  $\| e_i \| = 0 \in \mathbb{Z}_2$  obtemos a  $\mathbb{Z}_2$ -gradação trivial para  $E$  dada por  $E = E^{(0)}$ .

Dado  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 1$  considere em  $E$  as  $\mathbb{Z}_2$ -gradações induzidas pelas aplicações:

$$\| \cdot \|_k, \quad \| \cdot \|_{k^*}, \quad \| \cdot \|_\infty$$

definidas respectivamente por:

$$\| e_i \|_k := \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, k \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\| e_i \|_{k^*} := \begin{cases} 1, & i = 1, \dots, k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.3)$$

e

$$\| e_i \|_\infty := \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.4)$$

No decorrer do capítulo, iremos escrever

$$(E_k, \| \cdot \|), (E_{k^*}, \| \cdot \|) \text{ e } (E_\infty, \| \cdot \|)$$

em vez de

$$(E, \|\cdot\|_k), (E, \|\cdot\|_{k^*}) \text{ e } (E, \|\cdot\|_\infty).$$

Na próxima seção apresentaremos uma ferramenta que nos auxiliará na descrição de uma base para as identidades polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas.

## 3.2 Polinômios $Y$ -próprios

Como vimos na Seção 1.4 os polinômios próprios são importantes no estudo de identidades polinomiais ordinárias de álgebras com unidade. De modo análogo os polinômios  $Y$ -próprios, que definiremos a seguir, são ferramentas úteis quando buscamos descrever identidades graduadas para álgebras unitárias  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas.

**Definição 3.2.1** *Seja  $K\langle Y, Z \rangle$  a álgebra associativa livre unitária  $\mathbb{Z}_2$ -graduada e denote por  $B(Y; Z)$  a subálgebra unitária de  $K\langle Y, Z \rangle$  gerada pelos elementos de  $Z$  e por todos os comutadores não-triviais. Os elementos de  $B(Y; Z)$  são chamados de **polinômios  $Y$ -próprios**.*

Segue da definição anterior que um polinômio  $f \in K\langle Y, Z \rangle$  é  $Y$ -próprio se, e somente se, todas as variáveis em  $Y$  aparecem apenas em comutadores. Assim, os polinômios  $Y$ -próprios são combinações lineares de produtos da forma

$$z_{i_1} \dots z_{i_h} [u_{j_1}, \dots, u_{j_{l_1}}] \dots [u_{j_m}, \dots, u_{j_{l_m}}], \quad (3.5)$$

onde  $u_j \in Y \cup Z$ ,  $h \geq 0$  e  $l = 0, 2, \dots$

**Exemplo 3.2.2** *Se  $f \in K\langle Z \rangle$ , então  $f$  é um polinômio  $Y$ -próprio.*

**Teorema 3.2.3** *Denote por  $u_t$  um elemento arbitrário do conjunto  $Y \cup Z$  e escolha uma base ordenada da álgebra de Lie livre  $L(Y \cup Z)$  dada por*

$$y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots, [u_{i_1}, u_{i_2}], [u_{j_1}, u_{j_2}], \dots, [u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}], \dots,$$

que consiste das variáveis  $y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots$  e alguns comutadores, tal que as variáveis precedam os comutadores. Temos o seguinte:

(i) *O espaço vetorial  $K\langle Y, Z \rangle$  tem uma base*

$$y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m} z_1^{\mu_1} \dots z_n^{\mu_n} [u_{i_1}, u_{i_2}]^\nu \dots [u_{l_1}, \dots, u_{l_p}]^\varpi,$$

onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mu_1, \dots, \mu_n, \nu, \dots, \varpi \geq 0$  e  $[u_{i_1}, u_{i_2}] < \dots < [u_{l_1}, \dots, u_{l_p}]$  na ordenação da base de  $L(Y \cup Z)$ .

(ii) Uma base do espaço vetorial  $B(Y; Z)$  é dada pelos elementos da base de  $K\langle Y, Z \rangle$  com  $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$ .

**Demonstração:** Como  $X = Y \cup Z$ , temos que o primeiro resultado segue imediatamente do item (i) da Proposição 1.4.11.

Para demonstrar o segundo item, tomemos  $f \in B(Y; Z)$ . Então  $f$  é combinação linear de monômios da forma (3.5). Aplicando a Proposição 1.4.11 para a álgebra livre unitária  $K\langle Z \rangle$ , temos que  $z_{i_1} \dots z_{i_n}$  é uma combinação linear de monômios da forma

$$z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n} [z_{i_1}, z_{i_2}]^{\vartheta} \dots [z_{l_1}, \dots, z_{l_p}]^{\varpi},$$

com  $\beta_1, \dots, \beta_n, \vartheta, \dots, \varpi \geq 0$ . Assim, podemos supor que  $f$  é combinação linear de monômios da forma (3.5) com  $i_1 \leq \dots \leq i_h$ . Aplicando o item (ii) da Proposição 1.4.11 a cada produto de comutadores  $[u_{j_1}, \dots, u_{j_p}] \dots [u_{k_1}, \dots, u_{k_q}]$ , concluímos a prova. ■

Os próximos resultados nos permitem entender a necessidade da superálgebra  $A$  ser unitária e de fazermos uso dos polinômios  $Y$ -próprios.

**Proposição 3.2.4** *Se  $A$  é uma  $K$ -álgebra associativa com unidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada e  $K$  um corpo infinito, então toda identidade polinomial graduada para  $A$  segue de suas identidades  $Y$ -próprias.*

**Demonstração:** Seja  $f$  uma identidade polinomial graduada de  $A$ . Como  $K$  é um corpo infinito, podemos supor sem perda de generalidade  $f = f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$  multihomogêneo. Pelo Teorema 3.2.3,  $f$  pode ser escrito como

$$f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} k_\alpha y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m} \omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n), \quad k_\alpha \in K$$

e  $\omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$  é uma combinação linear de

$$z_1^{\mu_1} \dots z_n^{\mu_n} [u_{i_1}, u_{i_2}]^\nu \dots [u_{l_1}, \dots, u_{l_p}]^\varpi.$$

Se nenhuma variável  $y$  aparece em  $f$ , então  $f$  é  $Y$ -próprio e segue o resultado. Suponha então que  $y_1$  aparece em  $f$ . Já que  $f$  é uma identidade polinomial graduada de  $A$ , então  $f(1 + y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m)$  também é, e como ao substituir uma variável que está no comutador por 1 o mesmo se anula, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\equiv f(1 + y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) \\ &= \sum_{\alpha} k_\alpha (1 + y_1)^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} \omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \\ &= \sum_{\alpha} k_\alpha \left[ \sum_{k=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{k} y_1^k \right] y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} \omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

A componente homogênea de grau minimal em  $y_1$  é obtida a partir dos somandos com  $\alpha_1$  maximal entre aqueles com  $k_\alpha \neq 0$ . Como  $T_2(A)$  é homogêneo, obtemos que esta componente também é uma identidade graduada de  $A$ , portanto

$$\sum_{\alpha_1 \text{ max}} k_\alpha y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} \omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \equiv 0.$$

Multiplicando essa identidade polinomial por  $y_1^{\alpha_1}$  e subtraindo o produto por  $f$  obtemos uma identidade que é similar a  $f$  mas que envolve valores menores de  $\alpha_1$ . Repetindo este processo obtemos

$$\sum_{\alpha_1 \text{ fixado}} k_\alpha y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} \omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \equiv 0.$$

Procedendo da mesma maneira com as demais variáveis  $y_2, \dots, y_m$ , concluímos que

$$\omega_\alpha(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \equiv 0,$$

para todo  $\alpha$  como queríamos demonstrar. ■

**Corolário 3.2.5** *Seja  $K$  um corpo infinito. Considere  $A$  e  $B$  duas  $K$ -álgebras  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas associativas com unidade. Se  $B(Y; Z) \cap T_2(A) = B(Y; Z) \cap T_2(B)$  então  $T_2(A) = T_2(B)$ .*

**Demonstração:** Seja  $f \in T_2(A)$ , como  $K$  é um corpo infinito segue da Proposição anterior que  $f \in B(Y; Z) \cap T_2(A)$ . Por hipótese  $B(Y; Z) \cap T_2(A) = B(Y; Z) \cap T_2(B)$ , e novamente pela Proposição 3.2.4, obtemos que  $f \in T_2(B)$ . A inclusão contrária é análoga. Portanto,  $T_2(A) = T_2(B)$ . ■

Para mais detalhes sobre os polinômios  $Y$ -próprios veja ([14]; seção 2) e ([47]; seção 2).

Nas próximas seções iremos descrever uma base para as identidades polinomiais graduadas para cada uma das  $\mathbb{Z}_2$ - graduações apresentadas na Seção 3.1.

### 3.3 Identidades Graduadas para $E_{k^*}$

Nesta seção iremos descrever as identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para a álgebra de Grassmann com a graduação induzida pela aplicação  $\| \cdot \|_{k^*}$ , dada por  $E_{k^*} = E_{k^*}^{(0)} \oplus E_{k^*}^{(1)}$ , onde  $E_{k^*}^{(0)}$  é o espaço vetorial gerado pelos elementos  $e_{i_1} \dots e_{i_m} \in \beta$  onde a quantidade

de elementos  $e'_i$ s com  $i \leq k$  é par. Já nos geradores de  $E_{k^*}^{(1)}$  temos uma quantidade ímpar destes elementos.

**Proposição 3.3.1** *A álgebra  $E_{k^*}$  satisfaz a identidade  $z^p$ , quando  $\text{char}K = p > 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $\text{char}K = p > 0$ . Vimos na Proposição 1.3.6 que  $1_E \in E_{k^*}^{(0)}$ , e desta forma  $E_{k^*}^{(1)}$  é um subespaço da álgebra de Gassmann sem unidade  $E'$ . Portanto segue do Lema 2.3.1 que para qualquer substituição por elementos de  $E_{k^*}^{(1)}$  o monômio  $z^p$  se anula, e assim é uma identidade polinomial  $\mathbb{Z}_2$ -graduada de  $E_{k^*}$ . ■

**Lema 3.3.2** *O monômio  $z_1 \dots z_{k+1}$  é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_{k^*}$ .*

**Demonstração:** Como o monômio  $z_1 \dots z_{k+1}$  é multilinear, é suficiente mostrar que ele se anula para elementos de uma base de  $E_{k^*}^{(1)}$ . Considere  $\beta = \{e_{i_1} \dots e_{i_l} \mid \text{existe uma quantidade ímpar de } e'_i \text{ tal que } i \leq k \text{ e } i_1 < \dots < i_l\}$  uma base para  $E_{k^*}^{(1)}$ . Tomando  $a_i = e_{i_1} \dots e_{i_l} \in \beta$  (com  $1 \leq i \leq k+1$ ), segue do Princípio das gavetas de Dirichlet que no produto  $a_1 a_2 \dots a_{k+1}$  algum dos  $e'_i$ s se repete. Portanto  $a_1 \dots a_{k+1} = 0$  ■

Os próximos resultados serão úteis na demonstração do principal resultado da seção, o Teorema 3.3.14.

**Lema 3.3.3** *Os polinômios  $t_{2n} = [y_1, y_2] \dots [y_{2n-1}, y_{2n}]$  não são identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $E_{k^*}$ .*

**Demonstração:** A prova é análoga à feita no Lema 2.2.3. ■

Antes de demonstrar o próximo lema enunciaremos a generalização do binômio de Newton (para mais detalhes ver [34], pág. 114).

**Observação 3.3.4 (Teorema de Leibniz)**

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p}$$

estendendo-se o somatório a todos os valores inteiros não-negativos de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  tais que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$ .

**Lema 3.3.5** *Seja  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $r < p$  e  $r < k$ . Então o monômio  $z^r$  não é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_{k^*}$ .*

**Demonstração:** Considere a substituição

$$\begin{aligned}\varphi : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ z &\mapsto \sum_{i=1}^r e_i e_{k+i}.\end{aligned}$$

Note que  $e_i e_{k+i} \in E_{k^*}^{(1)}$ , já que  $i \leq r < k$ , e como  $\varphi(z) \in Z(E)$ , pelo Teorema de Leibniz

$$\left( \sum_{i=1}^r e_i e_{k+i} \right)^r = \sum_{l_1 + \dots + l_r = r} \frac{r!}{l_1! \dots l_r!} (e_1 e_{k+1})^{l_1} \dots (e_r e_{k+r})^{l_r}.$$

Como  $(e_i e_{k+i})^2 = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ , e  $\sum_1^r l_i = r$  considere  $l_i = 1$ . Desta forma,

$$\varphi(z^r) = r! e_1 e_{k+1} \dots e_r e_{k+r}.$$

Por hipótese  $r < k$  e  $r < p$ , e portanto  $z^r \neq 0$ . ■

**Corolário 3.3.6** *Considere o monômio  $m(z_1, \dots, z_l)$  de multigrado  $(r_1, \dots, r_l)$  tal que  $\sum_{i=1}^l r_i \leq k$ . Se  $\max_i \{r_i\} = r < p$ , então  $m$  não é uma identidade para  $E_{k^*}$ . Em particular,  $t = z_1^{r_1} \dots z_l^{r_l}$  não é identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_{k^*}$ .*

**Demonstração:** Para demonstrar o resultado, exibiremos uma substituição por elementos de  $E_{k^*}^{(1)}$  de modo que o monômio  $m$  não se anule.

Considere a substituição  $\mathbb{Z}_2$ -graduada

$$\begin{aligned}\varphi : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ z_1 &\mapsto e_1 e_{k+1} + e_2 e_{k+2} + \dots + e_{r_1} e_{k+r_1} \\ z_2 &\mapsto e_{r_1+1} e_{k+r_1+1} + \dots + e_{r_1+r_2} e_{k+r_1+r_2} \\ &\vdots \\ z_l &\mapsto e_{r_1+\dots+r_{l-1}+1} e_{k+r_1+\dots+r_{l-1}+1} + \dots + e_{r_1+\dots+r_l} e_{k+r_1+\dots+r_l}.\end{aligned}$$

A condição  $\sum_{i=1}^l r_i \leq k$  garante que todos os  $\varphi(z_i)$ 's têm suportes disjuntos, e a imagem de  $\varphi$  só depende do multigrado de  $m$ , pois todos os  $\varphi(z_i)$ 's pertencem ao centro de  $E$ .

Assim,

$$\varphi(m(z_1, \dots, z_l)) = \varphi(z_1^{r_1} \dots z_l^{r_l}).$$

Portanto, segue do Lema anterior que

$$\varphi(m(z_1, \dots, z_l)) = \pm \prod_{i=1}^l r_i! e_1 \dots e_{r_1+\dots+r_l} e_{k+1} \dots e_{k+r_1+\dots+r_l}.$$

Como, por hipótese,  $\max_i \{r_i\} = r < p$ ,  $\prod_{i=1}^l r_i! \not\equiv 0 \pmod{p}$ , e daí temos que  $m$  não é identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_{k^*}$ . ■

**Lema 3.3.7** *Seja  $I = \langle [x_1, x_2, x_3], z_1 \dots z_{k+1}, z^p \rangle^{T_2}$ . Então  $I \subseteq T_2(E_{k^*})$ .*

**Demonstração:** Segue imediatamente do Teorema 2.1.2, da Proposição 3.3.1 e do Lema 3.3.2 que os polinômios em  $I$  são identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $E_{k^*}$ . Portanto,  $I \subseteq T_2(E_{k^*})$ . ■

**Lema 3.3.8** *Sejam  $f(x_1, \dots, x_n) \in B(X) = B(Y; Z)$  um polinômio multihomôgeneo e  $s, h \in \mathbb{N}$  tais que  $s + h = n$ . Se  $f(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_h) \in B(Y; Z)$  então, módulo  $I$ ,  $f$  pode ser escrito como:*

$$f = \sum \alpha z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s] [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}],$$

se  $s$  é par, ou

$$f = \sum \alpha z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-2}, y_{s-1}] [y_s, z_{j_1}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}]$$

se  $s$  é ímpar, onde  $m' \leq h$ ,  $d_i \in \{r_i - 1, r_i\}$ ,  $\sum_{i=1}^h r_i \leq k$  e os índices são ordenados.

**Demonstração:** Dado  $f(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_h) \in B(Y; Z)$ , pelo Teorema 3.2.3  $f = \sum \alpha z_1^{\mu_1} \dots z_a^{\mu_a} \dots [u_{i_1}, u_{i_2}]^\nu \dots [u_{l_1}, \dots, u_{l_p}]^\varpi$ . Como os comutadores são centrais módulo  $I$ , podemos assumir que os comutadores de variáveis  $y$ 's antecedem os comutadores de variáveis  $z$ 's. Além disso, considerando  $T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle \subset I$ , temos que  $[u_i, u_j]^2 \equiv 0 \pmod{T}$  e  $[u_{l_1}, \dots, u_{l_p}] \equiv 0 \pmod{T}$ , se  $l_p \geq 3$ . Assim

$$f = \sum \alpha z_1^{\mu_1} \dots z_a^{\mu_a} \dots [y_{i_1}, y_{i_2}] \dots [y_{i_{s-1}}, y_{i_s}] [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}]$$

se  $s$  é par, ou

$$f = \sum \alpha z_1^{\mu_1} \dots z_a^{\mu_a} \dots [y_{i_1}, y_{i_2}] \dots [y_{i_{s-2}}, y_{i_{s-1}}] [y_{i_s}, z_{j_1}] \dots [z_{j_1}, z_{j_{m'}}]$$

se  $s$  é ímpar, e em ambos os casos  $m' \geq h$ .

É fácil ver que  $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$  e, pelo Corolário 2.2.1,  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv -[x_1, x_3][x_2, x_4] \pmod{T}$ . Logo podemos admitir que  $i_1 < \dots < i_s$  e  $j_1 < \dots < j_{m'}$ . Sendo  $\deg_{z_i} f_i = r_i$ , como o monômio  $z_1 \dots z_{k+1} \in I$ , temos que, módulo  $I$ ,  $\sum r_i \leq k$ . Por outro lado,  $z^p$  também pertence a  $I$ , e então devemos ter  $\max_i \{r_i\} = r < p$ . Portanto, módulo  $I$ ,

$$f = \sum \alpha z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s] [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}],$$

se  $s$  é par, ou

$$f = \sum \alpha z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-2}, y_{s-1}] [y_s, z_{j_1}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}]$$

se  $s$  é ímpar. ■

**Definição 3.3.9** *Sejam  $f(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_h) \in B(Y; Z)$  e  $J = \{j_1, \dots, j_{m'}\} \subseteq \{1, \dots, h\}$ . Definiremos o polinômio  $f_J$  por:*

$$z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s] [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}],$$

se  $s$  é par, ou

$$z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-2}, y_{s-1}] [y_s, z_{j_1}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}]$$

se  $s$  é ímpar. Além disso,  $d_i \in \{r_i - 1, r_i\}$  e  $\sum_{i=1}^h r_i \leq k$ .

Deste modo, pela definição acima e pelo Lema 3.3.8, dado  $f \in B(Y; Z)$ , temos que  $f \equiv \sum_{J \subseteq \{1, \dots, h\}} \alpha f_J \pmod{I}$ .

Nos exemplos a seguir, iremos analisar o comportamento dos polinômios  $f_J$  e  $f_{\tilde{J}}$  quando avaliados por certos elementos de  $E_{k^*}$ , e em seguida esse resultado será generalizado na Proposição 3.3.13.

Considere  $\tilde{J} = \{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_{m'}\} \subseteq \{1, \dots, h\}$  tal que  $\tilde{J} \not\subseteq J$ . Denotaremos  $f_{\tilde{J}} = z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s] [z_{\tilde{j}_1}, z_{\tilde{j}_2}] \dots [z_{\tilde{j}_{m'-1}}, z_{\tilde{j}_{m'}}]$  se  $s$  é par e  $f_{\tilde{J}} = z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-2}, y_{s-1}] [y_s, z_{\tilde{j}_1}] \dots [z_{\tilde{j}_{m'-1}}, z_{\tilde{j}_{m'}}]$  se  $s$  é ímpar.

**Exemplo 3.3.10** *Sejam  $J = \emptyset$  e a substituição*

$$\begin{aligned} \varphi_\emptyset : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ y_i &\mapsto e_{k+i} \\ z_1 &\mapsto e_1 e_{k+s+1} + e_2 e_{k+s+2} + \dots + e_{r_1} e_{k+s+r_1} \\ &\vdots \\ z_h &\mapsto e_{r_1+\dots+r_{h-1}+1} e_{k+s+r_1+\dots+r_{h-1}+1} + \dots + e_{r_1+\dots+r_h} e_{k+s+r_1+\dots+r_h}. \end{aligned}$$

Note que na graduação natural de  $E$ ,  $\varphi_\emptyset(z_i) \in Z(E)$  para  $i = 1, \dots, h$ , e assim  $\varphi_\emptyset([u, z_i]) = 0$  para quaisquer  $i \in \tilde{J}$  e  $u \in K\langle Y, Z \rangle$ . Daí,  $\varphi_\emptyset(f_{\tilde{J}}) = 0$  e pelos Lemas 3.3.3 e 3.3.5 segue que

$$\begin{aligned} \varphi_\emptyset(f_\emptyset) &= \varphi_\emptyset(z_1^{r_1} \dots z_h^{r_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s]) \\ &= \pm 2^{s/2} \prod_{i=1}^l r_i! e_1 \dots e_{\sum_{i=1}^h r_i} e_{k+1} \dots e_{k+s}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\varphi_\emptyset(f_\emptyset) \neq 0$  e  $\varphi_\emptyset(f_{\tilde{J}}) = 0$ , sempre que  $\tilde{J} \not\subseteq \emptyset$ .

**Exemplo 3.3.11** Dados  $J = \{a\}$  e a substituição

$$\begin{aligned} \varphi_{\{a\}} : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ y_i &\mapsto e_{k+i} \\ z_1 &\mapsto e_1 e_{k+1} + \dots + e_{r_1} e_{k+s+r_1} \\ &\vdots \\ z_a &\mapsto e_{\sum_{i=1}^{a-1} r_i+1} + e_{\sum_{i=1}^{a-1} r_i+2} e_{k+s+\sum_{i=1}^{a-1} r_i+2} + \dots + e_{\sum_{i=1}^a r_i} e_{k+s+\sum_{i=1}^a r_i} \\ &\vdots \\ z_h &\mapsto e_{\sum_{i=1}^{h-1} r_i+1} + e_{\sum_{i=1}^{h-1} r_i+2} e_{k+s+\sum_{i=1}^{h-1} r_i+2} + \dots + e_{\sum_{i=1}^h r_i} e_{k+s+\sum_{i=1}^h r_i}. \end{aligned}$$

Seja  $f_{\{a\}} = z_1^{r_1} \dots z_a^{r_a-1} \dots z_h^{r_h} [y_2, y_3] \dots [y_{s-1}, y_s] [y_1, z_a]$ . Segue dos Lemas 3.3.3 e 3.3.5 que

$$\varphi_{\{a\}}(f_{\{a\}}) = \pm 2^{\frac{s-1}{2}+1} \prod_{i=(1, \dots, \hat{a}, \dots, h)} r_i! (r_a - 1)! e_1 \dots e_{\sum_{i=1}^h r_i} e_{k+1} \dots e_{k+s} \neq 0$$

e  $\varphi_{\{a\}}([z_{i_1}, z_{i_2}]) = 0$  para quaisquer  $i_1, i_2 \in \tilde{J}$ , já que após a substituição pelo menos um dos  $z_i$ 's pertencem a  $Z(E)$ . Assim,  $\varphi_{\{a\}}(f_{\tilde{J}}) = 0$ , para  $\tilde{J} \not\subseteq J$ .

**Exemplo 3.3.12** Quando  $J = \{a, b\}$ , considere

$$\begin{aligned} \varphi_{\{a,b\}} : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ y_i &\mapsto e_{k+i} \\ z_1 &\mapsto e_1 e_{k+s+1} + e_2 e_{k+s+2} + \dots + e_{r_1} e_{k+s+r_1} \\ &\vdots \\ z_a &\mapsto e_{\sum_{i=1}^{a-1} r_i+1} + e_{\sum_{i=1}^{a-1} r_i+2} e_{k+s+\sum_{i=1}^{a-1} r_i+2} + \dots + e_{\sum_{i=1}^a r_i} e_{k+s+\sum_{i=1}^a r_i} \\ &\vdots \\ z_b &\mapsto e_{\sum_{i=1}^{b-1} r_i+1} + e_{\sum_{i=1}^{b-1} r_i+2} e_{k+s+\sum_{i=1}^{b-1} r_i+2} + \dots + e_{\sum_{i=1}^b r_i} e_{k+s+\sum_{i=1}^b r_i} \\ &\vdots \\ z_h &\mapsto e_{\sum_{i=1}^{h-1} r_i+1} e_{k+s+\sum_{i=1}^{h-1} r_i+1} + \dots + e_{\sum_{i=1}^h r_i} e_{k+s+\sum_{i=1}^h r_i}. \end{aligned}$$

Observe que todos os  $\varphi_{\{a,b\}}(f_{\tilde{J}})$  tais que  $\tilde{J} \not\subseteq J$  são nulos, pois os  $\varphi_{\{a,b\}}(z_i)$ 's tais que  $i \in \tilde{J}$  pertencem a  $Z(E)$ , como  $f_{\{a,b\}} = z_1^{r_1} \dots z_a^{r_a-1} \dots z_b^{r_b-1} \dots z_h^{r_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s] [z_a, z_b]$  temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{\{a,b\}}([z_a, z_b]) &= [e_{\sum_{i=1}^{a-1} r_i+1}, e_{\sum_{i=1}^{b-1} r_i+1}] \\ &= 2e_{\sum_{i=1}^{a-1} r_i+1} e_{\sum_{i=1}^{b-1} r_i+1} \emptyset. \end{aligned}$$

Pelos Lemas 3.3.3 e 3.3.5, temos

$$\varphi_{\{a,b\}}(f_{\{a,b\}}) = \pm 2^{(s+1)/2} \prod_{i=(1, \dots, \hat{a}, \dots, \hat{b}, \dots, h)} r_i! (r_a - 1)! (r_b - 1)! e_1 \dots e_{\sum_{i=1}^h r_i} e_{k+1} \dots e_{k+s} \neq 0.$$

**Proposição 3.3.13** *Dado  $J \subseteq \{1, \dots, h\}$ , existe uma substituição  $\varphi_J : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$  tal que  $\varphi_J(f_J) \neq 0$  e  $\varphi_J(f_{\tilde{J}}) = 0$  para  $\tilde{J} \not\subseteq J$ .*

**Demonstração:** Considere  $J = \{j_1, \dots, j_{m'}\} \subseteq \{1, \dots, h\}$  e a substituição  $\varphi_J : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$  na qual as variáveis pertencentes a componente homogênea de grau 0 serão substituídas por elementos em  $E_{k^*}^{(0)}$  de comprimento 1 e as variáveis  $z'_j$ s pela soma de  $r_j$  elementos pertencentes a  $E_{k^*}^{(1)}$  onde cada parcela tem comprimento 2, exceto as variáveis cujo índice  $j \in J$ , neste caso o primeiro termo da soma deverá ter comprimento 1. Além disso todos os  $y'_i$ s e  $z'_j$ s deverão ter suportes disjuntos, e isso é possível pois na definição dos  $f'_j$ s,  $\sum_{j=1}^h r_j \leq k$ .

Com esta substituição,  $\varphi_J(f_{\tilde{J}}) = 0$ , já que  $\varphi_J(z_j) \in Z(E)$  para todo  $j \in \tilde{J}$  e como  $\varphi_J([u, z_j]) \neq 0$ , para todo  $j \in J$  e  $u \in K\langle Y, Z \rangle$ , segue dos Lemas 3.3.3 e 3.3.5 que  $\varphi_J(f_J) \neq 0$ . ■

**Teorema 3.3.14** *Sejam  $p, k \in \mathbb{N}$ , onde  $p$  é primo e  $p \neq 2$ . Sobre um corpo infinito  $K$  de característica  $p \neq 2$  tal que  $p > k$ , todas as identidades polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $E_{k^*}$  são consequências das identidades graduadas:*

$$[x_1, x_2, x_3], z_1 \dots z_{k+1}.$$

*Por outro lado, se  $p \leq k$ , todas as identidades polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $E_{k^*}$  são consequências das identidades graduadas:*

$$[x_1, x_2, x_3], z_1 \dots z_{k+1}, z^p$$

**Demonstração:** Inicialmente suponha  $p \leq k$ . Mostraremos que dadas as álgebras  $E_{k^*}$  e  $B = K\langle Y, Z \rangle / I$ , com  $I = \langle [x_1, x_2, x_3], z_1 \dots z_{k+1}, z^p \rangle^{T_2}$ , sobre  $K$  temos que  $T_2(E_{k^*}) = T_2(B)$ .

Pelo Corolário 3.2.5, basta mostrar que  $B(Y; Z) \cap T_2(E_{k^*}) = B(Y; Z) \cap T_2(B)$ .

A inclusão  $B(Y; Z) \cap T_2(B) \subseteq B(Y; Z) \cap T_2(E_{k^*})$ , segue do lema 3.3.7.

Para provar a inclusão contrária, faremos indução sobre a cardinalidade de  $J$ . Inicialmente considere  $f \in B(Y; Z) \cap T_2(E_{k^*})$ . Como  $f \in B(Y; Z)$  segue do Lema 3.3.8 que  $f \equiv \sum \alpha_J f_J$ , módulo  $I$ . Por outro lado,  $f \in T_2(E_{k^*})$ , então para qualquer substituição  $\varphi : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$ , temos  $\varphi(f) = 0$ . Se  $|J| = 0$ , considerando a substituição  $\varphi_\emptyset$  temos que  $\varphi_\emptyset(f) = 0$  e segue do Exemplo 3.3.10 que  $\alpha_\emptyset = 0$ . Suponha que  $\alpha_J = 0$  para todo  $J \subseteq \{1, \dots, h\}$  tal que  $|J| < m'$  onde  $m' \in \mathbb{N}$  e  $m' \leq h$ . Mostraremos que  $\alpha_J = 0$  quando  $|J| = m'$ . De fato, dado  $\tilde{J} \subseteq \{1, \dots, h\}$  tal que  $\tilde{J} \neq J$  note que

- se  $\tilde{J} \subsetneq J$ , então  $|\tilde{J}| < m'$  e por hipótese de indução  $\alpha_{\tilde{J}} = 0$ . Assim, para qualquer substituição  $\varphi : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$  temos que  $\varphi(f) = \varphi(\alpha_J f_J) = \alpha_J \varphi(f_J) = 0$ , em particular,  $\varphi_J(f) = \alpha_J \varphi_J(f_J) = 0$ . Segue da Proposição 3.3.13 que  $\varphi_J(f_J) \neq 0$ , portanto  $\alpha_J = 0$ .
- se  $\tilde{J} \not\subseteq J$ , considerando a substituição  $\varphi_J : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$  segue da Proposição 3.3.13 que  $\varphi_J(f_{\tilde{J}}) = 0$  e  $\varphi_J(f_J) \neq 0$ , como  $\varphi(f)$  é identicamente nula para qualquer substituição  $\varphi : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$ , obtemos que  $\alpha_J = 0$ .

Como queríamos demonstrar,  $T_2(E_{k^*}) = T_2(B)$ , isto equivale dizer que todas as identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $E_{k^*}$  são consequência das identidades  $[x_1, x_2, x_3]$  e  $z_1 \dots z_{k+1}$ .

Vimos na Seção 2.3 que  $z^p$  é consequência do monômio  $z_1 \dots z_{k+1}$  quando  $k < p$ , deste modo o  $T_2$ -ideal de  $E_{k^*}$  pode ser reduzido a  $T_2(E_{k^*}) = \langle z_1 \dots z_{k+1}, [x_1, x_2, x_3] \rangle^{T_2}$ .

■

### 3.4 Identidades Graduadas para $E_\infty$

Agora iremos descrever as identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para a álgebra de Grassmann  $E_\infty = (E, \|\cdot\|_\infty)$ , sobre um corpo infinito  $K$  com  $\text{char}K = p \neq 2$ . Nesta  $\mathbb{Z}_2$ -gradação os subespaços homogêneos de grau 0 e 1 são gerados respectivamente por  $\{e_{i_1} \dots e_{i_m} \mid \text{existe uma quantidade par de } e'_i \text{ s com } i \text{ ímpar}\}$  e  $\{e_{i_1} \dots e_{i_m} \mid \text{existe uma quantidade ímpar de } e'_i \text{ s com } i \text{ ímpar}\}$ .

**Lema 3.4.1** *Os polinômios  $t_{2n} = [y_1, y_2] \dots [y_{2n-1}, y_{2n}]$  não são identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $E_\infty$ .*

**Demonstração:** A prova é análoga a do Lema 2.2.3. ■

**Lema 3.4.2** *Seja  $r \in \mathbb{N}$ , com  $r < p$ . Então o monômio  $z^r$  não é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_\infty$ .*

**Demonstração:** Dada a substituição  $\varphi : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$ , tal que  $\varphi(z) = \sum_{i=1}^r e_{2i-1} e_{2i}$ , como em cada termo do somatório existe apenas um elemento  $e_i$  com  $1 \leq i \leq r$  ímpar, segue que  $e_{2i-1} e_{2i} \in E_\infty^{(1)}$ . Além disso,  $\varphi(z) \in Z(E)$ . Portanto, pelo Teorema de Leibniz,  $\varphi(z^r) = r! e_1 e_2 \dots e_{2r-1} e_{2r}$ . Mas por hipótese  $r < p$ , logo  $\varphi(z^r) \neq 0$ . ■

**Corolário 3.4.3** Dado o monômio  $m(z_1, \dots, z_l)$  de multigrado  $(r_1, \dots, r_l)$  se  $\max_i \{r_i\} = r < p$ , então  $m$  não é uma identidade para  $E_\infty$ . Em particular,  $t = z_1^{r_1} \dots z_l^{r_l}$  não é identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_\infty$ .

**Demonstração:** A prova é análoga à apresentada no Corolário 3.3.6. ■

**Lema 3.4.4** Seja  $I = \langle [x_1, x_2, x_3], z^p \rangle^{T_2}$  então  $I \subseteq T_2(E_\infty)$ .

**Demonstração:** De acordo com a Proposição 1.3.6,  $1_E \in E_\infty^{(0)}$ , e desta forma temos que  $E_\infty^{(1)} \subseteq E'$ . Assim segue do Lema 2.3.1 que  $z^p$  é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_\infty$ . Já pelo Teorema 2.1.2 temos que  $[x_1, x_2, x_3]$  é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_\infty$ . Portanto,  $I \subseteq T_2(E_\infty)$ . ■

**Lema 3.4.5** Considere  $f(x_1, \dots, x_n) \in B(X) = B(Y; Z)$  um polinômio multihomogêneo e  $s, h \in \mathbb{N}$  tais que  $s + h = n$ , onde  $s$  e  $h$  são respectivamente o número de variáveis pertencentes às componentes de graus 0 e 1. Então, módulo  $I$ ,  $f$  pode ser escrito como:

$$f = \sum \alpha z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s] [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}],$$

se  $s$  é par, ou

$$f = \sum \alpha z_1^{d_1} \dots z_h^{d_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-2}, y_{s-1}] [y_s, z_{j_1}] \dots [z_{j_{m'-1}}, z_{j_{m'}}]$$

se  $s$  é ímpar, onde  $m' \leq h$ ,  $d_i \in \{r_i - 1, r_i\}$  e os índices são ordenados.

**Demonstração:** Veja a prova do Lema 3.3.8. ■

Os exemplos abaixo nos darão uma ideia do comportamento dos polinômios  $f_J$ ,  $f_{\tilde{J}}$  (definidos na Seção 3.4, p. 53) quando substituídos por certos elementos de  $E_\infty$ .

**Exemplo 3.4.6** Para  $J = \emptyset$ , considere a substituição

$$\begin{aligned} \varphi_\emptyset : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ y_i &\mapsto e_{2i} \\ z_1 &\mapsto e_1 e_{2(s+1)} + e_3 e_{2(s+2)} + \dots + e_{2r_1-1} e_{2(s+r_1)} \\ &\vdots \\ z_h &\mapsto e_{2(r_1+\dots+r_{h-1}+1)-1} e_{2(s+r_1+\dots+r_{h-1}+1)} + \dots + e_{2(r_1+\dots+r_h-1)} e_{2(s+r_1+\dots+r_h)}. \end{aligned}$$

Na graduação natural de  $E$ ,  $\varphi_\emptyset(z_i) \in Z(E)$  para  $i = 1, \dots, h$ , assim  $\varphi_\emptyset([u, z_i]) = 0$  para quaisquer  $i \in \tilde{J}$  e  $u \in K\langle Y, Z \rangle$ . Portanto,  $\varphi_\emptyset(f_{\tilde{J}}) = 0$  e pelos Lemas 3.4.1 e 3.4.2 segue que

$$\begin{aligned} \varphi_\emptyset(f_\emptyset) &= \varphi_\emptyset(z_1^{r_1} \dots z_h^{r_h} [y_1, y_2] \dots [y_{s-1}, y_s]) \\ &= \pm 2^{s/2} \prod_{i=1}^l r_i! e_1 \dots e_{2(\sum_{i=1}^h r_i)} \dots e_{2s}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\varphi_\emptyset(f_\emptyset) \neq 0$  e  $\varphi_\emptyset(f_{\tilde{J}}) = 0$ , sempre que  $\tilde{J} \not\subseteq \emptyset$ .

**Exemplo 3.4.7** Considere  $J = \{a\}$  e a substituição

$$\begin{aligned} \varphi_{\{a\}} : K\langle Y, Z \rangle &\rightarrow E \\ y_i &\mapsto e_{2i} \\ z_1 &\mapsto e_1 e_{2(s+1)} + \dots + e_{2r_1-1} e_{2(s+r_1)} \\ &\vdots \\ z_a &\mapsto e_{2(\sum_{i=1}^{a-1} r_i+1)-1} + \dots + e_{2(\sum_{i=1}^a r_i)-1} e_{2(s+\sum_{i=1}^a r_i)} \\ &\vdots \\ z_h &\mapsto e_{2(\sum_{i=1}^{h-1} r_i+1)-1} e_{2(\sum_{i=1}^{h-1} r_i+1)} + \dots + e_{\sum_{i=1}^h r_i} e_{k+s+\sum_{i=1}^h r_i}. \end{aligned}$$

Sendo  $f_{\{a\}} = z_1^{r_1} \dots z_a^{r_a-1} \dots z_h^{r_h} [y_1, y_2] \dots [y_s, z_a]$ , segue dos Lemas 3.4.1 e 3.4.2 que

$$\varphi_{\{a\}}(f_{\{a\}}) = \pm 2^{\frac{s-1}{2}+1} \prod_{i=(1, \dots, \hat{a}, \dots, h)} r_i! (r_a - 1)! e_1 \dots e_{2(\sum_{i=1}^h r_i)} e_2 \dots e_{2s} \neq 0$$

e  $\varphi_{\{a\}}([z_{i_1}, z_{i_2}]) = 0$  para quaisquer  $i_1, i_2 \in \tilde{J}$ , já que após a substituição pelo menos um dos  $z_j \in Z(E)$ . Assim,  $\varphi_{\{a\}}(f_{\tilde{J}}) = 0$ , para  $\tilde{J} \not\subseteq J$ .

**Proposição 3.4.8** Dado  $J \subseteq \{1, \dots, h\}$ , existe uma substituição  $\varphi_J : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$  tal que  $\varphi_J(f_J) \neq 0$  e  $\varphi_J(f_{\tilde{J}}) = 0$  para  $\tilde{J} \not\subseteq J$ .

**Demonstração:** Veja a prova da Proposição 3.3.13. ■

**Teorema 3.4.9** Sobre um corpo infinito  $K$  de característica  $p > 2$  todas as identidades polinomiais graduadas de  $E_\infty$  são consequências das identidades graduadas

$$[x_1, x_2, x_3] \text{ e } z^p.$$

**Demonstração:** A prova é análoga à apresentada no Teorema 3.3.14. ■

## 3.5 Identidades Graduadas para $E$

Agora iremos lidar com as identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para a álgebra de Grassmann  $E$  induzida pela  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural. Sabemos que as componentes homogêneas de  $E$  são  $E^{(0)} = \langle e_{i_1} \dots e_{i_m} \mid m \text{ é par} \rangle$  e  $E^{(1)} = \langle e_{i_1} \dots e_{i_n} \mid n \text{ é ímpar} \rangle$ . Essas identidades serão descritas como um caso particular das identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para as álgebras supercomutativas, pois como vimos no Exemplo 1.3.16,  $E$  munida dessa  $\mathbb{Z}_2$ -gradação é uma álgebra supercomutativa.

O próximo resultado nos fornece uma base de identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para qualquer álgebra supercomutativa.

**Notação 3.5.1** Considere  $I = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_1], z_1 \circ z_2 \rangle^{T_2}$  e  $I_n = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_1], z_1 \circ z_2, z_1 \dots z_n \rangle^{T_2}$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 3.5.2** Seja  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$  uma álgebra supercomutativa. Então  $T_2(A) = I$  ou  $T_2(A) = I_n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Como os elementos em  $A^{(0)}$  pertencem ao centro de  $A$ , os polinômios  $[y_1, y_2]$  e  $[y_1, z_1]$  são identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para  $A$ . Além disso, como  $A$  é uma álgebra supercomutativa, os elementos em  $A^{(1)}$  anti-comutam. Logo  $z_1 \circ z_2$  também é identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $A$ . Portanto  $I \subseteq T_2(A)$ . Sendo  $f(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_h) \in T_2(A)$  um polinômio multihomogêneo, então

$$f \equiv \alpha y_1^{l_1} \dots y_s^{l_s} z_1^{k_1} \dots z_h^{k_h} \pmod{I}$$

onde  $\alpha \in K$ ,  $l_i = \deg_{y_i} f$  e  $k_j = \deg_{z_j} f$ . Se  $f \notin I$ , devemos ter  $k_1 = \dots = k_h = 1$ , pois  $z_i^2 \in I$  e  $\alpha \neq 0$ . Daí, fazendo  $y_i = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$  concluímos que  $z_1 \dots z_h \in T_2(S)$ . Logo, se  $z_1 \dots z_h \notin T_2(S)$  para todo  $h \in \mathbb{N}$ , devemos ter  $T_2(S) = I$ .

Suponha agora que  $z_1 \dots z_t \in T_2(S)$  para algum  $t \in \mathbb{N}$  e tomemos  $t_0 = \min\{t \in \mathbb{N} | z_1 \dots z_t \in T_2(S)\}$ . Daí,  $I_1 = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_2], z_1 \circ z_2, z_1 \dots z_{t_0} \rangle^{T_2} \subseteq T_2(S)$ . Usando os argumentos acima, concluímos que se  $f \notin I$ , então  $h \geq t_0$  e daí  $f$  é congruente módulo  $I$  a uma consequência de  $z_1 \dots z_{t_0}$ . Logo,  $T_2(S) = I_{t_0}$ . ■

**Teorema 3.5.3** Seja  $E$  a álgebra de Grassmann sobre um corpo infinito de característica diferente de dois, munida da  $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural. Temos que  $T_2(E) = I$ .

**Demonstração:** Como  $E$  é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, temos que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_1 \dots z_n$  não é identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada e deste modo o resultado segue imediatamente da Proposição 3.5.2 ■

Para mais detalhes sobre a relação entre a álgebra de Grassmann e as álgebras supercomutativas veja ([6], p. 29)

## 3.6 Identidades $\mathbb{Z}_2$ -graduadas para $E_k$

De acordo com a Seção 3.1, a álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada  $E_k$  pode ser decomposta como soma direta dos subespaços homogêneo  $E_k^{(0)}$  e  $E_k^{(1)}$ , onde  $E_k^{(0)}$  é o espaço vetorial gerado

pelos elementos  $e_{i_1} \dots e_{i_m} \in \beta$  onde a quantidade de elementos  $e'_i$ 's com  $i > k$  é par, em  $E_k^{(1)}$  temos uma quantidade ímpar destes elementos. O cálculo das identidades para  $E_k$  não é tão direto quanto o feito para as demais  $\mathbb{Z}_2$ -gradações de  $E$ . Com o intuito de facilitar a descrição dessas identidades Centrone, de modo análogo ao feito por Di Vincenzo e Da Silva em [48], fez o estudo de alguns subespaços homogêneos especiais de polinômios próprios para obter informações sobre a estrutura do  $T_2$ -ideal de  $E_k$ .

Considere  $\Gamma_h(K, d) \subseteq B(Y; Z)$  o espaço vetorial dos polinômios  $Y$ -próprios homogêneos em  $h$  variáveis  $\{x_1, \dots, x_h; x_i \in \{y_i, z_i\}\}$  de grau  $d$ . Definiremos o espaço  $\Gamma_h(A, d)$  por

$$\Gamma_h(A, d) = \Gamma_h(K, d)(A) := \Gamma_h(K, d) / (\Gamma_h(K, d) \cap T_2(A)).$$

Não é difícil ver que  $\Gamma_h(K, d)$  é um  $GL_d$ -módulo com respeito a ação natural à esquerda e  $\Gamma_h(K, d) \cap T_2(A)$  é um  $GL_d$ -submódulo. Portanto  $\Gamma_h(A, d)$  também é um  $GL_d$ -módulo.

Fixados  $s, t \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\Gamma_{s,t} := \text{span}_K \langle w \in \Gamma_{s+t}(A, d); y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t \text{ ocorrem em } w \rangle.$$

Note que se  $s+t = d$ , o espaço  $\Gamma_{s,t}$  é um  $GL_s \times GL_t$ -módulo, e o subespaço  $\Gamma_{s,t} \cap T_2(A)$  é um  $GL_s \times GL_t$ -submódulo. Assim o espaço  $\Gamma_{s,t}(A, d) := \Gamma_{s,t} / (\Gamma_{s,t} \cap T_2(A))$  também é um  $GL_s \times GL_t$ -módulo. Denotaremos por  $C_{s,t}(A)$  sua dimensão.

**Lema 3.6.1** *O monômio  $z^p$  é uma identidade  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_k$ .*

**Demonstração:** De acordo com a Proposição 1.3.6, temos que  $E_k^{(1)} \subseteq E'$ , portanto segue do Lema 2.3.1 que  $z^p$  é uma identidade para  $E_k$ . ■

Denotaremos  $I = \langle [u_1, u_2, u_3] | u_i \in \{y_i, z_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle^T$ , é imediato que  $I \subseteq T_2(E_k)$ .

**Lema 3.6.2** *Se  $l \equiv 0 \pmod{2}$  então*

(i)  $\Gamma_{l,m}$  é gerado módulo  $I$  pelos polinômios

$$z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$$

onde  $\sum_{j=1}^s r_{i_j} = m$ . Em outras palavras, para todo  $f \in \Gamma_{l,m}$  existe  $g \in \Gamma_{0,m}$  tal que  $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_s) \equiv g(z_1, \dots, z_s) [y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}$ ;

(ii) se  $l \geq k + 1$  então  $f \in T_2(E_k)$ ;

(iii) se  $l \leq k$  então  $f \in T_2(E_k)$  se, e somente se,  $g \in T_2(E_{k-l})$ .

**Demonstração:**

(i) Seja  $f \in \Gamma_{l,m}$ , como  $l \equiv 0 \pmod{2}$  a existência do polinômio  $g \in \Gamma_{0,m}$  segue diretamente da definição do  $T_2$ -ideal  $I$  e da equação

$$[u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}] \dots [u_{\sigma(n-1)}, u_{\sigma(n)}] \equiv (-1)^\sigma [u_1, u_2] \dots [u_{n-1}, u_n] \quad (3.6)$$

onde  $(-1)^\sigma$  é o sinal da permutação  $\sigma$ .

(ii) Como  $l \equiv 0 \pmod{2}$ , dado  $f \in \Gamma_{l,m}$  pelo item (i) existe  $g \in \Gamma_{0,m}$  tal que  $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_s) \equiv g(z_1, \dots, z_s)[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}$  como os polinômios  $Y$ -próprios são multilineares e por hipótese  $l \geq k + 1$  é suficiente mostrar que o polinômio  $[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$  se anula para elementos de uma base de  $E_k^{(0)}$ . Considere  $\beta = \{e_{i_1} \dots e_{i_l}; \text{existe uma quantidade ímpar de } e'_i \text{ s tal que } i \leq k \text{ e } i_1 < \dots < i_l\}$  uma base para  $E_k^{(0)}$ , tomando  $b_i = e_{i_1} \dots e_{i_l} \in \beta$  (com  $1 \leq i \leq k + 1$ ), segue do Princípio das gavetas de Dirichlet que em pelo menos um dos  $b'_i$ s algum dos  $e'_i$ s se repetem. Portanto  $[b_1, b_2] \dots [b_l, b_{l+1}] = 0$ , conseqüentemente  $f \in T_2(E_k)$ .

(iii) Por hipótese  $l \leq k$ , então o produto dos comutadores  $[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$  não se anula quando avaliado por elementos distintos de  $\beta$ . Deste modo, pelo item (i) existe  $g \in \Gamma_{0,m}$  tal que  $g$  possui  $k - l$  elementos pertencentes a componente homogênea de grau 0. Como  $f \in T_2(E_k)$  segue que  $g \in T_2(E_{k-l})$ . Reciprocamente, se  $g \in T_2(E_{k-l})$  então  $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_s) \equiv g(z_1, \dots, z_s)[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}$  também é identidade para  $E_k$ .

■

Quando  $l$  é ímpar, obtemos um resultado análogo ao lema anterior.

**Lema 3.6.3** *Seja  $l \equiv 1 \pmod{2}$  e  $f \in \Gamma_{l,m}$  então*

(i) *Para todo  $f \in \Gamma_{l,m}$  existe  $g \in \Gamma_{1,m}$  tal que*

$$f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_s) = g(z_1, \dots, z_s, y_1)[y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}$$

onde  $g(z_1, \dots, z_s, y_1) = z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z, y_1]$  e  $\sum_{j=1}^s r_{i_j} = m$ ;

(ii) se  $l \geq k + 1$  então  $f \in T_2(E_k)$ ;

(iii) se  $l \leq k$  então  $f \in T_2(E_k)$  se, e somente se,  $g \in T_2(E_{k-l+1})$ .

Os lema acima nos permite estudar apenas  $\Gamma_{0,m} \cap T_2(E_k)$  e  $\Gamma_{1,m} \cap T_2(E_k)$ , para todo  $k$ .

### 3.6.1 A estrutura $\Gamma_{0,m}(E_k)$

Não é difícil ver que  $\Gamma_{0,m}$  é gerado, módulo  $I$ , pelos polinômios

$$z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}],$$

onde  $t$  é par,  $\sum_{j=1}^s r_{i_j} = m - t$ ,  $i_1 < \dots < i_s$  e  $j_1 < \dots < j_t$ . Denotaremos por  $I(p)$  o  $T_2$ -ideal gerado por  $I$  e por  $z^p$  e de modo análogo, temos que  $\Gamma_{0,m}$  é gerado, módulo  $I(p)$ , pelos polinômios

$$z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}],$$

onde  $t$  é par,  $\sum_{j=1}^s r_{i_j} = m - t$ ,  $i_1 < \dots < i_s$ ,  $j_1 < \dots < j_t$  e  $r_{i_n} < p$  para  $i = 1, \dots, s$ .

Dado  $f = z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}]$ , considere o conjunto

$$\mathcal{S} = \{\text{variáveis homogêneas que ocorrem em } f\} \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}.$$

Se  $|\mathcal{S}| = h$ , isto é,  $\mathcal{S} = \{z_{i_1}, \dots, z_{i_h}\}$  então o polinômio  $f$  pertence a componente homogênea  $\Gamma_h = (0, \dots, 0, m_{i_1}, 0, \dots, 0, m_{i_2}, 0, \dots, 0, m_{i_h}, 0, \dots, 0)$  de  $\Gamma_{0,m}$ , para simplificar a notação indicaremos o multigrado da componente homogênea  $\Gamma_{[h]}$  por  $(m_1, \dots, m_h)$ .

**Definição 3.6.4** *Sejam  $\mathcal{S} = \{\text{variáveis homogêneas diferentes que ocorrem em } f\}$  e  $T = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq \mathcal{S}$ , denotaremos  $f_T$  por  $z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}]$ , onde  $t$  é par,  $\sum_{j=1}^s r_{i_j} = m - t$ ,  $i_1 < \dots < i_s$  e  $j_1 < \dots < j_t$ .*

Deste modo, qualquer  $f \in \Gamma_h$  é, módulo  $I$ , combinação linear de polinômios  $f_T$ , isto é,

$$f \equiv \sum_T \alpha_T f_T \pmod{I}$$

onde  $\alpha_T \in K$ .

Considerando a identidade  $z^p$ , temos que  $f_T(p) = z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}]$ , onde  $t$  é par,  $\sum_{j=1}^s r_{i_j} = m - t$ ,  $i_1 < \dots < i_s$ ,  $j_1 < \dots < j_t$  e  $r_{i_n} < p$  para  $i = 1, \dots, s$ . Assim se  $f \in \Gamma_h$  então  $f \equiv \sum_T \alpha_T f_T(p) \pmod{I(p)}$ .

**Definição 3.6.5** Para  $m \geq 2$ , temos

$$g_m(z_{i_1}, \dots, z_{i_h}) = \sum_T (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T,$$

onde  $|T|$  é par. Além disso,  $g_1(z_1) = z_1$ .

O próximo lema segue da Definição 3.6.5.

**Lema 3.6.6** Na superálgebra  $K\langle Y, Z \rangle$ , as seguintes equivalências são válidas:

$$\begin{aligned} (i) \quad g_{m+1}(z_1, \dots, z_{m+1}) &\equiv z_1 g_m(z_2, \dots, z_{m+1}) - \frac{1}{2} [z_1, z_2] g_{m-1}(z_3, \dots, z_{m+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{m-2} z_2 z_3 \dots z_i [z_1, z_{i+1}] g_{m-i}(z_{i+2}, \dots, z_{m+1}) - \frac{1}{2} z_2 \dots z_m [z_1, z_{m+1}] \pmod{I}; \\ (ii) \quad g_{m+1}(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) &\equiv g_m(z_1, \dots, z_m) z_{m+1} - \frac{1}{2} g_{m-1}(z_1, \dots, z_{m-1}) [z_m, z_{m+1}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-2} g_i(z_1, \dots, z_i) z_{i+2} \dots z_m [z_{i+1}, z_{m+1}] - \frac{1}{2} z_2 \dots z_m [z_1, z_{m+1}] \pmod{I}. \end{aligned}$$

**Definição 3.6.7** Seja  $S$  um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ . Defina a aplicação  $\varphi_S \in \text{End}(K\langle Y, Z \rangle)$  por  $\varphi_S(y_i) := y_{|S|+i}$ , para todo  $i \geq 1$  e

$$\varphi_S(z_i) := v_i = \begin{cases} y_i & \text{se } i \in S \\ z_i & \text{se } i \notin S. \end{cases}$$

**Lema 3.6.8** Dado  $f \in K\langle Z \rangle$ ,  $f$  é uma identidade polinomial graduada para  $E_k$  se, e somente se,  $\varphi_S(f) \in T_2(E)$  para todo  $S \subseteq \{1, \dots, h\}$  com  $|S| \leq k$ .

**Demonstração:** Seja  $f(z_{i_1}, \dots, z_{i_j}) \in T_2(E_k)$ , então qualquer substituição por elementos pertencentes a componente homogênea de grau 1 anula o polinômio  $f$ . Tomemos  $l \in \mathbb{N}$ , com  $0 \leq l \leq h$  tal que  $i_l \leq k$  e façamos a seguinte substituição

$$z_{i_j} = \begin{cases} a_{i_j} = e_{i_j} e_{k+i_j} & \text{se } j = 1, \dots, l \\ b_{i_j} = e_{k+i_j} & j = l+1, \dots, h. \end{cases}$$

Por hipótese,  $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_h}) = 0$ . Suponha sem perda de generalidade,  $S = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, h\}$ , então pela Definição 3.6.7

$$\varphi_S(f(z_{i_1}, \dots, z_{i_h})) = g(y_{i_1}, \dots, y_{i_l}, z_{i_{l+1}}, \dots, z_{i_h}).$$

Como existem,  $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_h} \in E$  com suporte disjunto tal que  $\varphi_S(f(a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_h})) = 0$  então  $\varphi_S(f) \in T_2(E)$ .

Reciprocamente, considere  $f \in K\langle Z \rangle$ . Por hipótese  $\varphi_S(f) \in T_2(E)$  para todo  $S \subseteq \{1, \dots, h\}$  com  $|S| \leq k$ . Façamos a seguinte substituição  $z_{i_j} \mapsto \overline{z_{i_j}}$ , de modo

que o suporte de todos os  $z'_i$ 's sejam disjuntos. Dessa forma o número máximo de  $\overline{z'_j}$ 's de comprimento par é  $\leq k$ . Além disso então os monômios  $a_{i_1}, \dots, a_{i_l} \in E_k^{(0)}$  e  $b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_h} \in E_k^{(1)}$ , fazendo  $S = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, h\}$ , tal que  $|S| \leq k$ , segue que

$$f(\overline{z_{i_1}}, \dots, \overline{z_{i_h}}) = \varphi_S(f(a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_h})).$$

Portanto,  $f \in T_2(E_k)$ . ■

**Proposição 3.6.9** *O polinômio  $g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})$  é uma identidade polinomial  $\mathbb{Z}_2$ -graduada para  $E_k$ .*

**Demonstração:** Pelo lema anterior, é suficiente mostrar que  $\varphi_S(g_{k+2}) \in T_2(E)$  para todo  $S$  tal que  $|S| \leq k$ . Provaremos a proposição fazendo indução sobre  $k$ .

Se  $k = 0$ , então  $\varphi_S(g_{k+2}) = \varphi_\emptyset(g_2) = g_2(z_1, z_2)$ , e pelo item (i) do Lema 3.6.6 temos que

$$\begin{aligned} g_2(z_1, z_2) &= z_1 g_1(z_2) - \frac{1}{2}[z_1, z_2] \\ &= z_1 z_2 - \frac{1}{2}[z_1, z_2] \\ &= \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_2 z_1). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.5.3,  $g_2(z_1, z_2) \in T_2(E)$ .

Considere  $k \geq 1$  e fixe  $S$  um subconjunto de  $\{1, \dots, k+2\}$  tal que  $|S| \leq k$ . Embora  $\varphi_S$  não seja um endomorfismo  $\mathbb{Z}_2$ -graduado para a superálgebra livre  $K\langle Y, Z \rangle$  o  $T_2$ -ideal  $I$  é invariante sob a ação desta aplicação.

Assuma que  $k+2 \in S$ . Pelo item (ii) do Lema 3.6.6, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_S(g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})) &\equiv \varphi_S(g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1}))y_{k+2} - \frac{1}{2}g_{k-1}(z_1, \dots, z_k)[z_{k+1}, y_{k+2}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k g_i(z_1, \dots, z_i)z_{i+2} \dots z_{k+1}[z_{i+1}, y_{k+2}] \\ &\quad - \frac{1}{2}z_2 \dots z_{k+1}[z_1, y_{k+2}] \pmod{I}, \end{aligned}$$

novamente pelo Teorema 3.5.3, segue que

$$\varphi_S(g_{k+2}) \equiv \varphi_S(g_{k+1})y_{k+2} \pmod{T_2(E)}. \quad (3.7)$$

Seja  $S' = S - \{k+2\}$ , então  $|S'| \leq k-1$ , assim

$$\varphi_S(g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1})) \equiv \varphi_{S'}(g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1})) \pmod{T_2(E)}.$$

Por hipótese de indução,  $\varphi_S(g_{k+1}) \in T_2(E)$ , e segue de (3.7) que  $\varphi_S(g_{k+2}) \in T_2(E)$ .

Suponha agora que  $k + 2 \notin S$ . Sendo  $l$  o maior elemento do conjunto  $\{1, \dots, k + 1\} - S$ , temos

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_{k+2}) &= (v_1, \dots, v_{l-1}, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{k+2}) \\ &= (v_1, \dots, v_{l-1}, z_l, y_{l+1}, \dots, y_{k+1}, z_{k+2}). \end{aligned}$$

Se  $i = 0, \dots, l - 2$ , como a cardinalidade do conjunto  $S \cap \{i + 2, \dots, k + 2\}$  é no máximo  $k - i - 1$ , por hipótese de indução, obtemos

$$\varphi_S(g_{k+1-i}(z_{i+2}, \dots, z_{k+2})) \in T_2(E).$$

Se  $i = l, \dots, k$ , então  $\varphi_S([z_1, z_{i+1}]) = [v_1, y_{i+1}] \in T_2(E)$ . Portanto, pelo item (ii) do Lema 3.6.6 obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_S(g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})) &\equiv -\frac{1}{2}v_2 \dots v_{l-1}[v_1, z_l]y_{l+1} \dots y_{k+1}z_{k+2} \\ &\quad - \frac{1}{2}v_2 \dots v_{k-1}z_l y_{l+1} \dots y_{k+1}[z_1, z_{k+2}] \pmod{T_2(E)}. \end{aligned}$$

Como  $T_2(E)$  contém os polinômios  $[y_i, z_j]$  e  $z_i z_j + z_j z_i$ , concluímos nossa demonstração.

■

**Notação 3.6.10** Denotaremos por  $J_k$  o  $T_2$ -ideal da superálgebra  $K\langle Y, Z \rangle$  gerado por  $I$  e pelo polinômio  $g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})$ , e por  $J_k(p)$  o  $T_2$ -ideal da superálgebra  $K\langle Y, Z \rangle$  gerado por  $I(p)$  e pelo polinômio  $g_{k+2}(z_1, \dots, z_{k+2})$ .

**Lema 3.6.11** Na superálgebra livre  $K\langle Y, Z \rangle$  temos:

- (i)  $z_1 \dots z_{k+2} \equiv -\sum_{T \neq \emptyset, |T| \text{ é par}} (-2)^{-\frac{|T|}{2}} f_T \pmod{J_k}(J_k(p))$
- (ii)  $z_2 \dots z_{k+2}[z_1, z_{k+3}] \equiv \sum_{T'} \beta_{T'} f_{T'} \pmod{J_k}(J_k(p))$ , para alguns  $\beta_{T'} \in K$  e  $T' \subseteq \{1, \dots, k + 3\}$ . Além disso se  $|T'| = 2$ , então  $1 \notin T'$ .

**Demonstração:**

(i) O resultado segue imediatamente da Definição 3.6.5.

(ii) Pelo item anterior temos

$$[z_1 \dots z_{k+2}, z_{k+3}] \equiv \sum \alpha_T \left[ \sum f_T, z_{k+3} \right] \pmod{J_k}.$$

Se  $f_T = z_{j_1} \dots z_{j_b} [z_{t_1}, z_{t_2}] \dots [z_{t_{b'-1}}, z_{t_{b'}}]$ , então módulo  $I$  temos

$$[f_T, z_{k+3}] \equiv \sum_{s=1}^b z_{j_1} \dots z_{j_{s-1}} z_{j_{s+1}} \dots z_{j_b} [z_{j_s}, z_{k+3}] [z_{t_1}, z_{t_2}] \dots [z_{t_{b'-1}}, z_{t_{b'}}]. \quad (3.8)$$

Por outro lado,

$$[z_2 \dots z_{k+2}, z_{k+3}] \equiv \sum \alpha_T \sum_{s=1}^{k+2} z_{j_2} \dots z_{j_{s-1}} z_{j_{s+1}} \dots z_{j_{k+2}} [z_{j_s}, z_{k+3}]. \quad (3.9)$$

É fácil ver que

$$z_2 \dots z_{k+2} [z_1, z_{k+3}] \equiv -z_1 [z_2 \dots z_{k+2}, z_{k+3}] + [z_1 \dots z_{k+2}, z_{k+3}] \pmod{I},$$

assim de (3.8) e (3.9) segue que

$$\begin{aligned} z_2 \dots z_{k+2} [z_1, z_{k+3}] &\equiv -z_1 \sum_{s=2}^{k+2} z_2 \dots z_{j_{s-1}} z_{j_{s+1}} \dots z_{k+2} [z_s, z_{k+3}] + \\ &+ \sum \alpha_T \sum_{s=1}^b z_{j_1} \dots z_{j_{s-1}} z_{j_{s+1}} \dots z_b [z_s, z_{k+3}] [z_{t_1}, z_{t_2}] \dots [z_{t_{b'-1}}, z_{t_{b'}}] \end{aligned}$$

Como  $I \subseteq J_k$ , e pela equação (3.6), obtemos  $z_2 \dots z_{k+2} [z_1, z_{k+3}] \equiv \sum_{T'} \beta_{T'} f_{T'} \pmod{J_k}$ , onde  $T' \subseteq \{1, \dots, k+3\}$ .

Considerando o  $T_2$ -ideal  $J_k(p)$ , a prova segue de modo inteiramente análogo. ■

**Observação 3.6.12** *Através de substituições por variáveis adequadas podemos obter um resultado análogo ao Lema 3.6.11 para os polinômios homogêneos. Suponha  $k = 1$  e  $K$  um corpo de característica  $p > 3$ . Considere a componente multihogênea  $(1, 1, 1)$ . Temos*

$$z_1 z_2 z_3 \equiv \frac{1}{2} z_1 [z_2, z_3] + \frac{1}{2} z_2 [z_1, z_3] + \frac{1}{2} z_3 [z_1, z_2] \pmod{J_k}.$$

**Exemplo 3.6.13** *Considerando a componente multihogênea  $(2, 1, 0)$ , pelo Lema 3.6.11, obtemos as seguintes equivalências módulo  $J_k$*

- $z_1^2 z_2 \equiv \frac{1}{2} z_1 [z_1, z_2] + \frac{1}{2} z_1 [z_1, z_2] = z_1 [z_1, z_2]$
- $z_1 z_2 z_1 \equiv -\frac{1}{2} z_1 [z_1, z_2] + \frac{1}{2} z_2 [z_1, z_1] + \frac{1}{2} z_1 [z_1, z_2] = 0$
- $z_2 z_1^2 \equiv \frac{1}{2} z_2 [z_1, z_1] - \frac{1}{2} z_1 [z_1, z_2] - \frac{1}{2} z_1 [z_1, z_2] = -z_1 [z_1, z_2]$ .

Observe que se considerarmos no exemplo anterior a componente multihogênea  $(3, 0, 0)$ , obtemos  $z_1^3 \equiv 0$  e então podemos concluir que  $z^p$  é consequência de  $g_3(z_1, z_2, z_3)$ .

**Proposição 3.6.14** Para  $m \geq 1$ ,  $\Gamma_{0,m}$  é gerado módulo  $J_k$  por

$$\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s}$$

polinômios. Por outro lado, para todo  $m \geq 1$ ,  $\Gamma_{0,m}$  é gerado módulo  $J_k(p)$  por

$$\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s}$$

polinômios, onde a soma é realizada em todas as componentes multihogêneas  $(n_1, \dots, n_h)$  tais que  $n_i \leq p$  para qualquer  $i = 1, \dots, h$ .

**Demonstração:** Como foi dito no início da seção,  $\Gamma_{0,m}$  é gerado por suas componentes homogêneas. Seja  $\Gamma_{[h]}$  uma destas componentes, como mencionado  $\Gamma_{[h]}$  é gerado módulo  $I$  pelos polinômios

$$f_T = z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}]$$

onde  $T = \{j_1, \dots, j_t\}$ ,  $|T| = t$  é par e os índices  $i_r$ 's e  $j_r$ 's estão ordenados.

Suponha que  $m \geq k+2$ . Então segue do Lema 3.6.11 e da Observação 3.6.12 que qualquer polinômio  $f_T$  é combinação linear de polinômios  $f_S$  (pertencentes a mesma componente). Os polinômios  $f_S$  são lineares nos comutadores. Então o número total de  $f_S$ 's depende do número de variáveis que aparecem nele, isto é, igual a  $h$ . Sendo  $s$  a cardinalidade do conjunto  $S$ , temos que  $m-s \leq k+1$ . Denotaremos por  $d_{[h]} = d_{[h]}(k)$  o número de todos os polinômios  $f_S$ . Usando a relação  $\binom{h}{s} = \binom{h-1}{s} + \binom{h-1}{s-1}$ , obtemos os seguintes valores para  $d_{[h]}$ :

- Caso 1: Seja  $m \equiv k \pmod{2}$ , então  $d_{[h]} = \sum_{s=2}^h \binom{h}{s} = \sum_{s=2, m-s \leq k+1}^{h-1} \binom{h-1}{s}$ .
- Caso 2: Seja  $m \equiv k+1 \pmod{2}$ . Se  $m-s = k+1$ , pelo item (ii) do Lema 3.6.11 temos que  $1 \notin S$ . Como o número de subconjuntos  $S$  de  $\{1, \dots, h\}$  tais que  $1 \in S$  é  $\binom{h-1}{m-(k+1)}$ , então

$$d_{[h]} = \binom{h-1}{m-(k+1)} + \sum_{s=2, m-s \leq k}^h \binom{h}{s}$$

$$d_{[h]} = \binom{h-1}{m-(k+1)} + \sum_{s=m-k}^{h-1} \binom{h-1}{s} = \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s}.$$

Agora se  $m \leq k + 1$ , então  $d_{[h]} = \sum_{s=0, s \text{ é par}}^h \binom{h}{s} = \sum_{s=0}^{h-1} \binom{h-1}{s}$  já que  $\binom{h-1}{s} = 0$  para todo  $s \geq h$ .

Deste modo,  $\Gamma_{0,m}$ , módulo  $J_k$ , é gerado por

$$\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s}$$

polinômios. Além disso, módulo  $J_k(p)$ ,  $\Gamma_{[h]}$  é gerado pelos polinômios

$$f_T = z_{i_1}^{r_{i_1}} \dots z_{i_s}^{r_{i_s}} [z_{j_1}, z_{j_2}] \dots [z_{j_{t-1}}, z_{j_t}]$$

onde  $T = \{j_1, \dots, j_t\}$ ,  $|T|$  é par, os índices  $i'_r$ s e  $j'_r$ s estão ordenados e  $r_{i_q} \leq p - 1$ , para todo  $q = 1, \dots, s$ .

Novamente, o número de polinômios geradores depende do número de variáveis que ocorre em  $\Gamma_{[h]}$  e de modo análogo ao feito anteriormente temos que  $\Gamma_{0,m}$  é gerado, módulo  $J_k(p)$ , por  $\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s}$  polinômios. ■

**Definição 3.6.15** *Seja  $\Gamma_{[h]}$  uma componente homogênea para  $\Gamma_{0,m}$  e  $l \leq h \leq m$ . Defina*

$$t_l(z_{i_1}, \dots, z_{i_h}) = \sum_{\sigma} S_l(z_{\sigma^{-1}(i_1)}, z_{i_2}, \dots, z_{i_l}) z_{\sigma^{-1}(i_{l+1})} \dots z_{\sigma^{-1}(i_h)},$$

$$t_l(p)(z_{i_1}, \dots, z_{i_h}) = \sum_{\sigma} S_l(z_{\sigma^{-1}(i_1)}, z_{i_2}, \dots, z_{i_l}) z_{\sigma^{-1}(i_{l+1})} \dots z_{\sigma^{-1}(i_h)},$$

onde  $S_l(u_1, \dots, u_l)$  denota o polinômio standard de grau  $l$  e  $\deg_{z_{i_s}} t_l(p) < p$ .

**Observação 3.6.16** *Os polinômios  $t_l$ ,  $t_l(p)$  correspondem ao gancho da tabela Young semi-standard da partição  $(m - l + 1, 1^{l-1}) = (1 + b, 1^{m-b-1})$ .*

**Lema 3.6.17** *Seja  $b = m - l \leq k$  e  $p > k$ . Então  $t_l$  não é uma identidade graduada para  $E_k$ . Se  $p \leq k$ , então  $t_l(p)$  não é uma identidade graduada para  $E_k$ .*

**Demonstração:** Inicialmente, vamos supor  $p > k$ . Como  $b \leq k$  existem, no máximo,  $b$  elementos centrais de grau ímpar em  $E_k$  com suportes disjuntos. Mais precisamente, iremos considerar  $n_i = \deg z_i$  e os conjuntos

$$S_1 = \{\text{variáveis diferentes que aparecem na "perna" do gancho}\} = \{z_1, \dots, z_{l-1}\}$$

$$S_2 = \{\text{variáveis que aparecem apenas no "braço" do gancho}\} = \{z_l, \dots, z_h\}$$

Consideremos a substituição  $\varphi : K\langle Y, Z \rangle \rightarrow E$  dada por

$$\begin{aligned}
z_1 &\mapsto e_1 + e_2 e_{k+2} + \dots + e_{n_1} e_{k+n_1} \\
&\vdots \\
z_{l-1} &\mapsto e_{\sum_{j=1}^{l-2} n_j+1} + e_{\sum_{j=1}^{l-2} n_j+2} e_{k+\sum_{j=1}^{l-2} n_j+2} + \dots + e_{\sum_{j=1}^{l-1} n_j} e_{k+\sum_{j=1}^{l-1} n_j} \\
&\vdots \\
z_l &\mapsto e_{\sum_{j=1}^{l-1} n_j+1} + e_{\sum_{j=1}^{l-1} n_j+2} e_{k+\sum_{j=1}^{l-1} n_j+2} + \dots + e_{\sum_{j=1}^l n_j} e_{k+\sum_{j=1}^l n_j} \\
&\vdots \\
z_{l+1} &\mapsto e_{\sum_{j=1}^l n_j+1} e_{k+\sum_{j=1}^l n_j+1} + \dots + e_{\sum_{j=1}^{l+1} n_j} e_{k+\sum_{j=1}^{l+1} n_j} \\
&\vdots \\
z_h &\mapsto e_{\sum_{j=1}^{h-1} n_j+1} e_{k+\sum_{j=1}^{h-1} n_j+1} + \dots + e_{\sum_{j=1}^h n_j} e_{k+\sum_{j=1}^h n_j}
\end{aligned}$$

Vamos analisar o comportamento do polinômio  $\varphi(t_l)$  quando  $l$  é par ou ímpar.

- Caso 1:  $l$  é par. Para  $i \geq l+1$ , os  $z'_i$ s são elementos centrais, deste modo  $S_l(\varphi(z_i), \varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{l-1})) = 0$  e  $S_l(\varphi(z_l), \varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{l-1})) = l! e_{n+1} \dots e_{\sum_{j=1}^{l-1} n_j+1}$ . Neste caso, obtemos que

$$\begin{aligned}
&t_l(\varphi(z_l), \varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{l-1}), \varphi(z_{l+1}), \dots, \varphi(z_h)) = \\
&\pm l! \prod_{i=1}^h n'_i! e_1 e_{n+1} e_{k+n_1} \dots e_2 e_{k+2} \dots e_{\sum_{j=1}^h n_j+1} \dots e_{k+\sum_{j=1}^h n_j}
\end{aligned}$$

onde  $n'_i \in \{n_i, n_i - 1\}$ . Como  $0 \leq m - l \leq p$ , temos que  $p$  não aparece no termo  $l! \prod_{i=1}^h n'_i!$  e daí  $t_l$  não é identidade graduada para  $E_k$ , como queríamos demonstrar.

- Caso 2:  $l$  é ímpar. Não é difícil mostrar que

$$S_l(z_1, \dots, z_l) = \sum_{j=1}^l (-1)^{j+1} z_j S_{l-1}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_l)$$

e assim,

$$\begin{aligned}
S_l(\varphi(z_i), \varphi(z_1), \dots, \varphi(z_l)) &= \varphi(z_i) S_{l-1}(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{l-1})) + \\
&+ \sum_{j=1}^l (-1)^{j+1} \varphi(z_j) S_{l-1}(\varphi(z_i), \dots, \varphi(z_{l-1})).
\end{aligned}$$

Se  $i = l$ , então, pelo caso anterior temos que  $S_{l-1}(\varphi(z_i), \dots, \varphi(z_{l-1})) \neq 0$ , e como  $S_{l-1}(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{l-1}))$  também é não-nulo, segue que  $S_l \neq 0$ . Portanto,  $t_l$  não é identidade para  $E_k$ .

Se  $i \geq l + 1$ , vimos no Caso 1 que  $S_{l-1}(\varphi(z_i), \dots, \varphi(z_l)) = 0$ . Deste modo

$$\begin{aligned} S_l &= \varphi(z_i)S_{l-1}(\varphi(z_1), \dots, \varphi(z_{l-1})) \\ &= \varphi(z_i)(l-1)!e_1e_{n_1+1} \dots e_{\sum_{j=1}^{l-1} n_j+1}. \end{aligned}$$

Como o suporte dos  $z'_j$ s são todos disjuntos, temos  $S_l(z_i, z_1, \dots, z_{l-1}) \neq 0$ . Logo,  $t_l$  não é uma identidade para  $E_k$ .

Supondo  $p \leq k$ , a prova é inteiramente análoga e como  $\deg_{z_i} = n_i < p$ , para todo  $i = 1, \dots, h$ , obtemos o resultado. ■

Note que para qualquer subconjunto  $S_1 \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}$  de cardinalidade  $l$ , existe um conjunto finito de polinômios, os quais denotaremos por  $t_l(S_1)$ ,  $t_l(p)(S_1)$ , tal que as variáveis em  $S_1$  aparecem apenas na "perna" do gancho dos vários  $t_l \in t_l(S_1)$  ou  $t_l(p) \in t_l(p)(S_1)$ . Considere os polinômios

$$\begin{aligned} t_l^* &= \sum_{S_1 \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}} \sum_{t_l \in t_l(S_1)} t_l \\ t_l(p)^* &= \sum_{S_1 \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}} \sum_{t_l(p) \in t_l(p)(S_1)} t_l(p). \end{aligned}$$

No próximo Lema, será mostrado que os polinômios acima não são identidades graduadas para  $E_k$ .

**Lema 3.6.18** *Sejam  $m \geq 1$  e  $p > k$ . Então  $t_l^*$  não é identidade graduada para  $E_k$ . Se  $p \leq k$ , então  $t_l^*(p)$  não é identidade graduada para  $E_k$ .*

**Demonstração:** Inicialmente suponha  $p > k$ . Fixemos o conjunto de variáveis  $S = \{z_1, \dots, z_h\}$  e considere a substituição  $\varphi$  tal que  $\varphi$  aplicada nos elementos de  $S$  é idêntica a substituição usada na prova do Lema 3.6.17. Para cada uma das variáveis remanescentes  $\{z_{h+1}, \dots, z_m\}$  iremos fazer a seguinte substituição

$$\begin{aligned} z_{h+1} &\mapsto e_{k+\sum_{j=1}^h n_j+1} + \dots + e_{k+\sum_{j=1}^{h+1} n_j} \\ &\vdots \\ z_m &\mapsto e_{k+\sum_{j=1}^{m-1} n_j+1} + \dots + e_{k+\sum_{j=1}^m n_j}. \end{aligned}$$

Com esta substituição, é fácil ver que, para cada par de subconjuntos distintos de  $\{z_1, \dots, z_m\}$  a substituição  $\varphi$  nos dá elementos diferentes da base de  $E$  com alguns coeficientes. Portanto podemos lidar apenas com os ganchos preenchidos com o mesmo conjunto de variáveis. Suponha que a "perna" do gancho seja preenchida com um conjunto de variáveis diferente daquele utilizado no Lema 3.6.17. Deste modo, um dos elementos centrais reside na "perna" do gancho e portanto  $\varphi(t_l) = 0$ . Por isso, sem perda de generalidade, podemos lidar apenas com os ganchos cuja "perna" é preenchida com o conjunto de variáveis  $\{z_1, \dots, z_h\}$ . Fixemos dois deles. Note que se  $(n_1, \dots, n_h)$  e  $(m_1, \dots, m_h)$  são as sequências de multiplicidade das variáveis  $\{z_1, \dots, z_h\}$  em cada um dos ganchos, então existe  $j \in \{1, \dots, h\}$  tal que  $m_j > n_j$ , e a substituição novamente se anula. Portanto, a substituição será não nula se, e somente se, tivermos a "perna" do gancho preenchida com variáveis homogêneas de grau  $(n_1, \dots, n_h)$ , o que já foi provado no Lema anterior. Se  $p \leq k$  a prova é análoga. ■

Pela teoria de representações do grupo linear geral  $GL_m$ , temos que existe uma correspondência natural entre cada  $GL_m$ -módulo irredutível e certos polinômios homogêneos. Segue do Lema 3.6.18 que os polinômios  $t_l^*$  e  $t_l^*(p)$  correspondem a algum  $GL_m$ -módulo irredutível.

**Proposição 3.6.19** *Sejam  $m \geq 1$  e  $p > k$ , então  $\Gamma_{0,m}(E_k) = \Gamma_{0,m}(J_k)$ . Se  $p \leq k$ , então  $\Gamma_{0,m}(E_k) = \Gamma_{0,m}(J_k(p))$*

**Demonstração:** Se  $p > k$ , então  $J_k \subseteq T_2(E_k)$  e pela Proposição 3.6.14 segue que

$$C_{0,m}(E_k) = \dim \frac{\Gamma_{0,m}}{\Gamma_{0,m} \cap T_2(E_k)} \leq \sum_{\Gamma_{[h]}} d_{[h]} = \sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s}.$$

Por outro lado, segue do item (ii) do Teorema 1.6.16 que  $t_l^*$  gera um  $GL_m(K)$ -submódulo isomorfo a  $W_m(\lambda)$ . Segue do item (ii) do Teorema 1.6.15 que a dimensão da componente multihomogênea  $W_m(\lambda)^{(n_1, \dots, n_h)}$  é igual ao número de  $\lambda$ -tabelas semi-standard com conteúdo  $(n_1, \dots, n_h)$ , e assim  $\dim W_m(\lambda)^{(n_1, \dots, n_h)} = \binom{h-1}{l-1}$ . Como estas componentes irredutíveis são todas distintas para todo  $l \geq m - k$ , ou seja,  $l - 1 \geq m - (k + 1)$  obtemos

$$\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-(k+1)}^{h-1} \binom{h-1}{s} \leq C_{0,m}(E_k).$$

Portanto,  $\Gamma_{0,m}(E_k) = \Gamma_{0,m}(J_k)$ .

Se  $p \leq k$ , então  $J_k(p) \subseteq (T_2(E_k))$  e de modo inteiramente análogo mostramos que  $\Gamma_{0,m}(E_k) = \Gamma_{0,m}(J_k(p))$ . ■

### 3.6.2 A estrutura $\Gamma_{1,m}(E_k)$

Estudaremos agora o espaço  $\Gamma_{1,m} \cap T_2(E_k)$  para todo  $k \geq 1$ . Segue da Proposição 3.6.9 que  $g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1}) \in T_2(E_{k-1})$ , e então as identidades  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas

$$[g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1}), y] \quad (3.10)$$

$$g_{k+1}(z_1, \dots, z_{k+1})[z_{k+2}, y] \quad (3.11)$$

pertencem a  $T_2(E_k)$ .

**Definição 3.6.20** *Vamos definir  $J'_k$  como o  $T_2$ -ideal gerado por  $I$  e pelos polinômios 3.10 e 3.11. Por outro lado, definiremos  $J'_k(p)$  como o  $T_2$ -ideal gerado por  $I(p)$  e pelos polinômios 3.10 e 3.11.*

O próximo Lema segue de modo análogo ao Lema 3.6.11.

**Lema 3.6.21** *Na superálgebra livre  $K\langle Y, Z \rangle$  temos:*

- (i)  $z_1 \dots z_{k+1}[z_{k+2}, y] \equiv - \sum_{T \neq \emptyset} (-2)^{-\frac{k+1-|T|}{2}} f_T \pmod{J'_k}(J'_k(p))$
- (ii)  $z_2 \dots z_{k+2}[z_1, y] \equiv \sum_{T'} \beta_{T'} f_{T'} \pmod{J'_k}(J'_k(p))$ , para alguns  $\beta_{T'} \in K$  e  $T' \subseteq \{1, \dots, k+1\}$ . Além disso se  $|T'| = k$ , então  $1 \in T'$ .

Usando argumentos análogos àqueles dados na demonstração na Proposição 3.6.14 obtemos:

**Proposição 3.6.22** *Para  $m \geq 1$ ,  $\Gamma_{1,m}$  é gerado módulo  $J'_k$  por*

$$\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-k}^{h-1} \binom{h-1}{s}$$

*polinômios. Por outro lado, para  $m \geq 1$ ,  $\Gamma_{1,m}$  é gerado módulo  $J'_k(p)$  por*

$$\sum_{\Gamma_{[h]}} \sum_{s=m-k}^{h-1} \binom{h-1}{s}$$

*polinômios, onde a soma é executada em todas as componentes multihomogêneas  $(m_1, \dots, m_h)$  tais que  $m_i \leq p$  para todo  $i = 1, \dots, h$ .*

**Definição 3.6.23** Seja  $\Gamma_{[h]}$  uma componente homogênea para  $\Gamma_{1,m}$  e  $l \leq h \leq m$ . Definiremos

$$q_l(y, z_{i_1}, \dots, z_{i_l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} [z_{\sigma(i_1)}, y] z_{\sigma(i_2)} \cdots z_{\sigma(i_l)}$$

$$t'_l(z_{i_1}, \dots, z_{i_h}) = \sum_{\sigma} q_l(y, z_{\sigma^{-1}(i_1)}, z_{i_2}, \dots, z_{i_l}) z_{\sigma^{-1}(i_{l+1})} \cdots z_{\sigma^{-1}(i_h)}$$

e

$$t'_l(p)(z_{i_1}, \dots, z_{i_h}) = \sum_{\sigma} q_l(y, z_{\sigma^{-1}(i_1)}, z_{i_2}, \dots, z_{i_l}) z_{\sigma^{-1}(i_{l+1})} \cdots z_{\sigma^{-1}(i_h)}$$

onde  $\deg_{z_{i_s}} t'(p) < p$ .

**Observação 3.6.24** O polinômio  $t'_l$  corresponde ao par  $(1, \mu_{m-l})$ , onde  $\mu_{m-l}$  é a partição  $(m-l+1, 1^{l-1}) \vdash m$ .

**Lema 3.6.25** Sejam  $b = m-l \leq k$  e  $p > k$ . Então  $t'_l$  não é uma identidade graduada para  $E_k$ . Se  $p \leq k$ , então  $t'_l(p)$  não é uma identidade graduada para  $E_k$ .

Note que para qualquer subconjunto  $S_1 \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}$  de cardinalidade  $l$ , existe uma quantidade finita de polinômios, chamados  $t'_l(S_1)$ ,  $t'_l(p)(S_1)$ , tais que as variáveis em  $S_1$  ocorrem apenas na "perna" do gancho para vários  $t'_l \in t'_l(S_1)$  ou  $t'_l(p) \in t'_l(S_1)(p)$ . Considere agora os polinômios

$$t_l^* = \sum_{S_1 \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}} \sum_{t'_l \in t'_l(S_1)} t'_l,$$

$$t'_l(p)^* = \sum_{S_1 \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}} \sum_{t'_l(p) \in t'_l(S_1)(p)} t'_l(p).$$

De modo análogo ao Lema 3.6.18, obtemos

**Lema 3.6.26** Sejam  $m \geq 1$  e  $p > k$ . Então  $t_l^*$  não é uma identidade graduada para  $E_k$ . Se  $p \leq k$ , então  $t'_l(p)^*$  não é uma identidade graduada para  $E_k$ .

A próxima proposição é análoga à Proposição 3.6.19.

**Proposição 3.6.27** Sejam  $m \geq 1$  e  $p > k$ . Então  $\Gamma_{1,m}(E_k) = \Gamma_{1,m}(J'_k)$ . Se  $p \leq k$ , então  $\Gamma_{1,m}(E_k) = \Gamma_{1,m}(J'_k(p))$ .

### 3.6.3 O $T_2$ -ideal para $E_k$

De modo análogo ao feito por Da Silva em [44] iremos generalizar os resultados obtidos nas Seções 3.6.1 e 3.6.2 e finalmente de posse desses resultados seremos capazes de descrever uma base para as identidades de  $E_k$ .

**Notação 3.6.28** *Se  $l \equiv 0 \pmod{2}$ , considere  $\mathcal{J}_k$  o  $T_2$ -ideal gerado por  $I$  e pelos polinômios:*

$$[y_1, y_2] \cdots [y_{k-1}, y_k][y_{k+1}, x] \quad (\text{se } k \text{ é par, } k \geq l + 1) \quad (3.12)$$

$$[y_1, y_2] \cdots [y_k, y_{k+1}][y_{k+1}, x] \quad (\text{se } k \text{ é ímpar, } l \geq k + 1) \quad (3.13)$$

$$g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] \quad (\text{se } k \text{ é par, } l \leq k) \quad (3.14)$$

**Lema 3.6.29** *Se  $l \equiv 0 \pmod{2}$ , então  $\mathcal{J}_k \subseteq T_2(E_k)$ .*

**Demonstração:** Como  $E_k^{(0)}$  possui no máximo  $k$  elementos com suportes disjuntos, pelo Princípio das gavetas de Dirichlet, temos que nos polinômios (3.12) e (3.13) algum dos  $e_i$ 's para  $i = 1, \dots, k$  se repete. Portanto estes polinômios pertencem a  $T_2(E_k)$ . Além disso, pela Proposição 3.6.9, temos  $g_{k-l+2} \in T_2(E_{k-l})$  e segue do Lema 3.6.2 que (3.14) é uma identidade graduada para  $E_k$ . ■

**Notação 3.6.30** *Se  $l \equiv 1 \pmod{2}$ , considere  $\mathcal{J}'_k$  o  $T_2$ -ideal gerado por  $I$  e pelos polinômios:*

$$[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l][y_{l+1}, y_{l+2}] \quad (\text{se } l \geq k + 2) \quad (3.15)$$

$$[y_1, y_2] \cdots [y_{k-1}, y_k][y_{k+1}, x] \quad (\text{se } k \text{ é par, } l = k + 1) \quad (3.16)$$

$$[y_1, y_2] \cdots [y_k, y_{k+1}] \quad (\text{se } k \text{ é ímpar, } l \geq k + 1) \quad (3.17)$$

$$g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}), y_1][y_2, y_3] \cdots [y_{l-1}, y_l] \quad (\text{se } l \leq k) \quad (3.18)$$

$$g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[z_{k-l+3}, y_1][y_2, y_3] \cdots [y_{l-1}, y_l] \quad (\text{se } l \leq k) \quad (3.19)$$

Usando argumentos análogos àqueles usados no Lema 3.6.29 obtemos:

**Lema 3.6.31** *Se  $l \equiv 1 \pmod{2}$ , então  $\mathcal{J}'_k \subseteq T_2(E_k)$ .*

Agora somos capazes de descrever o  $T_2$ -ideal de  $E_k$ .

**Teorema 3.6.32** *Seja  $T_2(E_k)$  o  $T_2$ -ideal para  $E_k$ . Fazendo  $X = Y \cup Z$ , se  $p > k$  então  $T_2(E_k)$  é gerado pelos polinômios:*

- $[x_1, x_2, x_3]$

- $[y_1, y_2] \dots [y_{k-1}, y_k]$  ( se  $k$  é ímpar)
- $[y_1, y_2] \dots [y_k, y_{k+1}][y_{k+1}, x]$  ( se  $k$  é par)
- $g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l]$  ( se  $l \leq k$ ,  $l$  é ímpar)
- $[g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2}), y_1][y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l]$  ( se  $l \leq k$ ,  $l$  é ímpar)
- $g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})[z, y_1][y_2, y_3] \dots [y_{l-1}, y_l]$  ( se  $l \leq k$ ,  $l$  é ímpar).

Se  $p \leq k$  adicione à lista acima a identidade

- $z^p$ .

**Demonstração:** Denote por  $\mathcal{P}_k$  o  $T_2$ -ideal de  $K\langle Y \cup Z \rangle$  gerado pelos polinômios listados acima, de acordo com a paridade de  $k$ . Iremos mostrar que  $T_2(E_k) = \mathcal{P}_k$ . Isso será feito para  $p > k$ , e o caso  $p \leq k$  segue de modo análogo. Segue dos Lemas 3.6.29 e 3.6.31 que  $\mathcal{P}_k \subseteq T_2(E_k)$ .

Mostraremos agora que  $\Gamma_{l,m} \cap T_2(E_k) \subseteq \Gamma_{l,m} \cap \mathcal{P}_k$ . Estudaremos separadamente os casos em que  $k$  e  $l$  têm a mesma paridade. Como  $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{T_2}$ , é imediato que  $I \subseteq \mathcal{P}_k$ .

- Caso 1: Suponha  $k$  e  $l$  pares.

Dado  $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_t) \in \Gamma_{l,m} \cap T_2(E_k)$ , como  $l$  é par, pelo item (i) do Lema 3.6.2, existe  $g(z_1, \dots, z_t) \in \Gamma_{0,m}$  tal que

$$f \equiv g[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}.$$

Como  $I \subseteq \mathcal{P}_k$ , temos

$$f \equiv g[y_1, y_2] \dots [y_{l-1}, y_l] \pmod{\mathcal{P}_k}.$$

Já que  $[y_1, y_2] \dots [y_{k-1}, y_k][y_{k+1}, x] \in \mathcal{P}_k$ , podemos assumir que  $l \leq k$ , e assim pelo item (iii) do Lema 3.6.2 obtemos que  $g \in T_2(E_{k-l})$ . Façamos  $h = k - l$ , pela Proposição 3.6.19, temos que  $g \in J_h$ . Portanto, existem monômios  $v_i$ ,  $w_i \in K\langle Y \cup Z \rangle$  e alguns endomorfismos graduados  $\varphi_i$  da superálgebra livre tal que

$$g \equiv \sum_i v_i \varphi_i(g_{h+2}) w_i \pmod{I}.$$

Sabemos que os comutadores  $[x_1, x_2]$  são elementos centrais na superálgebra  $K\langle Y \cup Z \rangle/I$ , logo

$$f \equiv g[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] \equiv \sum_i v_i \varphi_i(g_{h+2})[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] w_i \pmod{I}.$$

Note que  $g_{h+2}(z_1, \dots, z_{t'})$ ,  $t' \leq h+2$  e  $[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l]$  são polinômios em conjuntos distintos de variáveis, deste modo podemos assumir que  $\varphi_i(y_j) = y_j$ , para todo  $i, j$ . Assim cada parcela do somatório anterior é um elemento do  $T_2$ -ideal gerado por  $g_{h+2}[y_1, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l]$  e estes são os geradores de  $\mathcal{P}_k$ , como  $I \subseteq \mathcal{P}_k$ , concluímos que  $f \in \Gamma_{l,m} \cap \mathcal{P}_k$ .

- Caso 2: Sejam  $k$  e  $l$  ímpares.

Seja  $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_t) \in \Gamma_{l,m} \cap T_2(G_k)$ . Como  $l$  é ímpar, pelo item (i) do Lema 3.6.3 existe  $g \in \Gamma_{1,m}$  tal que

$$f \equiv g(z_1, \dots, z_t, y_1)[y_2, y_3] \cdots [y_{l-1}, y_l] \pmod{I}.$$

Já que  $I \subseteq \mathcal{P}_k$ , a equivalência acima também é válida módulo  $\mathcal{P}_k$ . De modo análogo ao Caso 1, podemos assumir que  $l \leq k$ . Assim pelo item (iii) do Lema 3.6.3 obtemos que  $g \in T_2(E_{k-l+1})$ . Façamos  $h = k-l+1$ . Pela Proposição 3.6.27, temos que  $g \in J_{h'}$ . Portanto, existem monômios  $v_i, w_i, b_i, c_i \in K\langle Y \cup Z \rangle$  e alguns endomorfismos graduados  $\varphi_i$  da superálgebra livre, tais que

$$g \equiv \sum_i v_i \varphi_i([g_{h+1}, y_1]) w_i + b_i \varphi_i(g_{h+1}[z, y_1]) c_i \pmod{I}.$$

Como os comutadores de comprimento dois são elementos centrais na superálgebra  $K\langle Y \cup Z \rangle/I$ , obtemos:

$$f \equiv \sum_i (v_i \varphi_i([g_{h+1}, y_1]) w_i + b_i \varphi_i(g_{h+1}[z, y_1]) c_i) [y_2, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l] w_i \pmod{I}.$$

Como  $Y \cap Z = \emptyset$ , podemos assumir que  $\varphi_i(y_j) = y_j$ , para todo  $i, j$ . Portanto, cada parcela do somatório anterior é um elemento do  $T_2$ -ideal gerador por  $[g_{h+1}, y_1]$  e  $g_{h+1}[z, y_1] c_i$   $[y_2, y_2] \cdots [y_{l-1}, y_l]$  e estes são os geradores de  $\mathcal{P}_k$ . Como  $I \subseteq \mathcal{P}_k$ , concluímos que  $f \in \mathcal{P}_k$ .

Se  $k$  e  $l$  tiverem paridades diferentes usamos argumentos análogos aos utilizados nos casos anteriores. E por fim se  $p \leq k$  então  $z^p$  não é consequência de

$g_{k-l+2}(z_1, \dots, z_{k-l+2})$ , por isso devemos acrescentar  $z^p$  ao conjunto gerador do  $T_2$ -ideal de  $E_k$ . ■

# Capítulo 4

## Polinômios Centrais para a Álgebra de Grassmann

O objetivo desse capítulo é dar uma descrição dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann  $E$  sobre um corpo infinito  $K$  de característica diferente de 2. Tal descrição foi dada por Brandão, Koshlukov, Krasilnikov e Da Silva em [7], e no mesmo trabalho, utilizando-se um resultado de Shchigolev [42], foi provado que se  $\text{char}K = p > 2$ , então  $C(E)$  não é finitamente gerado como um  $T$ -espaço. Esse é o primeiro exemplo de uma álgebra associativa cujo  $T$ -espaço de polinômios centrais não é finitamente gerado.

Em todo capítulo  $K\langle X \rangle$  denotará a álgebra livre associativa unitária sobre  $K$  livremente gerada pelo conjunto  $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ .

### 4.1 Preliminares

Nesta seção veremos alguns resultados que serão úteis no decorrer do capítulo. Como vimos no Teorema 2.1.2,  $T(E) = T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$  e para provar os principais resultados do capítulo, precisaremos das seguintes propriedades do  $T$ -ideal  $T$ .

**Lema 4.1.1** *Seja  $K$  um corpo. Para quaisquer  $g_1, g_2, g_3, g_4 \in K\langle X \rangle$  temos:*

(i) *Os elementos  $[g_1, g_2] + T$  são centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ ;*

(ii)  $[g_1, g_2][g_3, g_4] + T = -[g_1, g_3][g_2, g_4] + T$ .

**Demonstração:**

(i) É imediata.

(ii) Segue do Lema 2.1.1.

■

**Lema 4.1.2** *Para quaisquer  $g_1, g_2 \in K\langle X \rangle$  temos:*

$$(i) [g_1^n, g_2] \equiv ng_1^{n-1}[g_1, g_2] \pmod{T}$$

$$(ii) (g_1g_2)^n \equiv g_1^n g_2^n + \frac{n(n-1)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_2, g_1] \pmod{T}$$

$$(iii) (g_1 + g_2)^n \equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \frac{n(n-1)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_1, g_2] \pmod{T}$$

**Demonstração:**

(i) A prova segue imediatamente da equação (1.2) e do item (i) do Lema 4.1.1.

(ii) Faremos indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  é imediato. Suponha que a relação é válida para  $n - 1$ , ou seja,

$$(g_1g_2)^{n-1} \equiv g_1^{n-1} g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1^{n-2} g_2^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T}.$$

Mostremos que o resultado é válido para  $n$ ,

$$\begin{aligned} (g_1g_2)^n &= (g_1g_2)(g_1g_2)^{n-1} \\ &\equiv (g_1g_2) \left( g_1^{n-1} g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1^{n-2} g_2^{n-2} [g_2, g_1] \right) \pmod{T} \\ &\equiv g_1g_2g_1^{n-1} g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1g_2g_1^{n-2} g_2^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T} \\ &\equiv g_1(g_1^{n-1} g_2 + [g_2, g_1^{n-1}])g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1(g_1^{n-2} g_2 + \\ &\quad + [g_2, g_1^{n-2}])g_2^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T} \\ &\equiv g_1^n g_2^n + g_1[g_2, g_1^{n-1}]g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_2, g_1] + \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1[g_2, g_1^{n-2}]g_2^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T}. \end{aligned}$$

Segue do Lema 2.1.1 que  $[g_2, g_1^{n-2}][g_2, g_1] \in T$ , e assim

$$(g_1g_2)^n \equiv g_1^n g_2^n + g_1[g_2, g_1^{n-1}]g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-1)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_2, g_1] \pmod{T}.$$

Pelo item (i) obtemos que

$$\begin{aligned}
(g_1 g_2)^n &\equiv g_1^n g_2^n + g_1 \left( (n-1) g_1^{n-2} [g_2, g_1] \right) g_2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_2, g_1] \pmod{T} \\
&\equiv g_1^n g_2^n + (n-1) g_1^{n-1} g_2^{n-2} [g_2, g_1] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_2, g_1] \pmod{T} \\
&\equiv g_1^n g_2^n + \frac{n(n-1)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_2, g_1] \pmod{T}.
\end{aligned}$$

(iii) Faremos novamente indução sobre  $n$ . É fácil ver que a relação é válida para  $n = 1, 2$  e  $3$ . Suponha verdadeiro para  $n-1$  e  $n-2$ , ou seja,

$$(g_1 + g_2)^{n-1} \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} g_1^{n-1-j} g_2^j + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{n-3} [g_2, g_1] \pmod{T} \quad (4.1)$$

e

$$(g_1 + g_2)^{n-2} \equiv \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} g_1^{n-2-j} g_2^j + \frac{(n-2)(n-3)}{2} (g_1 + g_2)^{n-4} [g_2, g_1] \pmod{T}. \quad (4.2)$$

Iremos mostrar que o resultado é válido, módulo  $T$ , para  $n \geq 4$ . Por hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned}
(g_1 + g_2)^n &\equiv (g_1 + g_2)(g_1 + g_2)^{n-1} \pmod{T} \\
(g_1 + g_2)^n &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} g_2 g_1^{n-1-j} g_2^j + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T} \\
&\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left( g_1^{n-(j+1)} g_2^{j+1} + [g_2, g_1^{n-(j+1)}] g_2^j \right) + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T} \\
&\equiv g_1^n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} g_1^{n-j} g_2^j + g_2^n + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} [g_2, g_1^{n-(j+1)}] g_2^j + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{(n-2)} [g_2, g_1] \pmod{T}.
\end{aligned}$$

Segue do item (i) que

$$\begin{aligned}
(g_1 + g_2)^n &\equiv g_1^n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} g_1^{n-j} g_2^j + g_2^n + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (n-j-1) g_1^{n-j-2} g_2^j [g_2, g_1] + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{(n-2)} [g_2, g_1] \pmod{T} \\
&\equiv g_1^n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} g_1^{n-j} g_2^j + g_2^n + (n-1) \left( \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} g_1^{n-2-j} g_2^j \right) [g_2, g_1] + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T}
\end{aligned}$$

e pela relação (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
(g_1 + g_2)^n &\equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_1^{n-j} g_2^j + (n-1)(g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] - \\
&\quad - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} (g_1 + g_2)^{n-4} [g_2, g_1] [g_2, g_1] + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T}
\end{aligned}$$

como  $[g_2, g_1][g_2, g_1] \in T$ ,

$$\begin{aligned}
(g_1 + g_2)^n &\equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_1^{n-j} g_2^j + (n-1)(g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] + \\
&\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T} \\
&\equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \frac{n(n-1)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_2, g_1] \pmod{T}.
\end{aligned}$$

■

**Lema 4.1.3** *Seja  $K$  um corpo de característica  $p > 2$ . Para quaisquer  $g, g_1, g_2 \in K\langle X \rangle$  temos:*

- (i) *Os elementos  $g^p + T$  são centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ ;*
- (ii)  *$(g_1 g_2)^p + T = g_1^p g_2^p + T$ ;*
- (iii)  *$(g_1 + g_2)^p + T = g_1^p + g_2^p + T$ .*

**Demonstração:**

(i) Pelo item (i) do Lema 4.1.1, os elementos  $[g_1, g_2] + T$  são centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ . Por indução é possível mostrar que:

$$[g_1, \underbrace{g, \dots, g}_n] = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} g^j g_1 g^{n-j},$$

para  $n \geq 1$  em toda álgebra associativa. Quando  $n = p$ , módulo  $T$ , temos:

$$[g_1, g, \dots, g] = g_1 g^p - g^p g_1 = [g_1, g^p]$$

Como  $[g_1, g, \dots, g] \in T$ , temos que  $g^p + T$  é um elemento central para  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ .

(ii) Pelo item (ii) do Lema 4.1.2, temos que

$$(g_1 g_2)^n \equiv g_1^n g_2^n + \frac{n(n-1)}{2} g_1^{n-1} g_2^{n-1} [g_1, g_2] \pmod{T}.$$

Como  $\text{char} K = p > 2$ ,

$$(g_1 g_2)^p \equiv g_1^p g_2^p \pmod{T}.$$

Assim podemos concluir que  $(g_1 g_2)^p + T = g_1^p g_2^p + T$ .

(iii) Segue do item (ii) do Lema 4.1.2 que

$$(g_1 + g_2)^n \equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_1^{n-j} g_2^j + \frac{n(n-1)}{2} (g_1 + g_2)^{n-2} [g_1, g_2] \pmod{T}.$$

Como  $\text{char} K = p > 2$  temos

$$(g_1 + g_2)^p \equiv g_1^p + g_2^p \pmod{T}.$$

Portanto,  $(g_1 + g_2)^p + T = g_1^p + g_2^p + T$ .

■

**Proposição 4.1.4** *Seja  $K$  um corpo infinito de característica  $p \neq 2$ . Então o  $K$ -espaço vetorial  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  tem como base*

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + T \quad (4.3)$$

onde  $s, r \geq 0$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ ,  $j_1 < j_2 < \dots < j_{2r}$ ,  $n_k > 0$  para todo  $k$ .

**Demonstração:** A prova dessa proposição, segue imediatamente da Proposição 1.4.11 e do Lema 4.1.1. ■

**Lema 4.1.5** *Sejam  $K$  um corpo infinito de característica  $\neq 2$  e  $g = g(x_2, \dots, x_l) \in K\langle X \rangle$  um polinômio que não depende de  $x_1$ . Suponha que  $x_1g + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ . Então  $g \in T$ .*

**Demonstração:** Supondo que  $x_1g + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ , temos que  $[x_0, x_1g] \in T$ . Vimos que  $T = T(E)$ , portanto  $[x_0, x_1g]$  também pertence a  $T(E)$ . Segue da Definição de polinômios centrais que  $x_1g \in C(E)$ . Como estamos lidando com uma álgebra unitária podemos substituir  $x_1 = 1$ , e daí  $g$  pertence a  $C(E)$ . Usando a equação (2.1) obtemos

$$[x_0, x_1g] = x_1[x_0, g] + [x_0, x_1]g. \quad (4.4)$$

Logo  $[x_0, x_1]g \in T$ , e daí segue que  $g \in T$ . Com efeito, se  $g \notin T$  existem  $w_2, \dots, w_l \in E$  tais que  $0 \neq g(w_2, \dots, w_l) \in E$  e substituindo  $x_0 = e_i$  e  $x_1 = e_j$  tais que  $e_i$  e  $e_j$  não aparecem em  $g(w_2, \dots, w_l)$  temos  $[e_i, e_j]g(w_2, \dots, w_l) = 2e_ie_jg(w_2, \dots, w_l) \neq 0$  uma contradição. ■

**Lema 4.1.6** *Sejam  $K$  um corpo infinito de característica  $\neq 2$  e  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$  um polinômio homogêneo de grau 1 em  $x_1$ . Suponha que  $f + T$  seja central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ . Então  $f + T$  pertence ao  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $[x_1, x_2] + T$ .*

**Demonstração:** Seja  $f = \sum_i \alpha_i a_i x_1 b_i$ , onde  $\alpha_i \in K$  e  $a_i, b_i$  são monômios (alguns deles possivelmente iguais a 1), os quais não dependem de  $x_1$ . Como  $ax_1b = x_1ba + [a, x_1b]$  para todo  $a, b \in K\langle X \rangle$ , temos

$$f = x_1g(x_2, \dots, x_l) + h(x_1, x_2, \dots, x_l),$$

onde  $h(x_1, x_2, \dots, x_l) = \sum_i [a_i, x_1b_i]$  pertence ao  $T$ -espaço gerado por  $[x_1, x_2]$  e  $g = g(x_2, \dots, x_l)$  não depende de  $x_1$ . Sendo  $f + T$  e  $h + T$  polinômios centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ , segue que  $x_1g + T$  também é. Pelo Lema anterior  $g \in T$ . Assim  $g + T = T$  e  $f + T = h + T = \sum_i [a_i, x_1b_i] + T$ .

Dessa forma,  $f + T$  pertence ao  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $[x_1, x_2] + T$ . ■

## 4.2 $C(E)$ quando $\text{char} K = 0$

Agora iremos descrever o  $T$ -espaço dos polinômios centrais para  $E$  sobre um corpo de característica zero.

**Proposição 4.2.1** *Se  $\text{char}K = 0$ , então o T-espaço  $C(E)$  é gerado por 1 e pelos polinômios  $x_1[x_2, x_3, x_4]$  e  $[x_1, x_2]$ .*

**Demonstração:** Seja  $K$  um corpo de característica zero. Então todo T-espaço é gerado por polinômios multilineares. Em particular, o T-espaço  $\frac{C(E)}{T}$  dos elementos centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  também é. Além disso, pelo Lema 4.1.6, o T-espaço  $\frac{C(E)}{T}$  está contido no T-espaço gerado por 1 e por  $[x_1, x_2] + T$ . Como  $[x_1, x_2] + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ ,  $\frac{C(E)}{T}$  é gerado como T-espaço por 1 e por  $[x_1, x_2] + T$ . Assim, pela equação

$$x_1[x_2, x_3, x_4] = x_1[x_2, x_3, x_4] - x_1x_4[x_2, x_3, x_4] \quad (4.5)$$

como T-espaço,  $C(E)$  é gerado por 1,  $x_1[x_2, x_3, x_4]$  e  $[x_1, x_2]$ . ■

**Proposição 4.2.2** *Se  $\text{char}K = 0$ , então para todo  $n \geq 2$ ,*

$$\dim_K(P_n/P_n \cap C(E)) = 2^{n-2}$$

**Demonstração:** Já foi provado no Teorema 2.1.3 que

$$C_n(E) = \dim_K P_n/(P_n \cap T) = 2^{n-1},$$

para todo  $n \geq 1$ . Por outro lado, segue imediatamente de ([5], Proposição 8) que, para todo  $n \geq 2$

$$\dim_K(P_n \cap V)/(P_n \cap T) = 2^{n-2},$$

onde  $V$  é o T-espaço em  $K\langle X \rangle$  gerado por  $[x_1, x_2]$  e por  $T$ . Portanto,

$$\dim_K P_n/(P_n \cap V) = \dim_K P_n/(P_n \cap T) - \dim_K(P_n \cap V)/(P_n \cap T) = 2^{n-2}.$$

Pela Proposição anterior,  $C(E) = V \oplus \langle 1 \rangle_K$ . Daí,  $P_n \cap V = P_n \cap C(E)$ , para todo  $n \geq 1$ . Logo,  $\dim_K P_n/(P_n \cap C(E)) = 2^{n-2}$ . ■

### 4.3 $C(E)$ quando $\text{char}K > 2$

Nesta seção iremos descrever o T-espaço dos polinômios centrais para  $E$ , sobre um corpo de característica positiva e diferente de dois, a partir dessa descrição veremos que  $C(E)$  é um T-espaço limite em  $K\langle X \rangle$ .

**Lema 4.3.1** *Seja  $\text{char}K = p > 2$  e  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_l)$  um polinômio homogêneo de grau  $m_1$  em  $x_1$ . Suponha que  $f + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  e que  $p$  não divide  $m_1$ . Então  $f + T$  pertence ao  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $[x_1, x_2] + T$ .*

**Demonstração:** Como  $m_1$  não é múltiplo de  $p$ , podemos escrever  $m_1 = pq + m$ , onde  $0 < m < p$ . Além disso,  $f + T$  é escrito como combinação de elementos da forma (4.3), logo

$$f + T = x_1^{pq}g + T,$$

onde  $g = g(x_1, \dots, x_l)$  e o grau de  $g$  em  $x_1$  é  $m$ .

Seja  $\Phi \in \text{End}(K\langle X \rangle)$  definida por  $\Phi(x_1) = 1 + x_1$  e  $\Phi(x_j) = x_j$ , para todo  $j \neq 1$ .

Então

$$\begin{aligned} \Phi(f) &\equiv (1 + x_1)^{pq}g(1 + x_1, x_2, \dots, x_l) \pmod{T} \\ &\equiv (1 + x_1^p)^qg(1 + x_1, x_2, \dots, x_l) \pmod{T} \end{aligned}$$

e a componente homogênea de  $\Phi(f)$  de grau  $m$  em  $x_1$  é  $g(x_1, x_2, \dots, x_l)$ . Segue que  $g + T$  pertence ao  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $f + T$ . Como  $f + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ , os elementos gerados por  $f + T$  também são. Em particular  $g + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ .

Seja  $h = h(x'_1, \dots, x'_m, x_2, \dots, x_l)$  a linearização total de  $g$  com respeito a  $x_1$ , isto é,  $h(x'_1, \dots, x'_m, x_2, \dots, x_l)$  é a componente homogênea de  $g(x'_1 + \dots + x'_m, x_2, \dots, x_l)$  que é multilinear em  $x'_1, \dots, x'_m$ . Assim,  $h(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_l) = m!g(x_1, \dots, x_l)$ .

O grau do polinômio  $h$  é 1 em  $x'_1$ . Por outro lado,  $h + T$  é central em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ , pois pertence ao  $T$ -espaço gerado pelo elemento central  $g + T$ . Aplicando o Lema 4.1.6,  $h + T$  pertence ao  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $[x_1, x_2] + T$  e vale

$$g(x_1, \dots, x_l) + T = (m!)^{-1}h(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_l) + T.$$

Deste modo, obtemos que  $f + T = (x_1^p)^qg + T$  pertence ao espaço gerado por  $x_0^p[x_1, x_2] + T$ , que está contido no  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $[x_1, x_2] + T$ . ■

Considere  $q(x_1, x_2) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1}$  e de um modo geral ,

$$q_n(x_1, \dots, x_{2n}) = q(x_1, x_2)q(x_3, x_4) \dots q(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

**Teorema 4.3.2** *Sobre um corpo infinito de característica  $p > 2$ , o espaço vetorial  $C(E)$  dos polinômios centrais de  $E$  é gerado (como um  $T$ -espaço em  $K\langle X \rangle$ ) pelo polinômio*

$$x_1[x_2, x_3, x_4] \tag{4.6}$$

e pelos polinômios

$$x_0^p, x_0^p q_1, x_0^p q_2, \dots, x_0^p q_n, \dots \quad (4.7)$$

**Demonstração:** Seja  $f = f(x_1, \dots, x_l) \in C(E)$  um polinômio multihomogêneo de grau  $m_i$  em  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Então  $f + T$  é central em  $K\langle X \rangle / T$ . Da equação (4.5) temos que o T-ideal  $T$  está contido no T-espaço de  $K\langle X \rangle$  gerado pelo polinômio (4.6). Assim, se  $f \in T$ , então  $f$  pertence ao T-espaço gerado por (4.6).

Suponha que  $f \notin T$  e que para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq l$ ,  $m_i$  não é múltiplo de  $p$ . Renomeando as variáveis  $x_i$  podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $i = 1$  e então, pelo Lema 4.3.1,  $f + T$  pertence ao T-espaço gerado por  $[x_1, x_2] + T$ . Daí  $f$  pertence ao T-espaço gerado por (4.6) e por  $[x_1, x_2]$ . Mas,  $[x_1, x_2]$  é a componente homogênea de multigrado  $(0, 1, 1)$  do polinômio

$$(1 + x_0)^p (1 + x_1)^{p-1} [1 + x_1, 1 + x_2] (1 + x_2)^{p-1}$$

de modo que o T-espaço gerado por  $[x_1, x_2]$  está contido no T-espaço gerado pelo polinômio  $x_0^p x_1^{p-1} [x_1, x_2] x_2^{p-1}$  que é igual a  $x_0^p q_1$ . Assim, se  $m_i$  não é múltiplo de  $p$  para algum  $i$ , então  $f$  pertence ao T-espaço gerado por (4.6) e por  $x_0^p q_1$ .

Suponha agora que  $f \notin T$  e que, para todo  $i$ ,  $m_i$  é múltiplo de  $p$ . Como  $f + T$  é uma combinação linear dos elementos da forma (4.3) e, pelos Lemas 4.1.1 e 4.1.3, os elementos  $x_i^p + T$  e  $[x_i, x_j] + T$  são centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ , fica claro que  $f + T$  é uma combinação linear de elementos da forma

$$x_1^{pq_1} \dots x_l^{pq_l} x_{i_1}^{p-1} [x_{i_1}, x_{i_2}] x_{i_2}^{p-1} \dots x_{i_{2k-1}}^{p-1} [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] x_{i_{2k}}^{p-1} + T \quad (4.8)$$

onde  $k, l \geq 0$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2k} \leq l$ . Além disso, já que  $(x_1 + x_2)^p + T = x_1^p x_2^p + T$ , o elemento 4.8 pertence ao T-espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por

$$x_0^p x_l^{p-1} [x_1, x_2] x_2^{p-1} \dots x_{2k-1}^{p-1} [x_{2k-1}, x_{2k}] x_{2k}^{p-1} + T = x_0^p q_k + T.$$

Segue daí que  $f$  pertence ao T-espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado pelos polinômios (4.6) e pelo conjunto dos polinômios (4.7). ■

A partir de agora consideremos  $I$  o ideal de  $K\langle X \rangle$  gerado pelos elementos  $f^p$  para todo  $f \in K\langle X \rangle$  sem termo escalar e  $V_n$  o T-espaço em  $K\langle X \rangle$  gerado por  $q_1, q_2, \dots, q_n$  como foram definidos no Teorema 4.3.2. A próxima proposição se deve a Schigolev, e é uma reformulação de ([42], Lema 13).

**Proposição 4.3.3** ([42]) *Para todo inteiro positivo  $n \geq 1$  existe  $k(n) > n$  tal que  $q_{k(n)} \notin V_n + T + I$ .*

Na verdade, resulta da prova de ([42], Lema 13), que na Proposição 4.3.3 podemos assumir  $k(n) = n + 1$ .

Seja  $W_n$  o T-espaco em  $K\langle X \rangle$  gerado por  $x_0^p, x_0^p q_1, \dots, x_0^p q_n$  e  $\langle 1 \rangle_K \cong K$  o subespaco gerado por 1 em  $K\langle X \rangle$ .

**Lema 4.3.4** *Para cada  $n \geq 1$ ,  $V_n + \langle 1 \rangle_K + I = W_n + I$ .*

**Demonstração:** Como  $q_i(x_1, \dots, x_{2i})$  é a componente homogênea de grau 0 em  $x_0$  de  $(1 + x_0)^p q_i(x_1, \dots, x_{2i})$ ,  $q_i$  está contido no T-espaco de  $K\langle X \rangle$  gerado por  $x_0 q_i$ . Assim  $q_i \in W_n$ , para todo  $i \leq n$ . Temos também que  $1 \in W_n$ . Logo,  $V_n + \langle 1 \rangle_K \subseteq W_n$  para todo  $n$  e assim  $V_n + \langle 1 \rangle_K + I \subseteq W_n + I$ , para  $n \geq 1$ .

Mostremos agora a inclusão contrária. Sejam  $g_0, g_1, \dots, g_{2i} \in K\langle X \rangle$  elementos arbitrários. Suponha que  $g_0 = \alpha + f$ , onde  $\alpha \in K$  e  $f$  é um polinômio sem termo constante. Então,  $g_0^p = \alpha^p + f^p \in \langle 1 \rangle_K + I$ . Por outro lado,

$$g_0^p q_i(g_1, \dots, g_{2i}) = (\alpha + f)^p q_i(g_1, \dots, g_{2i}) = \alpha^p q_i + f^p q_i$$

e assim

$$g_0^p q_i(g_1, \dots, g_{2i}) = \alpha^p q_i(g_1, \dots, g_{2i}) + h,$$

onde  $h \in I$ . Como  $W_n$  é gerado sobre  $K$  pelos elementos  $g_0^p$  e  $g_0^p q_i(g_1, \dots, g_{2i})$  para todo  $i \leq n$  e para todo  $g_0, g_1, \dots, g_{2i} \in K_1\langle X \rangle$ , temos  $W_n \subseteq V_n + \langle 1 \rangle_K + I$ , para todo  $n \geq 1$ , portanto  $V_n + \langle 1 \rangle_K + I = W_n + I$ , para todo  $n$ . ■

Usando um resultado de Shchigolev [42] deduz-se do Teorema anterior o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.5** *Seja  $K$  um corpo infinito, com  $\text{char}K = p > 2$ , então o espaco vetorial  $C(E)$  dos polinômios centrais para a álgebra de Grassmann unitária  $E$  sobre  $K$  não é finitamente gerado como um T-espaco em  $K\langle X \rangle$ .*

**Demonstração:** De acordo com a Proposição 4.3.3, para todo  $n \geq 1$  existe  $k(n) > n$  tal que  $V_{k(n)} \not\subseteq V_n + T + I$ , ou de modo equivalente,  $V_n + T + I \not\supseteq V_{k(n)} + T + I$ . Como para cada  $l$ , nenhum elemento de  $V_l + T + I$  tem termo escalar não-nulo,

$$V_n + \langle 1 \rangle_K + T + I \not\supseteq V_{k(n)} + \langle 1 \rangle_K + T + I.$$

Pelo Lema 4.3.4, temos

$$W_n + T + I \supsetneq W_{k(n)} + T + I,$$

para cada  $n$ . Daí,  $W_n + T \supsetneq W_{k(n)} + T$ , para cada  $n$ , de modo que a cadeia

$$W_1 + T \subseteq W_2 + T \subseteq \dots \subseteq W_n + T \subseteq \dots$$

contêm uma subcadeia ascendente infinita. Pelo Teorema 4.3.2,

$$C(E) = \cup_n(W_n + T),$$

ou seja, o T-espaço  $C(E)$  não é finitamente gerado como um T-espaço. ■

**Definição 4.3.6** Um T-espaço  $V$  em  $K\langle X \rangle$  é dito **T-espaço limite** se todo T-espaço maior  $W \supsetneq V$  é finitamente gerado como um T-espaço mas  $V$  não é.

Provaremos agora que  $C(E)$  é um T-espaço limite. Para isso precisaremos da seguinte proposição.

**Proposição 4.3.7** Seja  $W$  um T-espaço em  $K\langle X \rangle$  tal que  $C(E) \not\subseteq W$ . Então existe um T-ideal  $I \supsetneq T$  em  $K\langle X \rangle$  tal que  $W = C(E) + I$ .

**Demonstração:** Defina  $I$  como o maior T-ideal contido em  $W$ . Assim a inclusão  $C(E) + I \subset W$  é imediata. Para provar a inclusão contrária, assuma que  $f \in W$  é multihomogêneo de grau  $m_i$  em  $x_i$ . Observe que se  $m_i$  for múltiplo de  $p$ , então  $f + T$  é combinação linear sobre  $K$  de elementos da forma (4.8) que são centrais em  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$ . Assim  $f \in C(E)$ .

Suponhamos que  $f \notin C(E)$ . Então deve existir  $i$  tal que  $m_i$  não seja múltiplo de  $p$ . Sem perda de generalidade, assumamos  $i = 1$ . Assim  $m_1 = pq + m$ , onde  $0 < m < p$ . Desta forma,  $f + T = x_1^{pq}g(x_1, x_2, \dots, x_l) + T$ , onde  $g = g(x_1, x_2, \dots, x_l)$  possui grau  $m$  em  $x_1$ .

Seja  $\phi$  um endomorfismo de  $K\langle X \rangle$  tal que  $\phi(x_1) = 1 + x_1$  e  $\phi(x_j) = x_j$ , para  $j > 1$ . Daí,

$$\phi(f) + T = (1 + x_1^p)^q g(1 + x_1, x_2, \dots, x_l) + T.$$

Portanto, a componente homogênea de  $\phi(f) + T$  de grau  $m$  em  $x_1$  é igual a  $g(x_1, x_2, \dots, x_l) + T$ . Logo,  $g \in W$ .

Seja  $h = h(x'_1, \dots, x'_m, x_2, \dots, x_l)$  uma linearização total de  $g$  em relação a  $x_1$ , ou seja,  $h$  é a componente homogênea de  $g(x'_1 + \dots + x'_m, x_2, \dots, x_l)$  que é multilinear em  $x'_1, \dots, x'_m$ . Então  $h \in W$  e

$$h(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_l) = m!g(x_1, x_2, \dots, x_l).$$

O polinômio  $h$  possui grau 1 em  $x'_1$ , e então como foi feito na prova do Lema 4.1.6,

$$h = x'_1 h_1(x'_2, \dots, x'_m, x_2, \dots, x_l) + h_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x_2, \dots, x_l),$$

onde  $h_1$  não depende de  $x'_1$  e  $h_2 + T$  pertence ao  $T$ -espaço de  $\frac{K\langle X \rangle}{T}$  gerado por  $[x_1, x_2] + T$ . Como  $h_2 \in C(E)$ , temos  $x'_1 h_1 \in W$ . Observe que

$$x'_1 h_1 x''_1 = x''_1 x'_1 h_1 + [x'_1 h_1, x''_1] \in W,$$

isto é, o  $T$ -ideal gerado por  $h_1$  está contido em  $W$ . Portanto  $h_1 \in I$ . Assim,

$$h = x'_1 h_1 + h_2 \in I + C(E)$$

e

$$g = (m!)^{-1}h \in I + C(E).$$

Como  $f = x_1^{pq}g + g_1$ , onde  $g_1 \in T \subset C(E)$  e  $x_1^{pq}g \in I + C(E)$ , temos  $W \subseteq I + C(E)$ . ■

**Lema 4.3.8** *Seja  $I$  um  $T$ -ideal de  $K\langle X \rangle$  tal que  $I \not\supseteq T = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ . Então  $I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração:** De acordo com o Lema 2.1.1 os polinômios  $[x_1, x_2][x_2, x_3]$  e  $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$  pertencem a  $T$ .

Como  $K$  é um corpo infinito e  $K\langle X \rangle$  é uma álgebra unitária, temos que  $I$  é gerado por seus polinômios próprios multihomogêneos. Dado  $\omega = [x_{i_1}, \dots, x_{i_q}] \dots [x_{l_1}, \dots, x_{l_q}] \in I$ , se algum dos comutadores tiver comprimento maior que 2, então  $\omega \in T$ . Por outro lado, se os comutadores tiverem tamanho dois temos que, módulo  $T$ ,  $\omega = [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]$  e  $i_1 < i_2 < \dots < i_{2k}$ . Assim, tomado  $f(x_1, \dots, x_n) \in I - T$  um polinômio próprio multihomogêneo, temos que  $f \equiv \sum \alpha_j \omega_j \pmod{T}$ , onde  $\alpha_j \in K$  e os  $\omega_j$ 's são produtos de comutadores de tamanho dois e todos de mesmo multigráu. Deste modo  $n$  deve ser par.

Novamente pelo Lema 2.1.1, temos que  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv -[x_1, x_3][x_2, x_4] \pmod{T}$ , e daí  $f \equiv \alpha[x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n] \pmod{T}$ , com  $\alpha \neq 0$ . Portanto,  $[x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n] \in I$  e tomando  $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}, [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{n-1}, x_n] \in I\}$  obtemos que  $I = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \dots [x_{n_0-1}, x_{n_0}] \rangle^T$ . ■

**Teorema 4.3.9** *O espaço vetorial  $C(E)$  dos polinômios centrais para a álgebra  $E$  sobre um corpo infinito  $K$  de característica  $p > 2$  é um  $T$ -espaço limite em  $K\langle X \rangle$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.3.2, temos que  $C(E)$  não é finitamente gerado. Precisamos mostrar que cada  $T$ -espaço  $W \supseteq C(E)$  é finitamente gerado como  $T$ -espaço.

Pela Proposição 4.3.7,  $W = C(E) + I$  para algum  $T$ -ideal  $I \not\supseteq T$ . Segue do Lema anterior que  $I$  é gerado como  $T$ -ideal por  $[x_1, x_2, x_3]$  e  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2N-1}, x_{2N}]$  para algum  $N \in \mathbb{N}$ . Como  $T$ -espaço  $I$  é gerado por

$$x_0[x_1, x_2, x_3] \tag{4.9}$$

e

$$x_0[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2N-1}, x_{2N}]. \tag{4.10}$$

Como o  $T$ -espaço  $C(E)$  é gerado por (4.9) e pelo conjunto

$$x_0^p, x_0^p q_1, \dots, x_0^p q_n, \dots \tag{4.11}$$

o  $T$ -espaço  $W = C(E) + I$  é gerado por (4.9), (4.10) e pelo conjunto (4.11). Observe que  $x_0^p q_s \in I$  para todo  $s \geq N$ , pois pelo Lema 4.1.1,

$$x_0^p q_s + T = x_0^p x_1^{p-1} [x_1, x_2] x_2^{p-1} \dots x_{2s-1}^{p-1} [x_{2s-1}, x_{2s}] x_{2s}^{p-1} + T$$

$$x_0^p q_s + T = x_0^p x_1^{p-1} \dots x_{2s-1}^{p-1} x_{2s}^{p-1} [x_1, x_2] \dots [x_{2s-1}, x_{2s}] + T.$$

Daí,  $W$  é gerado como  $T$ -espaço pelos polinômios (4.9), (4.10) e  $x_0^p, x_0^p q_1, \dots, x_0^p q_{N-1}$ . Portanto  $W$  é um  $T$ -espaço finitamente gerado. ■

Em virtude desses resultados, surge o seguinte questionamento:  $C(E)$  é o único  $T$ -espaço limite em  $K\langle X \rangle$  quando  $K$  é um corpo infinito de característica  $p > 2$ ? Em [7] os autores acreditam que a resposta para este questionamento seja positiva.

Como vimos, a característica do corpo é crucial na descrição do  $T$ -espaço  $C(E)$ , pois quando a característica é zero mostramos que  $C(E)$  é um  $T$ -espaço finitamente gerado, o que não ocorre quando a característica é  $p > 2$ .

## 4.4 Álgebra de Grassmann não-unitária

Seja  $K_1\langle X \rangle$  a álgebra associativa livre não unitária livremente gerada pelo conjunto  $X$ .

As definições de T-ideal (T-espaço) em  $K_1\langle X \rangle$  são análogas às dadas em  $K\langle X \rangle$ . É evidente que se  $I \subset K_1\langle X \rangle$  é um T-ideal em  $K\langle X \rangle$ , então  $I$  é um T-ideal em  $K_1\langle X \rangle$ . Mas, a recíproca nem sempre é verdadeira, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.4.1** *O ideal gerado por  $f^p$ , tal que  $f \in K_1\langle X \rangle$ , é um T-ideal em  $K_1\langle X \rangle$ , mas não é em  $K\langle X \rangle$ .*

Sejam  $E'$  a álgebra de Grassmann não-unitária de dimensão infinita sobre o corpo  $K$  de característica  $\neq 2$ ,  $E' \subset E$ , e  $T(E')$  o T-ideal das identidades de  $E'$ ,  $T(E') \subset K_1\langle X \rangle$ . Pode-se deduzir de [32] que se  $\text{char}K = 0$  então  $T(E') = T(E)$ .

Portanto, sobre tais corpos temos que  $C(E') = C(E) \cap K_1\langle X \rangle$ . Daí  $C(E')/T$  é gerado como T-espaço em  $\frac{K_1\langle X \rangle}{T}$  por  $[x_1, x_2] + T$ . Observe que  $T$  é gerado como T-espaço em  $K_1\langle X \rangle$  pelos polinômios  $[x_1, x_2, x_3]$  e  $x_1[x_2, x_3, x_4]$ , e como  $[x_1, x_2, x_3]$  está contido no T-espaço gerado por  $[x_1, x_2]$ , obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 4.4.2** *Se  $\text{char}K = 0$ , então o T-espaço  $C(E')$  em  $K_1\langle X \rangle$  é gerado pelos polinômios  $x_1[x_2, x_3, x_4]$  e  $[x_1, x_2]$ .*

Como vimos na Seção 2.3  $T(E') = Q$ , onde  $Q$  denota o T-ideal de  $K_1\langle X \rangle$  gerado por  $[x_1, x_2, x_3]$  e  $x^p$ .

A próxima Proposição é válida em um corpo arbitrário  $K$  de característica  $p > 2$  e sua demonstração segue imediatamente de ([9], prova do Teorema 3) assim como de ([31], prova do Teorema 3). Para um corpo infinito tal Proposição pode ser deduzida da Proposição 4.1.4.

**Proposição 4.4.3** *Seja  $K$  um corpo infinito de característica  $p > 2$ . Então  $K\langle X \rangle/Q$  é um espaço vetorial sobre  $K$  com uma base*

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_s}^{n_s} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] + Q \quad (4.12)$$

onde  $s, r \geq 0$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ ,  $j_1 < j_2 < \dots < j_{2r}$ ,  $0 < n_k < p$ , para todo  $k$ .

**Demonstração:** Pelo item (i) do Lema 4.1.3 , os elementos  $x_i^p + T$ ,  $i = 0, 1, \dots$  são centrais em  $K\langle X\rangle/T$ . Por outro lado, segue imediatamente dos itens (ii) e (iii) do Lema 4.1.3 que  $x_i^p + T$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , gera  $Q/T$  como um ideal em  $K\langle X\rangle/T$ . Pela Proposição 4.1.4 os elementos da forma (4.3) formam uma base para  $K\langle X\rangle/T$ , segue que  $Q/T$  é gerado pelos elementos da forma (4.3) com  $n_k \geq p$ , para algum  $k$ , e portanto os elementos da forma (4.3) com  $0 < n_k < p$ , para todo  $k$ , formam uma base para  $K\langle X\rangle$  módulo  $Q$ . ■

**Lema 4.4.4** *Seja  $\text{char}K = p > 2$  e  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$  um polinômio homogêneo de grau  $m$  em  $x_1$ ,  $0 < m < p$ . Suponha que  $f + Q$  é central em  $K\langle X\rangle_1/Q$ . Então  $f + Q$  pertence ao  $T$ -espaço de  $K_1\langle X\rangle/Q$  gerado por  $[x_1, x_2] + Q$ .*

**Demonstração:** Observe que podemos supor sem perda de generalidade que  $m = 1$ . De fato, seja  $h = h(x'_1, \dots, x'_m, x_2, \dots, x_m)$  uma linearização total de  $f$  em relação a  $x_1$ , isto é,  $h$  é a componente homogênea de  $f(x'_1 + \dots + x'_m, x_2, \dots, x_m)$  que é multilinear em relação a  $x'_1, \dots, x'_m$ . Então,

$$h(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_m) = m!f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Como  $f + Q$  é central em  $K_1\langle X\rangle/Q$ ,  $h + Q$  também é. Assim, é suficiente mostrar que  $h + Q$  pertence ao  $T$ -espaço de  $K_1\langle X\rangle/Q$  gerado por  $[x_1, x_2] + Q$ . Aqui,

$$h = h(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{l+m-1})$$

é homogêneo de grau 1 em  $x_1$ .

Para completar a prova, é suficiente repetir as provas dos Lemas 4.1.5 e 4.1.6 substituindo  $T$  por  $Q$  e os elementos da forma (4.3) por elementos da forma (4.12). ■

Assim como denotamos na seção anterior

$$q_n = q_n(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \dots x_{2n-1}^{p-1}[x_{2n-1}, x_{2n}]x_{2n}^{p-1}.$$

**Teorema 4.4.5** *Seja  $K$  um corpo de característica  $p > 2$ . O espaço vetorial  $C(E')$  dos polinômios centrais de  $E'$  é gerado como  $T$ -espaço em  $K_1\langle X\rangle$  pelos polinômios*

$$x_1[x_2, x_3, x_4], x_1^p, x_1x_2^p, \tag{4.13}$$

*pelo polinômio  $[x_1, x_2]$  e pelo conjunto dos polinômios  $\{q_s; s = 1, 2, \dots\}$ .*

**Demonstração:** Seja  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_l) \in C(E')$  um polinômio multihomôgeneo de grau  $m_i$  em  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Então,  $f + Q$  é central em  $K_1\langle X \rangle/Q$ . Observe que o T-ideal  $Q$  é gerado como um T-espaço em  $K\langle X \rangle$  pelo polinômios (4.13) juntamente com  $[x_1, x_2, x_3]$ .

Suponha que  $f \notin Q$ . Suponha que para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , temos  $0 < m_i < p$ . Renomeando as variáveis em  $x_i$ , podemos assumir sem perda de generalidade que  $i = 1$ . Pelo Lema 4.4.4,  $f + Q$  pertence ao T-espaço de  $K_1\langle X \rangle/Q$  gerado por  $[x_1, x_2] + Q$ , isto é,  $f$  pertence ao T-espaço gerado por (4.13) e por  $[x_1, x_2]$ .

Agora, suponha que  $f \notin Q$  e, para todo  $i$ ,  $m_i = p$ . Então  $f + Q$  é uma combinação linear de elementos da forma (4.12). Contudo, se  $l$  é ímpar, então nenhum elemento da forma (4.12) tem grau  $p$  em todos  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ . Se  $l = 2k$  para algum  $k$ , então o único elemento da forma (4.12) com grau  $p$  em  $x_1, \dots, x_l$  é  $q_k(x_1, \dots, x_{2k}) + Q$ , e neste caso  $f + Q = \alpha q_k + Q$  para  $\alpha \in K$ . Segue daí que  $f$  pertence ao T-espaço em  $K_1\langle X \rangle$  gerado por (4.13) e  $q_k$ .

Assim, em qualquer caso  $f$  pertence ao T-espaço em  $K_1\langle X \rangle$  gerado pelos polinômios (4.13), pelo polinômio  $[x_1, x_2]$  e pelos polinômios  $q_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$  ■

**Teorema 4.4.6** *Seja  $K$  um corpo infinito de característica  $p > 2$ . Então, o espaço vetorial  $C(E')$  dos polinômios centrais de  $E'$  sobre  $K$  não é finitamente gerado como um T-espaço em  $K_1\langle X \rangle$ .*

**Demonstração:** Recordemos que  $V_n$  é o T-espaço em  $K\langle X \rangle$  gerado por  $q_1, \dots, q_n$ . Observe que  $[x_1, x_2] \in V_1$ , uma vez que  $[x_1, x_2]$  é a componente multilinear do polinômio

$$\begin{aligned} q(1 + x_1, 1 + x_2) &= (1 + x_1)^{p-1}[1 + x_1, 1 + x_2](1 + x_2)^{p-1} \\ &= (1 + x_1)^{p-1}[x_1, x_2](1 + x_2)^{p-1}. \end{aligned}$$

Lembre que  $I$  é o ideal de  $K\langle X \rangle$  gerado pelos elementos  $f^p$  para todo  $f \in K\langle X \rangle$  sem termo escalar, isto é, por  $f^p$  para todo  $f \in K_1\langle X \rangle$ . Observe que  $Q = T + I$ , segue da prova do Teorema 4.3.5 que a cadeia de T-espaços de  $K_1\langle X \rangle$

$$V_1 + Q \subseteq V_2 + Q \subseteq \dots$$

contêm uma subcadeia estritamente ascendente infinita. Mas pelo Teorema 4.3.5,

$$C(E') = \bigcup_n (V_n + Q)$$

para  $n \geq 1$ . Portanto, o T-espaço  $C(E')$  não é finitamente gerado. ■

Definimos T-espaço limite em  $K_1\langle X \rangle$ , do mesmo modo que foi feito para  $K\langle X \rangle$ . Kireeva em [30] construiu um T-espaço limite em  $K_1\langle X \rangle$  sobre um corpo de característica positiva. Para um corpo de característica  $p > 2$ , esse resultado pode ser expresso da seguinte maneira.

**Teorema 4.4.7** ([20]) *Sobre o corpo  $K$  de característica  $p > 2$ , o T-espaço  $V$  gerado por  $Q$  e pelo conjunto*

$$\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_1, x_2] \dots x_{2s-1}^{\alpha_{2s-1}} x_{2s}^{\alpha_{2s}} [x_{2s-1}, x_{2s}] | s \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \{1, p-1\} \text{ para todo } i\} \quad (4.14)$$

*é um T-espaço limite em  $K_1\langle X \rangle$ .*

Segue do Lema 4.1.3 que se para um elemento do conjunto (4.14) temos  $\alpha_i \neq p-1$  para algum  $i$ , então o elemento pertence ao T-espaço de  $K_1\langle X \rangle$  gerado por  $Q$  e  $[x_1, x_2]$ . Por isso, o T-espaço limite  $V$  acima pode ser gerado por  $Q$ ,  $[x_1, x_2]$  e pelos polinômios  $q_s$  ( $s \in \mathbb{N}$ ), ou seja,  $C(E') = V$ . Assim temos:

**Teorema 4.4.8** *Sobre um corpo infinito  $K$  de característica  $p > 2$ ,  $C(E')$  é um T-espaço limite em  $K_1\langle X \rangle$ .*

**Demonstração:** Veja Kireeva em [30]. ■

Com isso, surge o mesmo questionamento encontrado para  $C(E)$ . Será que  $C(E')$  é o único T-espaço limite em  $K_1\langle X \rangle$  sobre um corpo  $K$  de característica  $p > 2$ ?

# Bibliografia

- [1] S. A. Amitsur, *A note on PI-rings*, Israel J. Math., **10**, 210-211, 1971.
- [2] S. A. Amitsur, J. Levitsky, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math., **1**, 449-463, 1950.
- [3] N. Anisimov,  *$\mathbb{Z}_p$ -codimension of  $\mathbb{Z}_p$ -identities of Grassmann Algebra*, Commun. in Algebra **29** (9), 4211-4230, 2001.
- [4] N. Anisimov, *Linearization method of computing  $\mathbb{Z}_2$ -codimensions of identities of the Grassmann Algebra*, Polynomial Identities and Combinatorial Methods, Lect. Notes in Pure and Appl. Mat. **235**, Marcel Dekker, 1-26, 2003.
- [5] C. Bekh-Ochir, D. Riley, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237-264, 1958.
- [6] A. P. Brandão Jr., *Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2006.
- [7] A. P. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. Da Silva, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel Journal of Mathematics. **170**, 127-144, 2010.
- [8] L. Centrone,  *$\mathbb{Z}_2$ -graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic*, Linear Algebra **435**, 32977-3313, 2011.
- [9] P. Zh. Chiripov, P. S. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras*, Pliska Studia Mathematica **2**, 103-115, 1981 (Russian).

- [10] J. Colombo, P. Koshulokv, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra and its Applications **337**, 53-67, 2004.
- [11] J. Colombo, P. Koshulokv, *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic  $p$* , Israel J. Math. **146**, 337-355, 2005.
- [12] J. Colombo, P. Koshulokv, *Central polynomials for  $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53-67, 2004.
- [13] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme*, Math. Ann. **85**, (1) 184-194, 1922(German).
- [14] V. Drensky, A. Giambruno, *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for  $2 \times 2$  matrices with involution*, Can. J. Math, **46**, 718-733, 1994.
- [15] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.
- [16] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel **23**, 2004.
- [17] E. Formanek, *Central polynomials for matrix rings*, J. Algebra **23**, 129-132, 1972.
- [18] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic  $p > 0$* , Israel J. Math. **122**, 305-316, 2001.
- [19] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math surv. and Monographs **122**, A.M.S.
- [20] A. V. Grishin, V. V. Shchigolev, *T-spaces and their applications*, Journal of Mathematical Sciences **134**, 1799-1878, 2006.
- [21] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Dover ed. Second Edition, 1985.
- [22] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull Amer. Math. Soc. **54**, 575-580, 1948.
- [23] I. Kaplansky, *Problems in the theory of Rings*, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci.-National Research Council, Washington **502**, 1-3, 1957.

- [24] B. Kostant, *Remarks on the prime varieties*, Israel Journal of Mathematics **96**, 341-356, 1995.
- [25] A. R. Kemer, *Varieties of  $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48**, n° 5, 1042-1059, 1984 (Russian).
- [26] A. R. Kemer, *Finite basability of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, n° 5, 362-397, 1987.
- [27] A. R. Kemer, *Representability of reduced-free*, Algebra i Logika **27**, n° 3, 274-294, 375, 1988(Russian); English translation: Algebra and Logic **27**, n° 3, 167-184, 1989.
- [28] A. R. Kemer, *Remarks on the prime varieties*, Israel Journal of Mathematics **96**, 341-356, 1995.
- [29] V. K. Kharchenko, *A remark on central polynomials*, Mat. Zametki, **26**, 345-346, 1979 (Russian); English translation: Math. Notes, **26**, p. 665, 1979.
- [30] E. A. Kireeva, *Limit  $T$ -space*, Journal of Mathematical Sciences (New York) **152**, 540-557, 2008.
- [31] E. A. Kireeva, A. N. Krasilnikov, *On some extremal varieties of associative algebras*, Matematicheskie Zametki **78**, 542-558, 2005 (Russian); English Translation: Mathematical Notes, **78**, 503-507, 2005.
- [32] D. Krakowski and A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society **181**, 429-438, 1973.
- [33] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a  $T$ -ideal*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **4**, 1122- 1126, 1963(Russian).
- [34] A. C. O. Morgado, J. B. P. Carvalho, P. C. P. J. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [35] S. Okithin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscou Univ. Math, **43**,(4) 49-51, 1988.
- [36] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second over a field of characteristic zero*, Algebra i Logika, **12**, No 1, 83-113, 1963(Russian); English translation: Algebra and Logic **12**, 47-63, 1973.

- [37] Yu. P. Razmyslov, *On a problem of Kaplansky*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat **37**, 483-501, 1973(Russian); English translation: Math. USSR, Izv. **7**, 479-496, 1973.
- [38] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math, **38**, 723-756, 1974(Russian); English translation: Math. USSR, Izv. **8**, 724-760, 1974.
- [39] A. Regev, *Grassmann algebras over finite fields*, Communications in algebra **19**, 1829-1849, 1991.
- [40] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math, **23**, 187-188, 1976.
- [41] S. Yu. Vasilovsky, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika, **28**, No.5 534-554, 1989 (Russian); English translation: Algebra and Logic **28**, No.5 355-368, 1989.
- [42] V.V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable  $T$ -spaces*, Matematicheskiĭ Sbornik, **19**,143-160, 2000; English translation: Sbornik Mathematics **191**, 459-476, 2000.
- [43] E. A. Da Silva, *Polinômios Centrais em Algumas Álgebras Associativas e Representações de Grupo*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2008.
- [44] V.R.T. Da Silva, *Codimensões, Cocaracteres, Identidades e Polinômios Centrais  $\mathbb{Z}_2$ -graduados da Álgebra de Grassmann*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [45] A. H. Stojanova-Venkova, *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica **6**, No.1, 63-72, 1980 (Russian).
- [46] R.G. Swann, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 367-373, 1963.
- [47] O. M. Di Vincenzo, V. Drensky, V. Nardoza, *Subvarieties of the varieties of superalgebras generated by  $M_{1,1}(E)$  or  $M_2(K)$* , Commun. Algebra **31**, 437-461, 2003.
- [48] O. M. Di Vincenzo, V. R. T. Da Silva, *On  $\mathbb{Z}_2$ -graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, Linear Algebra Appl. **431**,(1-2) 56-72, 2009.

- [49] W.Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme*, Math. Ann.**113**, (1) 528-567, 1937(German).