Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Análise Funcional Não-Linear Aplicada ao Estudo de Problemas Elípticos Não-Locais

por

Natan de Assis Lima †

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CNPq

Análise Funcional Não-Linear Aplicada ao Estudo de Problemas Elípticos Não-Locais

por

Natan de Assis Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

———————————————————————

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

———————————————————————

Prof. Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes - UFC

———————————————————————

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Março/2010

Resumo

Neste trabalho usaremos algumas técnicas da Análise Funcional Não-Linear para estudar a existência de solução para os chamados Problemas Elípticos Não-Locais, entre os quais destacamos aqueles que incluem o operador de Kirchhoff, ou seja, problemas do tipo

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo deste trabalho e Δ é o operador Laplaciano. ‡

‡**Palavras Chave:** Problemas Elípticos Não-Locais, Operador de Kirchhoff, Equação de Carrier, Método Variacional, Método de Galerkin, Sub e Supersolução.

Abstract

In this work we will use some techniques of Nonlinear Analysis Functional to study the existence of solutions for the some Nonlocal Elliptic Problems, among then those which include the Kirchhoff operator, that is, problems of the type

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is boundary domain with smooth boundary, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, and $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ are functions satisfying some properties which will be timely introduced and Δ is the Laplace operator. [§]

[§]**Keywords:** Nonlocal Elliptic Problems, Kirchhoff Operator, Carrier Equation, Variational Method, Galerkin Method, Sub and Supersolution.

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus por toda força, coragem e saúde que me deu durante este trabalho.

- A meu orientador, Prof. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa, pela dedicação, atenção e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho.

- Aos meus Pais Marco Aurélio e Jussara, aos meus irmãos Andyara e Inoan, e a minha esposa Renata, minha eterna gratidão pela presença em todos os momentos de minha vida, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me nas horas difíceis.

- Aos professores Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda e Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes por se mostrarem prestativos e disponíveis para fazerem à avaliação deste trabalho de dissertação, fazendo parte da Banca Examinadora.

- Aos meus colegas que compartilharam comigo esses anos de estudos, meus agradecimentos.

- A todos que fazem o DME da UFCG.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

- Ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática (INCTMat), pelo apoio financeiro.

- A todos que contribuíram, de forma direta, ou indiretamente, para concretização deste trabalho, meu muito obrigado.

Dedicatória

A minha esposa Renata, aos meus pais Marco Aurélio e Jussara e aos meus irmãos Andyara e Inoan.

Notações

(1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$;

(2) $\partial\Omega$ - fronteira de Ω;

(3) $\overline{B}_R(0)$ - Bola fechada de centro zero e raio R;

(4) $B_\delta(x)$ - Bola aberta de centro x e raio δ;

(5) $L^2(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^2 dx < +\infty\right\}$

(6) $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$ - espaços de Sobolev;

(7) $\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ norma do espaço $H_0^1(\Omega)$;

(8) $\|u\|_{1,2} = \left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx\right)^{\frac{1}{2}}$ a norma do espaço $H^1(\Omega)$.

(9) $\|u\|_2 = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ norma do espaço $L^2(\Omega)$;

(10) q.t.p. - em quase toda parte;

(11) $\Delta u = \sum_{i=1}^N \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$:= Laplaciano de u;

(12) $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\Omega); \displaystyle\sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty\right\}$ com $0 < \alpha < 1$;

(13) $C^{1,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega); D^i u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\ \forall i, |i| \leq 1\}$.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, usaremos algumas técnicas da Análise Funcional Não-Linear para estudar a existência de solução dos chamados Problemas Elípticos Não-Locais.

Os Problemas Elípticos Não-Locais, muito embora apresentem uma variedade relevante de situações físicas, biológicas e das engenharias e requeiram, em seu estudo, técnicas não-triviais da Análise Não-Linear, somente recentemente têm recebido a devida atenção por partes dos pesquisadores em Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Vários autores tem estudado problemas não-locais, entre os quais citamos [4], [9], [13], [14], [16], [28] e suas referências onde diferentes técnicas foram usadas.

Destacamos, aqui, aqueles que incluem o operador de Kirchhoff, ou seja, problemas do tipo

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u &= 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas e Δ é o operador de Laplace, em que $\|.\|$ é a norma usual no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dada por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Este problema é bem conhecido, sendo a versão estacionária da equação da onda estudada por Kirchhoff [21]. Mais precisamente, Kirchhoff considerou o modelo dado por

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{4}$$

onde os parâmetros nesta equação possuem os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área de sua seção transversal, E é o módulo de Young do material do qual ela é feita, ρ é a densidade da massa e ρ_0 é a tensão inicial.

Este modelo estende a equação de onda clássica proposta por D' Alembert, considerando os efeitos da mudança de comprimento da corda durante a vibração. A versão (4) apareceu pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff [21], em 1883, mas apenas com a publicação do trabalho de J. Lions [24], no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para tal problema, a equação dada em (4) começou a receber maior atenção.

Destacamos, também, alguns problemas que, incluem a equação de Carrier,

$$\begin{cases} -a(\|u\|_2^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas e

$$\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

é a norma usual do espaço $L^2(\Omega)$.

G.F. Carrier [10] deduz a equação que modela vibrações de uma corda elástica quando as mudanças nas tensões não são pequenas

$$\rho u_{tt} - \left(1 + \frac{EA}{LT_0}\int_0^L |u|^2 dx\right) u_{xx} = 0. \tag{6}$$

Aqui, $u(x,t)$ é o deslocamento do ponto x no instante t, T_0 é a tensão axial inicial, E é o módulo de Young de um material, A é a seção transversal de uma corda, L é o comprimento da corda e ρ é a densidade do material. Claramente, se as propriedades do material variam com x e t, então temos uma equação hiperbólica quase-linear do tipo

$$u_{tt} - a(x,t,\|u(t)\|_2^2)\Delta u = 0. \tag{7}$$

Larkin [22] estudou a equação não homogênea de Carrier

$$u_{tt} - a(x,t,\|u(t)\|_2^2)\Delta u + g(x,t,u_t) = f(x,t), \tag{8}$$

provando a existência e unicidade de soluções globais e decaimento exponencial da energia.

Quando as funções a e g não dependem de x e t, Frota, Cousin e Larkin [20] provaram a existência de soluções globais para o problema misto de Carrier sem restrição no tamanho dos dados iniciais.

No que segue, faremos um breve comentário dos capítulos deste trabalho.

No **Capítulo 1**, intitulado Problemas Não-Locais Via Minimização, utilizaremos Métodos Variacionais Via Minimização para estudar a existência de solução em alguns problemas não-locais.

O primeiro problema não-local que estudaremos é

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u & = f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u & = 0 \qquad\ \ \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma função contínua satisfazendo

$$0 < m_0 \leq M(s) \leq M_\infty < +\infty \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{com } m_0, M_\infty \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

A versão local de (9), isto é, quando $M(t) \equiv 1$, é o problema de Dirichlet clássico cuja solução existe e é única. Em Chipot, Valente e Caffarelli [14] os autores mostraram um resultado para o problema (9) que aparece na seção 1.2 deste trabalho. Podemos citar outros autores que estudaram este problema, como por exemplo, Alves, Corrêa e Ma [4].

Um outro problema que foi estudado neste trabalho, é dado por

$$\begin{cases} -M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u & = & f(u) + \rho(x) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (10), $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua p-periódica e $\rho \in L^2(\Omega)$ as quais satisfazem

$$\int_0^p f(s)ds = 0, \quad \int_\Omega \rho(x)dx = 0. \tag{12}$$

Aqui, adaptaremos para o problema (11) o que foi desenvolvido por Costa [17].

No **Capítulo 2**, denominado O Teorema do Passo da Montanha, demonstraremos, na seção 2.1, este teorema na versão de Ambrosetti e Rabinowitz [6], e nas seções seguintes aplicaremos este teorema para estudar alguns problemas não-locais.

O primeiro problema considerado foi

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não-crescente satisfazendo

$$0 < M_0 \leq M(t) \leq M_\infty, \quad \forall t \geq 0, \tag{14}$$

em que $M_\infty, M_0 > 0$ são constantes e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory cumprindo as seguintes condições:

(f_1) Existem constantes

$$c, d > 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{N+2}{N-2} & \text{se } N \geq 3 \\ 0 \leq \theta < +\infty & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

tais que $|f(x,s)| \leq c|s|^\theta + d$.

(f_2) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|} = 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

(f_3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \forall |s| \geq r$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi.$$

Seguimos algumas idéias desenvolvidas em Alves, Corrêa e Ma [4] para estudar o problema (13). Estes autores mostraram que, com algumas hipóteses adicionais, encontramos a existência de solução positiva para o problema (13).

O outro problema considerado neste capítulo foi o seguinte

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo as condições $(f_1) - (f_2) - (f_3)$ acima mencionadas e $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é função contínua satisfazendo,

(M_1) Existem $m_1, t_1 > 0$ tais que, $M(t) \geq m_1$ se, $0 \leq t \leq t_1$.

(M_2) Existem $m_2, t_2 > 0$ tais que, $0 < M(t) \leq m_2$ se, $t \geq t_2$.

(M_3) $\lim_{t \to +\infty} M(t^2)t = +\infty$.

(M_4) M é não-crescente e $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

A versão generalizada do problema (15) é dada por,

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

cujo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é como antes, $1 < p < N$, f é uma função superlinear com crescimento subcrítico e M é uma função satisfazendo (M_1) - (M_4). Nascimento [26], mostra a existência de solução não-trivial e não-negativa para o problema em questão.

No **Capítulo 3**, intitulado Problemas Singulares Via Método de Galerkin, estudamos existência de solução para alguns problemas elípticos não-locais utilizando o Método de Galerkin.

O primeiro problema considerado é dado por,

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{16}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

(M_0) Existem constantes $t_\infty, m_0 > 0$ tais que, $M(t) \geq m_0 > 0 \; \forall t \geq t_\infty$.

O segundo problema foi o caso sub-linear,

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= u^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{17}$$

cujo $0 < \alpha < 1$, M é não-crescente e contínua, $H(t) = M(t^2)t$ é crescente, $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e $G(t) = t(M(t^2))^{\frac{2}{1-\alpha}}$ é injetora.

Por fim, consideramos o problema,

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^q dx\right)\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $1 < q < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$, $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ é uma dada função e $f \in H^{-1}(\Omega)$. Observe que, quando $q = 2$ temos a equação de Carrier.

Seguimos neste capítulo as idéias desenvolvidas por Corrêa-Menezes [16] onde os autores mostram, também, a existência de solução para o problema (16) considerando a função M descontínua. Vários autores possuem trabalhos relacionados com os problemas (16) - (17) - (18), são eles Alves-Corrêa [3], Corrêa [15] e Chipot-Lovat [13] respectivamente. O problema (18) foi estudado por Chipot-Lovat [13] considerando $q = 2$.

No **Capítulo 4**, denominado Aplicações do Método de Sub e Supersolução, encontramos a existência de solução utilizando o Método de Sub e Supersolução Via Iteração Monotônica.

Consideramos, primeiramente, a seguinte classe de problemas não-locais

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{19}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$ é um domínio limitado e suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 satisfazendo

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} > \lambda_1 \tag{20}$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} < \lambda_1, \tag{21}$$

e a função M satisfaz

(m_0) $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$,

(m_1) M é não-crescente em $[0, +\infty)$.

O problema (19) foi estudado seguindo as idéias desenvolvidas em Corrêa [15] que por sua vez segue as idéias de Alves-Corrêa [3].

Em seguida, estudamos a seguinte classe de sistemas com termos não-locais

$$\begin{cases} -\Delta u &= f_1(x,u)\|v\|_{\alpha_1}^{p_1}, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v &= f_2(x,v)\|u\|_{\alpha_2}^{p_2}, \quad x \in \Omega, \\ \quad u &> 0, v > 0, \qquad\quad x \in \Omega, \\ \quad u &= v = 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{22}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$, é um domínio limitado e suave, $p_i > 0$, $1 \leq \alpha_i \leq \infty$ e f_i, $i = 1, 2$ são positivas, não-decrescentes e Lipschitz contínua respectivamente em $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

O sistema (22) segue o trabalho de Chen-Gao [11] onde os autores estudam a versão estacionária do problema considerado em Deng, Li e Xie [28].

Por fim, a classe de problemas elípticos não-locais,

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega u dx\right)\Delta u &= \lambda f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u &= 0 \qquad\quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{23}$$

em que $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$\text{Existem números positivos } a_0 \leq a_\infty \text{ tais que } a_0 \leq a(t) \leq a_\infty,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

$\lambda > 0$ é um parâmetro, e existe $\theta > 0$ tal que $f : [0, \theta] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo

$$\begin{aligned} f(0) &= f(\theta) = 0, && (25) \\ f'(0) &> 0, && (26) \\ f(t) &> 0, \text{ para todos } t \in (0, \theta). && (27) \end{aligned}$$

Designaremos por λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, o qual satisfaz

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega v^2 dx}. \tag{28}$$

O problema (22) é um caso particular do problema abordado pelos autores em [12].

No **Apêndice A** vamos mostrar um resultado da Análise Funcional, que será de grande ajuda no estudo dos problemas não-locais abordados nos capítulos 1 e 2.

No **Apêndice B** vamos mostrar que o operador T, que surge, também, nos capítulos 1 e 2, é um operador compacto.

Por fim, no **Apêndice C** estaremos enunciando os principais resultados utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Problemas Não-Locais Via Minimização

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns resultados básicos de minimização, tal como demonstrar algumas versões do Teorema de Deformação, e utilizá-los para obter soluções fracas para uma classe de Problemas Elípticos Não-Locais.

1.1 Resultados Básicos de Minimização

Nesta seção, apresentaremos o conceito de função semicontinua inferiormente e demonstraremos um teorema que será de grande importância na obtenção de existência de solução para o problema de Kirchhoff M-Linear,

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma função dada.

Comecemos com a definição de função semicontínua inferiormente.

Definição 1.1 *Seja X um espaço topológico. Diz-se que uma função $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (s.c.i.) se $\phi^{-1}((a, +\infty))$ é aberto em X, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. (Se X for um espaço métrico, então $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é s.c.i. se, e somente se, $\phi(u) \leq \liminf \phi(u_n)$ para qualquer $u \in X$ e $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \to u$).*

Teorema 1.1 *Seja X um espaço topológico compacto e seja $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional s.c.i.. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que se pode escrever $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (-n, +\infty)$. Sendo ϕ s.c.i. e X um espaço topológico, tem-se

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \phi^{-1}((-n, +\infty))$$

onde $\phi^{-1}((-n, +\infty))$ é aberto em X. Como X é compacto, segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \phi^{-1}((-n, +\infty)).$$

Logo, $\phi(u) > -n_0 \; \forall u \in X$, de sorte que ϕ é limitado inferiormente.

Seja

$$c = \inf_{u \in X} \phi(u) > -\infty$$

e suponha, por contradição, que $\phi(u) > c$ para todo $u \in X$, ou seja, $\forall u \in X, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(u) > c + \dfrac{1}{n}$. Assim,

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \phi^{-1}((c + \frac{1}{n}, +\infty)).$$

Como X é compacto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_1} \phi^{-1}((c + \frac{1}{n}, +\infty)),$$

isto é, $\phi(u) > c + \dfrac{1}{n_1} \quad \forall u \in X$.

Sendo

$$c = \inf_{u \in X} \phi(u)$$

tem-se que $c \geq c + \dfrac{1}{n_1}$, o que é um absurdo.

Portanto, o ínfimo c é atingido, ou seja, existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

■

Definição 1.2 *Seja X um espaço topológico. Diz-se que $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua inferiormente (fracamente s.c.i.) se, ϕ for s.c.i. considerando X com sua topologia fraca.*

Teorema 1.2 *Seja X um espaço de Hilbert e suponha que o funcional $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja:*

(i) fracamente s.c.i.,

(ii) coercivo, isto é, $\phi(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

Demonstração: Sendo ϕ coercivo, escolhemos $R > 0$ tal que $\phi(u) \geq \phi(0)$, $\forall u \in X$ com $\|u\| > R$. Sendo X um espaço de Hilbert, tem-se que X é uniformemente convexo, o que implica pelo Teorema de Milman-Pettis [7], que X é um espaço reflexivo.

Usando o Teorema de Kakutani [7], obtemos que $\overline{B}_R(0)$ é fracamente compacta.

Ora, sendo ϕ fracamente s.c.i. e $\overline{B}_R(0)$ fracamente compacta, tem-se que ϕ restrito a $\overline{B}_R(0) \subset X$ é fracamente s.c.i..

Pelo Teorema 1.1, ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in \overline{B}_R(0)} \phi(u).$$

Como $0 \in \overline{B}_R(0)$ seque-se que $\phi(u_0) \leq \phi(0)$, o que implica $\phi(u_0) \leq \phi(u)$ $\forall u \in X$ com $\|u\| > R$.

Assim, $\phi(u_0) \leq \phi(u)$, $\forall u \in X$. Ou seja, ϕ é limitado inferiormente em X e

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

■

Exemplo 1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ um domínio limitado e seja $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as chamadas condições de Carathéodory (Ver Apêndice C). Sob uma condição de crescimento adequada, a saber*

$$\textit{Existem} \quad a, b > 0 \ \textit{e} \ \begin{cases} 0 \leq \sigma < 2N/(N-2) & \textit{se } N \geq 3, \\ 0 \leq \sigma < +\infty & \textit{se } N = 1, 2, \end{cases}$$

tais que,

$$|F(x,s)| \leq a|s|^{\sigma} + b, \ \forall x \in \Omega \ e \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

então o funcional $\Psi(u) = \displaystyle\int_{\Omega} F(x,u)dx$ *está bem definido e é fracamente contínuo no espaço de Sobolev* $H_0^1(\Omega)$.

Primeiramente vamos verificar que o funcional Ψ está bem definido.

De fato, para $u \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} F(x,u)dx \leq \int_{\Omega} |F(x,u)|dx \leq \int_{\Omega} (a|u|^{\sigma} + b)dx.$$

Logo, sendo Ω um domínio limitado e pela imersão compacta de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma}(\Omega), \ 0 \leq \sigma < \frac{2N}{N-2}, \ N \geq 3$$

obtemos

$$\Psi(u) \leq a\|u\|_{\sigma}^{\sigma} + b|\Omega| < +\infty$$

mostrando que Ψ está bem definido.

Consideraremos $N \geq 3$. Os casos $N = 1, 2$ seguem-se de maneira análoga.

Agora, mostremos que Ψ é fracamente contínua.

Com efeito, pela imersão compacta de Sobolev, dados $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega)$$

tem-se,

$$u_n \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}, \ N \geq 3.$$

Assim, seja $p \geq \sigma \Rightarrow \dfrac{p}{\sigma} \geq 1$. Com isso, temos a imersão contínua

$$L^{p/\sigma}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Pela continuidade do operador de Nemytskii [19], seque-se

$$F(.,u_n(.)) \to F(.,u(.)) \quad \text{em } L^{p/\sigma}(\Omega)$$

o que implica,

$$F(.,u_n(.)) \to F(.,u(.)) \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Com isso,

$$|\Psi(u_n) - \Psi(u)| \leq \int_\Omega |F(x, u_n(x)) - F(x, u(x))|dx$$

e daí

$$|\Psi(u_n) - \Psi(u)| \leq |\Omega| \|F(., u_n(.)) - F(., u(.))\|_1 \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

logo,

$$\Psi(u_n) \to \Psi(u) \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Portanto, Ψ é fracamente contínuo. ■

1.2 O Problema de Kirchhoff M-linear

Nesta seção, vamos mostrar a existência de solução fraca para o problema de Kirchhoff M-linear

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$0 < m_0 \leq M(s) \leq M_\infty \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

em que $m_0, M_\infty \in \mathbb{R}$ são constantes e $f \in L^2(\Omega)$.

Nesta seção, seguiremos as idéias desenvolvidas por Chipot, Valente e Caffarelli [14].

Consideremos o funcional energia $E : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - \Psi(u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{1.4}$$

onde,

$$\widehat{M}(s) = \int_0^s M(\xi)d\xi \quad \text{e} \quad \Psi(u) = \int_\Omega f(x)udx.$$

Proposição 1.1 *Seja $E : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por (1.4). Então E está bem definido e, além disso, $E \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com*

$$E'(u).v = M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x)vdx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Demonstração: Observemos, inicialmente, que os termos que compõem o funcional E estão todos bem definidos e o funcional Ψ é linear, contínuo e diferenciável a Fréchet com

$$\Psi'(u)v = \int_\Omega f(x)v dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Com isso, basta mostrarmos que o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\ell(u)),$$

onde $\ell(u) = \|u\|^2$para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Mas isso ocorre, pois a composta de funções diferenciáveis é diferenciável. Logo, sendo ℓ e $\widehat{M}$ diferenciáveis com

$$\ell'(u)v = 2\langle u, v\rangle = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\widehat{M}'(s) = M(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

obtemos,

$$\varphi'(u)v = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Portanto, o funcional E está bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com derivada dada por (1.5). ■

Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (1.2) se satisfizer,

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x)v dx = 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução de (1.2) se, e somente se, u é um ponto crítico de E.

Teorema 1.3 *O funcional E definido em* (1.4) *possui um mínimo global em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que o funcional E é coercivo.

De fato, de (1.3) tem-se

$$\widehat{M}(s) = \int_0^s M(\xi)d\xi \geq \int_0^s m_0 d\xi = m_0 s \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\widehat{M}(\|u\|^2) \geq m_0\|u\|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, das desigualdades de Hölder e de Poincaré obtemos

$$\int_\Omega f(x)udx \leq \left|\int_\Omega f(x)udx\right| \leq \int_\Omega |f(x)||u|dx \leq \|f\|_2\|u\|_2 \leq c\|f\|_2\|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

e, portanto,

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2dx\right) - \int_\Omega f(x)udx \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - c\|f\|_2\|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$E(u) \geq \|u\|\left(\frac{1}{2}m_0\|u\| - c\|f\|_2\right) \to +\infty \quad \text{quando} \quad \|u\| \to +\infty,$$

mostrando que E é coercivo e, consequentemente, limitado inferiormente.

Mostraremos que E é fracamente s.c.i..

Sejam $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Da semicontinuidade inferior da norma, deduzimos que,

$$\liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 \geq \|u\|^2. \tag{1.7}$$

Assim,

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) = \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \int_\Omega f(x)u_ndx\right).$$

Como as funções acima são integrais limitadas e contínuas tem-se

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\|u_n\|^2} M(\xi)d\xi - \int_\Omega f(x)u_ndx\right),$$

e obtemos,

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) = \left(\frac{1}{2}\int_0^{\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|^2} M(\xi)d\xi - \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(x)u_ndx\right).$$

Daí, segue-se

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) = \left(\frac{1}{2}\int_0^{\liminf\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|^2} M(\xi)d\xi - \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(x)u_ndx\right).$$

Logo, pelo Teorema de Lebesque [18] e pela desigualdade dada por (1.7), tem-se

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) \geq \left(\frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} M(\xi)d\xi - \int_\Omega f(x)udx\right),$$

ou seja,

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) \geq E(u)$$

mostrando que o funcional E é fracamente s.c.i. em $H_0^1(\Omega)$.

Portanto, pelo Teorema 1.2, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$E(u_0) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} E(u).$$

■

Observação 1.1 *Quando trabalhamos com o problema local*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x) \quad em\ \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

o funcional energia associado $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dado por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f(x)u dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

$f \in L^2(\Omega)$, *o qual possui um único mínimo global. No entanto, como veremos mais adiante, o funcional* E *pode ter vários mínimos.*

Teorema 1.4 *O conjunto das soluções fracas de* (1.2) *está em correspondência biunívoca com o conjunto das soluções de*

$$[M(\mu)]^2.\mu = \|\varphi\|^2 \tag{1.9}$$

em que φ *é a única solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi &= f(x) \quad em\ \Omega, \\ \quad \varphi &= 0 \qquad em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de (1.2), ou seja,

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x) v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

a qual pode ser reescrita como

$$\int_\Omega \nabla(M(\|u\|^2)u)\nabla v dx - \int_\Omega f(x) v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ a única solução fraca de (1.10), então

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla v dx - \int_\Omega f(x) v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por unicidade de solução fraca de (1.10) tem-se

$$M(\|u\|^2)u = \varphi \Rightarrow M(\|u\|^2)\|u\| = \|\varphi\| \Rightarrow [M(\|u\|^2)]^2\|u\|^2 = \|\varphi\|^2$$

e daí, $\|u\|^2$ é solução de (1.9).

Reciprocamente, seja μ uma solução de (1.9) e designemos por u_μ a solução do problema

$$\begin{cases} -M(\mu)\Delta u_\mu & = f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u_\mu & = 0 \quad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

que existe e é única pois, $M(\mu) \neq 0$.

Novamente, por unicidade de solução fraca de (1.10), tem-se

$$M(\mu)u_\mu = \varphi \Rightarrow M(\mu)\|u_\mu\| = \|\varphi\| \Rightarrow [M(\mu)]^2\|u_\mu\|^2 = \|\varphi\|^2 = [M(\mu)]^2\mu.$$

Logo, $\|u_\mu\|^2 = \mu$ é solução de (1.2).

Consequentemente,

$$\begin{cases} -M(\|u_\mu\|^2)\Delta u_\mu & = f(x) \quad \text{em } \Omega \\ u_\mu & = 0 \quad\quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

o que conclui a demonstração. ∎

Observação 1.2 *Pelo Teorema* 1.4 *as soluções fracas de* (1.2) *(pontos estacionários de E) são determinados pelas soluções da equação*

$$M(\mu) = \sqrt{\frac{\|\varphi\|^2}{\mu}} = \frac{\|\varphi\|}{\sqrt{\mu}} \tag{1.11}$$

de modo que podemos escolher M tal que (1.11) *possa ter uma ou mais soluções.*

Exemplo 2 *Considerando $M(t) = e^{-\mu}$ para $\mu \geq 0$, o problema* (1.2) *possui o mesmo número de soluções da equação*

$$e^{-\mu}\sqrt{\mu} = \|\varphi\|.$$

Observemos que

$$g(\mu) = e^{-\mu}\sqrt{\mu}$$

satisfaz

$$g(0) = 0 \quad e \quad \lim_{\mu\to+\infty} g(\mu) = 0.$$

Notando que $g'(\mu) = -e^{-\mu}.\sqrt{\mu} + \frac{1}{2}e^{-\mu}.\mu^{-1/2}$ e que $g'(\mu) = 0$ se, e somente se $\mu = \frac{1}{2}$, segue-se que g atinge seu ponto de máximo em $\mu = \frac{1}{2}$ e $g(1/2) = \dfrac{1}{e^{1/2}.\sqrt{2}}$.

Portanto,

(i) se $\|\varphi\| > \dfrac{1}{e^{1/2}.\sqrt{2}}$ *, o problema* (1.2) *não possui solução;*

(ii) se $\|\varphi\| = \dfrac{1}{e^{1/2}.\sqrt{2}}$ *, o problema* (1.2) *possui somente uma solução;*

(iii) $\|\varphi\| < \dfrac{1}{e^{1/2}.\sqrt{2}}$ *, o problema* (1.2) *possui exatamente duas soluções.*

Como podemos observar, a presença do termo $M(\|u\|^2)$ *produz grandes diferenças entre o problema não-local* (1.2) *e o problema local* (1.8)*.*

Observação 1.3 *Se* $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0, +\infty)$ *for contínua,*

$$t \longmapsto M(t)t^{\frac{1}{2}}$$

for crescente e

$$\lim_{t\to+\infty} M(t)t^{\frac{1}{2}} = +\infty,$$

segue-se, em vista de

$$\lim_{t\to 0^+} M(t)t^{\frac{1}{2}} = 0$$

e do Teorema do Valor Intermediário, que o problema (1.2) *possui uma única solução.*

Teorema 1.5 *(Comparação de Energias) Sejam* u_1 *e* u_2 *duas soluções de* (1.2) *correspondentes às soluções* μ_1 *e* μ_2 *da equação* (1.9)*. Suponhamos que*

$$M(\mu) > \frac{\|\varphi\|}{\sqrt{\mu}} \quad \forall \mu \in (\mu_1, \mu_2) \tag{1.12}$$

(respectivamente, $M(\mu) < \dfrac{\|\varphi\|}{\sqrt{\mu}}$*,* $M(\mu) = \dfrac{\|\varphi\|}{\sqrt{\mu}}$*).*

Então, $E(u_2) > E(u_1)$ *(respectivamente,* $E(u_2) < E(u_1)$*,* $E(u_2) = E(u_1)$*).*

Demonstração: Seja u_j a solução única de

$$\begin{cases} -M(\|\mu_j\|^2)\Delta u_j &= f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u_j &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, $\|u_j\|^2 = \mu_j$ e $u_j = \dfrac{\varphi}{M(\mu_j)}$, $j = 1, 2$.

Assim,

$$E(u_j) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_j\|^2) - \int_\Omega f(x)u_j dx = \frac{1}{2}\int_0^{\|u_j\|^2} M(\xi)d\xi - \int_\Omega f(x)\frac{\varphi}{M(\mu_j)}dx$$

o que implica,

$$E(u_j) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu_j} M(\xi)d\xi - \int_\Omega f(x)\frac{\varphi}{M(\mu_j)}dx.$$

Sendo φ a solução única de (1.10), tem-se

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega f(x)\varphi dx.$$

Logo,

$$E(u_j) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu_j} M(\xi)d\xi - \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_j)}.$$

Daí,

$$E(u_1) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu_1} M(\xi)d\xi - \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_1)},$$

e

$$E(u_2) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu_2} M(\xi)d\xi - \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_2)}.$$

Subtraindo $E(u_1)$ de $E(u_2)$ obtemos,

$$E(u_2) - E(u_1) = \frac{1}{2}\int_0^{\mu_2} M(\xi)d\xi - \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_2)} - \frac{1}{2}\int_0^{\mu_1} M(\xi)d\xi + \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_1)},$$

o que implica,

$$E(u_2) - E(u_1) = \frac{1}{2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\xi)d\xi + \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_1)} - \frac{\|\varphi\|^2}{M(\mu_2)}.$$

Como u_1 e u_2 são soluções correspondentes a μ_1 e μ_2, respectivamente, tem-se

$$(*) \qquad [M(\mu_1)]^2\mu_1 = \|\varphi\|^2 = [M(\mu_2)]^2\mu_2.$$

Daí,

$$E(u_2) - E(u_1) = \frac{1}{2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\xi)d\xi + M(\mu_1)\mu_1 - M(\mu_2)\mu_2.$$

Consideremos, inicialmente, o caso em que

$$M(\mu) > \frac{\|\varphi\|}{\sqrt{\mu}} \quad \forall \mu \in (\mu_1, \mu_2).$$

Assim,

$$E(u_2) - E(u_1) > \frac{1}{2}\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\|\varphi\|}{\sqrt{\xi}}d\xi + M(\mu_1)\mu_1 - M(\mu_2)\mu_2.$$

e daí,

$$E(u_2) - E(u_1) > \|\varphi\|\sqrt{\mu_2} - \|\varphi\|\sqrt{\mu_1} + M(\mu_1)\mu_1 - M(\mu_2)\mu_2.$$

Observe que, por $(*)$ tem-se $M(\mu_1)\mu_1 = \|\varphi\|\sqrt{\mu_1}$ e $M(\mu_2)\mu_2 = \|\varphi\|\sqrt{\mu_2}$.

Logo, $E(u_2) - E(u_1) > M(\mu_2)\mu_2 - M(\mu_1)\mu_1 + M(\mu_1)\mu_1 - M(\mu_2)\mu_2 = 0$.

Portanto, $E(u_2) > E(u_1)$.

Os outros casos são feitos de maneira análoga. $\blacksquare$

Observação 1.4 *Note que o funcional $E(u)$ não é convexo e, pelo Teorema 1.4, pode possuir mais de um mínimo global.*

Aplicação 1.1 *A seguir, faremos uma aplicação usando argumentos semelhantes àqueles utilizados no estudo do problema M-Linear. Estudaremos o problema*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= u^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

onde $1 < \alpha < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < \alpha < +\infty$ se $N = 1, 2$. Isto será feito por comparação com o problema semilinear,

$$\begin{cases} -\Delta w &= w^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ w &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

o qual, como é bem conhecido, para os valores de α descritos acima, possui solução positiva.

Mostra-se então, que:

Teorema 1.6 *Suponhamos que a função M satisfaça a condição (1.3). Então o problema (1.13) possui pelo menos o mesmo número de soluções da equação*

$$M(t) = \|w\|^{1-\alpha} t^{\frac{\alpha-1}{2}} \quad \text{(com relação a } t > 0\text{)}, \tag{1.15}$$

onde w é solução positiva do problema (1.14). Além disso, se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0, \tag{1.16}$$

então, o problema (1.13) possui pelo menos uma solução positiva.

Demonstração: Seja $t > 0$ uma solução da equação (1.15). Escrevendo

$$\gamma = t^{\frac{1}{2}} \|w\|^{-1},$$

vê-se que

$$\|\gamma w\|^2 = \left\| \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\|w\|} w \right\|^2 = (t^{\frac{1}{2}})^2 \left\| \frac{w}{\|w\|} \right\| = t$$

logo,

$$M(\|\gamma w\|^2) = M(t) = \|w\|^{1-\alpha} t^{\frac{\alpha-1}{2}} = (t^{\frac{1}{2}} \|w\|^{-1})^{\alpha-1}$$

ou seja,

$$M(\|\gamma w\|^2) = M(t) = \gamma^{\alpha-1}.$$

Portanto, $u = \gamma w > 0$ é uma solução de (1.13) pois

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = -M(\|\gamma w\|^2)\Delta(\gamma w) = \gamma^{\alpha-1}\gamma(-\Delta w)$$

o que implica,

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = \gamma^{\alpha} w^{\alpha} = u^{\alpha}.$$

Agora, observe que, de (1.3), tem-se

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{M(t)}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}} = +\infty.$$

Em virtude da continuidade de M, a equação (1.15) possui uma solução, qualquer que seja a solução w de (1.14). Então, o problema (1.13) possui uma solução, o que conclui a demonstração do teorema. ■

1.3 Teorema da Deformação e um Princípio de Mínimo

Nesta seção demonstraremos duas versões do Teorema de Deformação (ver Costa [17]) que serão fundamentais na demonstração de um princípio de mínimo importante.

No que segue, designamos por X um espaço de Banach, $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e por ϕ^c o conjunto de todos os níveis menores ou iguais a c, isto é,

$$\phi^c = \{u \in X; \phi(u) \leq c\}.$$

Definição 1.3 *Sejam $U \subset X$ e $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$. O vetor $v \in X$ é dito vetor pseudo-gradiente (p.g.) para ϕ em $u \in U$ se*

(i) $\|v\| \leq 2\|\phi'(u)\|$

(ii) $\langle \phi'(u), v\rangle \geq \|\phi'(u)\|^2$.

Definição 1.4 *Um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \longrightarrow X$, onde*

$$Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\},$$

satisfazendo as condições

(i) $\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|$

(ii) $\langle \phi'(u), V(u)\rangle \geq \|\phi'(u)\|^2$

para todo $u \in Y$.

Observação 1.5 *Combinação convexa de vetores p.g. para* ϕ *em* u *é também um vetor p.g. para* ϕ *em* u.

Com efeito, sejam $(v_j)_{j\in J}$ uma família de vetores p.g. para ϕ em u e $(\alpha_j)_{j\in J}$ uma partição de unidade em X. Consideremos

$$w = \sum_{j\in J} \alpha_j v_j.$$

Note que,

$$\|v_j\| \leq 2\|\phi'(u)\| \quad e \quad \langle \phi'(u), v_j\rangle \geq \|\phi'(u)\|^2, \quad \forall j \in J.$$

Daí,

$$\|w\| = \left\|\sum_{j\in J} \alpha_j v_j\right\| \leq \sum_{j\in J} \|\alpha_j v_j\| = \sum_{j\in J} \alpha_j \|v_j\|$$

o que implica,

$$\|w\| \leq \sum_{j\in J} \alpha_j (2\|\phi'(u)\|) = 2\|\phi'(u)\| \sum_{j\in J} \alpha_j$$

assim,

$$\|w\| \leq 2\|\phi'(u)\|$$

e

$$\langle \phi'(u), w\rangle = \left\langle \phi'(u), \sum_{j\in J} \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j\in J} \alpha_j (\langle \phi'(u), v_j\rangle) \geq \sum_{j\in J} (\alpha_j \|\phi'(u)\|^2).$$

Logo,

$$\langle \phi'(u), w\rangle \geq \sum_{j\in J} (\alpha_j \|\phi'(u)\|^2) = \|\phi'(u)\|^2 \sum_{j\in J} \alpha_j = \|\phi'(u)\|^2.$$

Portanto, w é um vetor p.g. para ϕ em u.

Lema 1.1 *Todo* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *possui um campo pseudo-gradiente.*

Demonstração: Seja $\tilde{u} \in Y$, logo $\phi'(\tilde{u}) \neq 0$. Então, existe $w = w(\tilde{u}) \in X$ com $\|w\| = 1$ e

$$(*) \qquad \langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\|.$$

Com efeito, desde que $\phi'(\tilde{u})$ é um funcional linear contínuo, tem-se

$$\|\phi'(\tilde{u})\| = \sup_{\|w\|=1} \langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle. \tag{1.17}$$

Daí, como

$$\|\phi'(\tilde{u})\| > \frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\|,$$

por (1.17) temos que, existe $(w_n) \subset X$ com $\|w_n\| = 1$ tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w_n \rangle \to \|\phi'(\tilde{u})\| \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Assim, existe $w = w_n$ para n suficientemente grande tal que

$$\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle > \frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\|.$$

Agora defina a seguinte função,

$$\begin{array}{rcl} v : Y & \longrightarrow & X \\ \widetilde{u} & \longmapsto & v(\tilde{u}) = \dfrac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|w. \end{array}$$

Assim,

$$\|v(\tilde{u})\| = \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\| < 2\|\phi'(\tilde{u})\|$$

e

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \langle \phi'(\tilde{u}), \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|w \rangle,$$

de onde tem-se

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle = \frac{3}{2}\|\phi'(\tilde{u})\|\langle \phi'(\tilde{u}), w \rangle.$$

Agora, por $(*)$ obtemos

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \frac{3}{2}\frac{2}{3}\|\phi'(\tilde{u})\|\|\phi'(\tilde{u})\|$$

e, consequentemente,

$$\langle \phi'(\tilde{u}), v(\tilde{u}) \rangle > \|\phi'(\tilde{u})\|^2.$$

Desde que ϕ' é contínua, existe uma vizinhança aberta de $\tilde{u}$ em Y que iremos denotar por $V_{\tilde{u}}$ tal que para cada $u \in V_{\tilde{u}}$ tem-se:

$$\|v(\tilde{u})\| < 2\|\phi'(u)\| \tag{1.18}$$

e

$$\langle \phi'(u), v(\tilde{u}) \rangle > \|\phi'(u)\|^2. \tag{1.19}$$

Note que a família $\{V_{\tilde{u}}; \tilde{u} \in Y\}$ é uma cobertura em Y. Além disso, $Y \subset X$ é metrizável, portanto paracompacto, logo existe um refinamento localmente finito $\{V_{\tilde{u}_j}\}_{j\in J}$. Desta forma, existe uma partição de unidade contínua e localmente lipschitziana $\{\phi_j\}_{j\in J}$ subordinada a $\{V_{\tilde{u}_j}\}_{j\in J}$ tal que $0 \leq \phi_j \leq 1$ e

$$\sum_{j\in J} \phi_j = 1 \quad \text{em } Y.$$

Considere

$$V(u) = \sum_{j\in J} \phi_j(u) v_j \quad \text{tal que} \quad v_j = v(\tilde{u}_j), \quad \forall u \in Y.$$

Fixado $u \in Y$, existe $I \subset J$ finito tal que

$$V(z) = \sum_{j\in I} \phi_j(z) v_j \quad \forall z \in B_\delta(u),$$

mostrando que V é localmente lipschitziana, pois V é soma finita de funções localmente lipschitziana $\phi_j(z)v_j$ em $B_\delta(u)$.

Para fixar a idéia, vamos supor $I = \{1, 2, ..., n_0\}$ tal que $n_0 = n_0(u)$ e $\delta = \delta(u)$, portanto,

$$V(z) = \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(z) v_j \quad \forall z \in B_\delta(u).$$

Em particular,

$$V(u) = \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u) v_j$$

e daí

$$\|V(u)\| \leq \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u) \|v_j\|.$$

Usando (1.18), obtém-se

$$\|V(u)\| \leq \sum_{j=1}^{n_0} 2\phi_j(u) \|\phi'(u)\|$$

o que implica,

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\| \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u),$$

isto é,

$$\|V(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|.$$

Além disso,

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \left\langle \phi'(u), \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u) v_j \right\rangle$$

logo,

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle = \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u) \langle \phi'(u), v_j \rangle$$

de onde obtém-se, por (1.19),

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u) \|\phi'(u)\|^2,$$

ou seja,

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2 \sum_{j=1}^{n_0} \phi_j(u).$$

Assim,

$$\langle \phi'(u), V(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|^2,$$

mostrando que existe um campo pseudo-gradiente para ϕ. ■

Observação 1.6 *Quando X é um espaço de Hilbert e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tem uma derivada localmente lipschitziana $\phi' : X \longrightarrow X^*$, então o gradiente de ϕ (quando restrito a Y), $\nabla\phi : Y \longrightarrow X$ é claramente um campo pseudo-gradiente para ϕ.*

Com efeito, como para todo $u \in X$, $\nabla\phi(u)$ satisfaz

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \langle \nabla\phi(u), h \rangle \quad \forall h \in X$$

obtemos,

$$\|\nabla\phi(u)\| = \|\phi'(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|$$

e

$$\langle \phi'(u), \nabla\phi(u) \rangle = \langle \nabla\phi(u), \nabla\phi(u) \rangle = \|\nabla\phi(u)\|^2 = \|\phi'(u)\|^2, \quad \forall u \in X.$$

Logo, $\nabla\phi(u) : Y \longrightarrow X$ é um campo pseudo-gradiente para ϕ em Y. ■

Definição 1.5 *Seja* $S \subset X$ *e* $\delta > 0$*, designamos por* S_δ *a vizinhança fechada de* S *definida por*

$$S_\delta = \{u \in X; d(u, S) \leq \delta\}.$$

O seguinte resultado é uma versão quantitativa do Teorema de Deformação sem uma condição de compacidade sobre ϕ.

Teorema 1.7 *Seja* $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional de classe* $C^1(X, \mathbb{R})$*. Suponhamos que* $S \subset X$*,* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\epsilon, \delta > 0$ *são tais que*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad \textit{para todo} \quad u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{1.20}$$

Então existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ *tal que, para todo* $u \in X$ *e* $t \in [0,1]$*, tem-se:*

(i) $\eta(0, u) = u$*,*

(ii) $\eta(t, u) = u \quad$ *se* $\quad u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$*,*

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$*,*

(iv) $\eta(t, .) : X \longrightarrow X \quad$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Definamos

$$A = \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_\delta$$

e

$$Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\},$$

de sorte que $B \subset A \subset Y$.

Além disso, considere $V : Y \longrightarrow X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e definamos uma função localmente lipschitziana $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$p(u) = \frac{dist(u, A^c)}{dist(u, A^c) + dist(u, B)}.$$

Observe que, $0 \leq p \leq 1$ e

$$p(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in B, \\ 0 & \text{se } u \in X \setminus A. \end{cases}$$

Agora, considere a seguinte aplicação localmente lipschitziana

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto f(u) = -p(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\|f(u)\| = \left\| -p(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|} \right\| = \|p(u)\| \leq 1, \quad \forall u \in X.$$

Segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) &= f(w), \\ w(0) &= u, \end{cases}$$

tem solução única (Ver dos Santos [27]) a qual denotaremos por $w(t,u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$.

Seja $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ definida por $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$. Então,

(i) $\eta(0,u) = w(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u$, se $u \notin A = \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$;

De fato, considere $u \notin A$ e seja $w_1(t,u) = u \ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Note que

$$w_1'(t,u) = 0 = f(w_1(t,u))$$

o que implica

$$\begin{cases} w_1'(t) &= f(w_1(t)), \\ w_1(0) &= u. \end{cases}$$

Assim, pelo teorema de existência e unicidade, tem-se

$$w_1(t,u) = w(t,u) = u \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$w(\delta t, u) = u \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

logo,

$$\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u \quad \forall\ t \in [0,1].$$

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$;

De fato, note que, para $t \geq 0$, temos:

$$\|w(t,u) - u\| = \|w(t,u) - w(0,u)\| = \left\| \int_0^t w'(\tau,u)d\tau \right\| = \left\| \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau \right\|$$

o que implica,

$$\|w(t,u)-u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\|d\tau \leq \int_0^t d\tau = t,$$

logo,

$$\|w(t,u)-u\| \leq t \leq \delta \quad \forall\, t \in [0,\delta],$$

portanto, se $u \in S$ tem-se

$$dist(w(t,u),S) \leq \delta,$$

o que implica,

$$w(t,u) \in S_\delta \quad \forall u \in S,$$

isto é,

$$w(t,S) \subset S_\delta \quad \forall\, t \in [0,\delta]$$

de onde concluímos

$$\eta(t,S) \subset S_\delta \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{1.21}$$

Por outro lado, para cada $u \in X$ fixado, a função

$$\begin{array}{rcl} \phi : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi(w(t,u)) \end{array}$$

é decrescente pois,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi'(w(t,u))w'(t,u) = \phi'(w(t,u))f(w(t,u)),$$

e usando a definição da função f,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi'(w(t,u))\left(-p(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\right),$$

o que implica,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -p(w(t,u))\left(\phi'(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}\right)$$

logo, pela Definição 1.4 tem-se

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq \left(-p(w(t,u))\frac{\|\phi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}\right), \tag{1.22}$$

portanto,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0,$$

mostrando que $\phi(w(t,u))$ é decrescente.

Com isso, seja $u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S$ e vamos mostrar as seguintes afirmações:

(a) Se $\phi(w(\tilde{t},u)) < c-\epsilon$ para algum $\tilde{t} \in [0,\delta)$ então,

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\tilde{t},u)) < c-\epsilon,$$

de onde podemos concluir que,

$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon}.$$

Portanto, disto e de (1.21) obtemos,

$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

(b) Neste caso, supondo $w(t,u) \in B = \phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_\delta \quad \forall\, t \in [0,\delta]$ de sorte que, usando (1.22), a Definição 1.4 e o fato que $p \equiv 1$ em B, obtém-se

$$\phi(w(\delta,u)) - \phi(w(0,u)) = \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t,u))dt \leq \int_0^\delta \left(-p(w(t,u))\frac{\|\phi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}\right)dt$$

o que implica,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(u) - \int_0^\delta \frac{1}{2}\|\phi'(w(t,u))\|dt \leq c+\epsilon - \frac{1}{2}\frac{4\epsilon}{\delta}\delta = c-\epsilon,$$

onde usamos (1.20) na última desigualdade.

Portanto, em qualquer dos casos (a) ou (b), mostramos que

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta \quad \text{se } u \in \phi^{c+\epsilon} \cap S.$$

Por último mostremos (iv), isto é, $\eta(t,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo.

Para isto, definamos as seguintes funções

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto g(u) = \eta(t,u) = w(\delta t, u), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto h(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Observe o seguinte,

$$(g \circ h)(u) = g(h(u)) = w(\delta t, h(u)) = w(\delta t, w(-\delta t, u))$$

usando propriedade de fluxo (Ver dos Santos [27]), obtemos,

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u.$$

Com um raciocínio análogo encontramos,

$$(h \circ g)(u) = w(0, u) = u$$

de onde segue que η é inversível.

Além disso, $\eta(t, .) = w(\delta t, .)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, .)$. Desde que $w(-\delta t, .)$ também é contínua, $\eta(t, .) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. ■

Definição 1.6 *Um funcional $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(X; \mathbb{R})$, é dito verificar a condição de Palais-Smale, denotada por (PS), se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que, $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi'(u_n) \to 0$, possui uma subsequência que converge forte em X.*

Como consequência do Teorema 1.7, obtemos a seguinte versão do Teorema da Deformação.

Teorema 1.8 *Suponha que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale $\{(PS)\}$. Se $c \in \mathbb{R}$ não for um valor crítico de ϕ então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que (para qualquer $u \in X$ e $t \in [0, 1]$):*

(i) $\eta(0, u) = u$,

(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$,

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$,

(iv) $\eta(t, .) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Como $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico para ϕ, devem existir constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$u \in \phi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \Rightarrow \|\phi'(u)\| \geq \beta,$$

pois do contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$\tilde{u} \in \phi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \text{ com } \|\phi'(\tilde{u})\| < \beta.$$

Considerando $\alpha = \dfrac{1}{2n}$ e $\beta = \dfrac{1}{n}$, para cada $n \geq 1$ tem-se

$$u_n \in X \text{ com } u_n \in \phi^{-1}\left([c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}]\right) \text{ e } \|\phi'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Assim, passando ao limite quando $n \to +\infty$ obtemos

$$\phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \to 0.$$

Da condição Palais-Smale, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \to u \quad \text{para algum } u \in X.$$

Desde que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ tem-se,

$$\phi(u_{n_k}) \to \phi(u) \quad \text{e} \quad \phi'(u_{n_k}) \to \phi'(u).$$

Portanto, pela unicidade dos limites obtemos

$$\phi(u) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ϕ, o que contradiz a hipótese.

Daí, usando o Teorema 1.7 com $S = X$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \dfrac{4\epsilon}{\beta}$ concluímos a demonstração do teorema. ■

Torna-se claro na demonstração acima que o Teorema 1.8 é válido sob uma condição mais fraca de compacidade, a saber, a condição $\{(PS)_c\}$ que definiremos a seguir.

Definição 1.7 *Seja $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X; \mathbb{R})$, e $c \in \mathbb{R}$. O funcional ϕ verifica a condição de Palais-Smale no nível c ou $(PS)_c$, se dada uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi'(u_n) \to 0$, então c é um valor crítico de ϕ.*

Esta condição é útil em certas situações onde ϕ não é coercivo, como veremos no próximo resultado.

Teorema 1.9 *Seja X um espaço de Banach e seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se,*

(i) ϕ é limitado inferiormente com

$$c = \inf_{u \in X} \phi(u),$$

(ii) ϕ satisfaz $(PS)_c$,

então, existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

(Logo, c é um valor crítico de ϕ).

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que c não seja um valor crítico de ϕ. Então, o Teorema 1.8 implica a existência de $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que

$$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon,}$$

daí,

$$\phi^{c+\epsilon} \neq \varnothing \Rightarrow \phi^{c-\epsilon} \neq \varnothing,$$

o que é um absurdo pois,

$$\phi^{c-\epsilon} = \varnothing, \text{ já que } c = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

Portanto, c é um valor crítico de ϕ. ■

Como na próxima seção estaremos estudando um problema de Neumann, iremos trabalhar no espaço $H^1(\Omega)$ o qual será decomposto da seguinte maneira: Como toda função constante pertence a $H^1(\Omega)$, designaremos por $X_1 = \langle 1 \rangle$ o espaço de tais funções, o qual pode ser identificado com $\mathbb{R}$. Designaremos por X_0 o espaço das funções em $H^1(\Omega)$ que possuem média zero em Ω, ou seja,

$$X_0 = \{w \in H^1(\Omega); \int_\Omega w dx = 0\}.$$

Para $u \in H^1(\Omega)$, seja $u_0 \in H^1(\Omega)$ dada por

$$u_0 := u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$$

onde $\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$ é uma constante real. Logo,

$$\int_\Omega u_0 dx = \int_\Omega u dx - \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx \right) |\Omega| = 0$$

e assim, toda função $u \in H^1(\Omega)$ pode ser escrita na forma $u = \alpha + u_0$ em que α é uma constante real e u_0 possui média zero.

Observe que tal decomposição é única. De fato, se $u = \alpha + u_0 = \tilde{\alpha} + \tilde{u_0}$, onde $\alpha, u_0, \tilde{\alpha}$ e $\tilde{u_0}$ são como antes, teremos

$$\alpha - \tilde{\alpha} = \tilde{u_0} - u_0.$$

Vamos, agora, integrar ambos os membros desta igualdade

$$(\alpha - \tilde{\alpha})|\Omega| = 0 \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha},$$

obtendo assim, $\tilde{u_0} = u_0$ o que mostra a unicidade da decomposição.

Consequentemente,

$$H^1(\Omega) = X_0 \oplus X_1,$$

isto é, a decomposição de $H^1(\Omega)$ acima é em soma direta.

A seguir, demonstraremos uma Desigualdade do tipo Poincaré para as funções em X_0.

Lema 1.2 *(Desigualdade de Poincaré–Wirtinger) (Ver Nascimento* [26]*) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |w|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \quad \textit{para todo} \quad w \in X_0.$$

Demonstração: Sejam ψ o funcional definido por

$$\begin{array}{rcl} \psi : X_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \psi(w) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \quad \text{para todo} \quad w \in X_0, \end{array}$$

e S a variedade

$$S = \{w \in X_0; \int_\Omega |w|^2 dx = 1\}.$$

Desde que ψ é limitado inferiormente em $H^1(\Omega)$, também será limitado inferiormente em $S \subset H^1(\Omega)$. Logo, pelo Postulado de Dedekind existe ψ_∞ tal que

$$\psi_\infty = \inf_{w \in S} \psi(w).$$

Então, pela definição de ínfimo, existe uma sequência minimizante $(w_n) \subset S$, isto é,

$$\psi(w_n) \rightarrow \psi_\infty = \inf_{w \in S} \psi(w).$$

Consequentemente, $\int_\Omega |w_n|^2 dx = 1$ e existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx \leq C_1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com este fato, a sequência (w_n) é limitada em $H^1(\Omega)$ e em vista disso, a sequência real $(\|w_n\|_{1,2}^2)$ possui subsequência convergente. Além disso, $H^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, o que implica a existência de $w_0 \in H^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$w_n \rightharpoonup w_0 \text{ em } H^1(\Omega).$$

Daí, pela imersão compacta $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, tem-se

$$w_n \rightarrow w_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Em particular, pela continuidade da integral, obtém-se

$$0 = \int_\Omega w_n dx \rightarrow \int_\Omega w_0 dx$$

e

$$1 = \int_\Omega |w_n|^2 dx \rightarrow \int_\Omega |w_0|^2 dx.$$

Consequentemente, $w_0 \in S$.

Afirmação 1.1 $\psi_\infty > 0$

Suponhamos, por contradição, que $\psi_\infty = 0$. Como o funcional

$$\begin{array}{rcl} \ell : H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \ell(w) = \|w\|_{1,2}^2 \end{array}$$

é convexo, semicontínuo inferiormente e $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\Omega)$ segue-se

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx + \int_\Omega |w_n|^2 dx - \int_\Omega |w_n|^2 dx \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\|w_n\|_{1,2}^2 - \|w_n\|_2^2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{1,2}^2 - \lim \|w_n\|_2^2 \\ &= \|w_0\|_{1,2}^2 - \|w_0\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx = 0,$$

o que implica

$$w_0(x) = C_2 \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

onde C_2 é uma constante real.

Como $w_0 \in S \subset X_0$ temos

$$\int_\Omega w_0 dx = \int_\Omega C_2 dx = 0$$

e concluímos que $C_2 = 0$, o que é impossível devido a $\displaystyle\int_\Omega |w_0|^2 dx = 1$.

Portanto, $\psi_\infty > 0$.

Voltemos à demonstração do teorema.

Desde que

$$\psi_\infty \leq \int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \quad \text{para todo } w \in S \text{ com } \|w\|_2 = 1,$$

tomando-se $0 \neq w \in X_0$, observando que $\left|\dfrac{w}{\|w\|_2}\right| = 1$, segue-se

$$\psi_\infty \leq \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{w}{\|w\|_2}\right)\right|^2 dx = \frac{1}{\|w\|_2^2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx$$

o que implica em

$$\|w\|_2^2 \leq \frac{1}{\psi_\infty}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \quad \text{para todo } w \in X_0$$

mostrando a Desigualdade de Poincaré-Wirtinger. ■

1.4 Um Problema Não-Local com Condição de Neumann

Nesta seção iremos estudar uma aplicação da seção precedente. Vamos considerar o seguinte problema de Neumann não-linear

$$\begin{cases} -M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u &= f(u) + \rho(x) & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.23}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua p-periódica, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\rho \in L^2(\Omega)$ as quais satisfazem

$$\int_0^p f(s)ds = 0, \quad \int_\Omega \rho(x)dx = 0 \tag{1.24}$$

e

$$0 < \mu_0 \leq M(s) \leq M_\infty < +\infty \quad \text{em que } \mu_0, M_\infty \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

A versão local, isto é, $M(t) \equiv 1$, foi estudada em Costa [17]. Além disso, seguiremos as idéias desenvolvidas por ele adaptando o estudo a função M.

Estaremos interessados em encontrar soluções fracas de (1.23), isto é, funções $u \in H^1(\Omega)$ tais que

$$M(\|\nabla u\|_2^2) \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u)v dx + \int_\Omega \rho(x) v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1.26}$$

Associado ao problema (1.23) temos o funcional energia $E : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega \rho(x) u dx \quad \forall u \in H^1(\Omega) \tag{1.27}$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\tau)d\tau \quad \text{e} \quad F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau. \tag{1.28}$$

Proposição 1.2 *O funcional $E : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por* (1.27) *está bem definido. Além disso, E é limitado inferiormente e é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ com*

$$E'(u)v = M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega (f(u) + \rho(x))v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \tag{1.29}$$

Demonstração: Uma vez que, neste caso as funções M e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e f é periódica satisfazendo (1.24), segue-se que F é periódica, portanto $|F(s)| \leq A$ e E está claramente bem definida em $H^1(\Omega)$.

Agora vamos mostrar que o funcional E é limitado inferiormente. Para isto vamos decompor em soma direta o espaço $H^1(\Omega)$ como

$$H^1(\Omega) = X_0 \oplus X_1,$$

onde X_1 e X_0 são como definidos anteriormente.

Então, escrevendo em (1.27) $u = v + w$ com $v \in X_0$ e $w \in X_1$ obtemos,

$$E(u) = E(v+w) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla(v+w)\|_2^2) - \int_\Omega F(v+w)dx - \int_\Omega \rho(x)(v+w)dx.$$

Note que,

$$\nabla w = 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \rho(x)w dx = w\int_\Omega \rho(x)dx = 0,$$

daí, da limitação da F e de (1.25) temos,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\mu_0\|\nabla v\|_2^2 - A|\Omega| - \int_\Omega \rho(x)vdx,$$

o que implica, das desigualdades de Hölder e Poincaré-Wirtinger,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\mu_0\|\nabla v\|_2^2 - A|\Omega| - c\|\rho\|_2\|\nabla v\|_2$$

logo,

$$E(u) \geq \|\nabla v\|_2\left(\frac{1}{2}\mu_0\|\nabla v\|_2 - c\|\rho\|_2\right) - A|\Omega| \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Portanto, E é limitado inferiormente.

Mostremos que $E \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Observe que os funcionais

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u\|_2^2) \quad \text{e} \quad q(u) = \int_\Omega \rho(x)udx$$

são diferenciáveis a Fréchet e $\varphi, q \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\varphi'(u)v = M(\|\nabla u\|_2^2)\int_\Omega \nabla u\nabla vdx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

e

$$q'(u)v = \int_\Omega \rho(x)vdx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\psi(u) = \int_\Omega F(u)dx \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$$

é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ com,

$$\psi'(u)v = \int_\Omega f(u)vdx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \tag{1.30}$$

Fixemos $u \in H^1(\Omega)$, e definamos

$$g(v) = \psi(u+v) - \psi(u) - \int_\Omega f(u)vdx.$$

Daí, pela definição da ψ,

$$g(v) = \int_\Omega (F(u+v) - F(u))dx - \int_\Omega f(u)vdx.$$

Observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}F(u+tv)dt = F(u+v) - F(u).$$

Então,

$$g(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{d}{dt}F(u+tv)dt\right]dx - \int_\Omega f(u)vdx.$$

Usando a Regra da Cadeia

$$g(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 (f(u+tv)v)dt\right]dx - \int_\Omega f(u)vdx,$$

e daí,

$$g(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 (f(u+tv)v)dt\right]dx - \int_\Omega \left[\int_0^1 (f(u)v)dt\right]dx.$$

Logo,

$$g(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 (f(u+tv)v - f(u)v)dt\right]dx.$$

Usando, o Teorema de Fubini obtemos,

$$g(v) = \int_0^1 \left[\int_\Omega (f(u+tv)v - f(u)v)dx\right]dt,$$

o que implica,

$$|g(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |f(u+tv) - f(u)||v|dx\right]dt.$$

Como f é limitada temos que $f \in L^2(\Omega)$. Logo, podemos usar a desigualdade de Hölder, obtendo

$$|g(v)| \leq \int_0^1 \|f(u+tv) - f(u)\|_2 \|v\|_2 dt.$$

Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\text{se } v \to 0 \text{ em } H^1(\Omega) \;\Rightarrow\; v \to 0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

o que implica,

$$u + tv \to u \text{ em } L^2(\Omega),\ \forall\, t \in [0,1].$$

Sendo f contínua, tem-se

$$f(u+tv) \to f(u) \text{ em } L^2(\Omega),\ \forall\, t \in [0,1].$$

Assim,

$$\frac{|g(v)|}{\|v\|_{1,2}} \le c\frac{|g(v)|}{\|v\|_2} \le c\int_0^1 \|f(u+tv)-f(u)\|_2 dt,$$

o que implica,

$$0 \le \lim_{v\to 0}\frac{|g(v)|}{\|v\|_{1,2}} \le \lim_{v\to 0}\left(c\int_0^1 \|f(u+tv)-f(u)\|_2 dt\right),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue,

$$0 \le \lim_{v\to 0}\frac{|g(v)|}{\|v\|_{1,2}} \le c\int_0^1 \left(\lim_{v\to 0}\|f(u+tv)-f(u)\|_2\right) dt = 0.$$

Logo,

$$\lim_{v\to 0}\frac{|g(v)|}{\|v\|_{1,2}} = 0.$$

Portanto, ψ é diferenciável a Fréchet, com derivada dada por (1.30).

Vamos verificar que, $\psi \in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Sejam $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ tais que,

$$u_n \to u \text{ em } H^1(\Omega).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|\psi'(u_n)-\psi'(u)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|v\|_{1,2}\le 1} |(\psi'(u_n)-\psi'(u))v| \\
&= \sup_{\|v\|_{1,2}\le 1} \left|\int_\Omega (f(u_n)-f(u))v dx\right| \\
&\le \sup_{\|v\|_{1,2}\le 1} \int_\Omega |f(u_n)-f(u)||v| dx \\
&\le \sup_{\|v\|_{1,2}\le 1} \|f(u_n)-f(u)\|_2\|v\|_2 \\
&\le \sup_{\|v\|_{1,2}\le 1} (c\|f(u_n)-f(u)\|_2\|v\|_{1,2}) \\
&\le c\|f(u_n)-f(u)\|_2 \quad \forall n \ge 1.
\end{aligned}$$

Então como,

$$u_n \to u \text{ em } H^1(\Omega) \;\text{ tem-se }\; u_n \to u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Pela continuidade da função f obtemos,

$$f(u_n) \to f(u) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Logo, $\psi'(u_n) \to \psi'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$.

Portanto, $\psi \in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$. ∎

Teorema 1.10 *Suponhamos que* (1.24) *e* (1.25) *sejam válidos, onde* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *é p-periódica e* $\rho \in L^2(\Omega)$. *Então, o problema* (1.23) *possui uma solução fraca* $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Em vista da Proposição 1.2, encontraremos um ponto crítico do funcional $E \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ dado por (1.27). Sendo F p-periódica e $\displaystyle\int_\Omega \rho(x)dx = 0$, segue-se

$$E(u+p) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla(u+p)\|_2^2) - \int_\Omega F(u+p)dx - \int_\Omega \rho(x)(u+p)dx$$

e daí,

$$E(u+p) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla(u)\|_2^2) - \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega \rho(x)udx = E(u).$$

Portanto, $E(u+p) = E(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega)$.

Afirmação 1.2 *E satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

De fato, seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$E(u_n) \to c \quad \text{e } E'(u_n) \to 0.$$

Escreva $u_n = v_n + w_n$ com $v_n \in X_0$ e $w_n \in X_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$E(u_n) = E(v_n + w_n) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla(v_n + w_n)\|_2^2) - \int_\Omega F(v_n + w_n)dx - \int_\Omega \rho(x)(v_n + w_n)dx,$$

com um mesmo raciocínio feito anteriormente, obtemos

$$E(u_n) \geq \frac{1}{2}\mu_0\|\nabla v_n\|_2^2 - A|\Omega| - \int_\Omega \rho(x)v_n dx \quad \text{e } |E(u_n)| \leq C_1$$

para algum $C_1 > 0$ (pois, $E(u_n) \to c$).

Logo,

$$\|\nabla v_n\|_2 \left(\frac{1}{2}\mu_0\|\nabla v_n\|_2 - c\|\rho\|_2\right) - A|\Omega| \leq C_1,$$

o que implica,

$$(\|\nabla v_n\|_2) \quad \text{é limitada.}$$

Então, pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger,

$$(\|v_n\|_2) \quad \text{é limitada.}$$

Portanto,

$$(\|v_n\|_{1,2}) = \left((\|v_n\|_2^2 + \|\nabla v_n\|_2^2)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{é limitada.}$$

Seja, agora, $\tilde{w_n} \in [0, p)$ tal que $w_n \equiv \tilde{w_n}(mod\ p)$, definindo $\tilde{u_n} = v_n + \tilde{w_n}$, tem-se

$$E(\tilde{u_n}) = E(v_n + \tilde{w_n}) = E(v_n + w_n + \alpha p) = E(v_n + w_n) = E(u_n)$$

ou seja,

$$E(\tilde{u_n}) = E(u_n).$$

Analogamente,

$$E'(\tilde{u_n}) = E'(v_n + \tilde{w_n}) = E'(v_n + w_n + \alpha p) = E'(v_n + w_n) = E'(u_n).$$

Logo,

$$E(\tilde{u_n}) \to c \text{ e } E'(\tilde{u_n}) \to 0.$$

Ora, sendo $(\|v_n\|_{1,2})$ limitada e $\tilde{w_n} \in [0, p)$ tem-se que $(\|\tilde{u_n}\|_{1,2})$ é limitada. Temos ainda que $(\|\nabla \tilde{u_n}\|_2)$ é limitada.

Assim, $\|\nabla \tilde{u_n}\|_2^2 \to \tilde{t}$.

Como $H^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existe $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\tilde{u_n} \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

Logo, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\tilde{u_n} \to \tilde{u} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

e pela continuidade da função M obtemos,

$$M(\|\nabla \tilde{u_n}\|_2^2) \to M(\tilde{t}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Sendo $\nabla E(u) = M(\|\nabla u\|_2^2)u - T(u)$ onde $T : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ é operador compacto, tem-se

$$M(\|\nabla \tilde{u_n}\|_2^2)\tilde{u_n} = \nabla E(\tilde{u_n}) + T(\tilde{u_n}) \to 0 + T(\tilde{u}) \quad \text{em } H^1(\Omega),$$

o que implica,

$$\tilde{u_n} = \frac{1}{M(\|\nabla \tilde{u_n}\|_2^2)} M(\|\nabla \tilde{u_n}\|_2^2)\tilde{u_n} \to \frac{1}{M(\tilde{t})} T(\tilde{u}) \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Então por unicidade, $\tilde{u_n} \to \tilde{u}$ em $H^1(\Omega)$.

Portanto, $E(\tilde{u}) = c$ e $E'(\tilde{u}) = 0$, ou seja, c é um valor crítico de E.

Aplicando o Teorema 1.9, concluímos que existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que

$$E(u_0) = \inf_{u \in H^1(\Omega)} E(u).$$

Isto é, existe solução fraca para o problema (1.23). ∎

Capítulo 2

O Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha e em seguida apresentaremos duas aplicações ao problema não-local do tipo

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad\;\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde a não-linearidade f tem crescimento subcrítico e superlinear, e $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo das próximas seções.

2.1 O Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [6].

Teorema 2.1 *Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS) $(ou(PS)_c)$. Se $e \in X$ e $0 < r < \|e\|$ são tais que*

$$a \equiv \max\{\phi(0), \phi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \phi(u) \equiv b, \tag{2.1}$$

então,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t))$$

é um valor crítico de ϕ com $c \leq b$, onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X)/\gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Primeiramente, vamos verificar que c está bem definido.

De fato, para cada $\gamma \in \Gamma$, a função

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) = \phi(\gamma(t)) \end{array}$$

é uma função contínua definida num compacto, portanto possui máximo, isto é,

$$\max_{t\in[0,1]} h(t) = \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)).$$

Por outro lado, a função

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Lambda(t) = \|\gamma(t)\| \end{array}$$

é também uma função contínua com

$$\Lambda(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 \quad \text{e} \quad \Lambda(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > r.$$

Usando o teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\Lambda(t_0) = r$ isto é, $\|\gamma(t_0)\| = r$ implicando em $\gamma(t_0) \in \partial B_r$ (fronteira da bola com centro na origem e raio r).

Daí,

$$\max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) \geq \phi(\gamma(t_0)) \geq b, \quad \text{pois} \quad b = \inf_{\|u\|=r} \phi(u).$$

Pelo estudo feito, b é uma cota inferior para o conjunto

$$Y = \left\{ \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)); \gamma \in \Gamma \right\},$$

logo, pelo Postulado de Dedekind, tal conjunto tem ínfimo e deve ser maior ou igual a b, ou seja, o nível "minimax"dado por

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t))$$

está bem definido e verifica $c \geq b$.

Suponhamos por contradição que c não é valor crítico.

Então pelo Teorema 1.7, existem $0 < \epsilon < \dfrac{b-a}{2}$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que

- $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$, $t \in [0,1]$,

- $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$.

Pela definição de c como o ínfimo sobre Γ, podemos escolher um $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma_0(t)) \leq c + \epsilon \tag{2.2}$$

e definir o caminho

$$\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma_0(t)).$$

Assim, como $\gamma_0 \in \Gamma$ tem-se

$$\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma_0(t)) \Rightarrow \begin{cases} \hat{\gamma}(0) = \eta(1, \gamma_0(0)) = \eta(1, 0), \\ \hat{\gamma}(1) = \eta(1, \gamma_0(1)) = \eta(1, e), \end{cases}$$

mas como

$$\phi(0), \phi(e) \leq a < b - 2\epsilon \leq c - 2\epsilon$$

e por (2.2) temos que

$$\hat{\gamma}(0) = \eta(1, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}(1) = \eta(1, e) = e$$

o que implicam $\hat{\gamma} \in \Gamma$.

Mas então, pelo estudo feito tem-se

$$\max_{t\in[0,1]} \phi(\hat{\gamma}(t)) \leq c - \epsilon$$

o que é um absurdo, em vista da definição de c.

Portanto, c é um valor crítico. ■

2.2 Primeiro Resultado de Existência

Nesta seção, vamos mostrar um resultado de existência de solução não-trivial, para o problema de Dirichlet não-linear

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x, u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não-crescente satisfazendo

$(M_{0,\infty})$ $$0 < M_0 \leq M(t) \leq M_\infty, \quad \forall t \geq 0$$

em que, M_∞, M_0 são constantes reais, e $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo as seguintes condições:

(f_1) Existem constantes

$$c, d > 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} 1 \leq \theta < \frac{N+2}{N-2} & \text{se } N \geq 3, \\ 1 \leq \theta < +\infty & \text{se } N = 1, 2, \end{cases}$$

tais que $|f(x,s)| \leq c|s|^\theta + d$.

(f_2) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|} = 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

(f_3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq sf(x,s), \quad \forall |s| \geq r$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi.$$

Seguiremos algumas idéias desenvolvidas por Alves, Corrêa e Ma [4].

Estamos interessados em encontrar soluções fracas de (2.3), isto é, funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Definiremos o funcional energia associado ao problema (2.3) e mostraremos que, ele está bem definido e é de classe C^1. Isso implica que, encontrar a solução para o problema em questão, se resume em encontrar pontos críticos para o funcional energia associado.

Proposição 2.1 *Suponhamos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de Carathéodory satisfazendo a condição (f_1) e M satisfaz $(M_{0,\infty})$. Então o funcional*

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.5}$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\xi)d\xi \quad e \quad F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi,$$

está bem definido, e além disso, $E \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$E'(u)v = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Demonstração: Como $q(u) = \dfrac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)$ está bem definido e é de classe C^1 com

$$q'(u)v = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

é suficiente mostrar que $\psi(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$ está bem definido e $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)v = \int_\Omega f(x,u)vdx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos que a função $F(x,s)$ é de Carathéodory, e satisfaz a condição de crescimento (f_1).

De fato, tem-se

$$|F(x,s)| = \left|\int_\Omega f(x,\xi)d\xi\right| \leq \int_0^s |f(x,\xi)|d\xi \leq \int_0^s (c|\xi|^\theta + d)d\xi.$$

Se $s \geq 0$ obtemos,

$$|F(x,s)| \leq \int_0^s (c\xi^\theta + d)d\xi \leq \left(\frac{c}{\theta+1}\xi^{\theta+1} + d.\xi\right)\Big|_0^s = \frac{c}{\theta+1}s^{\theta+1} + ds.$$

Portanto, sendo $s \geq 0$

$$|F(x,s)| \leq \frac{c}{\theta+1}|s|^{\theta+1} + d|s|.$$

Se $s < 0$ obtemos,

$$|F(x,s)| \leq \left|\int_0^s f(x,\xi)d\xi\right| = \left|-\int_s^0 f(x,\xi)d\xi\right| = \left|\int_s^0 f(x,\xi)d\xi\right|$$

assim,

$$|F(x,s)| \leq \int_s^0 |f(x,\xi)|d\xi \leq \int_s^0 (c|\xi|^\theta + d)d\xi$$

logo,

$$|F(x,s)| \leq \int_s^0 (c(-\xi)^\theta + d)d\xi.$$

Façamos, agora, a mudança de variável,

$$\tau = -\xi \Rightarrow d\tau = -d\xi.$$

Daí,

$$|F(x,s)| \leq -\int_{-s}^0 (c\tau^\theta + d)d\tau \leq \int_0^{-s} (c\tau^\theta + d)d\tau,$$

o que implica,

$$|F(x,s)| \leq \left(\frac{c}{\theta+1}\tau^{\theta+1} + d.\tau \right) \Big|_0^{-s} = \frac{c}{\theta+1}(-s)^{\theta+1} + d(-s).$$

Portanto, sendo $s < 0$ obtemos,

$$|F(x,s)| \leq \frac{c}{\theta+1}|s|^{\theta+1} + d|s|.$$

Concluímos que $|F(x,s)| \leq c_1|s|^{\theta+1} + d|s|$, onde $c_1 = \dfrac{c}{\theta+1} \geq 0$.

Ora,

$$1 \leq \theta + 1 \Rightarrow |s| \leq 1 + |s|^{\theta+1} \Rightarrow d|s| \leq d + d|s|^{\theta+1}.$$

Daí,

$$|F(x,s)| \leq c_1|s|^{\theta+1} + d|s| \leq c_1|s|^{\theta+1} + d + d|s|^{\theta+1},$$

o que implica,

$$|F(x,s)| \leq (c_1 + d)|s|^{\theta+1} + d.$$

Portanto,

$$|F(x,s)| \leq a|s|^{\alpha} + b$$

onde $a = c_1 + d, b = d$ e

$$\begin{cases} 1 \leq \alpha = \theta + 1 < \frac{N+2}{N-2} + 1 = \frac{2N}{N-2} = 2^* & \text{se } N \geq 3, \\ 1 \leq \alpha = \theta + 1 < +\infty & \text{se } N = 1, 2. \end{cases}$$

Portanto pelo Exemplo 1 do Capítulo 1, ψ é um funcional bem definido e, além disso, ψ é fracamente s.c.i. em $H_0^1(\Omega)$.

Mostremos que ψ é diferenciável a Fréchet.

Fixemos $u \in H_0^1(\Omega)$, e defina

$$g(h) = \psi(u+h) - \psi(u) - \int_\Omega f(x,u)h dx.$$

Assim, pela definição da ψ,

$$g(h) = \int_\Omega (F(x, u+h) - F(x,u))dx - \int_\Omega f(x,u)h dx.$$

Observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}F(x, u+th)dt = F(x, u+h) - F(x,u).$$

Então,

$$g(h) = \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{d}{dt}F(x,u+th)dt\right]dx - \int_\Omega f(x,u)hdx.$$

Usando a Regra da Cadeia obtemos,

$$g(h) = \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,u+th)hdt\right]dx - \int_\Omega f(x,u)hdx,$$

o que implica,

$$g(h) = \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,u+th)hdt\right]dx - \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,u)hdt\right]dx.$$

Daí,

$$g(h) = \int_\Omega \left[\int_0^1 \big(f(x,u+th)h - f(x,u)h\big)dt\right]dx.$$

Usando, o Teorema de Fubini obtemos,

$$g(h) = \int_0^1 \left[\int_\Omega (f(x,u+th) - f(x,u))hdx\right]dt,$$

o que implica,

$$|g(h)| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |f(x,u+th) - f(x,u)||h|dx\right]dt.$$

Pela imersão contínua de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq 2^*,$$

tem-se

$$h \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow h \in L^s(\Omega), \quad \text{onde } s = 2^*.$$

Também tem-se que,

$$r = \frac{2N}{N+2} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad r \leq \theta r < \frac{N+2}{N-2}r = s,$$

logo, por

$$|f(x,u)| \leq c|u|^\theta + d$$

tem-se

$$|f(x,u)|^r \leq 2^r(c^r|u|^{\theta r} + d^r)$$

o que implica,

$$|f(x,u)|^r \leq c_2|u|^{\theta r} + d_2 < +\infty.$$

Então pelas imersões contínuas de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta r}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

tem-se

$$f \in L^r(\Omega).$$

Como $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$, pela desigualdade de Hölder segue-se

$$\int_\Omega |f(x, u + th) - f(x, u)||h|dx \leq \|f(x, u + th) - f(x, u)\|_r \|h\|_s.$$

Daí,

$$|g(h)| \leq \int_0^1 \|f(x, u + th) - f(x, u)\|_r \|h\|_s dt.$$

Assim,

$$h \to 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \;\Rightarrow\; h \to 0 \text{ em } L^s(\Omega)$$

o que implica,

$$u + th \to u \quad \text{em } L^s(\Omega), \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Como $s \geq \theta$, pelo resultado de Vainberg [19],

$$f(., u + th) \to f(., u) \quad \text{em } L^{\frac{s}{\theta}}(\Omega) \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

E, uma vez que, $r = \dfrac{2N}{N+2} < \dfrac{s}{\theta}$ segue-se

$$f(., u + th) \to f(., u) \quad \text{em } L^r(\Omega) \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Como,

$$\frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq c \frac{|g(h)|}{\|h\|_s}$$

tem-se

$$\frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq c \int_0^1 \|f(x, u + th) - f(x, u)\|_r dt,$$

o que implica,

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq \lim_{h \to 0} \left(c \int_0^1 \|f(x, u + th) - f(x, u)\|_r dt \right).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue,

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{|g(h)|}{\|h\|} \leq c \int_0^1 \left(\lim_{h \to 0} \|f(x, u + th) - f(x, u)\|_r \right) dt = 0.$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|g(h)|}{\|h\|}=0.$$

Portanto, ψ é diferenciável a Fréchet, com derivada definida por

$$\psi'(u)v=\int_\Omega f(x,u)v dx \quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Verifiquemos agora que, $\psi\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Sejam $(u_n)\in H_0^1(\Omega)$ e $u\in H_0^1(\Omega)$ tais que,

$$u_n\to u \quad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|\psi'(u_n)-\psi'(u)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|h\|\le 1}|(\psi'(u_n)-\psi'(u))h| \\
&= \sup_{\|h\|\le 1}\left|\int_\Omega (f(x,u_n)-f(x,u))h dx\right| \\
&\le \sup_{\|h\|\le 1}\int_\Omega |f(x,u_n)-f(x,u)||h| dx \\
&\le \sup_{\|h\|\le 1}\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_r\|h\|_s \\
&\le \sup_{\|h\|\le 1}(c\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_r\|h\|) \\
&\le c\|f(x,u_n)-f(x,u)\|_r \quad \forall n\ge 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$u_n\to u \quad \text{em } H_0^1(\Omega)\Rightarrow u_n\to u \quad \text{em } L^s(\Omega).$$

Então, pelo resultado de Vainberg,

$$f(.,u_n)\to f(.,u) \quad \text{em } L^{\frac{s}{\theta}}(\Omega),$$

o que implica,

$$f(.,u_n)\to f(.,u) \quad \text{em } L^r(\Omega).$$

Logo, $\psi'(u_n)\to\psi'(u)$ em H^{-1}.

Portanto, $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Com o estudo feito, concluímos que $E \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com derivada dada por (2.6). ■

O próximo resultado mostrará que, o funcional E, definido por (2.5), satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.1 *Seja* $E : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcional definido por* (2.5). *Então,*

(a) $u = 0$ *é um ponto de mínimo local estrito para* E.

(b) *Dado* $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$, *existe* $\rho_0 > 0$ *tal que* $E(\rho_0 v) \leq 0$.

Demonstração: (a) Pela hipótese (f_2), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{|s|}\right| \leq \epsilon \quad \text{para} \quad |s| \leq \delta,$$

o que implica $|f(x,s)| \leq \epsilon|s|$ para $|s| \leq \delta$.

Assim, se $0 \leq s \leq \delta$ tem-se

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi \leq \int_0^s \epsilon|\xi|d\xi = \int_0^s \epsilon\xi d\xi = \frac{\epsilon}{2}s^2 = \frac{\epsilon}{2}|s|^2.$$

Se $-\delta \leq s \leq 0$, tem-se

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi = -\int_s^0 f(x,\xi)d\xi \geq -\int_s^0 \epsilon|\xi|d\xi = -\int_s^0 \epsilon(-\xi)d\xi,$$

daí,

$$F(x,s) \geq \int_s^0 \epsilon\xi d\xi = \frac{\epsilon}{2}\xi^2\Big|_s^0 = -\frac{\epsilon}{2}s^2 = -\frac{\epsilon}{2}|s|^2.$$

Logo,

$$-\frac{\epsilon}{2}|s|^2 \leq F(x,s) \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 \quad \text{para} \quad |s| \leq \delta$$

implicando

$$|F(x,s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 \quad \text{para} \quad |s| \leq \delta. \tag{2.7}$$

Por outro lado, da condição (f_1) nós encontramos anteriormente, que

$$|F(x,s)| \leq \frac{c}{\theta+1}|s|^{\theta+1} + d|s| \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Em particular, a desigualdade acima vale para, $|s| \geq \delta$. Ainda temos, $1 \leq \theta + 1 < 2^*$ se $N \geq 3$ e

$$|F(x,s)| \leq \frac{|s|^{\theta+1}}{\theta+1}\left(c + \frac{d(\theta+1)}{|s|^\theta}\right).$$

Daí, podemos encontrar $R > 0$ suficientemente grande, tal que

$$d(\theta+1) \leq |s|^{\theta} \quad \forall |s| \geq R.$$

Assim,

$$|F(x,s)| \leq \frac{|s|^{\theta+1}}{\theta+1}(c+1) = c_1|s|^{\theta+1}, \quad \forall |s| \geq R.$$

Agora, se $\delta \leq |s| \leq R$ temos,

$$|F(x,s)| \leq \frac{c}{\theta+1}|s|^{\theta+1} + d|s| \leq \frac{c}{\theta+1}R^{\theta+1} + dR = c_2.$$

Logo, para

$$A \geq \frac{c_2(\theta+1)}{|\delta|^{\theta+1}} \quad \text{temos} \quad c_2 \leq \frac{A|\delta|^{\theta+1}}{\theta+1}$$

de onde segue,

$$|F(x,s)| \leq \frac{A}{\theta+1}|\delta|^{\theta+1} \leq \frac{A}{\theta+1}|s|^{\theta+1}.$$

Se $|s| \geq \delta = \delta(\epsilon)$ temos

$$|F(x,s)| \leq \left(\frac{A}{\theta+1}\right)|s|^{\theta+1} + c_1|s|^{\theta+1}$$

o que implica,

$$|F(x,s)| \leq A_\epsilon|s|^{\theta+1}, \quad \text{onde} \quad A_\epsilon = \frac{A}{\theta+1} + c_1. \tag{2.8}$$

Combinando (2.7) e (2.8) obtemos,

$$|F(x,s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + A_\epsilon|s|^{\theta+1}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Portanto,

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{1}{2}M_0\|u\|^2 - \int_\Omega |F(x,u)|dx$$

o que implica,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}M_0\|u\|^2 - \int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{2}|u|^2 + A_\epsilon|u|^{\theta+1}\right)dx$$

logo,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}M_0\|u\|^2 - \frac{1}{2}\epsilon\|u\|_2^2 - A_\epsilon\|u\|_{\theta+1}^{\theta+1}.$$

Observemos que a desigualdade de Poincaré

$$\lambda_1\|u\|_2^2 \leq \|u\|^2,$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro auto-valor do $-\Delta$ sob condições de fronteira de Dirichlet, implica que,

$$\frac{\epsilon}{2}\|u\|_2^2 \leq \frac{\epsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2,$$

e a imersão contínua de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta+1}(\Omega), \quad 1 \leq \theta + 1 < 2^*$$

implica que,

$$A_\epsilon\|u\|_{\theta+1}^{\theta+1} \leq cA_\epsilon\|u\|^{\theta+1} = c_\epsilon\|u\|^{\theta+1}.$$

Logo,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}M_0\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2 - c_\epsilon\|u\|^{\theta+1}$$

o que implica,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\left(M_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - c_\epsilon\|u\|^{\theta+1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.9}$$

Podemos considerar $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \lambda_1$ para que $\left(M_0 - \dfrac{\epsilon}{\lambda_1}\right) > 0$.

Seja $\|u\| = \rho$, então

$$E(u) \geq \left(M_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{\rho^2}{2} - c_\epsilon\rho^{\theta+1},$$

isto é,

$$E(u) \geq \left(M_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - 2c_\epsilon\rho^{\theta-1}\right)\frac{\rho^2}{2}.$$

Fixemos $\rho > 0$ tal que,

$$\left(M_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - 2c_\epsilon\rho^{\theta-1}\right) > 0,$$

ou seja,

$$\left(M_0 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) > 2c_\epsilon\rho^{\theta-1},$$

isto é,

$$0 < \rho^{\theta-1} \leq \frac{M_0}{2c_\epsilon} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1 c_\epsilon}.$$

Logo,

$$0 < \rho \leq \left[\frac{M_0}{2c_\epsilon} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1 c_\epsilon}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}.$$

Escolhendo, $\rho = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M_0}{2c_\epsilon} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1 c_\epsilon}\right)\right]^{\frac{1}{\theta-1}}$ temos,

$$E(u) \geq \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{M_0}{2} - \frac{3\epsilon}{2\lambda_1}\right) = r > 0,$$

ou seja,

$$E(u) > 0 = E(0) \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } 0 < \|u\| \leq r,$$

desde que $r > 0$ seja pequeno.

(b) Como a condição (f_3) implica a existência de constantes $c, d > 0$ tais que

$$|F(x,s)| \geq c|s|^\mu - d \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

(Ver Apêndice A), tem-se

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega (c|u|^\mu - d)dx$$

o que implica,

$$E(u) \leq \frac{1}{2}M_\infty\|u\|^2 - c\|u\|_\mu^\mu + d|\Omega|,$$

de sorte que, dado $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| = 1$, e escrevendo $\delta = c\|v\|_\mu^\mu > 0$ obtemos,

$$E(\rho_0 v) \leq \frac{M_\infty}{2}\rho_0^2\|v\|^2 - c\rho_0^\mu\|v\|_\mu^\mu + d|\Omega| \leq \frac{M_\infty}{2}\rho_0^2 - \delta\rho_0^\mu + d|\Omega|$$

o que implica,

$$E(\rho_0 v) \to -\infty \quad \text{quando} \quad \rho_0 \to +\infty.$$

Assim, existe $\rho > 0$ tal que $E(\rho v) \leq 0$. ■

Teorema 2.2 *Se $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo as condições (f_1), (f_2) e (f_3) e a função M satisfaz a condição $(M_{0,\infty})$, então o problema* (2.3) *possui uma solução não trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Mostremos que o funcional E, dado em (2.5), satisfaz a condição (PS).

Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $|E(u_n)| \leq c$, $E'(u_n) \to 0$.

Então, para todo n suficientemente grande temos,

$$|E'(u_n)u_n| \leq \|E'(u_n)\|\|u_n\| \leq \|u_n\|$$

ou seja,

$$E(u_n) - \frac{1}{\mu}E'(u_n)u_n \leq |E(u_n)| + \frac{1}{\mu}|E'(u_n)u_n| \leq c + \frac{1}{\mu}\|u_n\|$$

assim,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \int_\Omega F(x,u_n)dx - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx$$

o que implica,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx.$$

Note que, pela condição (f_3) tem-se,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx = C + \int_{|u_n|>r} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx,$$

ou seja, todos os termos acima são positivos.

Daí,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u_n\|^2} M(s)ds - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Como M é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para as integrais, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \epsilon_n < \|u_n\|^2$ tal que

$$\int_0^{\|u_n\|^2} M(s)ds = M(\epsilon_n)\|u_n\|^2.$$

Logo,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq M(\epsilon_n)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Além disso, como M é não-crescente

$$M(\epsilon_n) \geq M(\|u_n\|^2).$$

Portanto,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Desde que $\mu > 2$, $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) > 0$, e usando a condição $(M_{0,\infty})$ obtemos que $(\|u_n\|)$ é limitada.

Assim, a menos de subsequência,

$$\|u_n\|^2 \to \tilde{t},$$

e sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, ainda temos,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$u_n \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}.$$

Pela continuidade da função M, obtemos

$$M(\|u_n\|^2) \to M(\tilde{t}) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Sendo $\nabla E(u) = M(\|u\|^2)u - T(u)$ onde T é um operador compacto, obtemos,

$$M(\|u_n\|^2)u_n = \nabla E(u_n) + T(u_n) \to 0 + T(u) \quad \text{em } H_0^1(\Omega),$$

o que implica,

$$u_n = \frac{1}{M(\|u_n\|^2)} M(\|u_n\|^2)u_n \to \frac{1}{M(\tilde{t})} T(u) \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

Logo, por unicidade, temos $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$.

Portanto, E satisfaz a condição (PS).

Pelo Teorema do Passo da Montanha E possui um ponto crítico. ∎

2.3 Segundo Resultado de Existência

Nesta seção, vamos mostrar um resultado de existência de solução não-trivial e não-negativa para o problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo as condições (f_1), (f_2) e (f_3), e $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua cumprindo,

(M_1) Existem $m_1, t_1 > 0$ tais que $M(t) \geq m_1$ se $0 \leq t \leq t_1$.

(M_2) Existem $m_2, t_2 > 0$ tais que $0 < M(t) \leq m_2$ se $t \geq t_2$.

(M_3) $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t^2)t = +\infty.$

(M_4) M é não-crescente e $M(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

Observação 2.1 *A função*

$$M(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha}$$

para todo $t \geq 0$ *e* $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ *satisfaz as hipóteses acima.*

Note que, o problema considerado é uma versão particular do seguinte problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u &= 0 \qquad\quad\ \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é como antes, $1 < p < N$, f é uma função superlinear com crescimento subcrítico e M é uma função que satisfaz (M_1)-(M_4). Em Nascimento [26] foi mostrado a existência de solução não-trivial e não-negativa para esta versão.

Considerando o caso $p = 2$, Alves, Corrêa e Ma [4] mostraram um resultado de existência usando o teorema do Passo da Montanha, onde a não-linearidade f possui crescimento subcrítico e superlinear. Vale ressaltar que neste artigo, pelo que parece, foi usada pela primeira vez a abordagem variacional para essa classe de problemas não-locais.

Como sabemos, o fato de f ser uma função de Carathéodory satisfazendo (f_1) implica que o funcional

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx \tag{2.12}$$

está bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$E'(u)v = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.13}$$

O resultado que segue nos ajudará a demonstrar que o funcional E satisfaz a Geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.2 (a) *$u = 0$ é um ponto de mínimo local estrito para E;*

(b) *Dado $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$, existe $\rho_0 > 0$ tal que $E(\rho_0 v) \leq 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $0 < \|u\| = \rho < t_1$ então, por (M_1)

$$E(u) \geq \frac{1}{2}m_1\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De (f_2), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon|s|, \quad \text{se} \quad |s| \leq \delta.$$

De maneira análoga a seção 2.2 obtemos

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2, \quad \text{se} \quad |s| \leq \delta$$

e por (f_1),

$$|F(s)| \leq A_\epsilon|s|^{\theta+1}, \quad \text{se} \quad |s| > \delta.$$

Com estas afirmações obtemos,

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + A_\epsilon|s|^{\theta+1}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Portanto,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}m_1\|u\|^2 - \int_\Omega |F(u)|dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}m_1\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2dx - A_\epsilon\int_\Omega |u|^{\theta+1}dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

logo, usando a desigualdade de Hölder,

$$E(u) \geq \frac{1}{2}m_1\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\|u\|_2^2 - A_\epsilon\|u\|_{\theta+1}^{\theta+1}.$$

Usando imersão de Sobolev e a desigualdade de Poincaré, analogamente como na seção 2.2, obtemos

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - c_\epsilon\|u\|^{\theta+1}.$$

Podemos considerar $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \lambda_1$ para que $\left(m_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) > 0.$

Agora seja, $\|u\| = \rho$, temos que

$$E(u) \geq \left(m_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{\rho^2}{2} - c_\epsilon\rho^{\theta+1},$$

isto é,

$$E(u) \geq \left(m_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - 2c_\epsilon\rho^{\theta-1}\right)\frac{\rho^2}{2}.$$

Fixemos $\rho > 0$ tal que,

$$\left(m_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - 2c_\epsilon \rho^{\theta-1}\right) > 0,$$

ou seja,

$$\left(m_1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) > 2c_\epsilon \rho^{\theta-1},$$

assim,

$$0 < \rho^{\theta-1} \leq \frac{m_1}{2c_\epsilon} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1 c_\epsilon}.$$

Logo,

$$0 < \rho \leq \left[\frac{m_1}{2c_\epsilon} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1 c_\epsilon}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}.$$

Escolhendo, $\rho = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{2c_\epsilon} - \frac{\epsilon}{2\lambda_1 c_\epsilon}\right)\right]^{\frac{1}{\theta-1}}$ temos,

$$E(u) \geq \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{m_1}{2} - \frac{3\epsilon}{2\lambda_1}\right) = r > 0,$$

e daí,

$$E(u) > 0 = E(0) \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } 0 < \|u\| \leq r,$$

desde que $r > 0$ seja pequeno.

(b) Como a condição (f_3) implica a existência de constantes $c, d > 0$ tais que

$$|F(s)| \geq c|s|^\mu - d \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

(Ver Apêndice A), tem-se

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u)dx \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega (c|s|^\mu - d)dx.$$

Dessa forma, fixando uma função $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| = 1$ temos,

$$E(u) \leq \frac{1}{2}\int_0^{t_2} M(s)ds + \frac{1}{2}\int_{t_2}^{\|u\|^2} M(s)ds - c\|u\|_\mu^\mu + d|\Omega|.$$

Usando (M_2) e fazendo $u = \rho_0 v$, obtemos

$$E(\rho_0 v) \leq c_1 + \frac{m_2}{2}\rho_0^2\|v\|^2 - c\rho_0^\mu\|v\|_\mu^\mu + d|\Omega|$$

escrevendo $\delta = c\|v\|_\mu^\mu > 0$ tem-se

$$E(\rho_0 v) \leq c_1 + \frac{m_2}{2}\rho_0^2 - \delta\rho_0^\mu + d|\Omega|$$

logo,

$$E(\rho_0 v) \to -\infty \quad \text{quando} \quad \rho_0 \to +\infty.$$

Assim, existe $\rho > 0$ tal que $E(\rho v) \leq 0$. ■

Teorema 2.3 *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo as condições (f_1),(f_2) e (f_3), e a função M satisfaz as condições $(M_1) - (M_4)$, então o problema* (2.11) *possui uma solução não-trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que o funcional E dado em (2.12) satisfaz a condição (PS).

Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $|E(u_n)| \leq c$ e $E'(u_n) \to 0$. Então, para todo n suficientemente grande temos,

$$|E'(u_n)u_n| \leq \|E'(u_n)\|\|u_n\| \leq \|u_n\|$$

ou seja,

$$E(u_n) - \frac{1}{\mu}E'(u_n)u_n \leq |E(u_n)| + \frac{1}{\mu}|E'(u_n)u_n| \leq c + \frac{1}{\mu}\|u_n\|$$

assim,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \int_\Omega F(u_n)dx - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(u_n)u_n dx$$

isto é,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx.$$

Note que, pela condição (f_3) tem-se,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx = C + \int_{|u_n|>r} \left(\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx,$$

ou seja, todos os termos acima são positivos.

Daí,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\|u_n\|^2} M(s)ds - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Como M é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \epsilon_n < \|u_n\|^2$ tal que

$$\int_0^{\|u_n\|^2} M(s)ds = M(\epsilon_n)\|u_n\|^2.$$

Logo,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq M(\epsilon_n)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Além disso, como M é não-crescente

$$M(\epsilon_n) \geq M(\|u_n\|^2).$$

Portanto,

$$c + \frac{1}{\mu}\|u_n\| \geq \frac{1}{2}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Desde que, $\mu > 2$ temos $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) > 0$, e usando (M_3) segue-se que $(\|u_n\|)$ é limitada.

Assim, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} &\|u_n\|^2 \to \tilde{t}, \\ &u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega), \\ &u_n \to u \quad \text{em} \quad L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \tfrac{2N}{N-2}. \end{aligned}$$

Da continuidade da função M,

$$M(\|u_n\|^2) \to M(\tilde{t}).$$

Sendo $\nabla E(u) = M(\|u\|^2)u - T(u)$ onde T é um operador compacto, obtemos,

$$M(\|u_n\|^2)u_n = \nabla E(u_n) + T(u_n) \to 0 + T(u) \quad \text{em } H_0^1(\Omega),$$

o que implica,

$$u_n = \frac{1}{M(\|u_n\|^2)}M(\|u_n\|^2)u_n \to \frac{1}{M(\tilde{t})}T(u) \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Logo, por unicidade, temos $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$.

Portanto, E satisfaz a condição (PS).

Pelo Teorema do Passo da Montanha o funcional E possui um ponto crítico. ■

Capítulo 3

Problemas Singulares Via Método de Galerkin

Neste capítulo estudaremos a existência de solução para alguns problemas elípticos não-locais do tipo

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u &= 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Consideraremos o caso M-Linear com $f \in H^{-1}(\Omega)$, o caso sub-linear $f(u) = u^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$. Utilizaremos o Método de Galerkin para resolver estes problemas. Ainda neste capítulo utilizaremos este método para resolver um outro problema não-local. Seguiremos aqui as idéias contidas em Corrêa-Menezes [16].

3.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Nesta seção, enunciaremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e em seguida demonstraremos um resultado que é uma variação deste teorema.

Teorema 3.1 *Seja $F : \overline{B}_R(0) \longrightarrow \overline{B}_R(0)$ com $\overline{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Então, F têm um ponto fixo $z \in \overline{B}_R(0)$, isto é, existe $z \in \overline{B}_R(0)$ tal que $F(z) = z$.*

O leitor interessado poderá consultar Almeida [1] para a demonstração do Teorema 3.1.

Proposição 3.1 *Suponhamos que* $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *é uma função contínua tal que* $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$ *para todo* $|\xi| = r > 0$, *onde* $\langle ., . \rangle$ *é o produto interno usual do* $\mathbb{R}^N$ *e* $|.|$ *sua relativa norma. Então, existe* $z_0 \in \overline{B}_R(0)$ *tal que* $F(z_0) = 0$.

Demonstração: Vamos demonstrar este resultado por contradição. Suponhamos que $F(x) \neq 0, \ \forall x \in \overline{B}_R(0)$, e defina a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} h : \overline{B}_R(0) & \longrightarrow & \overline{B}_R(0) \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{-R}{|F(x)|} F(x). \end{array}$$

Observe que h verifica $h(\overline{B}_R(0)) \subset \overline{B}_R(0)$, pois

$$|h(x)| = \left| \frac{-R}{|F(x)|} F(x) \right| = \frac{R}{|F(x)|} |F(x)| = R$$

e com isso $h(x) \in \overline{B}_R(0)$.

Além disso, como F é uma função contínua tem-se que h é contínua. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a função h tem um ponto fixo em $\overline{B}_R(0)$.

Seja x_0 tal ponto fixo de h, isto é, $h(x_0) = x_0$. Desta forma,

$$|x_0| = |h(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, h(x_0) \rangle = \left\langle x_0, \frac{-R}{|F(x_0)|} F(x_0) \right\rangle = \frac{-R}{|F(x_0)|} \langle x_0, F(x_0) \rangle.$$

Desde que, por hipótese $\langle x_0, F(x_0) \rangle \geq 0$, tem-se,

$$0 < R^2 = \frac{-R}{|F(x_0)|} \langle x_0, F(x_0) \rangle \leq 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto, existe $z_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que $F(z_0) = 0$. ■

3.2 O Problema M-Linear

Nesta seção, utilizaremos a Proposição 3.1, para estudar a existência de solução no chamado problema M-Linear, dado por

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u & = f \quad \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

(M_0) Existem constantes $t_\infty, m_0 > 0$ tais que $M(t) \geq m_0 > 0 \quad \forall t \geq t_\infty$.

Estamos interessados em encontrar soluções para o problema (3.2), ou seja, funções $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfazem

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Para isso, iremos resolver o seguinte resultado,

Teorema 3.2 *Suponhamos que $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua que satisfaz (M_0). Então, para cada $0 \neq f \in H^{-1}(\Omega)$, o problema (3.2) possui uma solução fraca.*

Demonstração: Consideremos $M^+ = \max\{M(t), 0\}$, a parte positiva de M, e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -M^+(\|u\|^2)\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

Vamos mostrar que o problema (3.4) possui solução e tal solução resolve o problema (3.2).

Seja $\Sigma = \{e_1, e_2, ..., e_m, ...\}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{R}$ considere $V_m = \text{span}\{e_1, e_2, ..., e_m\} \subset H_0^1(\Omega)$ o espaço vetorial de dimensão finita ($\dim(V_m) = m$) gerado por $e_1, e_2, ..., e_m$. Assim, cada $u \in V_m$ é representado de maneira única por

$$u = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i.$$

Notemos que $(V_m, \|.\|)$ e $(\mathbb{R}^m, |.|)$ são isometricamente isomorfos por intermédio da aplicação

$$\begin{aligned} T : (V_m, \|.\|) &\longrightarrow (\mathbb{R}^m, |.|) \\ u = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i &\longmapsto T(u) = \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \end{aligned}$$

onde $\|u\| = |\xi| = |T(u)|$ e $\|.\|$ é a norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$ e $|.|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^m$.

A partir daqui, sem nenhum comentário adicional, identificaremos $u \in V_m$ com $\xi \in \mathbb{R}^m$ via isometria T.

Vamos mostrar que para cada m existe $u_m \in V_m$ solução aproximada de (3.4) satisfazendo

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx = \ll f, e_i \gg, \ i = 1, ..., m$$

onde $\ll .,. \gg$ é o par de dualidade de $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, isto é, $f \in H^{-1}(\Omega)$ significa

$$\begin{array}{rcl} f : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \ll f, \varphi \gg, \end{array}$$

pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$ existe uma única $u = u_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u_f \nabla \varphi dx = \ll f, \varphi \gg, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

além disso, $\|u_f\| = \|f\|_{H^{-1}}$.

Consideremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \xi & \longmapsto & F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)), \end{array}$$

onde

$$F_i(\xi) = M^+(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla e_i dx - \ll f, e_i \gg, \ i = 1, ..., m \text{ e } u = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i.$$

Como $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base ortonormal para o espaço V_m e $u = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i$, então $\xi_i = \langle u, e_i \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla e_i dx$. Assim,

$$F_i(\xi) = M^+(\|u\|^2)\xi_i - \ll f, e_i \gg .$$

Com as informações acima, vamos calcular no $\mathbb{R}^m$ o produto interno

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = F_1(\xi)\xi_1 + ... + F_m(\xi)\xi_m$$

assim,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M^+(\|u\|^2)\xi_1^2 - \ll f, e_1 \gg \xi_1 + ... + M^+(\|u\|^2)\xi_m^2 - \ll f, e_m \gg \xi_m$$

o que implica,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M^+(\|u\|^2)\sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 - \ll f, \sum_{i=1}^m \xi_i e_i \gg = M^+(\|u\|^2)\|u\|^2 - \ll f, u \gg .$$

Usando (M_0) e as desigualdades de Hölder e Poincaré, obtemos

$$\langle F(\xi),\xi\rangle \geq m_0\|u\|^2 - \|f\|_{H_{-1}}\|u\|_2$$

o que implica,

$$\langle F(\xi),\xi\rangle \geq m_0\|u\|^2 - c\|f\|_{H^{-1}}\|u\| \geq 0, \text{ se } \|u\| = r, \ r \approx +\infty.$$

Daí, pela Proposição 3.1, existe $u_m \in V_m$ com $\|u_m\| \leq r$, r não dependendo de m, tal que $F(u_m) = 0$, isto é, $F_i(u_m) = 0, i = 1, ..., m$, ou seja,

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx = \ll f, e_i \gg, \ i = 1, ..., m$$

o que implica,

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla w dx = \ll f, w \gg \quad \forall w \in V_m. \tag{3.5}$$

Observe que de (3.5) fazendo $w = u_m$, obtemos,

$$M^+(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 = \ll f, u_m \gg \leq c\|f\|_{H^{-1}}\|u_m\|. \tag{3.6}$$

Vamos mostrar, agora, que $(\|u_m\|^2)$ é limitado.

De fato, suponhamos por contradição que isto não ocorre. Logo, a menos de subsequência,

$$\|u_m\| \to +\infty.$$

Da condição (M_0) e da desigualdade (3.6) teríamos,

$$0 < m_0\|u_m\|^2 \leq M^+(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 \leq c\|f\|_{H^{-1}}\|u_m\| \leq A\|u_m\|$$

de onde segue,

$$0 < m_0 \leq \frac{A}{\|u_m\|}.$$

Para $\|u_m\| \to +\infty$ teríamos $0 < m_0 \leq 0$ o que é uma contradição.

Portanto, $(\|u_m\|^2)$ é limitado.

Assim, a menos de subsequência,

$$\|u_m\|^2 \to \tilde{t}_0, \text{ para } \tilde{t}_0 > 0.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existem $(u_{m_k}) \subset (u_m)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

o que implica,

$$u_{m_k} \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Da continuidade de M, tem-se

$$M^+(\|u_m\|^2) \to M^+(\tilde{t}_0).$$

Tomemos $k \leq m$. Assim, $V_k \subset V_m$ e considere $\varphi \in V_k$. Logo,

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx = \ll f, \varphi \gg \quad \forall \varphi \in V_k.$$

Fixemos k e façamos $m \to +\infty$, obtemos

$$M^+(\tilde{t}_0)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \ll f, \varphi \gg \quad \forall \varphi \in V_k. \tag{3.7}$$

Como k é arbitrário nós teremos que a última igualdade permanece verdadeira para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Se $M^+(\tilde{t}_0) = 0$ nós teríamos $\ll f, \varphi \gg = 0$ $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ e assim $f \equiv 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ o que é uma contradição. Consequentemente, $M^+(\tilde{t}_0) > 0$, e assim, $M^+(\tilde{t}_0) = M(\tilde{t}_0)$.

Tomemos agora, $w = u_m$, em (3.5). Daí,

$$M(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 = \ll f, u_m \gg$$

e assim, fazendo $m \to +\infty$ obtemos

$$M(\tilde{t}_0)\tilde{t}_0 = \ll f, u \gg.$$

Mas de (3.7) com $\varphi = u$, encontramos

$$M(\tilde{t}_0)\|u\|^2 = \ll f, u \gg.$$

Destas duas últimas igualdades encontramos $\|u\|^2 = \tilde{t}_0$ o que mostra por (3.7) que a função u é uma solução fraca do problema (3.2). ■

Observação 3.1 *Segue da demonstração do Teorema* 3.2 *que a solução u obtida satisfaz $M(\|u\|^2) > 0$ (é claro, se tivéssemos usado outra forma de modo a obter uma solução de* (3.2) *tal propriedade não seria verdadeira).*

Observação 3.2 *Note que há somente uma solução de* (3.2) *que satisfaz esta propriedade. Isto pode ser provado como segue:*

Sejam u e v soluções de (3.2) obtidas anteriormente. Como u e v são soluções fracas de (3.2) tem-se

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = M(\|v\|^2)\int_\Omega \nabla v \nabla w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica,

$$\int_\Omega \nabla(M(\|u\|^2)u)\nabla w dx = \int_\Omega \nabla(M(\|v\|^2)v)\nabla w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Daí, $M(\|u\|^2)u$ e $M(\|v\|^2)v$ são duas soluções para o problema

$$-\Delta U = f \text{ em } \Omega \text{ e } U = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Por unicidade de solução tem-se $M(\|u\|^2)u = M(\|v\|^2)v$ em Ω, e assim, $M(\|u\|^2)\|u\| = M(\|v\|^2)\|v\|$.

Suponha que a função $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(t) = M(t^2)t$ seja crescente para $t > 0$. Obtém-se que $\|u\| = \|v\|$. Consequentemente,

$$\begin{cases} -\Delta u &= -\Delta v \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u &= v \qquad\;\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e então $u = v$ em Ω. Daí, se H for crescente temos unicidade de solução para o problema (3.2).

Observação 3.3 *Se $M(t_0) = 0$ para algum $t_0 > 0$ e $f = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ então não temos unicidade.*

De fato, seja $u \neq 0$ uma função em $C_0^2(\overline{\Omega})$ e seja $v = \sqrt{t_0}\dfrac{u}{\|u\|}$. Neste caso, $\|v\|^2 = t_0$, e assim, para cada função $0 \neq u \in C_0^2(\overline{\Omega})$, a função v definida anteriormente é uma solução não-trivial para o seguinte problema,

$$\begin{cases} -M(\|v\|^2)\Delta v &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad v &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observação 3.4 *Suponhamos que $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo*

$(\widetilde{M_0})$ *Existem números $\tilde{t}_\infty, \tilde{m}_0$ tais que $M(t) \leq -\tilde{m}_0 \quad \forall t \geq \tilde{t}_\infty$.*

Então o problema (3.2) possui uma solução.

De fato, suponhamos que $0 \neq f \in H^{-1}(\Omega)$ e considere o problema

$$\begin{cases} -\widetilde{M}(\|u\|^2)\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\widetilde{M}(t) = -M(t)$. É claro que $\widetilde{M}$ satisfaz (M_0) e o problema acima possui uma solução $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\widetilde{M}(\|v\|^2) > 0$. Daí, $u = -v$ é uma solução para (3.2) com $M(\|u\|^2) < 0$.

3.3 Um Caso Sub-linear

Nesta seção vamos focar nossa atenção no problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= u^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

onde $0 < \alpha < 1$, M é não-crescente e contínua, $H(t) = M(t^2)t$ é crescente, $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e $G(t) = t(M(t^2))^{\frac{2}{1-\alpha}}$ é injetora.

Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Se M satisfaz (M_0), $M(t) \leq m_\infty$, para algum $m_\infty > 0$ e todo $t \geq 0$, e*

$$\lim_{t \to +\infty} M(t^2)t^{1-\alpha} = +\infty,$$

então o problema (3.8) possui uma solução.

Demonstração: Primeiramente, considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= (u^+)^\alpha + \lambda\phi(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $\phi > 0$ é uma função em $H_0^1(\Omega)$, e $u^+ = \max\{u, 0\}$ é a parte positiva de u.

Seja $\Sigma = \{e_1, e_2, ..., e_m, ...\}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ considere $V_m = \text{span}\{e_1, e_2, ..., e_m\} \subset H_0^1(\Omega)$ o espaço vetorial de dimensão finita ($\dim(V_m) = m$) gerado por $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Assim, cada $u \in V_m$ é representado de maneira única por

$$u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i.$$

A partir daqui, sem nenhum comentário adicional, identificaremos $u \in V_m$ com $\xi \in \mathbb{R}^m$ via isometria T definida na seção 3.2.

Vamos mostrar que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in V_m$ solução aproximada de (3.9) satisfazendo

$$M(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx - \int_\Omega (u_m^+)^\alpha e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) e_i dx,\ i = 1, ..., m.$$

Consideremos, para cada $m \in \mathbb{N}$, a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \xi & \longmapsto & F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)), \end{array}$$

onde

$$F_i(\xi) = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla e_i dx - \int_\Omega (u^+)^\alpha e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) e_i dx, i = 1, ..., m \quad \text{e} \quad u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i.$$

Assim, sendo $\xi_i = \langle u, e_i \rangle$, tem-se

$$F_i(\xi) = M(\|u\|^2)\xi_i - \int_\Omega (u^+)^\alpha e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) e_i dx,\ i = 1, ..., m.$$

Com as identificações acima, vamos calcular no $\mathbb{R}^m$ o produto interno

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = F_1(\xi)\xi_1 + ... + F_m(\xi)\xi_m$$

assim,

$$\begin{array}{rcl} \langle F(\xi), \xi \rangle & = & M(\|u\|^2)\xi_1^2 - \int_\Omega (u^+)^\alpha e_1 \xi_1 dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) e_1 \xi_1 dx + \\ & ...+ & M(\|u\|^2)\xi_m^2 - \int_\Omega (u^+)^\alpha e_m \xi_m dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) e_m \xi_m dx \end{array}$$

o que implica,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M(\|u\|^2)|\xi|^2 - \int_\Omega (u^+)^\alpha \sum_{i=1}^{m} e_i \xi_i dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) \sum_{i=1}^{m} e_i \xi_i dx$$

logo,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M(\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_\Omega (u^+)^\alpha u dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) u dx.$$

Observe que,

$$(*) \qquad \int_\Omega (u^+)^\alpha u dx \leq \int_\Omega (u^+)^\alpha |u| dx \leq \int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx.$$

Usando (M_0), $(*)$ e a desigualdade de Hölder tem-se

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0 \|u\|^2 - \|u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} - \lambda \|\phi\|_2 \|u\|_2$$

Note que, $0 < \alpha < 1$ implica que $1 < \alpha + 1 < 2$. Daí, tem-se a imersão contínua de Sobolev

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega).$$

Assim,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0 \|u\|^2 - A\|u\|_2^{\alpha+1} - \lambda \|\phi\|_2 \|u\|_2.$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré obtemos,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0 \|u\|^2 - C_1 \|u\|^{\alpha+1} - C_2 \|u\| \geq 0 \;\; \text{para } \|u\| = r, \; r \approx +\infty.$$

Daí, pela Proposição 3.1, existe $u_m \in V_m$ com $\|u_m\| \leq r$, r não dependendo de m, tal que $F(u_m) = 0$, isto é, $F_i(u_m) = 0$ qualquer que seja $i = 1, ..., m$, ou seja,

$$M(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i dx - \int_\Omega (u_m^+)^\alpha e_i dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) e_i dx = 0, \; i = 1, ..., m,$$

o que implica,

$$M(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla w dx - \int_\Omega (u_m^+)^\alpha w dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) w dx = 0, \quad \forall w \in V_m. \tag{3.10}$$

Assim obtemos,

$$M(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 - \int_\Omega (u_m^+)^\alpha u_m dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) u_m dx = 0$$

o que implica,

$$\begin{aligned} M(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 &= \int_\Omega (u_m^+)^\alpha u_m dx + \lambda \int_\Omega \phi(x) u_m dx \\ &\leq \int_\Omega (u_m^+)^\alpha |u_m| dx + \lambda \int_\Omega |\phi(x)||u_m| dx \\ &\leq \int_\Omega |u_m|^{\alpha+1} dx + \lambda \int_\Omega |\phi(x)||u_m| dx \\ &\leq \|u_m\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \lambda \|\phi\|_2 \|u_m\|_2 \\ &\leq C\|u_m\|^{\alpha+1} + D\|u_m\|, \quad C, D > 0 \text{ constantes.} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $(\|u_m\|^2)$ é limitada.

Com efeito, suponhamos, por contradição, que $(\|u_m\|^2)$ não seja limitada. Então, a menos de subsequência, teríamos

$$\|u_m\| \to +\infty.$$

Daí, da condição (M_0), obteríamos

$$0 < m_0\|u_m\|^2 \leq C\|u_m\|^{\alpha+1} + D\|u_m\|$$

o que implicaria,

$$0 < m_0 \leq \frac{C}{\|u_m\|^{1-\alpha}} + \frac{D}{\|u_m\|} \to 0$$

isto é, $0 < m_0 \leq 0$ o que é uma contradição pois $m_0 > 0$.

Portanto, $(\|u_m\|^2)$ é limitado.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, a menos de subsequência, tem-se

$$\|u_m\|^2 \to \tilde{t}, \quad \text{para} \quad \tilde{t} > 0.$$

Além disso,

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

o que implica,

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad L^2(\Omega)$$

e ainda temos,

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad L^{\alpha+1}(\Omega).$$

Da continuidade de M, tem-se

$$M(\|u_m\|^2) \to M(\tilde{t}).$$

Tomemos $k \leq m$. Assim, $V_k \subset V_m$ e considere $\varphi \in V_k$. Logo,

$$M(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi dx - \int_\Omega (u_m^+)^\alpha \varphi dx - \lambda\int_\Omega \phi(x)\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in V_k.$$

Fixe k e seja $m \to +\infty$ obtemos

$$M(\tilde{t})\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx - \int_\Omega (u^+)^\alpha \varphi dx - \lambda\int_\Omega \phi(x)\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in V_k. \tag{3.11}$$

Como k é arbitrário teremos que a última igualdade permanece verdadeira para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Façamos $w = u_m$ em (3.10), então

$$M(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 - \int_\Omega (u_m^+)^\alpha u_m dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) u_m dx = 0$$

e assim fazendo $m \to +\infty$ obtemos

$$M(\tilde{t})\tilde{t} - \int_\Omega (u^+)^\alpha u dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) u dx = 0.$$

Desta igualdade e de (3.11) com $\varphi = u$, ou seja,

$$M(\tilde{t}) \int_\Omega \nabla u \nabla u dx - \int_\Omega (u^+)^\alpha u dx - \lambda \int_\Omega \phi(x) u dx = 0,$$

obtemos, $M(\tilde{t})\tilde{t} = M(\tilde{t})\|u\|^2$ o que implica, $\|u\|^2 = \tilde{t}$, isto é, u é uma solução fraca para o problema auxiliar (3.9) na qual depende de λ, ou seja, para cada $\lambda \in (0,1)$ obtemos uma solução fraca u_λ para o problema (3.9).

Como $M(\|u_\lambda\|^2) > 0$ podemos mostrar que $u_\lambda \geq 0$ e pelo Princípio do Máximo, $u_\lambda > 0$.

Daí,

$$\begin{cases} -M(\|u_\lambda\|^2)\Delta u_\lambda & = (u_\lambda^+)^\alpha + \lambda\phi(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_\lambda & > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_\lambda & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

usando que $M(t) \leq m_\infty \quad \forall t \geq 0$, tem-se

$$m_\infty(-\Delta u_\lambda) \geq M(\|u_\lambda\|^2)(-\Delta u_\lambda) = (u_\lambda^+)^\alpha + \lambda\phi(x) \geq u_\lambda^\alpha \quad \text{em } \Omega$$

o que implica,

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda & \geq m_\infty^{-1} u_\lambda^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u_\lambda & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por um resultado em Ambrosetti-Brézis-Cerami [5], tem-se

$$u_\lambda \geq m_\infty^{-1} w_1,$$

onde $w_1 > 0$ em Ω é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w_1 & \geq w_1^\alpha \quad \text{em } \Omega, \\ \quad w_1 & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como anteriormente, $\|u_\lambda\| \leq r_\lambda$ onde r_λ é uma constante positiva que depende de λ.

Vamos considerar $\lambda \in (0,1)$ e fazer $\lambda \to 0^+$. Para termos a garantia que $(\|u_\lambda\|)$ é limitada qualquer que seja $\lambda \in (0,1)$. Primeiramente, observemos que

$$M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\|^2 = \int_\Omega u_\lambda^{\alpha+1}dx + \lambda \int_\Omega \phi(x)u_\lambda dx$$

o que implica,

$$M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\|^2 \leq \int_\Omega |u_\lambda|^{\alpha+1}dx + \int_\Omega |\phi(x)||u_\lambda|dx.$$

Usando a imersão contínua de Sobolev $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$, e as desigualdades de Hölder e Poincaré encontramos

$$M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\|^2 \leq \|u_\lambda\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\phi\|_2\|u_\lambda\|_2 \leq C_1\|u_\lambda\|^{\alpha+1} + C_2\|u_\lambda\|, \quad \text{onde } C_1, C_2 > 0.$$

Como $0 < \alpha < 1$ obtemos,

$$M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\| \leq C_1\|u_\lambda\|^\alpha + C_2$$

o que implica,

$$M(\|u_\lambda\|^2)\frac{\|u_\lambda\|}{\|u_\lambda\|^\alpha} \leq C_1 + \frac{C_2}{\|u_\lambda\|^\alpha}$$

logo,

$$M(\|u_\lambda\|^2)\|u_\lambda\|^{1-\alpha} \leq C_1 + \frac{C_2}{\|u_\lambda\|^\alpha}.$$

Suponhamos, por contradição, que $(\|u_\lambda\|)$ não seja limitada, então a menos de subsequência, $\|u_\lambda\| \to +\infty$.

Daí, e do fato que $\lim_{t\to\infty} M(t^2)t^{1-\alpha} = +\infty$ obtemos,

$$+\infty \leq C_1$$

o que é um absurdo. Portanto, $(\|u_\lambda\|)$ é limitada $\forall \lambda \in (0,1)$.

Fazendo $\lambda \to 0$ e procedendo como antes, teremos que

$$\lim u_\lambda = u$$

e u é solução de (3.9). ■

3.4 Um Resultado de Existência e Unicidade de Solução

Nesta seção, estudaremos um problema que é uma generalização do problema estudado por Chipot-Lovat [13]. Mas precisamente, esses autores, estudaram o problema

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u dx\right)\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$, $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ é uma dada função e $f \in H^{-1}(\Omega)$. A equação (3.12) é a versão estacionária do problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - a\left(\int_\Omega u(x,t)dx\right)\Delta u &= f & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x), & u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é como antes, $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ é uma dada função, $f \in H^{-1}(\Omega)$, T é uma constante arbitrária. Neste problema a função u pode representar, por instância, a densidade de uma população (de bactérias, por exemplo) sujeita à disseminação. Neste caso, o coeficiente a é suposto depender da população total em Ω. Ver Chipot-Lovat[13] para mais detalhes.

Aqui estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega |u|^q dx\right)\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

onde Ω, f são como antes e $1 < q < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$. Quando $q = 2$ temos a equação de Carrier.

Teorema 3.4 *Se $t \mapsto a(t)$ é decrescente e contínua, para $t \geq 0$,*

$$\lim_{t \to +\infty} a(t^q)t = +\infty$$

e $t \mapsto a(t^q)t$ é injetora, para $t \geq 0$, então para cada $0 \neq f \in H^{-1}(\Omega)$ o problema (3.13) *possui uma única solução fraca.*

Demonstração: Como na prova do Teorema 3.3 da seção anterior, seja

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \xi &\longmapsto F(\xi)=(F_1(\xi),...,F_m(\xi)), \end{aligned}$$

onde

$$F_i(\xi)=a(\|u\|_q^q)\int_\Omega \nabla u\nabla e_i dx - \ll f,e_i \gg,\ i=1,...,m \text{ com } u=\sum_{i=1}^m \xi_i e_i,$$

e a identificação $\mathbb{R}^m$ e V_m mencionada anteriormente. Assim,

$$F_i(\xi)=a(\|u\|_q^q)\xi_i - \ll f,e_i \gg,\ i=1,...,m$$

e então

$$\langle F(\xi),\xi\rangle = a(\|u\|_q^q)\|u\|^2 - \ll f,e_i \gg .$$

Temos que mostrar a existência de $r>0$ de modo que $\langle F(\xi),\xi\rangle \geq 0,\ \forall|\xi|=r$ em V_m.

Suponhamos, por contradição, que para cada $r>0$ existe $u_r\in V_m$ tal que $\|u_r\|=r$ e

$$\langle F(\xi_r),\xi_r\rangle<0,\ \xi_r\leftrightarrow u_r.$$

Tomando $r=n\in\mathbb{N}$ nós obtemos a sequência (u_n), $\|u_n\|=n$, $u_n\in V_m$ e

$$\langle F(u_n),u_n\rangle = a(\|u_n\|_q^q)\|u_n\|^2 - \ll f,u_n \gg <0.$$

Assim,

$$a(\|u_n\|_q^q)\|u_n\|^2 < \ll f,u_n \gg \leq \|f\|_{H^{-1}}\|u_n\|_2 \leq\ C\|f\|_{H^{-1}}\|u_n\|$$

o que implica,

$$a(\|u_n\|_q^q)\|u_n\| \leq C\|f\|_{H^{-1}},\ \forall n=1,2,...\ .$$

Pela imersão contínua de Sobolev

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1<q<\frac{2N}{N-2},\ N\geq 3,$$

obtém-se $\|u\|_q\leq\alpha\|u\|$ para algum $\alpha>0$. Agora, pela monotonicidade da aplicação a tem-se

$$a(\|u\|_q^q)\geq a(\alpha^q\|u\|^q)$$

e assim,

$$a(\alpha^q \|u_n\|^q)\|u_n\| < c\|f\|$$

ou ainda,

$$a((\beta^{\frac{1}{q}}\|u_n\|)^q)\beta^{\frac{1}{q}}\|u_n\| < \beta^{\frac{1}{q}}c\|f\|.$$

Em vista de,

$$\lim_{t\to+\infty} a(t^q)t = +\infty$$

tem-se que, $\|u_n\| \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o que é uma contradição pois $\|u_n\| = n$.

Assim, existe $r_m > 0$ tal que

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq 0, \ \forall |\xi| = r_m.$$

Em vista da Proposição 3.1, existe $u_m \in V_m$, com $\|u_m\| \leq r_m$ tal que

$$F_i(u_m) = 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$

de modo que,

$$a(\|u_m\|_q^q)\int_\Omega \nabla u_m \nabla w dx = \ll f, w \gg, \ \forall w \in V_m. \tag{3.14}$$

Seja $w = u_m$ em (3.14), encontramos

$$a(\|u_m\|_q^q)\|u_m\|^2 = \ll f, u_m \gg \leq C\|f\|_{H^{-1}}\|u_m\|$$

o que implica,

$$a(\|u_m\|_q^q)\|u_m\| \leq C\|f\|_{H^{-1}}.$$

Logo,

$$a((\beta^{\frac{1}{q}}\|u_m\|)^q)\beta^{\frac{1}{q}}\|u_m\| < \beta^{\frac{1}{q}}c\|f\|.$$

Como $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t^q)t = +\infty$, concluímos que $\|u_m\| \leq k, \ \forall m = 1, 2, ...$ para uma constante k que não depende de m.

Daí,

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

o que implica,

$$u_m \to u \text{ em } L^q(\Omega), \ 1 < q < \frac{2N}{N-2}$$

e assim,

$$\|u_m\|_q \to \|u\|_q.$$

Tomando o limite em (3.14), nós concluímos que u é solução fraca para o problema (3.13). Sendo $a(t^q)t$ injetora para $t \geq 0$, tal solução é única. ■

Capítulo 4

Aplicações do Método de Sub e Supersolução

Neste capítulo, estudaremos alguns Problemas Elípticos Não-Locais utilizando Sub e Supersolução Via Iteração Monotônica. A Primeira classe de problemas que aparece é dado por

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u & = f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u & > 0 \qquad\quad\;\; \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \qquad\quad\;\; \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$ é um domínio limitado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 satisfazendo algumas condições.

Em seguida, estudamos uma classe de Sistemas Elípticos Não-Locais dado por

$$\begin{cases} -\Delta u & = f_1(x,u)\|v\|_{\alpha_1}^{p_1}, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v & = f_2(x,v)\|u\|_{\alpha_2}^{p_2}, \quad x \in \Omega, \\ u & > 0, v > 0, \qquad\quad x \in \Omega, \\ u & = v = 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$, é um domínio limitado suave, $p_i > 0$, $1 \leq \alpha_i \leq +\infty$ e f_i, $i = 1, 2$ satisfazem algumas hipóteses que serão introduzidas posteriormente.

Por último,

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega u dx\right)\Delta u & = \lambda f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u & = 0 \qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

Existem números positivos $a_0 \leq a_\infty$ tais que $a_0 \leq a(t) \leq a_\infty, \ \forall t \in \mathbb{R}$,

$\lambda > 0$ é um parâmetro, e existe $\theta > 0$ tal que $f : [0, \theta] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo

$$\begin{aligned} f(0) &= f(\theta) = 0, \\ f'(0) &> 0, \\ f(t) &> 0, \ \text{para todos } t \in (0, \theta). \end{aligned}$$

Dessa vez o problema estará associado a um teorema de ponto fixo.

4.1 Um Problema Sub-linear

Nesta seção estudaremos a seguinte classe de problemas elípticos não-locais,

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u & = f(x, u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u & > 0 \qquad\quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u & = 0 \qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N, \ (N \geq 1)$ é um domínio limitado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 satisfazendo

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x, t)}{t} > \lambda_1 \tag{4.2}$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x, t)}{t} < \lambda_1, \tag{4.3}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ sob condições de fronteira de Dirichlet. Estas duas últimas condições nos dizem que nas proximidades de 0 o gráfico da função $f(x, .)$ encontra-se acima da reta $\lambda_1 t$, enquanto que para t suficientemente grande o gráfico da função $f(x, .)$ está abaixo do gráfico da reta $\lambda_1 t$.

Usaremos aqui, a técnica de Sub e Supersolução, via Iteração Monotônica, para mostrar a existência de solução positiva para o problema (4.1). Estamos seguindo as idéias desenvolvidas em Corrêa [15].

Antes de iniciarmos, relembre-mos os conceitos de subsolução e supersolução.

Diz-se que $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma supersolução para o problema (4.1) se

$$\begin{cases} -M(\|\overline{u}\|^2)\Delta\overline{u} & \geq f(x,\overline{u}) \quad \text{em } \Omega, \\ \overline{u} & = 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Analogamente, diz-se que $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma subsolução para o problema (4.1) se

$$\begin{cases} -M(\|\underline{u}\|^2)\Delta\underline{u} & \leq f(x,\underline{u}) \quad \text{em } \Omega, \\ \underline{u} & = 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos, agora, as seguintes condições:

(m_0) $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$,

(m_1) M é não-crescente em $[0, +\infty)$, e defina $H : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por $H(t) = M(t^2)t$.

Com as informações acima tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *(Um Princípio de Comparação) Suponhamos que M satisfaça $(m_0) - (m_1)$ e H seja crescente com $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Sejam $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$ funções não-negativas verificando*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u & \leq -M(\|w\|^2)\Delta w \quad em\ \Omega, \\ u & = w = 0 \qquad\qquad\quad em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Então,

$$u \leq w \ em\ \overline{\Omega}.$$

Demonstração: Façamos o seguinte: multipliquemos ambos os membros da desigualdade em (4.4) por u e depois integrando por partes, obtém-se

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega -\Delta u u dx \leq M(\|w\|^2)\int_\Omega -\Delta w u dx$$

o que implica,

$$M(\|u\|^2)\|u\|^2 \leq M(\|w\|^2)\int_\Omega \nabla w \nabla u dx.$$

Agora, façamos o mesmo multiplicando ambos os membros da desigualdade em (4.4) por w e depois integrando por partes, para obter

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla w dx \leq M(\|w\|^2)\|w\|^2.$$

Assim,

$$\frac{M(\|u\|^2)\|u\|^2}{M(\|w\|^2)} \leq \int_\Omega \nabla u \nabla w dx \leq \frac{M(\|w\|^2)\|w\|^2}{M(\|u\|^2)}$$

o que implica,

$$\frac{M(\|u\|^2)\|u\|^2}{M(\|w\|^2)} \leq \frac{M(\|w\|^2)\|w\|^2}{M(\|u\|^2)}.$$

Logo,

$$\Big(M(\|u\|^2)\Big)^2\|u\|^2 \leq \Big(M(\|w\|^2)\Big)^2\|w\|^2$$

de onde resulta que,

$$M(\|u\|^2)\|u\| \leq M(\|w\|^2)\|w\|$$

e desde que $H(t) = M(t^2)t$ é crescente, obtém-se

$$\|u\| \leq \|w\|.$$

Daí, como M é não-crescente em $[0, +\infty)$

$$M(\|u\|^2) \geq M(\|w\|^2). \tag{4.5}$$

De (4.4) tem-se

$$\begin{cases} -\Delta(M(\|u\|^2)u - M(\|w\|^2)w) & \leq 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = w & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Princípio do Máximo,

$$M(\|u\|^2)u - M(\|w\|^2)w \leq 0$$

o que implica,

$$M(\|u\|^2)u \leq M(\|w\|^2)w.$$

Desta última desigualdade e de (4.5), concluímos

$$u \leq w \text{ em } \Omega.$$

■

Teorema 4.2 *Suponhamos que M satisfaça $(m_0) - (m_1)$, H seja crescente e $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Sejam $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$ funções satisfazendo*

$$\begin{aligned} 0 \leq u \leq w \quad & em\ \Omega, \\ u = w = 0 \quad & em\ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.6}$$

e

$$\begin{aligned} -M(\|u\|^2)\Delta u \quad & \leq \quad f(x,u)\ em\ \Omega, \\ -M(\|w\|^2)\Delta w \quad & \geq \quad f(x,w)\ em\ \Omega. \end{aligned} \tag{4.7}$$

As funções u e w são, respectivamente, sub e supersolução do problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u(x) & = f(x,u(x)) \quad em\ \Omega, \\ \qquad u(x) & = 0 \qquad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, suponhamos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja crescente na variável t, para $x \in \overline{\Omega}$ fixado, isto é,

$$t_1 \geq t_2 \Rightarrow f(x,t_1) \geq f(x,t_2),\ para\ todo\ x \in \overline{\Omega}.$$

Então, existe $U \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -M(\|U\|^2)\Delta U & = f(x,U) \quad em\ \Omega, \\ \qquad U & = 0 \qquad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

e $u \leq U \leq w$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração: Como $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tem-se que $f(.,u(.)) \in L^2(\Omega)$. Consideremos o problema M-linear

$$\begin{cases} -M(\|v\|^2)\Delta v & = f(x,v) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad v & = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Observe que, $t \mapsto M((t^{\frac{1}{2}})^2)t^{\frac{1}{2}}$ é crescente,

$$\lim_{t \to +\infty} M((t^{\frac{1}{2}})^2)t^{\frac{1}{2}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} M((t^{\frac{1}{2}})^2)t^{\frac{1}{2}} = 0,$$

então pelo Observação 1.3 segue-se que existe uma única solução $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ do problema (4.9). Tem-se, também, que

$$-M(\|u_1\|^2)\Delta u_1 = f(x,u) \geq -M(\|u\|^2)\Delta u, \text{ em } \Omega$$

e, pelo Teorema 4.1,

$$u \leq u_1 \text{ em } \Omega.$$

Observe que, sendo f crescente na variável t, para $x \in \overline{\Omega}$ fixado, temos $f(x,u) \leq f(x,w)$. Logo,

$$-M(\|u_1\|^2)\Delta u_1 \leq -M(\|w\|^2)\Delta w \text{ em } \Omega,$$

e usando novamente o Princípio de Comparação (Teorema 4.1) tem-se

$$u_1 \leq w \text{ em } \Omega$$

consequentemente,

$$0 \leq u \leq u_1 \leq w \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Analogamente, obtemos $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -M(\|v_1\|^2)\Delta v_1 &= f(x,w) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad v_1 &= 0 \qquad\quad\ \ \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja

$$-M(\|u\|^2)\Delta u \leq f(x,u) = -M(\|u_1\|^2)\Delta u_1 \leq f(x,w) = -M(\|v_1\|^2)\Delta v_1$$

e

$$f(x,w) = -M(\|v_1\|^2)\Delta v_1 \leq -M(\|w\|^2)\Delta w, \text{ em } \Omega$$

o que implica,

$$0 \leq u \leq u_1 \leq v_1 \leq w \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Repetindo este argumento, encontramos duas sequências $(u_n), (v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$0 \leq u = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq v_0 = w \text{ em } \overline{\Omega}, \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} -M(\|u_n\|^2)\Delta u_n &= f(x,u_{n-1}) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad u_n &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{cases} -M(\|v_n\|^2)\Delta v_n &= f(x,v_{n-1}) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad v_n &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.12}$$

Mostraremos que, a sequência (u_n) converge para uma solução U de (4.8). Multiplicando ambos os membros da equação (4.11) por u_n e integrando por partes, obtemos

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \int_\Omega f(x,u_{n-1}(x))u_n(x)dx.$$

Daí,

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \leq \|f(.,u_{n-1}(.))\|_2\|u_n\|_2$$

o que implica,

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\| \leq C\|f(.,u_n)\|_2$$

logo,

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\| \leq C. \tag{4.13}$$

Desde que H é crescente com $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ concluímos, da última desigualdade, que $(\|u_n\|)$ é limitada. Assim, passando possivelmente para subsequência, existe $U \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup U \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

e usando a compacidade das imersões de Sobolev, obtém-se

$$u_n \to U \text{ em } L^p(\Omega)$$

para $p \in [1, p^*)$, se $N \geq 3$, ou $p \in [1, +\infty)$ se $N = 1, 2$. Observando que existe $k_1 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_\infty \leq k_1 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

teremos que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ com $p > N$, e consequentemente $(u_n) \subset C^{1,\alpha}(\Omega)$ com

$$\|u_n\|_{1,\alpha} \leq k_2 \text{ para algum } k_2 > 0.$$

Portanto, usando a imersão de Schauder, conseguimos

$$\|u_n\|^2 \to \|U\|^2$$

e pela continuidade da função M

$$M(\|u_n\|^2) \to M(\|U\|^2). \tag{4.14}$$

Além disso, para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle U, \varphi\rangle \tag{4.15}$$

e

$$\int_\Omega f(.,u_n(.))\varphi dx \to \int_\Omega f(.,U)\varphi dx. \tag{4.16}$$

Assim, de (4.14) – (4.16) tem-se

$$-M(\|U\|^2)\int_\Omega \nabla U \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,U)\varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

isto é,

$$\begin{cases} -M(\|U\|^2)\Delta U &= f(x,U) \quad \text{em } \Omega, \\ U &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $0 \leq u \leq U \leq w$ em $\overline{\Omega}$.

Do mesmo modo, encontramos V como o limite da sequência (v_n) tal que

$$\begin{cases} -M(\|V\|^2)\Delta V &= f(x,V) \quad \text{em } \Omega, \\ V &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $0 \leq u \leq U \leq V \leq w$ em $\overline{\Omega}$, e a demonstração do teorema está completa. ■

Aplicação 4.1 *Faremos uma aplicação do teorema precedente ao seguinte problema*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u &= u^\alpha \quad em\ \Omega, \\ u &> 0 \quad em\ \Omega, \\ u &= 0 \quad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.17}$$

em que $0 < \alpha < 1$.

Mostraremos que se $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *for uma função contínua, não-crescente, satisfazendo* (m_0), *se* $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *for crescente, com* $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *e se a função*

$$G(t) = [M(t^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} t$$

for injetiva em $[0, +\infty)$ *o problema* (4.17) *possui uma única solução.*

Vamos mostrar a existência e a unicidade.

Existência. *Seja* ϕ_1 *uma auto-função positiva de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, *associada ao seu primeiro autovalor* λ_1, *ou seja,*

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 &= \lambda_1\phi_1 \quad em\ \Omega, \\ \phi_1 &= 0 \quad em\ \partial\Omega, \end{cases}$$

e tal que $\|\phi_1\| = 1$. *Assim,*

$$-M(\|\epsilon\phi_1\|^2)\Delta(\epsilon\phi_1) = \epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1 \ em\ \Omega.$$

Observe que $\epsilon\phi_1$ *é uma subsolução para o problema* (4.17) *se* $\epsilon > 0$ *for suficientemente pequeno, ou seja,*

$$\epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1 \leq (\epsilon\phi_1)^\alpha \ em\ \Omega$$

com $0 < \alpha < 1$.

De fato, observe que,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{1-\alpha} M(\epsilon^2)\lambda_1 \|\phi_1\|_\infty^{1-\alpha} = 0$$

e

$$\|\phi_1\|_\infty^{1-\alpha} \geq [\phi_1(x)]^{1-\alpha}.$$

Logo,

$$\epsilon^{1-\alpha} M(\epsilon^2)\lambda_1 [\phi_1(x)]^{1-\alpha} \leq \epsilon^{1-\alpha} M(\epsilon^2)\lambda_1 \|\phi_1\|_\infty^{1-\alpha} \leq 1.$$

Assim,

$$\epsilon^{1-\alpha} M(\epsilon^2)\lambda_1 [\phi_1(x)]^{1-\alpha} \leq 1,$$

e sendo $0 < \alpha < 1$ *tem-se*

$$\epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1 \phi_1(x) \leq \epsilon^\alpha [\phi_1(x)]^\alpha$$

o que implica

$$\epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1 \phi_1 \leq (\epsilon\phi_1)^\alpha, \; 0 < \alpha < 1.$$

Portanto,

$$-M(\|\epsilon\phi_1\|^2)\Delta(\epsilon\phi_1) \leq (\epsilon\phi_1)^\alpha \text{ em } \Omega.$$

Seja $e \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ *a solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta e &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ e &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que, γe *é uma supersolução de* (4.17)*, isto é,*

$$-M(\gamma^2\|e\|^2)\Delta(\gamma e) \geq (\gamma e)^\alpha,$$

ou equivalentemente,

$$\gamma M(\gamma^2\|e\|^2) \geq \gamma^\alpha e^\alpha,$$

quando γ *for suficientemente grande.*

De fato, observe que,

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \gamma^{1-\alpha} = +\infty.$$

Suponha que $\gamma^{1-\alpha} > \|e\|_\infty^\alpha \geq [e(x)]^\alpha$ *então,*

$$\gamma^{1-\alpha} > [e(x)]^\alpha \Rightarrow \gamma > \gamma^\alpha [e(x)]^\alpha \Rightarrow \gamma > (\gamma e(x))^\alpha.$$

Logo,

$$-\Delta(\gamma e) = \gamma > (\gamma e)^\alpha$$

o que implica,

$$-M(\gamma^2\|e\|^2)\Delta(\gamma e) \geq (\gamma e)^\alpha$$

ou equivalentemente,

$$\gamma M(\gamma^2\|e\|^2) \geq \gamma^\alpha e^\alpha.$$

Afirmação 4.1 *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos também*

$$\epsilon\phi_1(x) < \gamma e(x), \ \forall x \in \Omega. \tag{4.18}$$

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, definamos o conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Sendo $e, \phi_1 > 0$ em Ω e $\Omega \backslash \Omega_\delta$ compacto, temos que existe $k_0 > 0$ tal que

$$\frac{\gamma e(x)}{\phi_1(x)} \geq k_0 \ \forall x \in \Omega \backslash \Omega_\delta. \tag{4.19}$$

Por outro lado, sendo $\dfrac{\partial e}{\partial \nu}(x) < 0$ em $\partial\Omega$, onde ν é o vetor normal unitário exterior em $\partial\Omega$, e sendo $\partial\Omega$ compacto, então existe $k_1 < 0$ tal que

$$\frac{\partial e}{\partial \nu}(x) \leq k_1, \ \forall x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Além disso, como $\phi_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ existe $k_2 > 0$ satisfazendo

$$\left|\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x)\right| \leq k_2, \ \forall x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Seja $A_1 = \inf\limits_{\overline{\Omega}_\delta} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ e defina

$$H(x) = n\phi_1(x) - e(x), \ \text{com } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Então,

$$\frac{\partial H}{\partial \nu}(x) = n\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} - \frac{\partial e}{\partial \nu}(x) \geq nA_1 - k_1 > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

desde que $n > \dfrac{k_1}{A_1}$.

Fixemos $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e consideremos a função

$$g(s) = H(x + s\nu), \ \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Para cada $x \in \overline{\Omega}_\delta$ escolha único $\tilde{x} \in \overline{\Omega}_\delta$ de modo que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\nu = \nu(\tilde{x})$.

Logo, existe $\tilde{s} > 0$ tal que $x + \tilde{s}\nu = \tilde{x} \in \partial\Omega$.

Desde que, $H(\partial\Omega) \equiv 0$, segue-se

$$g(\tilde{s}) = H(x + \tilde{s}\nu) = 0.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \tilde{s})$ tal que

$$g(\tilde{s}) - g(0) = g'(\xi)(\tilde{s} - 0),$$

ou seja,

$$-H(x) = \frac{\partial H}{\partial \nu}(x + \xi\nu)\tilde{s} > 0 \ em \ \overline{\Omega}_\delta.$$

Portanto, $H(x) \leq 0$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}_\delta$. *De onde segue que,*

$$n\phi_1(x) \leq e(x) \ em \ \forall x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

consequentemente

$$\frac{\gamma e(x)}{\phi_1(x)} \geq \gamma n > 0 \ em \ \Omega_\delta. \tag{4.20}$$

Logo, de (4.19) *e* (4.20) *obtemos*

$$\frac{\gamma e(x)}{\phi_1(x)} \geq k > 0 \ \forall x \in \Omega$$

onde $k = \min\{k_0, \gamma n\}$.

Segue para $0 < \epsilon < k$ *a validade da desigualdade* (4.18). ■

Assim, temos ao nosso dispor as hipóteses do Teorema 4.2 *de modo que existe uma solução* $U \in C^2(\Omega)$ *de* (4.17), *satisfazendo*

$$\epsilon\phi_1(x) \leq U(x) \leq \gamma e(x) \ em \ \overline{\Omega}$$

o que mostra a existência.

Unicidade. *Sejam* U_1 *e* U_2 *soluções de* (4.17). *Observe que as funções*

$$\widetilde{U}_1(x) = [M(\|U_1\|^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} U_1(x)$$

e

$$\widetilde{U}_2(x) = [M(\|U_2\|^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} U_2(x)$$

são ambas soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= v^\alpha \quad em \ \Omega, \\ \quad v &> 0 \quad em \ \Omega, \\ \quad v &= 0 \quad em \ \partial\Omega, \end{cases}$$

pois

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{U}_1 \nabla\varphi dx = [M(\|U_1\|^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_\Omega \nabla U_1 \nabla\varphi dx = [M(\|U_1\|^2)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_\Omega U_1^\alpha \varphi dx$$

o que implica,

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{U}_1 \nabla\varphi dx = \int_\Omega [[M(\|U_1\|^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} U_1]^\alpha \varphi dx = \int_\Omega \widetilde{U}_1^\alpha \varphi dx, \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Analogamente, obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla \widetilde{U}_2 \nabla \psi dx = \int_{\Omega} \widetilde{U}_2^{\alpha} \psi dx, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Usando o resultado de unicidade mostrado em Brezis-Oswald [8], *concluímos que*

$$\widetilde{U}_1(x) = \widetilde{U}_2(x) \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}$$

e

$$[M(\|U_1\|^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \|U_1\| = [M(\|U_2\|^2)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \|U_2\|.$$

Pela hipótese de que a função G é injetora em $[0, +\infty)$ segue-se que $\|U_1\| = \|U_2\|$, concluído assim que, $U_1(x) = U_2(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. E com isso a demonstração da unicidade está completa.

Aplicação 4.2 *Uma outra aplicação refere-se ao problema*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u & = u^{\alpha} + \lambda u^{\beta} \quad \text{em } \Omega, \\ u & > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.21}$$

onde $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (m_0), λ é um parâmetro positivo e $0 < \beta < 1 < \alpha$. A versão local deste problema, isto é, quando $M(t) \equiv 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, foi abordado em Ambrosetti, Brezis e Cerami [5].

Vamos considerar o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta e & = 1 \quad \text{em } \Omega, \\ e & = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e seja $e > 0$, $e \in C_0^{\infty}(\Omega)$ a única solução do problema anterior. Desde que $0 < \beta < 1 < \alpha$, podemos encontrar $\lambda_0 > 0$ tal que, para cada $0 < \lambda \leq \lambda_0$ existe $\delta = \delta(\lambda) > 0$ satisfazendo

$$m_0 \gamma \geq \lambda \gamma^{\beta} \|e\|_{\infty}^{\beta} + \gamma^{\alpha} \|e\|_{\infty}^{\alpha}.$$

De fato, a desigualdade acima é equivalente a

$$1 \geq \frac{\lambda}{m_0} \gamma^{\beta-1} \|e\|_{\infty}^{\beta} + \frac{1}{m_0} \gamma^{\alpha-1} \|e\|_{\infty}^{\alpha}. \tag{4.22}$$

Seja $F : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ uma função real dada por

$$F(\gamma) = \frac{\lambda}{m_0} \gamma^{\beta-1} \|e\|_{\infty}^{\beta} + \frac{1}{m_0} \gamma^{\alpha-1} \|e\|_{\infty}^{\alpha}.$$

Assim, desejamos que $F(\gamma) \leq 1$. Para isso, vamos derivar a função F e obter,

$$F'(\gamma) = \frac{\lambda}{m_0} (\beta - 1) \gamma^{\beta-2} \|e\|_{\infty}^{\beta} + \frac{1}{m_0} (\alpha - 1) \gamma^{\alpha-2} \|e\|_{\infty}^{\alpha}.$$

Façamos, $F'(\gamma) = 0$. *Com isso,*

$$\frac{\lambda}{m_0}(\beta - 1)\gamma^{\beta-2}\|e\|_\infty^\beta + \frac{1}{m_0}(\alpha - 1)\gamma^{\alpha-2}\|e\|_\infty^\alpha = 0$$

o que implica,

$$\frac{1}{m_0}(\alpha - 1)\gamma^{\alpha-2}\|e\|_\infty^\alpha = \frac{\lambda}{m_0}(1 - \beta)\gamma^{\beta-2}\|e\|_\infty^\beta,$$

logo,

$$\gamma(\lambda) = \gamma = \lambda^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-1}\right) \|e\|_\infty^{-1}. \tag{4.23}$$

Ou seja, o mínimo de F *ocorre em* (4.23), *além disso,*

$$F(\gamma(\lambda)) \to 0 \text{ quando } \lambda \downarrow 0.$$

Logo, existe $\lambda_0 > 0$ *tal que, para todo* $\lambda \in [0, \lambda_0)$ *temos,* $F(\gamma(\lambda)) \leq 1$.

Acabamos de justificar (4.22).

Consequentemente, obtemos que a função γe *satisfaz*

$$-M(\|\gamma e\|^2)\Delta(\gamma e) = \gamma M(\gamma^2\|e\|^2) \geq \gamma m_0$$

o que implica,

$$-M(\|\gamma e\|^2)\Delta(\gamma e) \geq \lambda\gamma^\beta\|e\|_\infty^\beta + \gamma^\alpha\|e\|_\infty^\alpha$$

de onde segue,

$$-M(\|\gamma e\|^2)\Delta(\gamma e) \geq \lambda(\gamma e)^\beta + (\gamma e)^\alpha$$

e portanto γe *é uma supersolução de* (4.21).

Por outro lado, seja ϕ_1 *uma autofunção positiva de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, *associada ao seu primeiro autovalor* λ_1, *e tal que* $\|\phi_1\| = 1$.

Observe que,

$$-M(\|\epsilon\phi_1\|^2)\Delta(\epsilon\phi_1) = \epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1 \text{ em } \Omega.$$

Assim, para $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, temos*

$$\epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1(x) \leq \lambda(\epsilon\phi_1)^\beta + (\epsilon\phi_1)^\alpha \text{ em } \Omega$$

pois $0 < \beta < 1 < \alpha$.

De fato, note que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{1-\beta}\lambda_1 M(\epsilon^2)\|\phi_1\|_\infty^{1-\beta} = 0$$

e

$$\|\phi_1\|_\infty^{1-\beta} \geq [\phi_1(x)]^{1-\beta}.$$

Logo,

$$\epsilon^{1-\beta}\lambda_1 M(\epsilon^2)[\phi_1(x)]^{1-\beta} \leq \epsilon^{1-\beta}\lambda_1 M(\epsilon^2)\|\phi_1\|_\infty^{1-\beta} \leq 1.$$

Assim,

$$\epsilon^{1-\beta}\lambda_1 M(\epsilon^2)[\phi_1(x)]^{1-\beta} \leq 1,$$

e sendo $0 < \beta < 1$, *tem-se*

$$\epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1(x) \leq \epsilon^\beta[\phi_1(x)]^\beta$$

o que implica,

$$\epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1(x) \leq (\epsilon\phi_1(x))^\beta, \ \ para\ 0 < \beta < 1.$$

Logo,

$$-M(\|\epsilon\phi_1\|^2)\Delta(\epsilon\phi_1) = \epsilon M(\epsilon^2)\lambda_1\phi_1 \leq \lambda(\epsilon\phi_1)^\beta.$$

Como $\phi_1(x) > 0$ *em* Ω, *concluímos*

$$-M(\|\epsilon\phi_1\|^2)\Delta(\epsilon\phi_1) \leq \lambda(\epsilon\phi)^\beta + (\epsilon\phi_1)^\alpha, \ \ para\ 0 < \beta < 1 < \alpha.$$

Portanto, $\epsilon\phi_1$ *é uma subsolução de* (4.21) *desde que* $\epsilon > 0$ *seja suficientemente pequeno.*

Observe que, pela Afirmação 4.1 *tem-se,*

$$\epsilon\phi_1(x) < \gamma e(x), \ \ \forall x \in \Omega$$

desde que $\epsilon > 0$ *seja suficientemente pequeno.*

Portanto, temos as hipóteses do Teorema 4.2, *de modo que existe uma solução* $U \in C^2(\overline{\Omega})$ *de* (4.21), *satisfazendo*

$$\epsilon\phi_1(x) \leq U(x) \leq \gamma e(x), \ \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

4.2 Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Sistemas Elípticos Não-Locais

Nesta seção ainda utilizaremos o método de Sub e Supersolução, via Iteração Monotônica para estudar a existência de solução positiva na seguinte classe de sistemas elípticos não-locais,

$$\begin{cases} -\Delta u &= f_1(x,u)\|v\|_{\alpha_1}^{p_1}, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v &= f_2(x,v)\|u\|_{\alpha_2}^{p_2}, \quad x \in \Omega, \\ \quad u &> 0, v > 0, \qquad\quad x \in \Omega, \\ \quad u &= v = 0, \qquad\quad\ \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.24}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$, é um domínio limitado e suave, $p_i > 0$, $1 \leq \alpha_i \leq +\infty$ e f_i, $i = 1, 2$ satisfazem algumas hipóteses que serão introduzidas posteriormente.

Este sistema é a versão estacionária do seguinte sistema parabólico não-local

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f_1(x,u)\|v\|_{\alpha_1}^{p_1}, \qquad\qquad x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - \Delta v &= f_2(x,v)\|u\|_{\alpha_2}^{p_2}, \qquad\qquad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) &= 0, v(x,t) = 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

Quando as funções f_1, f_2 forem constantes positivas, o sistema (4.25) foi discutido por Deng, Li e Xie [28].

Seguiremos as idéias desenvolvidas em Chen-Gao [11].

Vejamos a definição de solução fraca para o sistema (4.24),

Definição 4.1 *Dizemos que uma função* $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *é uma solução fraca de* (4.24)*, se satisfizer*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \|v\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,u)\varphi dx$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx = \|u\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x,v)\varphi dx$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

A seguir, enunciaremos a definição de subsolução e supersolução para o sistema (4.24).

Definição 4.2 *Uma função* $(\overline{u}, \overline{v}) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *é chamada uma supersolução fraca para* (4.24) *se*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \varphi dx &\geq \|\overline{v}\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,\overline{u})\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi > 0 \ q.t.p.\ em\ \Omega, \\ \int_\Omega \nabla \overline{v} \nabla \psi dx &\geq \|\overline{u}\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x,\overline{v})\psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega),\ \psi > 0 \ q.t.p.\ em\ \Omega. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Analogamente, $(\underline{u}, \underline{v}) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *é chamada uma subsolução fraca para* (4.24) *se*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx &\leq \|\underline{v}\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,\underline{u})\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi > 0 \ q.t.p.\ em\ \Omega, \\ \int_\Omega \nabla \underline{v} \nabla \psi dx &\leq \|\underline{u}\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x,\underline{v})\psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega),\ \psi > 0 \ q.t.p.\ em\ \Omega. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Veremos, agora, o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Suponhamos que $f_1(x,u), f_2(x,v) \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ são não-decrescentes, positivas e Lipschitz contínua em u e v respectivamente. Suponhamos também, que exista uma supersolução fraca $(\overline{u}(x),\overline{v}(x))$ e uma subsolução fraca $(\underline{u}(x),\underline{v}(x))$ do sistema (4.24), satisfazendo*

$$\begin{aligned} (\overline{u}(x),\overline{v}(x)) &\geq 0,\ (\underline{u}(x),\underline{v}(x)) \leq 0 \quad \text{em } \partial\Omega \text{ no sentido do traço}, \\ (\underline{u}(x),\underline{v}(x)) &\leq (\overline{u}(x),\overline{v}(x)) \qquad\qquad q.t.p. \text{ em } \Omega. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Então existe uma solução (u,v) de (4.24), tal que

$$(\underline{u}(x),\underline{v}(x)) \leq (u(x),v(x)) \leq (\overline{u}(x),\overline{v}(x)),\ \ q.t.p. \text{ em } \Omega. \tag{4.29}$$

Além disso, se $(\underline{u}(x),\underline{v}(x)) > 0$ em Ω, a solução do sistema (4.24) é positiva.

Demonstração: Escrevendo $(u_0,v_0) = (\underline{u},\underline{v})$, podemos construir uma sequência $\{(u_k,v_k)\} \subset H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ a partir do seguinte processo iterativo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_k \nabla\varphi dx &= \|v_{k-1}\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,u_{k-1})\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla v_k \nabla\psi dx &= \|u_{k-1}\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x,v_{k-1})\psi dx, \quad \forall\psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Afirmamos que,

$$(u_0,v_0) = (\underline{u},\underline{v}) \leq (u_1,v_1) \leq ... \leq (u_n,v_n) \leq (\overline{u},\overline{v}). \tag{4.31}$$

Para demonstrar (4.31), façamos primeiro, $k=1$ em (4.30).

Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_1 \nabla\varphi dx &\leq \|v_0\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,u_0)\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla v_1 \nabla\psi dx &\leq \|u_0\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x,v_0)\psi dx, \quad \forall\psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Subtraindo (4.32) de (4.27) encontramos,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi dx - \int_\Omega \nabla u_1 \nabla\varphi dx \leq \|v_0\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,u_0)\varphi dx - \|v_0\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x,u_0)\varphi dx$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - u_1)\nabla\varphi dx \leq 0.$$

Analogamente encontramos,

$$\int_\Omega \nabla(v_0 - v_1)\nabla\psi dx \leq 0.$$

Definindo $\varphi = (u_0 - u_1)^+$ e $\psi = (v_0 - v_1)^+$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(u_0 - u_1)\nabla(u_0 - u_1)^+ dx &\leq 0, \\ \int_\Omega \nabla(v_0 - v_1)\nabla(v_0 - v_1)^+ dx &\leq 0. \end{aligned}$$

Destas duas últimas desigualdades tem-se,

$$\int_\Omega \nabla((u_0 - u_1)^+ - (u_0 - u_1)^-)\nabla(u_0 - u_1)^+ dx \leq 0$$

o que implica,

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - u_1)^+\nabla(u_0 - u_1)^+ dx - \int_\Omega \nabla(u_0 - u_1)^-\nabla(u_0 - u_1)^+ dx \leq 0.$$

Daí,

$$\int_\Omega |\nabla(u_0 - u_1)^+|^2 dx \leq 0$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla(u_0 - u_1)^+|^2 dx = 0$$

logo,

$$(u_0 - u_1)^+ = 0.$$

Portanto, $u_0 \leq u_1$. De modo análogo, encontramos $v_0 \leq v_1$.

Com o estudo feito, podemos concluir que,

$$(u_0, v_0) \leq (u_1, v_1) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Suponhamos a veracidade de,

$$(u_{k-1}, v_{k-1}) \leq (u_k, v_k) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } k. \tag{4.33}$$

De (4.30) obtemos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_{k+1}\nabla\varphi dx &= \|v_k\|_{\alpha_1}^{p_1}\int_\Omega f_1(x, u_k)\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla v_{k+1}\nabla\psi dx &= \|u_k\|_{\alpha_2}^{p_2}\int_\Omega f_2(x, v_k)\psi dx, \quad \forall\psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Definindo $\varphi = (u_k - u_{k+1})^+$ e $\psi = (v_k - v_{k+1})^+$, e procedendo como anteriormente, obtemos

$$\int_\Omega \nabla(u_k - u_{k+1})^+ \nabla(u_k - u_{k+1})^+ dx = \int_\Omega [f_1(x, u_{k-1})\|v_{k-1}\|_{\alpha_1}^{p_1} - f_1(x, u_k)\|v_k\|_{\alpha_1}^{p_1}](u_k - u_{k+1})^+ dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla(v_k - v_{k+1})^+ \nabla(v_k - v_{k+1})^+ dx = \int_\Omega [f_2(x, v_{k-1})\|u_{k-1}\|_{\alpha_2}^{p_2} - f_2(x, v_k)\|u_k\|_{\alpha_2}^{p_2}](v_k - v_{k+1})^+ dx.$$

Assim, de (4.33) e como f_1, f_2 são positivas, não-decrescentes, concluímos que

$$\int_\Omega \nabla(u_k - u_{k+1})^+ \nabla(u_k - u_{k+1})^+ dx \leq 0$$

e

$$\int_\Omega \nabla(v_k - v_{k+1})^+ \nabla(v_k - v_{k+1})^+ dx \leq 0.$$

Portanto, como anteriormente, obtemos

$$(u_k, v_k) \leq (u_{k+1}, v_{k+1}) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por fim, subtraindo (4.34) de (4.26) vamos encontrar

$$\int_\Omega \nabla(\overline{u} - u_{k+1})\nabla\varphi dx \geq \|\overline{v}\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x, \overline{u})\varphi dx - \|v_k\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x, u_k)\varphi dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla(\overline{v} - v_{k+1})\nabla\psi dx \geq \|\overline{u}\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x, \overline{v})\psi dx - \|u_k\|_{\alpha_2}^{p_2} \int_\Omega f_2(x, v_k)\psi dx$$

para todos $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Daí, definindo $\varphi = (u_{k+1} - \overline{u})^+$ e $\psi = (v_{k+1} - \overline{v})^+$, encontramos

$$\int_\Omega \nabla(u_{k+1} - \overline{u})\nabla(u_{k+1} - \overline{u})^+ dx \leq \int_\Omega [f_1(x, u_k)\|v_k\|_{\alpha_1}^{p_1} - f_1(x, \overline{u})\|\overline{v}\|_{\alpha_1}^{p_1}](u_{k+1} - \overline{u})^+ dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla(v_{k+1} - \overline{v})\nabla(v_{k+1} - \overline{v})^+ dx \leq \int_\Omega [f_2(x, v_k)\|u_k\|_{\alpha_2}^{p_2} - f_2(x, \overline{v})\|\overline{u}\|_{\alpha_2}^{p_2}](v_{k+1} - \overline{v})^+ dx$$

Como $(u_k, v_k) \leq (\overline{u}, \overline{v})$ e f_1, f_2 são positivas e não-decrescentes, obtemos

$$\int_\Omega \nabla(u_{k+1} - \overline{u})\nabla(u_{k+1} - \overline{u})^+ dx \leq 0$$

e

$$\int_\Omega \nabla(v_{k+1} - \overline{v})\nabla(v_{k+1} - \overline{v})^+ dx \leq 0,$$

temos,

$$(u_{k+1}, v_{k+1}) \leq (\overline{u}, \overline{v}) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, para $k = 0$ também é válido por (4.29). Portanto (4.31) é válido.

Vamos mostrar que $(\|u_n\|)$ é limitada. Para isso, observe que $\overline{u}, \overline{v} \in H_0^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ então

$$|u_n(x)| \leq |\overline{u}(x)| \leq \|\overline{u}\|_\infty$$

e

$$|u_n(x)| \leq |\overline{u}(x)| \leq \|\overline{u}\|_\infty,$$

o que implica que, $(u_n, v_n) \in L^\alpha(\Omega)$ qualquer que seja $1 \leq \alpha \leq +\infty$.

Como as funções f_1, f_2 são não-decrescentes, tem-se

$$f_1(x, u_n) \leq f_1(x, \overline{u}) \leq f_1(x, \|\overline{u}\|_\infty)$$

e

$$f_2(x, v_n) \leq f_2(x, \overline{v}) \leq f_2(x, \|\overline{v}\|_\infty).$$

Fazendo $\varphi = u_n$ em (4.30) encontramos

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n dx = \|v_{n-1}\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x, u_{n-1}) u_n dx.$$

Logo, com as informações acima e esta última igualdade, obtemos,

$$\|u_n\|^2 \leq \|\overline{v}\|_\infty^{p_1} \int_\Omega f_1(x, \|\overline{u}\|_\infty) \|\overline{u}\|_\infty dx = C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $(\|u_n\|)$ é limitada. De maneira análoga, encontramos que, $(\|v_n\|)$ também é limitada.

Com o estudo feito e do fato de $H_0^1(\Omega)$ ser um espaço reflexivo, a menos de subsequência, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to u \text{ em } L^{\alpha_2}(\Omega), \ 1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^*$$

e,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Analogamente, encontramos a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

$$v_n \to v \text{ em } L^{\alpha_1}(\Omega),\ 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^*$$

e,

$$v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Vamos mostrar que,

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

e

$$v_n \to v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Para isso, observe que

$$|f_1(x, u_n)| \leq f_1(x, \|\overline{u}\|_\infty)$$

e

$$|f_2(x, v_n)| \leq f_2(x, \|\overline{v}\|_\infty)$$

pela continuidade de f_1, f_2 em u, v respectivamente, tem-se

$$f_1(x, u_n(x)) \to f_1(x, u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$f_2(x, v_n(x)) \to f_2(x, v(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com isso, notemos que estamos nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o que implica

$$\int_\Omega f_1(x, u_n(x))dx \to \int_\Omega f_1(x, u(x))dx$$

e

$$\int_\Omega f_2(x, v_n(x))dx \to \int_\Omega f_2(x, v(x))dx.$$

Logo, tem-se que,

$$\|u_n - u\|^2 = \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u)dx = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)dx - \int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)dx$$

isto é,

$$\|u_n - u\|^2 = \|v_{n-1}\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x, u_{n-1})(u_n - u)dx - \|v\|_{\alpha_1}^{p_1} \int_\Omega f_1(x, u)(u_n - u)dx.$$

Daí, passando ao limite, quando $n \to +\infty$ obtemos

$$\|u_n - u\|^2 \to 0 \ \Rightarrow \|u_n - u\| \to 0.$$

Logo, $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$.

De modo análogo, obtemos $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$.

Portanto, $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o sistema (4.24). ■

Teorema 4.4 *Suponhamos que f_1, f_2 satisfazem as hipóteses do Teorema 4.3, e que $0 < m_1 \leq f_1(x, u) \leq M_1$, $0 < m_2 \leq f_2(x, v) \leq M_2$ em $\Omega \times \mathbb{R}$ e $p_1 p_2 < 1$. Então, existe uma solução positiva para o sistema (4.24).*

Demonstração: Seja (w_1, w_2) a única solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_1 & = m_1 \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta w_2 & = m_2 \quad \text{em } \Omega, \\ \quad w_1 & = w_2 = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tais que

$$\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1 p_2} \|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2} \leq \|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1} \|w_1\|_{\alpha_2}^{p_1 p_2}.$$

Sejam

$$\underline{u} = \left(\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1 p_2} \|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{(1-p_1 p_2)}} w_1$$

e

$$\underline{v} = \left(\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1 p_2} \|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{(1-p_1 p_2)}} w_2.$$

Vamos mostrar que, $(\underline{u}, \underline{v})$ é uma subsolução positiva para o sistema (4.24).

De fato,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx &= (\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1 p_2} \|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2})^{\frac{1}{(1-p_1 p_2)}} \int_\Omega \nabla w_1 \nabla \varphi dx \\ &= (\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1 p_2} \|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2})^{\frac{1}{(1-p_1 p_2)}} \int_\Omega m_1 \varphi dx \\ &\leq (\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1 p_2} \|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2})^{\frac{1}{(1-p_1 p_2)}} \int_\Omega f_1(x, \underline{u}) \varphi dx. \end{aligned}$$

A partir daqui, vamos apenas desenvolver o seguinte termo, $(\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2})^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}}$. Observe que,

$$\begin{aligned}
(\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2})^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}} &= (\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_2\|_{\alpha_2}^{p_2}\|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2}\|w_1\|_{\alpha_2}^{-p_2}\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_2\|_{\alpha_1}^{-p_1p_2})^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}} \\
&= \left((\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2})\left(\frac{\|w_1\|_{\alpha_1}}{\|w_2\|_{\alpha_1}}\right)^{p_1p_2}\left(\frac{\|w_2\|_{\alpha_2}}{\|w_1\|_{\alpha_2}}\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}} \\
&= (\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2})^{p_1}\left[\frac{(\|w_1\|_{\alpha_1}^{p_1}\|w_2\|_{\alpha_2})^{p_2}}{(\|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2})^{p_1}}\right]^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}}\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1} \\
&\leq (\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2})^{p_1}\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi dx \leq (\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|w_1\|_{\alpha_2}^{p_2})^{p_1}\|w_2\|_{\alpha_1}^{p_1}\int_\Omega f_1(x,\underline{u})\varphi dx,$$

o que implica,

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi dx \leq \|\underline{v}\|_{\alpha_1}^{p_1}\int_\Omega f_1(x,\underline{u})\varphi dx.$$

De maneira análogo, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\underline{v}\nabla\psi dx \leq \|\underline{u}\|_{\alpha_2}^{p_2}\int_\Omega f_2(x,\underline{v})\psi dx.$$

Portanto, $(\underline{u},\underline{v})$ é uma subsolução para o sistema (4.24).

Agora, considere (W_1, W_2) a solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta W_1 &= M_1 \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta W_2 &= M_2 \quad \text{em } \Omega, \\ \quad W_1 &= W_2 = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e sejam

$$\overline{u} = \left(\|W_1\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|W_2\|_{\alpha_2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}} W_1$$

e

$$\overline{v} = \left(\|W_2\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|W_1\|_{\alpha_2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{(1-p_1p_2)}} W_2,$$

satisfazendo

$$\|W_1\|_{\alpha_1}^{p_1p_2}\|W_2\|_{\alpha_2}^{p_2} \geq \|W_2\|_{\alpha_1}^{p_1}\|W_1\|_{\alpha_2}^{p_1p_2}.$$

De forma similar, mostra-se que $(\overline{u},\overline{v})$ definidos acima, é uma supersolução para o sistema (4.24).

Como $m_i \leq M_i$, temos $w_i \leq W_i$, $i = 1, 2$. Sendo $0 < p_1 p_2 < 1$, podemos concluir $(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v})$. Isso prova o teorema. ∎

Agora, estudemos o caso espacial $\alpha_i = p_i = 1$, $i = 1, 2$. Com isso, tem-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -\Delta u &= f_1(x, u) \displaystyle\int_\Omega |v| dx, \quad \text{em } \Omega, \\ \\ -\Delta v &= f_2(x, v) \displaystyle\int_\Omega |u| dx, \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u &= v = 0 \qquad\qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.35}$$

Denotando por $\varphi_0(x)$ a única solução positiva do problema elíptico linear

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_0(x) &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ \quad \varphi_0(x) &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem-se o seguinte resultado:

Proposição 4.1 *Assumindo que f_1 e f_2 cumprem as hipóteses do Teorema* 4.3, *e satisfazem $0 < f_i \leq M_i$, $i = 1, 2$ em $\Omega \times \mathbb{R}$. Então, a solução não-negativa de* (4.35) *existe se*

$$\rho^2 \leq \frac{1}{M_1 M_2}.$$

Demonstração: Aplicando a desigualdade acima, vê-se que existem constantes positivas suficientemente grandes K_1 e K_2 tais que

$$M_1 \rho \leq \frac{K_1}{K_2} \leq \frac{1}{M_2 \rho}.$$

Sejam $W(x) = K_1 \varphi_0(x)$ e $S(x) = K_2 \varphi_0(x)$, então (W, S) é uma supersolução para (4.35).

De fato, observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla W \nabla \varphi dx &= K_1 \int_\Omega \nabla \varphi_0 \nabla \varphi dx \\ &\geq M_1 \rho K_2 \int_\Omega \nabla \varphi_0 \nabla \varphi dx \\ &= M_1 \rho K_2 \int_\Omega \varphi dx, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla W \nabla \varphi dx &\geq \rho K_2 \int_\Omega f_1(x,W)\varphi dx \\ &= \int_\Omega S(x)dx \int_\Omega f_1(x,W)\varphi dx \\ &= \int_\Omega |S|dx \int_\Omega f_1(x,W)\varphi dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla W \nabla \varphi dx \geq \int_\Omega |S|dx \int_\Omega f_1(x,W)\varphi dx, \;\; x \in \Omega.$$

Analogamente, encontramos,

$$\int_\Omega \nabla S \nabla \psi dx \geq \int_\Omega |W|dx \int_\Omega f_2(x,S)\psi dx, \;\; x \in \Omega.$$

Portanto, (W, S) é uma supersolução para (4.35). Além disso, $(0, 0)$ é uma subsolução para (4.35), o que mostra a existência de uma solução não-negativa para (4.35) via Teorema 4.3. ■

Proposição 4.2 *Assumindo que,* $0 < m_i \leq f_i \leq M_i$ $(i = 1, 2)$ *em* $\Omega \times \mathbb{R}$ *e que* ρ *satisfaz*

$$\rho^2 < \frac{1}{M_1 M_2} \qquad ou \qquad \rho^2 > \frac{1}{m_1 m_2}. \tag{4.36}$$

Então o sistema (4.35) *possui apenas a solução trivial.*

Demonstração: Suponha que (u, v) é uma solução não-trivial para (4.35). Multiplicando (4.35) por φ_0, encontramos

$$-\Delta u \varphi_0 = f_1(x,u)\varphi_0 \int_\Omega |v|dx,$$

e

$$-\Delta v \varphi_0 = f_2(x,v)\varphi_0 \int_\Omega |u|dx,$$

agora integrando por partes em Ω cada uma das igualdades acima, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_0 dx = \int_\Omega |v|dx \int_\Omega f_1(x,u)\varphi_0 dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_0 dx = \int_\Omega |u|dx \int_\Omega f_2(x,v)\varphi_0 dx$$

o que implica,
$$\int_\Omega u dx = \|v\|_1 \int_\Omega f_1(x,u)\varphi_0 dx$$
e
$$\int_\Omega v dx = \|u\|_1 \int_\Omega f_2(x,v)\varphi_0 dx.$$
Como $0 < m_i \leq f_i \leq M_i,\ (i = 1, 2)$, e φ_0 é uma função positiva, tem-se
$$m_1\rho\|v\|_1 \leq \|v\|_1 \int_\Omega f_1(x,u)\varphi_0 dx = \int_\Omega u dx \leq \int_\Omega |u| dx = \|u\|_1 \leq M_1\rho\|v\|_1,$$
e
$$m_2\rho\|u\|_1 \leq \|u\|_1 \int_\Omega f_2(x,v)\varphi_0 dx = \int_\Omega v dx \leq \int_\Omega |v| dx = \|v\|_1 \leq M_2\rho\|u\|_1.$$
Assim, multiplicando membro a membro, essas duas desigualdades, encontramos
$$m_1m_2\rho^2\|v\|_1\|u\|_1 \leq \|v\|_1\|u\|_1 \leq M_1M_2\rho^2\|v\|_1\|u\|_1$$
o que implica,
$$m_1m_2\rho^2 \leq 1 \leq M_1M_2\rho^2$$
o que é um absurdo, por (4.36). ■

4.3 Existência de Solução Via Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Nesta seção, consideraremos o seguinte problema não-local,
$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega u dx\right)\Delta u & = \lambda f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u & = 0 \qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.37}$$
em que $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:
$$\text{Existem números positivos } a_0 \leq a_\infty \text{ tais que } a_0 \leq a(t) \leq a_\infty,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.38}$$
$\lambda > 0$ é um parâmetro, e existe $\theta > 0$ tal que $f : [0, \theta] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo
$$f(0) = f(\theta) = 0, \tag{4.39}$$
$$f'(0) > 0, \tag{4.40}$$
$$f(t) > 0, \text{ para todos } t \in (0, \theta). \tag{4.41}$$

Dessa vez o problema estará associado a um teorema de ponto fixo. Seguiremos aqui, as idéias desenvolvidas por Chipot-Corrêa [12].

Designaremos por λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, o qual satisfaz

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega v^2 dx}. \tag{4.42}$$

Teorema 4.5 *Sob as hipóteses* $(4.39), (4.40), (4.41), (4.42)$ *e se*

$$\lambda > \frac{\lambda_1 a_\infty}{f'(0)}. \tag{4.43}$$

Então, existe uma solução não-trivial u *do problema* (4.37) *tal que* $0 < u(x) < \theta$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demonstração: Designemos por ϕ_1 a primeira autofunção normalizada para o problema de Dirichlet, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1 \quad \text{em } \Omega, \\ \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \quad \phi_1 > 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \phi_1^2 = 1. \end{cases} \tag{4.44}$$

Vamos dividir esta demonstração em seis passos.

1º Passo. Escolheremos $t_0 > 0$ tal que $\underline{u} = t_0\phi_1$ satisfaz

$$-\Delta\underline{u} \leq \frac{\lambda f(u)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \tag{4.45}$$

para toda $w \in L^1(\Omega)$.

De fato, em virtude de (4.44), tem-se

$$-\Delta(t_0\phi_1) = \lambda_1 t_0 \phi_1 \quad \text{em } \Omega$$

o que implica,

$$-\Delta\underline{u} = \lambda_1 t_0 \phi_1 \quad \text{em } \Omega.$$

Desde que $\phi_1 \in C^0(\overline{\Omega})$, $\phi_1 > 0$ em Ω, encontramos $t_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que $0 < t_0\phi_1(x) < \theta$ para todo $x \in \Omega$. Assim, para toda $w \in L^1(\Omega)$, teremos

$$\frac{\lambda f(t_0\phi_1)}{a_\infty} \leq \frac{\lambda f(\underline{u})}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)},$$

lembrando que vale (4.38).

Observemos que $f'(0) > \dfrac{\lambda_1 a_\infty}{\lambda}$ e $f(0) = 0$. Daí, sendo $f \in C^1(\overline{\Omega})$, podemos escolher $t_0 > 0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\frac{f(t_0\phi_1) - f(0)}{t_0\phi_1 - 0} = \frac{f(t_0\phi_1)}{t_0\phi_1} \geq \frac{\lambda_1 a_\infty}{\lambda}.$$

Consequentemente,

$$\lambda_1 t_0 \phi_1 \leq \frac{\lambda f(t_0\phi_1)}{a_\infty} \leq \frac{\lambda f(\underline{u})}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \quad \text{em } \Omega,$$

o que implica,

$$-\Delta(t_0\phi_1) \leq \frac{\lambda f(\underline{u})}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \quad \text{em } \Omega,$$

logo,

$$-a\left(\int_\Omega w dx\right)\Delta\underline{u} \leq \lambda f(\underline{u}) \quad \text{em } \Omega.$$

De agora em diante, fixemos $t_0 > 0$ tal que(4.45) seja satisfeita.

Consideremos o seguinte subconjunto fechado e convexo de $L^2(\Omega)$:

$$K = \{v \in L^2(\Omega); t_0\phi_1 \leq v \leq \theta \text{ q.t.p. em } \Omega\}. \tag{4.46}$$

2º Passo. Existe $\mu > 0$ tal que

$$g(t) = \lambda f(t) + \mu t \tag{4.47}$$

é não-decrescente em $(0, \theta)$.

De fato, basta observar que

$$g'(t) = \lambda f'(t) + \mu \geq \lambda \inf_{(0,\theta)} f' + \mu \geq 0$$

o que é possível, pois $f \in C^1([0, \theta])$, bastando para isso tomarmos $\mu > 0$ suficientemente grande.

Admitamos, no que se segue, que (4.47) seja satisfeita.

Para cada $w \in K$ consideremos

$$u = Tw \tag{4.48}$$

a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{\mu u}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} = \dfrac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.49}$$

Observe que $w \in K$ implica que $w \in L^p(\Omega)$ $\forall p \geq 1$, e todos os termos em (4.49) fazem sentido. Logo, pontos fixos de T são soluções de (4.37).

3º Passo. $u = Tw \in K$.

Devido a monotonicidade de g, temos para $x \in \Omega$,

$$-\Delta u + \frac{\mu u}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} = \frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \leq \frac{g(\theta)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} = -\Delta\theta + \frac{\mu\theta}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)}$$

e

$$-\Delta u + \frac{\mu u}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} = \frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \geq \frac{g(\underline{u})}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \geq -\Delta\underline{u} + \frac{\mu\underline{u}}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)}.$$

Desde que, $\underline{u} \leq u \leq \theta$ em $\partial\Omega$, pelo Princípio do Máximo $\underline{u} \leq u \leq \theta$ em Ω, isto é, $u \in K$.

4º Passo. Existe uma constante $C > 0$, independente de w tal que

$$\big\||\nabla u|\big\|_2 \leq C \tag{4.50}$$

isto é, u é limitada em $H_0^1(\Omega)$ independente de w. Aqui, $\big\|.\big\|_2$ designa a norma usual em $L^2(\Omega)$ e $|.|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$.

De fato, da formulação fraca de (4.49) tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\mu}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega \frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} u dx. \tag{4.51}$$

Seja $M = \sup\limits_{(0,\theta)} |g|$.

De (4.51), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= \int_\Omega \frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} u dx - \frac{\mu}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \int_\Omega u^2 dx \\
&= \frac{1}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \left[\int_\Omega g(w) u dx - \mu \int_\Omega u dx\right] \\
&\le \frac{1}{a_0} \int_\Omega g(w) u dx \\
&\le \frac{M}{a_0} \int_\Omega u dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder nesta última integral, encontramos,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \frac{M}{a_0} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{M}{a_0} \cdot \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\big\||\nabla u|\big\|_{2,\Omega} \le \frac{M}{a_0} \cdot \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_1}}. \tag{4.52}$$

5º Passo. A aplicação $T : K \longrightarrow K$ é contínua.

Observemos que K está equipado com a norma induzida de $L^2(\Omega)$.

Seja (w_u) uma sequência tal que

$$w_u \to w \text{ em } L^2(\Omega), \;\; w_u, w \in K.$$

Mostraremos que,

$$u_\mu = T w_u \to T w = u \text{ em } L^2(\Omega).$$

De (4.49), obtemos

$$-\Delta(u - u_\mu) + \frac{\mu u}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} - \frac{\mu u_\mu}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w_u dx\right)} = \frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} - \frac{g(w_u)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w_u dx\right)}$$

e assim,

$$(*) \quad \begin{aligned}
-\Delta(u - u_\mu) + \frac{\mu(u - u_\mu)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} &= \mu u_\mu \left\{\frac{1}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w_u dx\right)} - \frac{1}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)}\right\} \\
&+ \left\{\frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} - \frac{g(w_u)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w_u dx\right)}\right\}.
\end{aligned}$$

A menos de subsequência, temos

$$w_u(x) \to w(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lembesgue, desde que $w_u, w \in K$, segue-se

$$w_u \to w \text{ em } L^p(\Omega),\ \forall p \geq 1. \tag{4.53}$$

O lado direito A_μ de $(*)$ satisfaz

$$|A_\mu| \leq \mu\theta \left| \left\{ \frac{1}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w_u dx\right)} - \frac{1}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} \right\} \right| + \left| \left\{ \frac{g(w)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w dx\right)} - \frac{g(w_u)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega w_u dx\right)} \right\} \right|$$

e

$$a\left(\int_\Omega w_u dx\right) \to a\left(\int_\Omega w dx\right).$$

Agora, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que

$$A_\mu \to 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

De $(*)$, tem-se que,

$$u_\mu \to u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

mostrando assim, a continuidade de T.

6º Passo. Conclusão.

Devido a compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $T : K \longrightarrow K$ é uma aplicação compacta. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder [18], $T : K \longrightarrow K$ possui um ponto fixo em K.

Isto completa a demonstração do teorema. ■

Observação 4.1 *Se h é uma função satisfazendo* (4.39) − (4.41), *então existe uma solução não-trivial para*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u &=& \dfrac{h(u)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega u dx\right)}, \\ u &\in& H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{4.54}$$

desde que $h'(0) > \lambda_1 a_\infty$. (Basta fazer $h = \lambda f$).

Exemplo 3 *Consideremos* $\theta' < 0 < \theta$ *e* $f : [\theta', \theta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *satisfazendo*

(i) $f(\theta') = f(0) = f(\theta) = 0,$

(ii) $f'(0) > 0,$

(iii) $f(t) < 0 \quad \forall t \in (\theta', 0)$ *e* $f(t) > 0 \quad \forall t \in (0, \theta).$

Nas condições acima, tem-se o seguinte resultado

Teorema 4.6 *Assumindo* (4.38), $(i), (ii), (iii)$ *e*

$$\lambda > \frac{\lambda_1 a_\infty}{f'(0)},$$

o problema (4.37) *possui duas soluções não-triviais.*

Demonstração: *Sabemos que existe uma solução não-trivial entre* 0 *e* θ *pelo Teorema* 4.5. *Agora, se* $\tilde{u}$ *é uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{-\lambda f(-u)}{a\left(\displaystyle\int_\Omega (-u)dx\right)}, \\ u &\in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

entre 0 *e* $-\theta'$ *então, claramente* $u = -\tilde{u}$ *é uma solução não-trivial de* (4.37) *entre* θ' *e* 0. *Isso completa a demonstração do teorema.* ■

Apêndice A

Uma Consequência da Condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Teorema A.1 *Suponhamos que, existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que*

$$0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \forall |s| \geq r$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\xi)d\xi$$

e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Então, existem constantes $c, d > 0$ tais que

$$|F(x,s)| \geq c|s|^\mu - d, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Demonstração: Com efeito, da hipótese temos,

$$\frac{\mu}{s} \leq \frac{f(x,s)}{F(x,s)}, \quad \forall s \geq r > 0.$$

Logo,

$$\int_r^t \frac{\mu}{s} ds \leq \int_r^t \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \quad \forall t \geq r,$$

$$\Rightarrow \quad \mu \ln s \Big|_r^t \leq \ln F(x,s) \Big|_r^t \quad \forall t \geq r,$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\ln t - \ln r) \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,r) \quad \forall t \geq r,$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{t}{r}\right)^\mu \leq \ln \frac{F(x,t)}{F(x,r)} \quad \forall t \geq r,$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{t}{r}\right)^{\mu} \leq \frac{F(x,t)}{F(x,r)} \quad \forall t \geq r,$$

$$\Rightarrow \quad F(x,t) \geq F(x,r)\left(\frac{1}{r}\right)^{\mu} t^{\mu} \quad \forall t \geq r > 0.$$

Como F é contínua, tem-se

$$(i) \qquad F(x,t) \geq k_1|t|^{\mu} \quad \forall s \geq r > 0.$$

Agora, seja $s \leq -r \leq 0$. Pela hipótese tem-se

$$(*) \qquad \frac{\mu}{s} \geq \frac{f(x,s)}{F(x,s)}.$$

Façamos $u \geq r > 0$ e $-u = s$. Assim,

$$\begin{cases} f(x,s) = f(x,-u) = g(x,u), \\ F(x,s) = F(x,-u) = G(x,u), \end{cases}$$

implica que,

$$f(x,s) = F'(x,s) = \frac{d}{ds}F(x,s) = \frac{d}{ds}G(x,u) = \frac{d}{du}G(x,u)\frac{du}{ds}$$

logo,

$$f(x,s) = -G'(x,u)$$

ou ainda

$$G'(x,u) = -g(x,u).$$

Por $(*)$ segue que,

$$\frac{\mu}{-u} \geq \frac{g(x,u)}{G(x,u)} \Rightarrow \frac{\mu}{u} \leq \frac{-g(x,u)}{G(x,u)},$$

logo,

$$\int_r^t \frac{\mu}{u}du \leq \int_r^t \frac{-g(x,u)}{G(x,u)}du \quad \forall t \geq r > 0,$$

De forma análoga ao caso anterior, encontramos,

$$\left(\frac{t}{r}\right)^{\mu} \leq \frac{G(x,t)}{G(x,r)}du \quad \forall t \geq r > 0,$$

o que implica,

$$G(x,t) \geq k_2 t^{\mu}, \quad \forall t \geq r > 0,$$

ou ainda,

$$G(x,u) \geq k_2 u^{\mu}, \quad \forall u \geq r > 0,$$

logo,

$$(ii) \qquad F(x,s) \geq k_2(-s)^\mu, \quad \forall s \leq -r < 0.$$

Tomemos $k = \min\{k_1, k_2\}$, então de (i),e (ii) tem-se

$$F(x,s) \geq k|s|^\mu, \quad \forall |s| \geq r.$$

Por outro lado, sendo F uma aplicação contínua, tem-se que

$$F\Big|_{\bar{\Omega}\times[-r,r]}$$

é limitado inferiormente.

Logo, existe $d > 0$ tal que

$$\frac{-d}{2} \leq \inf_{\bar{\Omega}\times[-r,r]} F(x,s) \leq F(x,s), \quad \forall |s| \leq r.$$

Tomando $k_3 > 0$ tal que,

$$k_3|s|^\mu \leq \frac{d}{2} \quad (|s| \leq r)$$

obtemos,

$$F(x,s) \geq \frac{-d}{2} = \frac{d}{2} - d \geq k_3|s|^\mu - d.$$

Seja $c = \min\{k, k_3\}$ então

$$F(x,s) \geq k|s|^\mu \geq k|s|^\mu - d \geq c|s|^\mu - d, \quad \text{se} \quad |s| \geq r$$

e

$$F(x,s) \geq k_3|s|^\mu - d \geq c|s|^\mu - d, \quad \text{se} \quad |s| \leq r.$$

Logo,

$$F(x,s) \geq c|s|^\mu - d, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Portanto,

$$|F(x,s)| \geq c|s|^\mu - d, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \Omega,$$

onde $c, d > 0$. ∎

Apêndice B

Um Operador Compacto

Neste apêndice vamos mostrar que o operador $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, o qual foi considerado no decorrer do Capítulo 1 e no Capítulo 2, é compacto.

Vamos denotar por $\nabla E : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ o gradiente de E, o qual é definido através do Teorema da Representação de Riesz, isto é, $\nabla E(u) \in H_0^1(\Omega)$ é o único vetor tal que

$$E'(u)v = \langle \nabla E(u), v \rangle, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\langle .,. \rangle$ é o produto interno do espaço $H_0^1(\Omega)$.

Vamos considerar aqui, $E : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por,

$$E(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - \psi(u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

onde

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \quad \widehat{M}(t) = \int_0^t M(\tau)d\tau \quad \text{e} \quad F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau.$$

Além disso, f é uma função de Carathéodory satisfazendo

(f_1) Existem constantes

$$c, d > 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \frac{N+2}{N-2} & \text{se } N \ge 3, \\ 0 \le \theta < +\infty & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

tais que $|f(x,s)| \le c|s|^\theta + d$.

E note que sua derivada é dada por,

$$E'(u)v = M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\right)\int_{\Omega}\nabla u\nabla vdx - \int_{\Omega}f(x,u)vdx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$E'(u)v = M(\|u\|^2)\int_{\Omega}\nabla u\nabla vdx - \int_{\Omega}f(x,u)vdx = M(\|u\|^2)\langle u,v\rangle - \psi'(u)v, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, usando novamente o Teorema da Representação de Riesz, agora para $\psi'(u)$, tem-se

$$\psi'(u)v = \langle \nabla\psi(u), v\rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$E'(u)v = M(\|u\|^2)\langle u,v\rangle - \langle \nabla\psi(u), v\rangle = \langle M(\|u\|^2)u - \nabla\psi(u), v\rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\nabla E(u) = M(\|u\|^2)u - \nabla\psi(u).$$

Considerando, $T(u) = \nabla\psi(u)$ obtemos,

$$\nabla E(u) = M(\|u\|^2)u - T(u).$$

Proposição B.1 *O operador $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ é um operador compacto.*

Demonstração: Considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Como $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo tem-se que, a menos de subsequência, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Agora, pela imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega), \quad \forall 1 \leq p_1 < 2^*,$$

tem-se

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^{p_1}(\Omega).$$

Também tem-se que,

$$r_1 = \frac{p_1}{p_1 - 1} \leq \frac{p_1}{\theta} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \theta r_1 < p_1,$$

logo,

$$|f(x,u)|^{r_1} \leq 2^{r_1}(c^{r_1}|u|^{\theta r_1} + d^{r_1})$$

assim,

$$|f(x,u)|^{r_1} \leq c_2|u|^{\theta r_1} + d_2 < +\infty.$$

Então pelas imersões contínuas de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta r_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega),$$

tem-se

$$f \in L^{r_1}(\Omega).$$

Como $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{p_1} = 1$, pela desigualdade de Hölder segue-se

$$\int_\Omega |f(x,u+th) - f(x,u)||h|dx \leq \|f(x,u+th) - f(x,u)\|_{r_1}\|h\|_{p_1}.$$

Assim, para $h \in H_0^1(\Omega)$ tem-se,

$$h \to 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \ \Rightarrow \ h \to 0 \text{ em } L^{p_1}(\Omega)$$

o que implica,

$$u + th \to u \quad \text{em } L^{p_1}(\Omega), \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Como $p_1 \geq \theta$, pelo resultado de Vainberg,

$$f(.,u+th) \to f(.,u) \quad \text{em } L^{\frac{p_1}{\theta}}(\Omega) \quad \forall\, t \in [0,1].$$

E, uma vez que, $r_1 = \dfrac{p_1}{p_1 - 1} < \dfrac{p_1}{\theta}$ segue-se que

$$f(.,u+th) \to f(.,u) \quad \text{em } L^{r_1}(\Omega) \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|T(u_n) - T(u)\| = \|\psi'(u_n) - \psi'(u)\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|h\|\leq 1} |(\psi'(u_n) - \psi'(u))h| \\
&= \sup_{\|h\|\leq 1} \left| \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))h dx \right| \\
&\leq \sup_{\|h\|\leq 1} \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||h| dx \\
&\leq \sup_{\|h\|\leq 1} \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{r_1} \|h\|_{p_1} \\
&\leq \sup_{\|h\|\leq 1} (c\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{r_1} \|h\|) \\
&\leq c\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{r_1} \quad \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$u_n \to u \quad \text{em } H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_n \to u \quad \text{em } L^{p_1}(\Omega).$$

Então, pelo resultado de Vainberg,

$$f(.,u_n) \to f(.,u) \quad \text{em} L^{\frac{p_1}{\theta}}(\Omega),$$

o que implica,

$$f(.,u_n) \to f(.,u) \quad \text{em} L^{r_1}(\Omega)$$

Logo, $T(u_n) \to T(u)$ em H^{-1}.

Portanto, T é um operador compacto. ■

Apêndice C

Alguns Resultados Utilizados

Neste apêndice enunciaremos algumas definições e alguns teoremas utilizados no decorrer desta dissertação.

Teorema C.1 *(Ver* [23]*) Uma família* $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de subconjuntos de um espaço métrico* M *chama-se localmente finita quando todo ponto* $x \in M$ *possui uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de conjuntos* C_λ.

Em termos mais explícitos: C *é localmente finita se, e somente se, para cada* $x \in M$ *existem índices* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ *e uma vizinhança* $V \ni x$ *tais que* $V \cap C_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, ...\lambda_n\}$.

Teorema C.2 *(Ver* [23]*) Um espaço métrico* M *chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de* M *pode ser retificada por uma cobertura aberta localmente finita.*

Teorema C.3 *(Ver* [23]*) Seja* M *um espaço métrico. Uma partição de unidade em* M *é uma família* $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in I}$ *de funções contínuas* $\varphi_\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que:*

(i) Para todo $x \in M$ *e todo* $\lambda \in I$*, tem-se* $\varphi_\lambda(x) \geq 0$*;*

(ii) A família $\mathrm{C} = (\sup(\varphi_\lambda))_{\lambda \in I}$ *é localmente finita em* M*;*

(iii) Para todo $x \in M$ *tem-se* $\sum\limits_{\lambda \in I} \varphi_\lambda(x) = 1$.

Teorema C.4 *(Ver* [7]*) Seja* H *um espaço de Hilbert. Chamamos de Base Hilbertiana (ou, simplesmente, se não houver confusão, base), uma sequência* (e_n) *de elementos de* H *tal que*

(i) $|e_n| = 1\ \forall n$, $(e_m, e_n) = 0\ \forall m, n,\ m \neq n$,

(ii) O espaço vetorial gerado por (e_n) *é denso em* H.

Teorema C.5 *(Ver [7]) Todo espaço de Hilbert* H *separável, admite uma base Hilbertiana.*

Teorema C.6 *(Ver [23]) Todo espaço métrico* M *separável, é paracompacto.*

Teorema C.7 *(Teorema de Kakutani) (Ver [7]) Seja* X *um espaço de Banach. Então* X *é um espaço reflexivo se, e somente se,*

$$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca.

Teorema C.8 *(Teorema de Milman-Pettis) (Ver [7]) Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Teorema C.9 *(Ver [7]) Seja* $\{f_n\} \subset X'$. *Então,*

(i) $f_n \to f$ *em* $X' \Rightarrow f_n \rightharpoonup f$ *em* X'.

(ii) $f_n \rightharpoonup f$ *em* $X' \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X'.

(iii) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X', *então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

(iv) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \to x$, *então* $f_n(x) \to f(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Definição C.1 *(Ver [19]) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. *Diz-se que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função de Carathéodory se:*

(a) $f(.,s)$ *é mensurável em* Ω, *qualquer que seja* $s \in \mathbb{R}$ *fixado;*

(b) $f(x,.)$ *é contínua em* $\mathbb{R}$, *q.t.p. em* Ω.

Teorema C.10 *(Teorema de Vainberg)(Ver [19]) Suponha que existam constantes* $c > 0$, *uma função* $b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq +\infty$, *e* $r > 0$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq c|s|^r + b(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então,

(a) $N_f : L^{rq} \longrightarrow L^q$;

(b) N_f *é contínua e limitada (mais ainda, leva conjunto limitado em conjunto limitado).*

N *é chamado Operador de Nemitski.*

Teorema C.11 *(Teorema de Fubini)(Ver* [7]*) Suponhamos que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Então, para todo* $x \in \Omega_1$

$$F(x,u) \in L^1_y(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para todo $y \in \Omega_2$

$$F(x,u) \in L^1_x(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Teorema C.12 *(Teorema da representação de Riesz-Fréchet)(Ver* [7]*) Para toda* $\varphi \in H'$ *existe* $f \in H$ *único tal que,*

$$\langle \varphi, v\rangle = (f,v) \ \forall v \in H.$$

Além disso, $|f| = \|\varphi\|_{H'}$*. (*H' *é o dual do espaço de Hilbert* H*).*

Teorema C.13 *(Ver* [7]*) Seja* H *um espaço de Banach reflexivo. Se* (u_n) *é uma sequência limitada em* H*, então existem uma subsequência* $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ *e* $u \in H$ *tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \ em \ H.$$

Teorema C.14 *(Ver* [7]*) Seja* (x_n) *uma sequência fracamente convergente em um espaço normado* X*, isto é, existe* $x \in X$ *tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \ em \ X.$$

Então,

- *O limite fraco* x *de* (x_n) *é único.*
- *Toda subsequência* $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ *converge fraco para* x*.*
- *A sequência* (x_n) *é limitada.*

Teorema C.15 *(Desigualdade de Hölder)(Ver* [7]*) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $1 \leq p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q.$$

Teorema C.16 *(Desigualdade de Poincaré)(Ver* [7]*) Seja* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$*. Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_2 \leq C. \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema C.17 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver* [18]*) Seja* f_n *uma sequência de funções integráveis que convergem em quase toda parte para uma função mensurável* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que*

$$|f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema C.18 *(Imersões de Sobolev)(Ver* [7]*) As seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ para } N \geq 3,$$

e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ 1 \leq p < +\infty \text{ para } N = 1 \text{ ou } N = 2.$$

Teorema C.19 *(Teorema da Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov)(Ver* [7]*) sendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, as seguintes imersões são compactas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ para } N \geq 3,$$

e

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ 1 \leq p < +\infty \text{ para } N = 1 \text{ ou } N = 2.$$

Teorema C.20 *(Princípio do Máximo)(Ver*[18]*) Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= h \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.1}$$

onde $h \in L^\sigma(\Omega)$*,* $\sigma = \frac{2N}{N+2}$*,* λ *um parâmetro real não-negativo e* $h \geq 0$ *em* Ω*. Então* $u \geq 0$ *em* Ω*. Além disso, se* $h > 0$ *em um conjunto de medida positiva, então* $u > 0$ *em* Ω*.*

Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$*, então a derivada normal exterior* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$ *para todo* $x \in \Omega$*.*

Teorema C.21 *(Ver* [18]*) Sejam* X *um espaço de Banach,* K *um compacto convexo e* $T : K \longrightarrow K$ *uma função contínua. Então* T *admite um ponto fixo* $x \in X$*, isto é,* $Tx = x$*.*

Bibliografia

[1] O.B. Almeida, *Teoria do grau e aplicações*, Dissertação de Mestrado. UFCG, 2006.

[2] C.O. Alves & D.G. de Figueiredo, *Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods*, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis - The Hans Triebel Anniversary Volume, Ed. Birkhauser, Switzerland, 47-57, 2003.

[3] C.O. Alves & F.J.S.A. Corrêa, *On Existence of Solutions for a Class of Problems Involving a Nonlinear Operator*, Comm. on Applied Nonlinear Analysis 8(2001), 43-56.

[4] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa & T.F. Ma, *Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type*, Computers and Mathematics with Application, 49(2005)85-93.

[5] A. Ambrosetti, H. Brezis & G. Cerami, *Combined Effects of Concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122(1994), 519-543.

[6] A. Ambrosetti & P.M. Rabinowitz, *Cual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14(1973), 349-381.

[7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.

[8] H. Brezis & L. Oswald, *Remarks on Sublinear Elliptic Equations*, Nonlinear Anal., Vol.10, N.1(1986), 55-64.

[9] H. Bueno, G. Ercole, W. Ferreira & A. Zumpano, *Existence and multiplicity of positive solutions for the p-Laplacian with nonlocal coefficient*, J. Math. Anal. Appl. 343(2008)151–158.

[10] CARRIER, G. F., *On the Nonlinear Vibration Problema of the Elastic String*, Quart. Appl. Math.,Vol. 3(1945), $157-165$.

[11] Y. Chen & H. Gao, *Existence of Positive Solutions For Nonlocal and Nonvariational Elliptic Systems*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol.72 (2005)271-281.

[12] M. Chipot & F.J.S.A. Corrêa, *Boundary Layer Solutions to Functional Elliptic Equations*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series 40(3), 381-393, 2009.

[13] M. Chipot & B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 30(7)(1997)4619-4627.

[14] M. Chipot, V. Valente & G. Vergara Caffarelli, *Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy*, Rendiconti Sem. Mat. Padova 110(2003)199–220.

[15] F.J.S.A Corrêa, *Problemas Elípticos Não-Locais e Algumas Técnicas de Análise Funcional Não-Linear*, SBA, Vol. 31, Nº 2, 2005.

[16] F.J.S.A. Corrêa & S.D.B. Menezes, *Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method*, Electron. J. Differential Equations 19(2004) 1–10.

[17] D.G. Costa, *Tópicos em análise não-linear e Aplicações ás Equações Diferenciais*, CNPq-IMPA, 1986.

[18] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1998.

[19] D.G. de Figueiredo, *The Ekeland Variational Principle With Applications And Detours*, Tata Institute Fundamental research Bombay, 1989.

[20] FROTA, C. L., COUSIN, A. T. and LARKIN, N. A., *Existence of Global Solutions and Energy Decay for the Carrier Equation with Dissipative Term*, Differential Integral Equation, pp.453-459, 124(1999).

[21] G. Kirchhoff, *Mechanik, Teubner, Leipzig,* 1883.

[22] N. A. LARKIN, *Global Regular Solutions for the Nonhomogeneous Carrier Equation.* Math. Problems in Engineering. Vol. 8. pp. 15-31 (2002).

[23] E.L. Lima, *Espaços métricos, Projeto Euclides*, CNPq-IMPA, 1977.

[24] J.L. Lions, *On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies., Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, (1978)284-346.

[25] T.F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Analysis Vol.63 (2005)1967–1977.

[26] R.G. Nascimento, *Problemas Elípticos Não-Locais do Tipo p-Kirchhoff*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, (2008).

[27] M.D. dos Santos, *Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via métodos variacionais*, Dissertação de Mestrado. UFCG, 2005.

[28] Weibing Deng, Yuxiang Li & Chunhong Xie, *Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate parabolic system*,J. Math. Anal. Appl. 277(2003)199–217.