Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Base Para as Identidades Polinomiais das Matrizes Triangulares em Blocos com $\mathbb{Z}_2$-Graduação

por

Rivaldo do Nascimento Júnior

sob orientação de

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Abril/2009

Base Para as Identidades Polinomiais das Matrizes Triangulares em Blocos com $\mathbb{Z}_2$-Graduação

por

Rivaldo do Nascimento Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves (UFCG)
Orientador

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior (UFCG)

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira (UEPB)

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2009

Abstract

In this work we present a general model for the superalgebra of upper triangular matrices and show how to obtain the product of two T-ideals as the kernel of a homomorphism between two algebras. Next, we show how to obtain the polynomial identities for the algebra of the block-triangular matrices with $\mathbb{Z}_2$-grading from the ordinary identities of the algebras of its main diagonal.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um modelo genérico para a superálgebra das matrizes triangulares superiores e mostraremos como obter o produto de dois T-ideais como o núcleo de um homomorfismo de álgebras. Em seguida, mostraremos como obter as identidades polinomiais para a álgebra das matrizes triangulares em blocos com $\mathbb{Z}_2$-graduação a partir das identidades ordinárias das álgebras de sua diagonal principal.

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de externar minha eterna gratidão àqueles que são os responsáveis pela minha existência. Incentivadores primeiros, compreenderam como ninguém o valor que a educação possui, abrindo novos horizontes a uma vida futura. Qualquer conjunto de palavras seria incompleto para registrar aqui os meus mais sinceros agradecimentos aos meus pais, Rivaldo do Nascimento (*Dudu*) e Josefa Rodrigues (*Nicinha*).

À minha esposa, pelo incentivo, pelo apoio, pela dedicação e pela compreensão da minha ausência nesses anos todos de graduação e mestrado. A você Luciana, todo o meu amor, carinho e gratidão por ter ficado ao meu lado, nos bons e maus momentos desta longa jornada.

Ao Saudoso Departamento de Matemática e Estatística - DME, hoje Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística - UAME, por ter me proporcionado uma excelente formação acadêmica. Agradeço a cada professor que contribuiu, de uma forma ou de outra, para a minha formação. Em especial, ao Prof. Luiz Mendes de Albuquerque Neto, por orientar-me como bolsista do Instituto do Milênio em Matemática por dois anos, pelo incentivo e pelo exemplo de profissional que é.

Aos funcionários da UAME, pelo apoio e amizade. Em especial a D. Argentina, pelo exemplo de simpatia e pelas conversas na biblioteca do Departamento. A todos que fazem a UAME, a minha gratidão.

A todos os meus colegas de graduação, em especial a Emerson, pelas noites de estudo em sua residência, a Josemar e Sérgio Minzé, pela amizade inconteste, apoio e incentivo.

Aos meus colegas de Pós-graduação, Suene, Joseane e Leomaques pela ajuda, pelo apoio, incentivo e amizade. A David Lobão, pelos estudos, pela amizade, pelo exemplo de perseverança, e por ter me cedido diversas vezes a sua residência sempre que precisei. Fiquem certos de que a realização deste trabalho, não seria possível sem a ajuda e o apoio que recebi de cada um. A todos vocês, minha eterna gratidão.

Ao Prof. Sérgio Mota Alves, meus sinceros agradecimentos pelas disciplinas ministradas na graduação e na Pós-graduação, pela orientação deste trabalho e pelo incentivo. Ao Prof. Antônio Brandão, pela leitura e correção deste trabalho, pelas disciplinas ministradas e pelo incentivo.

Ao Prof. Vandenberg Lopes Vieira, por ter aceito compor a banca examinadora deste trabalho, pela leitura atenta e pelas sugestões.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado!

"Uma vida em que se cometem erros não é apenas mais digna, mas muito mais útil do que aquela em que se vive sem fazer nada."

George Bernard Shaw

Dedicatória

Aos meus pais, pelo apoio incondicional
por todos esses anos.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, vamos expor o objeto de nosso estudo e realizaremos uma breve discussão a seu respeito. Ponderamos os objetivos e a metodologia do nosso trabalho e oferecemos um esquema de sua organização.

1.1 Apresentação

Em 1987, Kemer apresentou a sua densa teoria sobre a estrutura dos T-ideais, esse trabalho tornou-se importante não só por responder afirmativamente ao famoso problema de Specht, que indagava sobre a existência de base finita para as identidades polinomiais de álgebras associativas sobre corpos de característica zero, mas por ter tratado das álgebras T-primas, que nada mais são que álgebras cujos T-ideais são primos na classe dos T-ideais. Kemer em seu trabalho também mostrou a importância de superálgebras na teoria das álgebras com identidades polinomiais (ordinárias) sobre corpos com característica zero. Em particular, ele estabeleceu que para qualquer PI-álgebra R existe uma superálgebra finitamente gerada $A = A_0 + A_1$ tal que R e $A_0 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$ possuem as mesmas identidades polinomiais. Aqui, $E = E_0 \oplus E_1$ é a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural.

O presente trabalho apresenta um estudo dos resultados obtidos nos artigos [5] e [11] onde obtemos informações sobre as superálgebras e seus respectivos T-ideais. Um construindo o modelo genérico para tais álgebras e o outro descrevendo o T_2-ideal das superidentidades a partir dos T-ideais das álgebras que fazem parte da sua diagonal principal.

1.2 Objetivos

Apresentar um modelo genérico e a base para as identidades polinomiais das matrizes triangulares em blocos com $\mathbb{Z}_2$-graduação.

1.3 Contribuições

O presente trabalho, além de disponibilizar um texto em português referente a esta linha de pesquisa, apresenta o que de novo se tem feito na mesma, dando um possível direcionamento de pesquisa a tal objeto de estudo.

1.4 Metodologia

Metodologicamente, o estudo é de natureza quantitativa, sobretudo explicatória visto a principal finalidade ter sido desenvolver conceitos, com vistas a formulação de novos esboços para estudos posteriores. Buscou-se através de uma pesquisa bibliográfica compreender e entender as superálgebras e suas superindentidades, realizando um aprofundamento teórico. A pesquisa foi desenvolvida principalmente a partir dos artigos: Lewin em [11] e Di Vincenzo e Drensky em [5]. Deste modo, após definida a questão motivadora e os objetivos de pesquisa foi determinado o plano de trabalho.

1.5 Organização da Dissertação

No Capítulo 2, expomos os conceitos preliminares inerentes a este trabalho. No Capítulo 3, apresentamos o Teorema de Lewin e sua demonstração. Por fim, o Capítulo 4, é destinado à apresentação da base das identidades polinomiais das matrizes triangulares em blocos $\mathbb{Z}_2$-graduadas, bem como a um pequeno resumo do que está sendo estudado sobre o assunto na atualidade.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos demonstrações, e em casos mais importantes, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

2.1 Conceitos básicos sobre álgebras

Iniciamos com a definição do objeto central de nossos estudos.

Definição 2.1.1 *Diremos que um K-espaço vetorial A, munido de uma operação binária $* : A \times A \to A$ denominada de multiplicação, tem estrutura de K-álgebra (ou A é uma álgebra sobre K, ou simplesmente que A é uma álgebra) se, para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer $a, b, c \in A$, valer:*

(1) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(2) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(3) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Para simplificar a notação, vamos escrever $\underline{ab}$ ao invés de $\underline{a * b}$.

Definição 2.1.2 *Seja A uma K-álgebra, diremos que:*

(1) A é comutativa se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$;

(2) A é associativa se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$;

(3) A é unitária se existir $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$ para qualquer $a \in A$ (vamos escrever $\underline{1}$ ao invés de $\underline{1_A}$).

Em praticamente todo texto vamos trabalhar com álgebras associativas unitárias tendo corpo de base infinito. Assim, no que segue, a menos que seja feita menção explícita em contrário, o termo álgebra deverá ser entendido como uma K-álgebra associativa unitária.

Definição 2.1.3 *Um K-subespaço vetorial B de uma álgebra A será denominado uma K-subálgebra de A, se tiver estrutura de álgebra, isto é, se B for fechado com respeito a operação binária de A. O subespaço B será denominado um ideal à esquerda de A, se $AB \subseteq B$, ou seja, se $ax \in B$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in B$. De modo similar, definimos ideal à direita de A. Um ideal bilateral será simplesmente denominado de ideal.*

Definição 2.1.4 *Sejam A e B duas álgebras. Um mergulho de A em B é uma aplicação $\sigma : A \to B$ tal que, para todos $a, b \in A$, temos*

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) \quad e \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).$$

E mais, $\sigma(1_A) = 1_B$. Denotaremos um mergulho da álgebra A na álgebra B por: $\sigma : A \hookrightarrow B$.

Nos próximos sete exemplos recordamos as definições de algumas álgebras e subálgebras que serão utilizadas no decorrer do texto.

Exemplo 2.1.5 *Seja $\mathcal{V}$ um K-espaço vetorial com base enumerável $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. A álgebra de Grassmann (ou exterior) $E = E(\mathcal{V})$ é a álgebra gerada como espaço vetorial por $\{1, e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo as relações*

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad para \quad todos \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, se $char\, K = 2$, impomos:

$$e_i^2 = 0 \quad para \quad todo \quad i \in \mathbb{N}.$$

Observe que $D = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r; r = 1, 2, \dots\}$ é uma base para E. Além disso, se $\mathcal{V}_n$ é um subespaço de $\mathcal{V}$ gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ denotaremos por $E(\mathcal{V}_n)$ sua correspondente álgebra de Grassmann.

Exemplo 2.1.6 *O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada o centro de A e seus elementos são ditos ser centrais. Se $A = E$ (álgebra de Grassmann) é fácil ver que $Z(E) = E_0$, onde E_0 é o subespaço de E gerado pelo conjunto $D_0 = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r; r = 2, 4, \dots\}$.*

Exemplo 2.1.7 *O K-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo K, denotado por $M_n(K)$, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra.*

Exemplo 2.1.8 *O K-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E, denotado por $M_n(E)$, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra. Sendo $a, b \in \mathbb{N}$ com $a + b = n$, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o K-subespaço de $M_{a+b}(E)$*

$$M_{a,b}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A \in M_a(E_0), B \in M_{a\times b}(E_1), C \in M_{b\times a}(E_1), D \in M_b(E_0) \right\},$$

tem estrutura de álgebra. Aqui, E_1 é o subespaço de E gerado por

$$D_1 = \{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \ ; r = 1, 3, \dots\}.$$

Observamos que os elementos de E_1 anticomutam entre si.

Exemplo 2.1.9 *Sendo $a, b \in \mathbb{N}$ com $a+b = n$, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o K-subespaço de $M_{a+b}(E)$*

$$A_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A \in M_a(E), B \in M_{a\times b}(E'), C \in M_{b\times a}(E'), D \in M_b(E) \right\},$$

tem estrutura de álgebra. Aqui, E' denota a álgebra de Grassmann sem unidade.

Exemplo 2.1.10 *Seja $A^{'}$ uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar $A^{'}$ numa álgebra com unidade. Com efeito, seja $A = K \oplus A^{'}$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em A a seguinte multiplicação, para quaisquer $a, b \in A^{'}$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in K$,*

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b + a\beta + ab).$$

Assim, $(1, 0)$ é unidade de A e a inclusão $A^{'} \hookrightarrow A$ é um mergulho. Diremos que A é obtida a partir de $A^{'}$ por adjunção da unidade.

Exemplo 2.1.11 *Consideramos agora a subálgebra de $M_{a+b}(K)$ definida por:*

$$M_a M_b = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in M_a(K); B \in M_{a\times b}(K) \text{ e } C \in M_b(K) \right\}.$$

Denotaremos por $\overline{M_a M_b}$ a subálgebra de $M_a M_b$ obtida considerando $B = 0$.

Definição 2.1.12 *Uma transformação linear $\Phi : A \to B$ de álgebras é um homomorfismo, se $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ para quaisquer $a, b \in A$, e além disso $\Phi(1_A) = 1_B$. Analogamente às demais estruturas algébricas, chamaremos Φ de isomorfismo quando Φ for um homomorfismo bijetor, mergulho quando Φ for injetor, endomorfismo quando Φ for um homomorfismo de A em A, e automorfismo quando Φ for um endomorfismo bijetor.*

2.2 Módulos

Nesta seção, apresentaremos o conceito de módulo sobre um grupo G qualquer, expondo alguns resultados. Em seguida, estendemos este conceito para álgebras.

Definição 2.2.1 *Sejam G um grupo, M um espaço vetorial sobre um corpo K e "$\cdot$" uma aplicação de $G \times M$ em M. O espaço vetorial M é chamado um G-módulo (à esquerda) sobre K se para quaisquer g e h em G, m e n em M e α em K as seguintes condições são satisfeitas:*
(i) $e \cdot m = m$, onde e é a identidade de G;
(ii) $(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$;
(iii) $g \cdot (\alpha m) = \alpha(g \cdot m)$.

Definição 2.2.2 *Seja G um grupo. Um subconjunto N de um G-módulo M é um submódulo de M se N é um G-módulo sob as operações induzidas de M.*

Teorema 2.2.3 *Seja G um grupo. Se N é um subconjunto não-vazio de um G-módulo M, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) N é um submódulo de M;
(ii) N é fechado com relação à adição, à multiplicação por escalar e à multiplicação por elementos de G.

Definição 2.2.4 *Sejam G um grupo e M e N dois G-módulos sobre um corpo K. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de G-módulos se para quaisquer m e n em M, α em K e g em G, as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n), \qquad \varphi(\alpha m) = \alpha\varphi(m) \qquad \text{e} \qquad \varphi(g \cdot m) = g \cdot \varphi(m).$$

O núcleo de φ é o conjunto $Ker\varphi = \{m \in M : \varphi(m) = 0\}$ e a imagem de φ é o conjunto $\varphi(M) = \{\varphi(m) : m \in M\}$. Se φ é bijetora, dizemos que é um isomorfismo de G-módulos e escrevemos $M \cong N$.

Proposição 2.2.5 *Se G é um grupo e $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de G-módulos, então $Ker\varphi$ é um submódulo de M e $\varphi(M)$ é um submódulo de N. Além disso, $Ker\varphi = 0$ se, e somente se, φ é injetora.*

Prova: As demonstrações de que $Ker\varphi$ é um submódulo de M e de que $\varphi(M)$ é um submódulo de N são triviais. Se $Ker\varphi = 0$ e $\varphi(m) = \varphi(n)$, com m e n em M, então $\varphi(m-n) = 0$ e, consequentemente, $m - n = 0$, ou seja, $m = n$. Portanto, φ é injetora.

Supondo agora φ injetora, temos que mostrar que o único elemento de $ker\varphi$ é 0. Para isso, tomemos $m \in ker\varphi$. Daí, $\varphi(m) = 0$. Mas como $\varphi(0) = 0$, concluímos que $\varphi(m) = \varphi(0)$. Donde, segue que $m = 0$. ■

Definição 2.2.6 *Sejam K um corpo, A uma K-álgebra com unidade, M um espaço vetorial sobre K e "$\cdot$" uma aplicação de $A \times M$ em M. O espaço vetorial M é chamado um A-módulo (à esquerda), se para quaisquer a e b em A, m e n em M e α em K, as seguintes condições são satisfeitas:*
(i) $\mathbf{1} \cdot m = m$, *onde* $\mathbf{1}$ *é a unidade de* A*;*
(ii) $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$*;*
(iii) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$*;*
(iv) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$*;*
(v) $\alpha(a \cdot m) = (\alpha a) \cdot m = a \cdot (\alpha m)$.

De modo similar, definimos um B-módulo (à direita). Um (A, B)-bimódulo nada mais é do que um A-módulo à esquerda com relação a álgebra A e, ao mesmo tempo, um B-módulo à direita, com relação a álgebra B, com a associatividade compatível.

Definição 2.2.7 *Seja A uma álgebra com unidade. Um subconjunto N de um A-módulo M é um submódulo de M se N é um A-módulo sob as operações induzidas de M.*

Teorema 2.2.8 *Seja A uma álgebra com identidade. Se N é um subconjunto não-vazio de um A-módulo M, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) N é um submódulo de M;
(ii) N é fechado com relação à adição, à multiplicação por escalar e à multiplicação por elementos de A.

Definição 2.2.9 *Sejam A uma K-álgebra com unidade, M e N A-módulos. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de módulos se para quaisquer m e n em M, α em K e a em A as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n), \qquad \varphi(\alpha m) = \alpha\varphi(m) \qquad \text{e} \qquad \varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m).$$

O núcleo de φ é o conjunto $Ker\varphi = \{m \in M : \varphi(m) = 0\}$ e a imagem de φ é o conjunto $\varphi(M) = \{\varphi(m) : m \in M\}$. Se φ é bijetora, dizemos que é um isomorfismo de módulos e escrevemos $M \cong N$.

Proposição 2.2.10 *Se A é uma álgebra com identidade e $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos, então $Ker\varphi$ é um submódulo de M e $\varphi(M)$ é um submódulo de N. Além disso, $Ker\varphi = 0$ se, e somente se, φ é injetora.*

Prova: Semelhante à demonstração da Proposição 2.2.5. ■

2.3 Produto Tensorial

Nesta seção, apresentamos o conceito de Produto Tensorial de espaços vetoriais, estendendo o mesmo para álgebras.

Sejam A e B espaços vetoriais sobre um corpo K. O produto cartesiano $A \times B$ é também um espaço vetorial sobre K, considerando a soma como

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

e a multiplicação por escalar como

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Este espaço é chamado soma direta de A e B.

Definição 2.3.1 *Sejam A e B espaços vetoriais sobre um corpo K. Indicamos por $(A \times B)^+$ o conjunto*

$$\{ \sum_{(a,b) \in A \times B} n_{ab}(a, b); n_{ab} \in \mathbb{Z} \text{ e } n_{ab} \neq 0 \textit{ para um número finito de pares ordenados } (a, b)\}.$$

Observação 2.3.2 *Se definimos a soma de dois elementos de $(A \times B)^+$ por*

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} m_{ab}(a, b) + \sum_{(a,b) \in A \times B} n_{ab}(a, b) = \sum_{(a,b) \in A \times B} (m_{ab} + n_{ab})(a, b),$$

então $(A \times B)^+$ é um grupo abeliano.

Observação 2.3.3 *Cada elemento $\sum_{(a,b) \in A \times B} n_{ab}(a, b)$ pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$.*

Definição 2.3.4 *Sejam A e B espaços vetoriais sobre um corpo K. Definimos $H_{A \times B}$ como o subgrupo de $(A \times B)^+$ gerado por todos os elementos dos tipos:*
(i) $(a_1 + a_2, b_1) - (a_1, b_1) - (a_2, b_1)$;
(ii) $(a_1, b_1 + b_2) - (a_1, b_1) - (a_1, b_2)$;
(iii) $(\lambda a_1, b_1) - (a_1, \lambda b_1)$.
Para quaisquer a_1 e a_2 em A, b_1 e b_2 em B e λ em K. Definimos $A \otimes B = (A \times B)^+ / H_{A \times B}$ como o produto tensorial de A e B. Denotamos por $a \otimes b$ cada elemento $(a, b) + H_{A \times B}$ de $A \otimes B$.

Observação 2.3.5 *Obviamente $A \otimes B$ é um grupo abeliano. Além disso, cada elemento $\left(\sum_{(a,b) \in A \times B} n_{ab}(a, b) \right) + H_{A \times B}$ pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$.*

Definição 2.3.6 *Sejam A e B espaços vetoriais sobre um corpo K e G um grupo abeliano. Dizemos que a aplicação $\psi : A \times B \to G$ é bilinear se para quaisquer a_1 e a_2 em A, b_1 e b_2 em B e λ em K as seguintes condições são satisfeitas:*
(i) $\psi(a_1 + a_2, b_1) = \psi(a_1, b_1) + \psi(a_2, b_1)$;
(ii) $\psi(a_1, b_1 + b_2) = \psi(a_1, b_1) + \psi(a_1, b_2)$;
(iii) $\psi(\lambda a_1, b_1) = \psi(a_1, \lambda b_1)$.

Proposição 2.3.7 *Sejam A e B espaços vetoriais e G um grupo abeliano. Se $\psi : A \times B \to G$ é uma aplicação bilinear, então existe um único homomorfismo de grupos $\psi' : A \otimes B \to G$ tal que $\psi'(a \otimes b) = \psi(a, b)$ para quaisquer a em A e b em B.*

Prova: A aplicação ψ pode ser estendida a um homomorfismo de grupos $\psi : (A \times B)^+ \to G$ definindo

$$\psi\left(\sum_{(a,b)\in A\times B} n_{ab}(a,b)\right) = \sum_{(a,b)\in A\times B} \psi(n_{ab}(a,b)).$$

Observemos que o subgrupo $H_{A\times B}$ está contido no núcleo de ψ. Consideremos a aplicação $\psi' : A \otimes B \to G$, dada por $\psi'(x + H_{A\times B}) = \psi(x)$.

Vamos provar que ψ' está bem definida. Se $x + H_{A\times B} = y + H_{A\times B}$, então $x - y \in H_{A\times B}$. Logo, $\psi(x-y) = 0$ implica $\psi(x) = \psi(y)$, ou seja, $\psi'(x + H_{A\times B}) = \psi'(y + H_{A\times B})$.

É fácil ver que ψ' é um homomorfismo de grupos e que $\psi'(a \otimes b) = \psi(a, b)$, para todo a em A e b em B.

Claramente, ψ' é única. ∎

Lema 2.3.8 *Sejam A, B, A' e B' espaços vetoriais. Se $\psi_1 : A \to A'$ e $\psi_2 : B \to B'$ são transformações lineares, então existe um único homomorfismo de grupos, denotado por $\psi_1 \otimes \psi_2 : A \otimes B \to A' \otimes B'$, tal que $(\psi_1 \otimes \psi_2)(a \otimes b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$, para todo a em A e b em B.*

Prova: Vamos definir $\psi : A \times B \to A' \otimes B'$ por $\psi(a, b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$. Obviamente, ψ é bilinear. Logo, pela Proposição 2.3.7, existe um homomorfismo de grupos de $A \otimes B$ em $A' \otimes B'$ possuindo a propriedade estabelecida. Claramente, este homomorfismo é único. ∎

Teorema 2.3.9 *Se A e B são espaços vetoriais sobre um corpo K, então $A \otimes B$ é um espaço vetorial sobre K, com multiplicação por escalar definida por $\lambda \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} ((\lambda a_i) \otimes b_i)$.*

Prova: Dado λ em K, definimos $\psi_\lambda : A \to A$ por $\psi_\lambda(a) = \lambda a$. Como ψ_λ é uma transformação linear, definimos $\lambda \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes b_i) = (\psi_\lambda \otimes id_B)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes b_i)\right)$. Logo, $\lambda \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n}((\lambda a_i) \otimes b_i)$. Como $\psi_\lambda \otimes id_B$ está bem definida, temos que o produto por escalar está bem definido e $A \otimes B$ é um espaço vetorial sobre K. ■

Teorema 2.3.10 *Sejam A, B, A' e B' espaços vetoriais. Se $\psi_1 : A \to A'$ e $\psi_2 : B \to B'$ são transformações lineares, então existe uma única transformação linear, denotada por $\psi_1 \otimes \psi_2 : A \otimes B \to A' \otimes B'$, tal que $(\psi_1 \otimes \psi_2)(a \otimes b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$ para todo a em A e b em B.*

Prova: Vamos definir $\psi : A \times B \to A' \otimes B'$ por $\psi(a, b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$. Obviamente, ψ é bilinear. Logo, pela Proposição 2.3.7, existe um único homomorfismo de grupos $\psi' : A \otimes B \to A' \otimes B'$ tal que $\psi'(a \otimes b) = \psi(a, b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$, para todo a em A e b em B. Além Disso,

$$\psi'(\lambda \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes b_i)) = \psi'(\sum_{i=1}^{n}((\lambda a_i) \otimes b_i)) = \sum_{i=1}^{n} \psi'((\lambda a_i) \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} \psi_1(\lambda a_i) \otimes \psi_2(b_i) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda \psi_1(a_i)) \otimes \psi_2(b_i) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda(\psi_1(a_i) \otimes \psi_2(b_i))) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda \psi'(a_i \otimes b_i)) =$$
$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \psi'(a_i \otimes b_i) = \lambda \psi'(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i).$$

Portanto, ψ' é uma transformação linear. Definindo $\psi_1 \otimes \psi_2 = \psi'$, temos a transformação linear desejada. Claramente, $\psi_1 \otimes \psi_2$ é única. ■

Teorema 2.3.11 *Se A e B são espaços vetoriais sobre um corpo K, então:*
(i) Se $a_1, \ldots, a_m$ são vetores linearmente independentes de A e $b_1, \ldots, b_m$ são vetores de B tais que $\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i = 0$, então $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$;
(ii) Se $a_1, \ldots, a_m$ são vetores de A e $b_1, \ldots, b_m$ são vetores linearmente independentes de B tais que $\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i = 0$, então $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$;
(iii) Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de A e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de B, então $\{e_i \otimes f_j; 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n\}$ é uma base de $A \otimes B$. Além disso, se $a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$ e $b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$, então $a \otimes b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes f_j)$.

Prova: Para provar a parte (i), consideremos $\mathbf{A}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de A tais que $\{a_1, \ldots, a_m\} \cup \mathbf{A}$ é uma base de A. Seja $\psi_k : A \times B \to B$ a aplicação dada por $\psi_k(a, b) = \alpha_k b$, onde α_k é o coeficiente de a_k, quando escrevemos a em função da base $\{a_1, \ldots, a_m\} \cup \mathbf{A}$. Claramente, ψ_k é bilinear. Logo, pela Proposição 2.3.7, existe um homomorfismo de grupos $\psi_k' : A \times B \to B$ tal que $\psi_k'(a \otimes b) = \psi_k(a, b)$. Como $\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i = 0$, temos que $b_k = \psi_k'(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i) = \psi_k'(0) = 0$. Portanto, $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Analogamente provamos a parte (ii).

Para provar a parte (iii), vamos mostrar que $\mathbf{B} = \{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m \ e \ 1 \leq j \leq n\}$ é uma base de $A \otimes B$. Suponhamos, que existam coeficientes $\gamma_{ij}, 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ tais que $\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}(e_i \otimes f_j)) = 0$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}(e_i \otimes f_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(e_i \otimes \gamma_{ij} f_j) = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes (\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f_j).$$

Portanto, para cada i, temos que $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f_j = 0$, de onde concluímos que $\gamma_{ij} = 0$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Portanto, $\mathbf{B}$ é linearmente independente.

Vamos provar que $\mathbf{B}$ gera $A \otimes B$. Sejam $a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \in A$ e $b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j \in B$. Logo,

$$a \otimes b = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \otimes \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i e_i \otimes \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i e_i \otimes \beta_j f_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes f_j).$$

Assim, é fácil ver que qualquer elemento $\sum_{i=1}^{p} a_i \otimes b_i$ de $A \otimes B$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de $\mathbf{B}$. Portanto, $\mathbf{B}$ gera $A \otimes B$ e é uma base de $A \otimes B$. ∎

Sejam A e B álgebras associativas com unidade sobre um corpo K. O produto cartesiano $A \times B$ é também uma álgebra associativa com identidade sobre K, considerando a soma como

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

a multiplicação como

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$

e a multiplicação por escalar como

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Teorema 2.3.12 *Se A e B são álgebras associativas com identidade sobre um corpo K, então $A \otimes B$ é uma álgebra associativa com identidade sobre K, com multiplicação induzida por $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1a_2 \otimes b_1b_2)$.*

Prova: Fixando a_2 e b_2, definimos ψ_1 e ψ_2 por $\psi_1(a_1) = a_1a_2$ e $\psi_2(b_1) = b_1b_2$ para quaisquer a_1 em A e b_1 em B. Claramente, ψ_1 e ψ_2 são transformações lineares. Logo $\psi_1 \otimes \psi_2 : A \otimes B \to A \otimes B$ define multiplicação à direita por $a_2 \otimes b_2$.

Fazendo isto para todo a_2 em A e b_2 em B, revertemos o procedimento, fixando x em $A \otimes B$ e definindo $\psi_x : A \times B \to A \otimes B$ por $\psi_x(a, b) = x(a \otimes b)$ para qualquer (a, b) em $A \times B$. Como ψ_x é bilinear, pela Proposição 2.3.7, temos que existe um homomorfismo de grupos $\psi_x^{'} : A \otimes B \to A \otimes B$ tal que $\psi_x^{'}(a \otimes b) = \psi(a, b)$ para todo a em A e b em B. A aplicação $\psi_x^{'}$ corresponde à multiplicação à esquerda por x.

É fácil ver agora que $A \otimes B$ é uma álgebra associativa com identidade. ■

Teorema 2.3.13 *Sejam A, B, $A^{'}$ e $B^{'}$ álgebras associativas com identidade. Se $\psi_1 : A \to A^{'}$ e $\psi_2 : B \to B^{'}$ são homomorfismos de álgebras, então existe um único homomorfismo de álgebras $\psi_1 \otimes \psi_2 : A \otimes B \to A^{'} \otimes B^{'}$ tal que $(\psi_1 \otimes \psi_2)(a \otimes b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$ para quaisquer a em A e b em B.*

Prova: Vamos definir $\psi : A \times B \to A^{'} \otimes B^{'}$ por $\psi(a, b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$. Obviamente, ψ é bilinear. Logo, pela Proposição 2.3.7, existe uma única transformação linear $\psi^{'} : A \otimes B \to A^{'} \otimes B^{'}$ tal que $\psi^{'}(a \otimes b) = \psi(a, b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$ para quaisquer a em A e b em B.

Além disso,

$$\psi^{'}((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)) = (\psi_1 \otimes \psi_2)((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)) = (\psi_1 \otimes \psi_2)(a_1a_2 \otimes b_1b_2) =$$
$$\psi_1(a_1a_2) \otimes \psi_2(b_1b_2) = \psi_1(a_1)\psi_1(a_2) \otimes \psi_2(b_1)\psi_2(b_2) = (\psi_1(a_1) \otimes \psi_1(a_2))(\psi_2(b_1) \otimes \psi_2(b_2)) =$$
$$(\psi_1 \otimes \psi_2(a_1 \otimes b_1))(\psi_1 \otimes \psi_2(a_2 \otimes b_2)) = \psi^{'}(a_1 \otimes b_1)\psi^{'}(a_2 \otimes b_2).$$

Assim, é fácil ver que $\psi^{'}$ é um homomorfismo de álgebras. Definindo $\psi_1 \otimes \psi_2 = \psi^{'}$, temos o homomorfismo desejado. Claramente, $\psi_1 \otimes \psi_2$ é único. ■

2.4 Álgebras com identidades polinomiais

Nesta seção, introduziremos as álgebras com identidades polinomiais, uma classe muito importante de álgebras. Pois, além de surgirem como uma generalização das álgebras nilpotentes, comutativas e as de dimensão finita, elas mantém várias das boas propriedades destas classes.

Definição 2.4.1 *Para o conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, \}$ de variáveis não comutativas, $K\langle X\rangle$ denotará a álgebra associativa livre, isto é, $K\langle X\rangle$ tem como base os elementos da forma*

$$x_{i_1} \dots x_{i_n} \ ; \ x_{i_j} \in X \ ; \ n = 0, 1, 2, \dots$$

e a multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \dots x_{i_k})(x_{j_1} \dots x_{j_l}) = x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{j_1} \dots x_{j_l} \text{ onde } x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

Os elementos de $K\langle X\rangle$ são denominados de polinômios.

O subespaço $K\langle X\rangle' \subset K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos da forma

$$x_{i_1} \dots x_{i_n} \ ; \ x_{i_j} \in X \ ; \ n = 1, 2, \dots$$

é uma subálgebra denominada de álgebra associativa livre sem unidade.

Observe que a álgebra $K\langle X\rangle$ definida acima é, noutras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

Definição 2.4.2 *Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \dots, x_n) = 0$) é denominado uma identidade polinomial da álgebra A, se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Uma álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra) é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Seguem alguns exemplos importantes de álgebras com identidades polinomiais, ou seja, de PI-álgebras.

Exemplo 2.4.3 *Toda álgebra comutativa A é uma PI-álgebra, pois o polinômio comutador $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para A.*

Exemplo 2.4.4 *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois um cálculo direto usando os elementos da base de E mostra que o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial para E.*

Exemplo 2.4.5 *(Regev, [6]) Seja E' a álgebra de Grassmann sem unidade sobre um corpo infinito K com $\operatorname{char} K = p \neq 0$. Então, $f(x) = x^p$ é uma identidade polinomial para E'.*

Exemplo 2.4.6 *A álgebra* $M_2(K)$ *satisfaz a identidade* $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ *conhecida como a identidade de Hall. A verificação é simples, basta observarmos dois fatos:*

(1) Se $a, b \in M_2(K)$*, então* $tr([a, b]) = 0$*;*

(2) Se $a \in M_2(K)$ *e* $tr(a) = 0$*, então* $a^2 = \lambda I_2$ *onde* I_2 *é a matriz identidade de* $M_2(K)$*.*

Exemplo 2.4.7 *(Teorema de Amitsur-Levitzki, [6]) A álgebra* $M_n(K)$ *satisfaz o polinômio standard de grau* $2n$

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}$$

onde S_{2n} *é o grupo das permutações de* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *e* $(-1)^{\sigma}$ *é o sinal da permutação* σ*. Ademais, não satisfaz identidades sob a forma,* s_m^k*, para todo* k*, quando* $m < 2n$*.*

Exemplo 2.4.8 *Uma* K*-álgebra* A *é dita ser uma Nil-álgebra se para cada* $a \in A$ *existe um número natural* n *tal que* $a^n = 0$*. O menor inteiro* n *com tal propriedade é denominado índice de nilpotência do elemento* a*. Uma álgebra* A *é uma Nil-álgebra de índice* n *se* $a^n = 0$ *para todo* $a \in A$*. Toda Nil-álgebra de índice limitado* n *é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio* $f(x) = x^n$*.*

Exemplo 2.4.9 *Uma* K*-álgebra* A *é dita ser nilpotente se existe um natural fixo* n *tal que o produto de quaisquer* n *elementos de* A *é igual a zero. O menor natural* n *com tal propriedade é denominado o índice de nilpotência da álgebra* A*, e* A *é denominada uma álgebra nilpotente de classe* $n-1$*. Toda álgebra associativa nilpotente de classe* $n-1$ *é uma PI-álgebra, pois ela satisfaz o polinômio* $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$*. (Observamos que neste exemplo e no anterior, as álgebras consideradas não possuem unidade.)*

Aqui mencionamos brevemente que o clássico Teorema de Nagata, Higman, Dubnov e Ivanov, afirma que em característica 0, toda Nil-álgebra de índice limitado, é nilpotente. Para ver mais detalhes Capítulo 8 de [6].

Teorema 2.4.10 *(Regev,[14]) O produto tensorial* $A = A_1 \otimes A_2$ *de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra.*

Após vários exemplos de PI-álgebras, surge uma pergunta inevitável: Existem álgebras que não são PI-álgebras? A resposta é sim. A álgebra $K\langle X\rangle$, por exemplo, não satisfaz nenhuma identidade polinomial não nula. Isto pode ser compreendido por um argumento simples. Suponhamos, por absurdo, que $f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma identidade polinomial não nula de $K\langle X\rangle$. Assim, $f(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n))=0$ onde $f_i(x_i)=x_i$ para $i=1,\ldots,n$, o que é um absurdo, pois $f(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$.

O próximo teorema mostra que toda álgebra de dimensão finita é também uma PI-álgebra.

Teorema 2.4.11 *Seja A uma álgebra de dimensão finita, digamos n. Então, ela satisfaz o polinômio standard de grau $n+1$, isto é, o polinômio*

$$s_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})=\sum_{\sigma\in S_{n+1}}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n+1)}.$$

Prova: Da definição de polinômio standard é imediato que ele é igual a zero, se dois de seus argumentos forem iguais. Por multilinearidade, é suficiente verificarmos numa base de A, digamos $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Observe que $s_{n+1}(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}})$ é tal que ao menos dois dos e_{i_j} são iguais. Daí, s_{n+1} é identidade polinomial para A. ■

Definição 2.4.12 *Um ideal I de uma álgebra A é dito ser um T-ideal, se I for invariante sob todos os endomorfismos Φ de A, isto é, se $\Phi(I)\subseteq I$ para todo endomorfismo $\Phi: A\to A$.*

Teorema 2.4.13 *O ideal $T(A)$ das identidades da álgebra A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Prova: Sejam $f(x_1,\ldots,x_n)\in T(A)$ e $\Phi: K\langle X\rangle\to K\langle X\rangle$ um endomorfismo. Como $\Phi(f(x_1,\ldots,x_n))=f(\Phi(x_1),\ldots,\Phi(x_n))$ e $f(a_1,\ldots,a_n)=0$ para quaisquer $a_1,\ldots,a_n\in A$, obtemos que, $\Phi(f(x_1,\ldots,x_n))\in T(A)$. Portanto, $\Phi(T(A))\subseteq T(A)$. ■

Observação 2.4.14 *Se A é uma álgebra e I é um ideal de A, então o quociente A/I tem estrutura de álgebra.*

Teorema 2.4.15 *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então, $I=T(K\langle X\rangle/I)$.*

Prova: Sejam $f(x_1,\ldots,x_n)\in I$ e $f_1,\ldots,f_n\in K\langle X\rangle$. Como $f(f_1,\ldots,f_n)\in I$, temos que

$$f(f_1+I,\ldots,f_n+I)=f(f_1,\ldots,f_n)+I=I.$$

Logo, $I\subseteq T(K\langle X\rangle/I)$. Por outro lado, supondo-se que $f(x_1,\ldots,x_n)\in T(K\langle X\rangle/I)$, obtemos $I=f(x_1+I,\ldots,x_n+I)=f(x_1,\ldots,x_n)+I$. Donde, $f(x_1,\ldots,x_n)\in I$. Logo $T(K\langle X\rangle/I)\subseteq I$. Portanto temos a igualdade. ■

Definição 2.4.16 *Seja B um conjunto gerador de $T(A)$ para uma álgebra A. Diremos que B é uma base de identidades de A. Se B não contém propriamente nenhuma base de A, B será denominada uma base minimal de $T(A)$. Se S é um subconjunto de $K\langle X\rangle$, o T-ideal gerado por S é denotado por $\langle S\rangle^T$. Noutras palavras, $\langle S\rangle^T$ é o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios*

$$\{f(g_1, \ldots, g_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in S; g_i \in K\langle X\rangle\},$$

ou ainda,

$$\langle S\rangle^T = \{h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2; f(x_1, \ldots, x_n) \in S, g_i, h_1, h_2 \in K\langle X\rangle, \text{ para } i = 1, \ldots, n\}.$$

Se um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ pertence a $\langle S\rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é uma conseqüência de S. Dois subconjuntos de $K\langle X\rangle$ são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.

Um dos principais problemas da teoria de identidades polinomiais é encontrar, para uma dada álgebra, bases para suas identidades polinomiais. Seguem alguns exemplos de bases de identidades polinomiais.

Exemplo 2.4.17 *(veja, [6]) A álgebra $M_2(K)$ quando K é um corpo de característica zero, tem por base minimal*

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ e } h(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3].$$

Exemplo 2.4.18 *Regev e Krakowski, em [6], mostraram que sobre corpos com característica zero todas as identidades da álgebra de Grassmann seguem da identidade polinomial $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. Este último resultado generaliza-se facilmente para o caso de corpos infinitos com característica positiva e diferente de dois (quando $char(K) = 2$, a álgebra é comutativa, logo não muito "interessante" do ponto de vista da PI teoria. Neste caso, um raciocínio simples mostra que qualquer identidade polinomial que não seja conseqüência da comutatividade, implica na nilpotência da álgebra). Ressaltamos ainda que a álgebra de Grassmann E de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão infinita é um exemplo de uma PI-álgebra que não satisfaz nenhuma identidade standard, quando o corpo base é de característica zero. Quando, $char\, K = p > 2$, a álgebra E satisfaz a identidade standard de grau $p+1$. Um teorema devido a Kemer, veja [10], afirma que neste último caso, toda PI-álgebra satisfaz alguma identidade standard.*

Em 1950, Specht [16] formulou o seguinte problema para álgebras associativas sobre corpos de característica zero: Toda álgebra possui uma base finita para suas identidades polinomiais? Esta pergunta, que ficou conhecida como o problema de

Specht, passou a ser uma das questões centrais da teoria de identidades polinomiais e foi finalmente respondida de modo positivo por Kemer em 1987 (veja, [9]). Por volta de 1973, Krause e Lvov, separadamente, provaram que este problema tem resposta positiva para álgebras finitas. A resposta para o problema de Specht é negativa no caso de álgebras sobre corpos infinitos e de característica positiva. Não vamos entrar em detalhes sobre o avanço na resolução do problema de Specht, pois o assunto merece atenção especial, envolvendo métodos e técnicas sofisticadas, e não está diretamente relacionado com o conteúdo da presente dissertação. Mais adiante, faremos uma exposição resumida sobre alguns pontos da teoria desenvolvida por Kemer, com a finalidade de justificar o nosso interesse no estudo das identidades em álgebras matriciais e de Grassmann.

2.5 Variedades e álgebras relativamente livres

Nesta seção, apresentaremos as variedades (de álgebras associativas) que classificam as PI-álgebras de acordo com as identidades que estas satisfazem. Dentro das variedades, encontram-se seus elementos mais importantes, as álgebras livres. Através destes conceitos, desenvolve-se o estudo das álgebras e suas identidades polinomiais.

Definição 2.5.1 *Dizemos que uma álgebra F é livre se existe $X \subseteq F$ tal que X gera F e para cada álgebra A e cada aplicação $h : X \to A$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \to A$ estendendo h. Neste caso, dizemos que F é livremente gerada por X.*

Definição 2.5.2 *Seja I um subconjunto de $K\langle X\rangle$. A variedade de álgebras $var(I)$ definida pelo conjunto I é a classe de todas as álgebras que satisfazem cada identidade de I; O conjunto I é o conjunto de identidades que definem a variedade $var(I)$. A variedade trivial é a classe de álgebras que contém apenas a álgebra nula (noutras palavras, é a variedade definida pelo conjunto $K\langle X\rangle$).*

Observação 2.5.3 *É fácil verificar que o conjunto I está contido no núcleo de qualquer homomorfismo da álgebra livre $K\langle X\rangle$ numa álgebra da variedade $var(I)$.*

Definição 2.5.4 *Se $\mathcal{V}$ é uma classe de álgebras, o conjunto*

$$T(\mathcal{V}) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \in T(A) \text{ para cada } A \in \mathcal{V}\}$$

é um ideal de $K\langle X\rangle$ chamado ideal das identidades que definem a variedade $\mathcal{V}$.

O próximo teorema mostra que toda variedade tem uma álgebra livre.

Teorema 2.5.5 *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial de álgebras e $\Pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ a projeção canônica. Então,*

(1) A restrição de Π à X é injetora;

(2) A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto gerador livre $\Pi(X)$.

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$. Consideramos uma álgebra não nula A de $\mathcal{V}$ e um elemento não nulo a de A. Então, existe homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle \to A$ tal que $\Psi(x_1) = a$ e $\Psi(x_2) = 0$. Como $T(\mathcal{V})$ está contido no núcleo de Ψ, existe um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to A$ para o qual $\Phi \circ \Pi = \Psi$. Mas,

$$a = \Psi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_2) = \Psi(x_2) = 0$$

o que é uma contradição. Portanto $x_1 = x_2$ e Π restrito a X é injetora.

A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é gerada pelo conjunto $\Pi(X)$ e pertence a $\mathcal{V}$ desde que satisfaça todas identidades de $T(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em $\mathcal{V}$, com conjunto gerador livre $\Pi(X)$. Sejam $A \in \mathcal{V}$ e σ uma aplicação de $\Pi(X)$ em A. Como $K\langle X\rangle$ é álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \Pi : X \to A$ estende-se a um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle \to A$. Existe um homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to A$ para o qual $\Psi \circ \Pi = \Phi$, pois $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker(\Phi)$. Se $x \in X$, temos que

$$\Psi(\Pi(x)) = \Psi \circ \Pi(x) = \Phi(x) = \sigma \circ \Pi(x) = \sigma(\Pi(x))$$

ou seja, o homomorfismo Ψ estende a aplicação σ. Logo, Ψ é o homomorfismo procurado. Portanto, $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra livre na variedade $\mathcal{V}$, tendo como conjunto gerador livre $\Pi(X)$. ■

Uma variedade de álgebras é claramente fechada sob as operações de tomar subálgebras, imagem homomórfica e produto cartesiano. Uma variedade $\mathcal{V}$ de álgebras é gerada por uma classe $\mathcal{U}$ de álgebras se toda álgebra de $\mathcal{V}$ pode ser obtida das álgebras de $\mathcal{U}$ por uma seqüência finita de aplicações das operações citadas acima. Denotamos este fato por $\mathcal{V} = var(\mathcal{U})$, ou por $\mathcal{V} = var(A)$ quando a classe $\mathcal{U}$ contém apenas uma álgebra A. O clássico Teorema de Birkhoff (veja, [6]) demonstra que uma classe não vazia de álgebras é variedade se, e somente se, ela é fechada com respeito às três operações acima descritas.

No próximo Teorema, listamos algumas das propriedades básicas das variedades (omitimos a prova, pois a mesma é bastante direta). É importante frisar que ele só é válido devido ao conjunto X ser infinito.

Teorema 2.5.6 *Sejam $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ duas classes de álgebras e $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Então,*

(1) $T(\mathcal{U}_1) = \cap_{A\in\mathcal{U}_1} T(A) = T(var(\mathcal{U}_1))$;

(2) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \Rightarrow T(\mathcal{U}_2) \subseteq T(\mathcal{U}_1)$;

(3) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{V} \Leftrightarrow T(\mathcal{V}) \subseteq T(\mathcal{U}_1)$;

(4) Se F é uma álgebra livre em $\mathcal{V}$, então $T(\mathcal{V}) = T(F)$.

Corolário 2.5.7 *Se A é uma álgebra, então $T(var(A)) = T(A)$.*

Vários resultados e definições apresentados nesta seção podem ser generalizados para álgebras não necessariamente associativas (álgebras de Lie, de Jordan, Alternativas, entre outras), sobre anéis comutativos com identidade. Porém, como as álgebras tratadas neste texto são principalmente a álgebra de matrizes e a álgebra de Grassmann, nós restringimos as definições às álgebras associativas sobre corpos.

Definição 2.5.8 *Para um conjunto fixo Y, a álgebra $U_Y(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$ é chamada uma álgebra relativamente livre de $\mathcal{V}$, se $U_Y(\mathcal{V})$ é livre na classe $\mathcal{V}$ (livremente gerada por Y). A cardinalidade de Y é chamada o posto de $U_Y(\mathcal{V})$.*

A proposição a seguir caracteriza as álgebras relativamente livre em qualquer variedade.

Proposição 2.5.9 *Sejam $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto qualquer e J o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_i \in K\langle Y\rangle; i \in I\}.$$

Então, a álgebra $U = K\langle X\rangle/J$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$ com conjunto de geradores livre $\overline{Y} = \{y + J \mid y \in Y\}$. Duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$ são isomorfas.

Prova:

(1) Vamos mostrar que $U \in \mathcal{V}$. Seja $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ uma das identidades que definem $\mathcal{V}$ e sejam $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n \in F$ onde $\overline{g}_j = g_j + J$ com $g_j \in K\langle Y\rangle$. Então, $f_i(g_1, \ldots, g_n) \in J$. Logo, $f_i(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n) = 0$. Isto mostra que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é identidade polinomial para U. Daí, $U \in \mathcal{V}$.

(2) Agora vamos provar a propriedade universal de F. Sejam A uma álgebra de $\mathcal{V}$ e $\Psi : \overline{Y} \to A$ uma função arbitrária. Definimos a função $\Theta : Y \to A$ pondo $\Theta(y) = \Psi(\overline{y})$ e estendemos Θ a um homomorfismo (também denotado por Θ) $\Theta : K\langle Y\rangle \to A$. Isto é sempre possível, porque $K\langle Y\rangle$ é álgebra associativa livre. Para provar que Ψ pode ser estendido a um homomorfismo $U \to A$, é suficiente mostrarmos que $J \subseteq Ker(\Theta)$. Seja $f \in J$, isto é,

$$f = \sum_{i \in I} u_i f_i(\overline{g}_{i_1}, \ldots, \overline{g}_{i_n}) v_i \text{ onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle Y\rangle.$$

Para $r_{i_1}, \ldots, r_{i_n} \in A$, o elemento $f_i(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$ é igual a zero em A, e isto implica que $\Theta(f) = 0$, isto é, $J \subseteq Ker(\Theta)$ e $U \simeq U_{\overline{Y}}(\mathcal{V})$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$, livremente gerada por $\overline{Y}$.

(3) Se $|Y| = |Z|$, com $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ e $Z = \{Z_i \mid i \in I\}$. Sejam $F_Y(\mathcal{V})$ e $F_Z(\mathcal{V})$ suas correspondentes álgebras relativamente livres. Sendo ambas relativamente livres, podemos definir homomorfismos

$$\Psi : F_Y(\mathcal{V}) \to F_Z(\mathcal{V}) \text{ e } \Phi : F_Z(\mathcal{V}) \to F_Y(\mathcal{V})$$

pondo $\Psi(y_i) = z_i$ e $\Phi(z_i) = y_i$. Assim, Ψ e Φ são isomorfismos.

A partir de (1), (2) e (3) temos o requerido. ■

Observação 2.5.10 *A partir da Proposição 2.5.9, temos que o T-ideal de* $K\langle X\rangle$ *gerado por* $\{f_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *consiste de todas as combinações lineares dos elementos sob a forma*

$$u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) v_i \text{ onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

2.6 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Nesta seção, verificamos que sob determinadas condições podemos simplificar as identidades que estamos trabalhando. À primeira vista, estes resultados parecem apenas simplificar as técnicas, mas sua importância vai muito além disso, como veremos no decorrer do texto.

Definição 2.6.1 *Um monômio $\mathcal{M}$ tem grau k em x_i se, a variável x_i ocorre em $\mathcal{M}$ exatamente k vezes. Um polinômio é homogêneo de grau k em x_i, se todos os seus monômios tem grau k em x_i. Denotamos este fato por $\deg_{x_i} f = k$. Um polinômio é linear em x_i é um polinômio de grau 1 em x_i.*

Definição 2.6.2 *Um polinômio é multihomogêneo, se para cada variável x_i, todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Um polinômio é multilinear se é linear em cada variável. O grau de um polinômio é o grau do seu maior monômio.*

Definição 2.6.3 *Sejam f um polinômio de $K\langle X\rangle$ de grau n e x_k uma variável de f. Podemos escrever f como uma soma, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio f_i é homogêneo de grau i na variável x_k. O polinômio f_i é a componente homogênea de grau i em x_k do polinômio f.*

Os polinômios multilineares e multihomogêneos desempenham um papel importante na busca de bases para as identidades polinomiais sobre determinados tipos de corpos. Este fato, já observado por Specht em 1950, está desenvolvido no próximo lema.

Lema 2.6.4 *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$, onde f_i é a componente homogênea de f com grau i em x_1.*

(i) Se o corpo K contém mais que n elementos, então as identidades $f_i = 0$ onde $i = 1, 2, \ldots, n$ seguem de $f = 0$;

(ii) Se a característica do corpo é zero ou maior que o grau de f, então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.

Prova: (i) Seja $I = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como I é um T-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I \ ; \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

é um determinante de Vandermonde que é diferente de 0, temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I$, ou seja, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são conseqüências de $f = 0$.

(ii) Pela parte (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$. Escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in I$ sob a forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in I$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Como $\deg_{y_j} f_i < k$; $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2$, podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de consequências multilineares de $f = 0$. Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$ é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, pois temos por hipótese que $char(K) = 0$ ou $\operatorname{char} K \geq \deg(f)$. ∎

Observamos que o item (i) do lema acima significa que o polinômio f gera o mesmo T-ideal que o gerado pelos polinômios f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Corolário 2.6.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então,*

(i) Se o corpo K é infinito, então todas identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multihomogêneas;

(ii) Se o corpo K tem característica zero, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multilineares.

Quando a álgebra é unitária podemos restringir a nossa busca de identidades polinomiais a um determinado tipo de polinômios, conforme explicamos a seguir.

Definição 2.6.6 *O comutador de comprimento n é definido indutivamente a partir de $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ tomando $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado polinômio próprio (ou comutador), se ele é uma combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,..,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] \ ; \ \alpha_{i,..,j} \in K.$$

(Assumindo que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores). Denotamos por $B(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$.

O próximo lema mostra a importância dos polinômios comutadores para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. Sua prova não é complicada e pode ser encontrada em ([6], proposição 4.3.3, pp 42-44). A demonstração está baseada no fato que $K\langle X\rangle$ é a álgebra universal envolvente de $L\langle X\rangle$, conhecido como Teorema de Witt.

Lema 2.6.7 *Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(A) \cap B(X)$). Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica 0, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias multilineares.*

2.7 Identidades graduadas

Ao estudarmos identidades polinomiais ordinárias, em alguns momentos é interessante tratarmos de outros tipos de identidades, através das quais podemos obter informações sobre as identidades ordinárias. Desta idéia surgiram, por exemplo, as identidades polinomiais fracas, as identidades com involução e as identidades com graduação (graduadas). O nosso interesse nas últimas é que as mesmas estão relacionadas com as ordinárias. Nesta seção, vamos trabalhar com tais identidades e fazer um breve resumo da importante teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer. No que segue, fixamos G como um grupo abeliano aditivo.

Definição 2.7.1 *Uma álgebra A é dita ser G-graduada, se $A = \oplus_{g\in G} A_g$ onde A_g é subespaço de A para todo $g \in G$ e $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$ para todos $g, h \in G$. Um elemento $\mathbf{a} \in \cup_{g\in G} A_g$ é chamado homogêneo. Para todo elemento homogêneo $\mathbf{a}$, temos $\mathbf{a} \in A_g$ para algum $g \in G$. Dessa forma, o grau homogêneo de $\mathbf{a}$ é definido como sendo g, e denotamos $w_G(\mathbf{a}) = g$. Se $\mathbf{a} = \sum_{\mathbf{a}_g \in \mathcal{A}_g} \mathbf{a}_g$, chamamos $\mathbf{a}_g$ de componente homogênea de grau g em $\mathbf{a}$.*

Definição 2.7.2 *Um subespaço $\mathcal{B}$ de uma álgebra G-graduada A é dito ser G-graduado, se*

$$\mathcal{B} = \sum_{g\in G} \mathcal{B}_g \quad \text{onde} \quad \mathcal{B}_g = \mathcal{B} \cap A_g,$$

os quais denominaremos de subespaços homogêneos.

Definição 2.7.3 *Uma aplicação $\Phi : A \to \mathcal{B}$ entre álgebras G-graduadas é chamada homomorfismo G-graduado, se Φ é um homomorfismo que satisfaz $\Phi(A_g) \subseteq \mathcal{B}_g$ para* *todo $g \in G$. De modo análogo, definimos isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduado.*

Os próximos dois lemas são de demonstrações imediatas.

Lema 2.7.4 *Sejam A uma álgebra G-graduada e B uma subálgebra de A. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) B é subálgebra G-graduada de A;

(2) B é álgebra G-graduada tal que $B_g \subseteq A_g$ para todo $g \in G$;

(3) As componentes homogêneas de cada elemento de B pertencem a B;

(4) B é gerada por elementos homogêneos.

Lema 2.7.5 *Se I é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada A, então A/I é uma álgebra G-graduada considerando $(A/I)_g = \{a + I/a \in A_g\}$.*

Observação 2.7.6 *Seja $\Phi : A \to B$ um homomorfismo G-graduado de álgebras. Então, o $Ker(\Phi)$ é um ideal G-graduado de A e $\Phi(A)$ é uma subálgebra G-graduada de B tal que $(\Phi(A))_g = \Phi(A_g)$. Noutras palavras, pelo Lema 2.7.5, vale a versão graduada do teorema do Isomorfismo, isto é, a álgebra quociente $A/\ker\Phi$ é isomorfa (como álgebra graduada) a $Im\Phi = \Phi(A)$.*

Em seguida, apresentaremos alguns exemplos de álgebras graduadas. Desde que uma mesma álgebra pode ter diferentes graduações, estes exemplos serão importantes para apresentarmos as graduações que usaremos no decorrer do texto, também denominadas de graduações canônicas (ou usuais).

Exemplo 2.7.7 *A álgebra de Grassmann E é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, seja E_0 o subespaço de E gerado por $\{1, e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \ ; k = 2, 4, \dots\}$ e seja E_1 o subespaço de E gerado por $\{e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \ ; k = 1, 3, \dots\}$. Assim, $E = E_0 \oplus E_1$ e facilmente podemos verificar que $E_iE_j \subseteq E_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}_2$*

Exemplo 2.7.8 *A partir da graduação do Exemplo 2.7.7 construiremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann E. Para tanto é suficiente considerarmos*

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \text{ e } (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

Usando o fato que o produto tensorial é distributivo em relação a soma direta, é imediato verificar que

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1.$$

Além disso, verifica-se diretamente que

$$(E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Portanto a álgebra $E \otimes E$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 2.7.9 *A álgebra $M_{1,1}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, consideramos*

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1,$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\} \text{ e } (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\},$$

e verificamos diretamente que

$$(M_{1,1}(E))_i (M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Exemplo 2.7.10 *Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos disjuntos e enumeráveis. Considerando $X = \cup_{g \in G} X_g$, a álgebra $K\langle X \rangle$ é denominada de álgebra livre G-graduada. Para uma variável $x \in X$, definimos $w_G(x) = g$ se $x \in X_g$. Recordamos que o conjunto de monômios $\{1, x_{i_1} \dots x_{i_k} \mid x_{i_j} \in X \text{ e } n = 1, 2, \dots\}$ é uma base de $K\langle X \rangle$. Para um tal monômio, digamos $m = x_{i_1} \dots x_{i_n}$, definimos $w_G(m) = \sum_{j=1}^{n} w_G(x_{i_j})$ como sendo o grau homogêneo do monômio. Se $g \in G$, denotamos por $K\langle X \rangle_g$ o subespaço gerado pelos monômios de grau g. Observando que*

$$K\langle X \rangle_g K\langle X \rangle_h \subseteq K\langle X \rangle_{g+h} \quad \text{para todos} \quad g, h \in G,$$

concluímos que $K\langle X \rangle$ é de fato G-graduada.

Definição 2.7.11 *Um ideal I numa álgebra G-graduada A é chamado de T_G-ideal se I é invariante por todos os endomorfismos G-graduados de A, isto é, $\Phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado Φ de A.*

Definição 2.7.12 *Um polinômio $0 \neq f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$, ou mesmo a expressão $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, é uma identidade polinomial G-graduada da álgebra G-graduada A, se*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } a_i \in A_{g_i}, \quad \text{onde} \quad g_i = w_G(x_i) \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O conjunto $T_G(A)$ de todas as identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal de $K\langle X \rangle$, denominado de ideal das identidades G-graduadas da álgebra A.

De modo análogo ao caso ordinário, as álgebras com identidades polinomiais graduadas possuem as mesmas propriedades no que diz respeito a T-ideais, variedades, polinômios lineares, polinômios homogêneos, etc. Assim, por exemplo, dizemos que $h \in K\langle X\rangle$ é T_G consequência de f (ou h segue de f como identidade graduada) se h pertence ao T_G-ideal gerado por f em $K\langle X\rangle$. Bem como, dado um conjunto de polinômios $\{f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ a classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras G-graduadas satisfazendo as identidades $f_i = 0$, para todo i, é chamada uma variedade de álgebras G-graduadas determinada pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$. Deste modo, adaptamos as propriedades das identidades ordinárias para as identidades graduadas.

Os resultados a seguir fornecem informações sobre identidades ordinárias a partir de identidades graduadas.

Lema 2.7.13 *Sejam A e B duas álgebras G-graduadas com respectivos T-ideais de identidades G-graduadas $T_G(A)$ e $T_G(B)$. Se $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade qualquer de A e

$$b_1 = \sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, b_m = \sum_{g\in G} b_{m_g} \in B.$$

Como $f \in T(A)$, temos que

$$f(\sum_{g\in G} x_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{m_g}) \in T_G(A) \subseteq T_G(B)$$

daí, vem que, $f(b_1, \ldots, b_m) = f(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{m_g}) = 0$.
Portanto, $T(A) \subseteq T(B)$. ■

Corolário 2.7.14 *Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Observação 2.7.15 *(Contra-exemplo) Consideramos na álgebra de Grassmann E duas graduações. A primeira é a $\mathbb{Z}_2$-graduação $E = E_0 \oplus E_1$, a segunda é a graduação trivial onde $y_1y_2 = y_2y_1$ não é uma identidade graduada. Portanto, uma mesma álgebra pode ter identidades graduadas diferentes conforme sua graduação.*

2.8 A Teoria de Kemer

Nesta seção faremos um breve resumo sobre a teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero. No que segue, K denotará um corpo de característica zero. O leitor interessado poderá encontrar mais informação nas monografias [3] e [9].

A teoria desenvolvida por Kemer mostrou que as PI álgebras sobre corpos de característica 0, satisfazem muitas propriedades "boas" que as aproximam às álgebras comutativas. Começamos com os conceitos de T-ideais T-primos e T-semiprimos, que têm um papel extremamente importante nessa teoria.

Definição 2.8.1 *Diremos que:*

(1) Um T-ideal $\mathcal{S}$ é T-semiprimo se, para qualquer T-ideal $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{S}$ implicar que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$;

(2) Um T-ideal $\mathcal{I}$ é T-primo se, para quaisquer T-ideais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$ implicar que $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$.

Os próximos resultados podem ser encontrados nas seções 2 e 3 do Capítulo I de [9], e recomendamos este livro para mais detalhes e informações sobre esta teoria.

Teorema 2.8.2 *(Kemer)*

(1) Seja $\mathcal{V} \neq \emptyset$ uma variedade. Então $\mathcal{V} = \mathcal{N}_m\mathcal{W}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a maior variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice menor ou igual a m, $\mathcal{W}$ é a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{V}$ e o produto de duas variedades $\mathcal{N}\mathcal{M}$ consiste das álgebras A tendo um ideal $\mathcal{I}$ contido em $\mathcal{N}$ e cujo quociente $A/\mathcal{I}$ está em $\mathcal{M}$;

(2) O T-ideal $\mathcal{I}$ é semiprimo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_q$ onde os T-ideais $\mathcal{I}_j$ são T-primos.

(3) Os únicos T-ideais T-primos não triviais são:

$$T(M_n(K))\ ,\ T(M_n(E)) \text{ e } T(M_{a,b}(E)).$$

Se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, então

$$E(A) = A_0 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$$

é denominada o envelope de Grassmann de A.

Kemer demonstrou ainda os seguintes resultados, veja [9].

(1) Todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada;

(2) O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita;

(3) De (1) e (2), segue que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita.

Dentre as consequências mais importantes dos resultados acima está a resposta afirmativa para o problema de Specht.

Como visto anteriormente, a hipótese sobre a característica do corpo ser zero permite-nos trabalhar apenas com identidades multilineares, e assim podemos fazer uso das boas propriedades da multilinearidade. No desenvolvimento da teoria de Kemer estas propriedades foram bastante utilizadas. Uma questão interessante é o quanto esta teoria depende das identidades multilineares. Observamos que essa questão está fortemente relacionada com uma possível generalização dos resultados obtidos por Kemer para álgebras sobre corpos infinitos de qualquer característica. Convém observar que, em característica positiva, a teoria de Kemer não se aplica diretamente, um dos obstáculos é o surgimento de novos T-ideais T-primos, chamados de T-ideais irregulares, cuja descrição completa é ainda um problema em aberto. No entanto, vimos que identidades polinomiais graduadas podem ser usadas no estudo das identidades polinomiais ordinárias em álgebras sobre corpos de qualquer característica.

Ressaltamos que recentemente foi provado por Belov [2], Grishin [8] e Shchigolev [15] que o problema de Specht resolve-se em negativo sobre corpos de característica positiva.

2.9 Álgebras genéricas

Podemos observar no resumo sobre a teoria de Kemer a importância das PI-álgebras $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$. Existem construções algébricas genéricas para as álgebras relativamente livre destas álgebras. Para a álgebra $M_n(K)$ esta é a álgebra das matrizes genéricas introduzidas por Procesi [13], e para $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ as construções genéricas foram dadas por Berele [1]. Outro caso importante para nossos objetivos é a construção dada por Lewin [11] para $U_m(A)$ quando $T(A) = T(A_1)T(A_2)$. Vamos fazer um breve resumo sobre estas construções e para mais casos, veja o Capítulo 4 deste trabalho e as referências citadas acima. Veja também [12] para aplicações.

Sejam $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ conjuntos de variáveis com $Y \cap Z = \emptyset$. Tomando $X = Y \cup Z$, denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra livre gerada por X. Frequentemente, denominamos os elementos de Y de pares e os elementos de Z de ímpares. Noutras palavras, definimos $w = w_{\mathbb{Z}_2} : X \to \mathbb{Z}_2$ pondo $w(x) = 0$ se $x \in Y$ e $w(x) = 1$ se $x \in Z$. Deste modo, os elementos de Y também são denominados de 0-variáveis e os de Z de 1-variáveis. Se $f = x_1x_2\dots x_k$ é um monômio, definimos $w(f) = w(x_1)+w(x_2)+\cdots+w(x_k)$ (aqui consideramos a somatória módulo 2), e chamamos f de par se $w(f) = 0$, e de ímpar se $w(f) = 1$. Assim, $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada, onde $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios pares e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios ímpares.

Definição 2.9.1 *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Os elementos de $A_0 \cup A_1$ são denominados de homogêneos. Além disso, cada elemento homogêneo* $\mathbf{a}$ *possui um grau w em $\mathbb{Z}_2$, isto é, $w(\mathbf{a}) = 0$ ou 1. A álgebra A é dita supercomutativa, se*

$$\mathbf{ab} = (-1)^{w(\mathbf{a})w(\mathbf{b})}\mathbf{ba} \text{ para todos } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_0 \cup A_1.$$

Exemplo 2.9.2 *A álgebra de Grassmann é sem dúvida o exemplo mais importante de álgebra supercomutativa.*

Definição 2.9.3 *Seja $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada definida como acima. Para os monômios $f, g \in K\langle X\rangle$, consideramos as relações $fg = (-1)^{w(f)w(g)}gf$ e seja I o ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado gerado por estas relações. Quando $\operatorname{char} K = p > 0$, adicionamos $\{y_i^p \mid y_i \in Y\}$ ao conjunto de geradores de I. A álgebra $K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/I$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada de álgebra livre supercomutativa.*

Lema 2.9.4 *Sejam $K[Y]$ a álgebra de polinômios comutativos gerada por Y e $E(Z)$ a álgebra de Grassmann gerada pelo espaço vetorial com base Z. Então, as álgebras $K\langle Y; Z\rangle$ e $K[Y] \otimes E(Z)$ são isomorfas.*

Prova: Seja $\Psi : K[Y] \otimes E(Z) \to K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/I$ a aplicação definida por $\Psi(a \otimes b) = ab + I$. É imediato que esta aplicação é um homomorfismo (de álgebras) sobrejetor. Sejam $a = y_1 \dots y_n \in K[Y]$ e $b = z_1 \dots z_m \in E(Z)$, ambos não nulos. Fazendo as substituições $y_1 = \cdots = y_n = 1$ e $z_1 = e_1, \dots, z_m = e_m$ onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é subconjunto da base de E, temos que $ab \notin T_2(E)$. Por outro lado, como $K\langle X\rangle I$ é a álgebra livre supercomutativa, temos que $I = \cap Q$, onde Q corre sobre os T_2-ideais das álbegras supercomutativas. Em particular, $I \subseteq T_2(E)$ e disto segue a injetividade de Ψ, como queríamos. ■

Lema 2.9.5 *(a) A álgebra $K\langle Y;Z\rangle$ é canonicamente $\mathbb{Z}_2$-graduada e livre na classe de todas as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas supercomutativas. Noutras palavras, para toda álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada supercomutativa $A = A_0 \oplus A_1$, toda função $\Phi : Y \cup Z \to A$ tal que $\Phi(Y) \subseteq A_0$ e $\Phi(Z) \subseteq A_1$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras;*

(b) Seja $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ e $x_i = y_i + z_i$, onde $i = 1, 2, \ldots$; Então, toda função $\Phi : x_i \to A = A_0 \oplus A_1$; $i = 1, 2, \ldots$ pode ser estendida a um homomorfismo homogêneo de $K\langle Y;Z\rangle \to A$ de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Prova: Veja introdução de [1]. ■

Sejam n e m inteiros positivos e consideramos os conjuntos

$$Y = \{y_{ij}^{(q)} \mid i,j = 1, \ldots, n; q = 1, \ldots, m\} \text{ e } Z = \{z_{ij}^{(q)} \mid i,j = 1, \ldots, n; q = 1, \ldots, m\}.$$

Combinando a construção de Procesi com a de Berele, definimos as seguintes matrizes com entradas em $K\langle Y;Z\rangle$:

(1) As $n \times n$ matrizes genéricas

$$A_q = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^{(q)} E_{ij} \text{ onde } q = 1, \ldots, m;$$

(2) As $n \times n$ matrizes genéricas com entradas supercomutativas

$$B_q = \sum_{i,j=1}^{n} (y_{ij}^{(q)} + z_{ij}^{(q)}) E_{ij} \text{ onde } q = 1, \ldots, m;$$

(3) As (a, b)-matrizes genéricas $(n = a + b)$

$$C_q = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^{(q)} E_{ij},$$

onde $t_{ij}^{(q)} = y_{ij}^{(q)}$ se $(i,j) \in \Delta_0$ e $t_{ij}^{(q)} = z_{ij}^{(q)}$ se $(i,j) \in \Delta_1$ e $q = 1, \ldots, m$.

Teorema 2.9.6 *(Procesi (i) e Berele ((ii),(iii)))*

(i) (veja [13])A álgebra gerada por $A_1, \ldots, A_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_n(K))$;

(ii) (veja [1])A álgebra gerada por $B_1, \ldots, B_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_n(E))$;

(iii) (veja [1])A álgebra gerada por $C_1, \ldots, C_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_{a,b}(E))$.

Capítulo 3

O Teorema de Lewin

Nste capítulo apresentaremos um teorema devido a Lewin em [11], que mostra como obter o produto de dois ideais como o núcleo de um homomorfismo de álgebras. Este trabalho motivou o trabalho de Di Vincenzo e Drensky (veja [5]) que apresentaremos no próximo capítulo.

3.1 O Teorema de Lewin

Sejam A e B duas K-álgebras com T-ideais $T(A)$ e $T(B)$, respectivamente. O produto dos T-ideais $T(A)T(B)$ é ainda um T-ideal. Nosso objetivo é construir uma K-álgebra C contendo A e B tal que $T(C) = T(A)T(B)$, tal construção foi apresentada por Lewin em [11].

Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, onde X é um conjunto enumerável. Denotemos por R o $K\langle X\rangle$-bimódulo livre com conjuntos enumeráveis de geradores livres R_1 e R_2.

Assim, existe uma única aplicação linear $\delta : K\langle X\rangle \to R$ definida por $\delta(x_i) = r_i$ para $i \geq 1$, satisfazendo:

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g \quad \text{para todos} \quad f, g \in K\langle X\rangle.$$

Observe que

$$\delta(x_1x_2) = x_1\delta(x_2) + \delta(x_1)x_2 = r_1x_2 + x_1r_2.$$

De modo similar, temos que

$$\delta(x_1x_2x_3) = r_1x_2x_3 + x_1r_2x_3 + x_1x_2r_3$$

e indutivamente, obtemos

$$\delta(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{j-1}}r_jx_{i_{j+1}}\dots x_{i_n}.$$

Então, estendemos por linearidade, para todo $K\langle X\rangle$.

Considere a aplicação linear

$$\psi : K\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} K\langle X\rangle & R \\ 0 & K\langle X\rangle \end{pmatrix}$$

definida por

$$f \to \psi(f) = \begin{pmatrix} f & \delta(f) \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

Vejamos que ψ é um homomorfismo de álgebras. De fato, sejam $f, g \in K\langle X\rangle$, e observe que

$$\psi(fg) = \begin{pmatrix} fg & \delta(fg) \\ 0 & fg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fg & (\delta(f)g + f\delta(g)) \\ 0 & fg \end{pmatrix} = \psi(f)\psi(g).$$

Mais ainda

$$\psi(1) = \begin{pmatrix} 1 & \delta(1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto ψ é um homomorfismo de álgebras.

Considerando dois ideais U e V de $K\langle X\rangle$ temos que o espaço quociente $\frac{R}{UR+RV}$ tem estrutura de $(\frac{K\langle X\rangle}{U}, \frac{K\langle X\rangle}{V})$-bimódulo livre com base $\{r_i + (UR+RV); i = 1, 2, \dots\}$.

Sejam Π_U e Π_V as projeções canônicas de U e V em $K\langle X\rangle$, respectivamente. Considere a aplicação

$$\delta^1 : K\langle X\rangle \to \frac{R}{UR+RV}$$

definida por

$$\delta^1(f) = \delta(f) + (UR+RV).$$

Assim, a aplicação δ^1 é também uma derivação, ou seja,

$$\delta^1(fg) = \delta^1(f)(g+I) + (f+I)\delta^1(g) \quad \text{onde} \quad I = UR+RV.$$

Isto implica que a aplicação

$$\Psi : K\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} \frac{K\langle X\rangle}{U} & \frac{R}{UR+RV} \\ 0 & \frac{K\langle X\rangle}{V} \end{pmatrix}$$

definida por

$$f \to \Psi(f) = \begin{pmatrix} \Pi_U(f) & \delta^1(f) \\ 0 & \Pi_V(f) \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo de álgebras.

A partir de agora vamos mostrar que $Ker(\Psi) = UV$. Para tanto, observe inicialmente que se f não pertence a U, então $\Pi_U(f) \neq 0$ e consequentemente f não está em $Ker\Psi$. Isso mostra que $Ker\Psi \subset U$. Analogamente, vemos que $Ker\Psi \subset V$.

Por outro lado, se $f \in U$ e $g \in V$ temos que

$$\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g) = \begin{pmatrix} \Pi_U(f) & \delta^1(f) \\ 0 & \Pi_V(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_U(g) & \delta^1(g) \\ 0 & \Pi_V(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos que

$$UV \subset Ker\Psi \subset U \cap V.$$

Logo, para concluir a prova é suficiente mostrar que $V \cap Ker\Psi \subset UV$. Considere a base B de $K\langle X \rangle$ formada por todos os monômios em X. Considere também X linearmente ordenada, da seguinte forma $x_1 < x_2 < \dots$. Defina agora a seguinte ordenação linear na base B: Para quaisquer dois elementos $a, b \in B$ dizemos que $a > b$ se $deg(a) < deg(b)$ ou $deg(a) = deg(b)$ e a é estritamente maior que b na ordem lexicográfica à direita.

Agora vamos estabelecer uma ordenação linear no conjunto $R_0 = \{r_1, r_2, \dots\}$ dos geradores de R da seguinte maneira: $r_1 < r_2 < \dots$. Então, uma K-base de R consiste de todos produtos ar_ib com $a, b \in B$. Esta base também pode ser ordenada da seguinte forma: $ar_ib < cr_jd$ se, e somente se, $b < d$ ou $b = d$ e $r_i < r_j$ ou $b = d$ e $r_i = r_j$ e $a < c$.

Seja $f \in K\langle X \rangle$ um polinômio qualquer e seja f^1 o maior monômio de f; Defina agora um subconjunto $C \subset B$ de modo que um monômio $c \in C$ se $c = v^1$ para algum $v \in V$ e $c = bw^1$ para algum $w \in V$ e $b \neq 1$.

Para qualquer $c \in C$, seja $a_c \in V$ fixo com $a_c^1 = c$. Então qualquer $v \in V$ possui o primeiro termo do tipo

$$bc = ba_c^1 = (ba_c)^1, c \in C$$

e, consequentemente,

$$v^1 > (v - ba_c)^1,$$

o que implica em $v - ba_c \in V$, pelo fato de V ser ideal. Portanto, utilizando indução transfinita, concluímos que o conjunto dos a_c, com $c \in C$, gera V como um $K\langle X\rangle$-módulo à esquerda.

Como V é um ideal não trivial de $K\langle X\rangle$, temos que qualquer $c \in C$ é um monômio de grau positivo e pode ser escrito como $c = x_i d_c$ onde $d_c \in B$ e $x_i \in X$. Note que $d_c \notin C$ pela definição de C. Por conveniência, denotaremos x_i por x_c e $r_i = \delta(x_i) = \delta(x_c) = r_c$.

Seja R_0B a base do $K\langle X\rangle$-módulo livre à esquerda $T = RK\langle X\rangle$. Usando a ordenação podemos decompor R_0B em três partes, como segue

$$B_1 = \{r_c d_c; c \in C\}, \quad B_2 = \{rbc; r \in R_0, b \in B, c \in C\}$$

e

$$B_3 = \{rb; r \in R_0, b \in B, rb \notin B_1 \cup B_2\}.$$

Observe que B_1 e B_2 são disjuntos, pois se $rbc_1 = r_c d_c$, então $bc_1 = d_c$, e isso implica que $x_c bc_1 = x_c d_c \in C$. Mas como $c_1 \in C$, temos $x_c bc_1 \notin C$, o que é uma contradição.

Usando a decomposição acima, construímos uma nova base para T, como segue: Observe que $a_c^1 = x_c d_c$ e $\delta(a_c^1) = \delta(x_c d_c) = \delta(x_c)d_c + x_c\delta(d_c)$. Portanto, $(\delta(a_c))^1$, o primeiro termo de $\delta(a_c^1)$, é igual a $\delta(x_c)d_c = r_c d_c$. A partir disso, podemos substituir B_1 por $K_1 = \{\delta(a_c); c \in C\}$.

Agora para qualquer monômio bc, com $b \in B$ e $c \in C$, tomamos $v_{bc} = ba_c \in V$, com $(v_{bc})^1 = bc$ e tomamos $K_2 = \{r(v_{bc})^1; r \in R_0, b \in B, c \in C\}$. Assim, existe uma correspondência biunívoca $(b \to b^{'})$ entre os elementos de $B_1 \cup B_2$ e $K_1 \cup K_2$, tal que $b = b^{'}$. Tomando $K_3 = B_3$, com argumentos simples de redução ao primeiro termo, mostramos que $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ gera T como um $K\langle X\rangle$-módulo livre à esquerda. Por outro lado, qualquer relação não trivial entre os elementos de K leva a uma relação não trivial entre os elementos da base de $RK\langle X\rangle$. Portanto, K é uma base de T.

Observe que os elementos v_{bc}, com $b \in B$ e $c \in C$, formam uma base linear de V. Logo, K_2 é uma base de $R_0V = span\{K_2\}$ e $RV = K\langle X\rangle R_0 V = K\langle X\rangle(span\{K_2\})$.

Sendo K uma base de $T = RK\langle X\rangle$, temos

$$UR = UK\langle X\rangle R_0 K\langle X\rangle = UR_0K\langle X\rangle = UK = UK_1 \oplus UK_2 \oplus UK_3$$

e

$$UR + RV = UK_1 \oplus K\langle X\rangle K_2 \oplus UK_3.$$

Agora, seja $v \in V \cap Ker\Psi$. Então $\delta^1(v) = 0$, isto é, $\delta(v) \in UR + RV$. Usando as propriedades da derivação δ e a decomposição de v na soma $v = \sum_{c\in C} b_c a_c$ com $b_c \in K\langle X\rangle$, obtemos que

$$\delta(v) = \delta(\sum b_c a_c) = \sum \delta(b_c a_c) = \sum \delta(b_c)a_c + \sum b_c\delta(a_c),$$

ou seja, podemos escrever

$$\delta(v) = A_v + B_v, \text{ onde } A_v = \sum \delta(b_c)a_c \text{ e } B_v = \sum b_c\delta(a_c).$$

Daí, temos que $A_v \in RV$ e $B_v \in K\langle X\rangle K_1$, e como $\delta(v) \in UR + RV$, obtemos que $B_v \in (UR + RV) \cap K\langle X\rangle K_1$.

Agora,

$$(UR + RV) \cap K\langle X\rangle K_1 = (UK_1 \oplus K\langle X\rangle K_2 \oplus UK_3) \cap K\langle X\rangle K_1,$$

donde $B_v \in UK_1$. Mas, como os elementos $\delta(a_c)$ de K_1 são independentes à esquerda, segue que todo b_c, pela expressão de B_v, pertence a U. Logo,

$$v = \sum b_c a_c \in UV.$$

Isso conclui a prova.

Temos provado o seguinte teorema devido a Lewin.

Teorema 3.1.1 *Seja R um $(K\langle X\rangle, K\langle X\rangle)$-bimódulo livre com geradores livres $r_1, r_2, \ldots,$ e sejam U e V ideais de $K\langle X\rangle$. Sejam*

$$\Pi_U : K\langle X\rangle \to \frac{K\langle X\rangle}{U} \quad e \quad \Pi_V : K\langle X\rangle \to \frac{K\langle X\rangle}{V},$$

os correspondentes epimorfismos canônicos.

Considere ainda, a derivação $\delta : K\langle X\rangle \to R$ definida por $\delta(x_i) = r_i$ para $i \geq 1$ e seja

$$\delta^1 : K\langle X\rangle \to \frac{R}{UR + RV},$$

definida por

$$\delta^1(f) = \delta(f) + (UR + RV).$$

Então a aplicação linear

$$\Psi : K\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} \frac{K\langle X\rangle}{U} & \frac{R}{UR+RV} \\ 0 & \frac{K\langle X\rangle}{V} \end{pmatrix},$$

definida por

$$f \to \Psi(f) = \begin{pmatrix} \Pi_U(f) & \delta^1(f) \\ 0 & \Pi_V(f) \end{pmatrix},$$

é um homormofismo de álgebras e $Ker(\Psi) = UV$.

Capítulo 4

Base Para as Identidades Polinomiais das Matrizes Triangulares em Blocos com $\mathbb{Z}_2$-Graduação

Neste capítulo vamos apresentar uma base para as Identidades Polinomiais das Matrizes Triangulares em Blocos com $\mathbb{Z}_2$-graduação. Os resultados são devido a Di Vincenzo e Drensky, e podem ser encontrados em [5].

4.1 Introdução

Seja K um corpo. Em nosso caso, uma superálgebra sobre K, nada mais é do que uma álgebra associativa A com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação $A = A_0 + A_1$, isto é, $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para todos i e j no grupo aditivo $\mathbb{Z}_2$. Não assumiremos que $A_0 \cap A_1 = \{0\}$. Kemer mostrou a importância de superálgebras na teoria das álgebras com identidades polinomiais (ordinárias) sobre corpos com característica zero. Em particular, ele estabeleceu que para qualquer PI-álgebra R existe uma superálgebra finitamente gerada $A = A_0 + A_1$ tal que R e $A_0 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$ possuem as mesmas identidades polinomiais. Aqui, $E = E_0 \oplus E_1$ é a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural.

Até o trabalho de Di Vincenzo e Drenski, em [5], as bases para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de uma álgebra supercomutativa A eram conhecidas em alguns poucos casos (veja [4] e [18] para exemplos)

Sejam R_1 e R_2 álgebras associativas sobre um corpo K e seja M um (R_1, R_2)-

bimódulo livre. Encontraremos uma base das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a superálgebra das matrizes triangulares superiores quadradas de ordem dois

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & M \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

com a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural

$$A_0 = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \text{ e } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

assumindo que conhecemos bases dos T-ideais $T(R_1)$, $T(R_2)$ e $T(R_1) \cap T(R_2)$ das identidades polinomiais ordinárias das álgebras R_1, R_2 e $R_1 \oplus R_2$, respectivamente. É fácil ver que $A_1^2 = 0$, isto é, a componente ímpar da superálgebra A é nilpotente de classe 2. Portanto, este fato pode ser considerado como um primeiro passo para um estudo sistemático das identidades das superálgebras com componente ímpar nilpotente. É no espírito do resultado do Capítulo anterior que obteremos uma descrição da superálgebra relativamente livre da variedade de superálgebras geradas por A. Isto pode ser considerado como análogo ao caso das álgebras relativamente livres em matrizes triangulares, estabelecido por Lewin, e detalhado no Capítulo anterior deste trabalho.

Sobre um corpo de característica zero, as bases das identidades polinomiais ordinárias para a álgebra das matrizes triangulares superiores foi encontrada por Mal'cev e, para as matrizes de ordem dois por Razmyslov e um dos autores em [4]. Aplicaremos estes resultados para obter bases para as superidentidades das álgebras das matrizes triangulares em blocos

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & N \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

com a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, nos seguintes casos:

(1) R_1 e R_2 são as matrizes triangulares superiores de ordem p e q, respectivamente, e N a álgebra das matrizes de ordem p por q, com $p > q$;

(2) $R_1 = R_2 = N = M_2(K)$;

(3) $R_1 = N = M_2(K)$ e R_2 é a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem dois.

4.2 O resultado principal

Sejam $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ e $X = Y \cup Z$. Consideremos as variáveis $y_1, y_2, \dots$ e $z_1, z_2, \dots$ como pares e ímpares, respectivamente. A álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, gerada livremente por X, possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$, onde um monômio $w = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ pertence a $K\langle X\rangle_0$ se o número de entradas em w de elementos de Z é par e $w \in K\langle X\rangle_1$ se o número destas entradas for ímpar. Um polinômio $f(y, z) = f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in K\langle X\rangle$ é dita uma identidade (ou superidentidade) $\mathbb{Z}_2$-graduada para a álgebra supercomutativa $A = A_0 + A_1$, se $f(b, c) = f(b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n) = 0$ para todos $b_1, \dots, b_m \in A_0$ e $c_1, \dots, c_n \in A_1$. Denotaremos por $T_2(A)$ o T_2-ideal das superidentidades de A e por $U_2(A) = \frac{K\langle X\rangle}{T_2(A)}$ a superálgebra relativamente livre da variedade de superálgebras gerada por A. Usaremos as mesmas notações $y_1, y_2, \dots$ e $z_1, z_2, \dots$ para os geradores de $U_2(A)$. No caso ordinário, escreveremos as notações como acima, excluindo o índice 2.

Os dois próximos teoremas constituem os principais resultados do nosso trabalho.

Teorema 4.2.1 *Sejam R_1 e R_2 PI-álgebras (ordinárias) associativas sobre um corpo K de característica positiva e seja M o (R_1, R_2)-bimódulo livre. Seja*

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & M \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

munida com a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural

$$A_0 = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \text{ e } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere ainda os T-ideais $T(R_1)$, $T(R_2)$ e $T(R_1) \cap T(R_2)$ com bases $\{f^1_{l_1}; l_1 \in L_1\}$, $\{f^2_{l_2}; l_2 \in L_2\}$ e $\{f_l; l \in L\}$, respectivamente. Então, o T_2-ideal das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de A tem como base o seguinte conjunto

$$\{z_1z_2, f_l(y), f^1_{l_1}(y)z_1, y_1f^2_{l_2}(y); l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, l \in L\}.$$

Prova: Como $A_1 = Me_{12}$ e $A_1^2 = 0$, obtemos que $z_1z_2 = 0$ é uma identidade para A. Para quaisquer $r_1, \dots, r_{m_l} \in A_0$, existem $r^1_1, \dots, r^1_{m_l} \in R_1$, $r^2_1, \dots, r^2_{m_l} \in R_2$ tais que

$$r_i = r^1_i e_{11} + r^2_i e_{22} \quad , \quad i = 1, \dots, m_l.$$

Logo,

$$f_l(r) = f_l(r^1)e_{11} + f_l(r^2)e_{22} = 0,$$

pois $f_l \in T(R_1) \cap T(R_2)$. De modo análogo, $f^1_{l_1}(y)z_1 = 0$ e $z_1 f^2_{l_2}(y) = 0$ são identidades para A e

$$z_1z_2, f_l(y), f^1_{l_1}(y)z_1, z_1f^2_{l_2}(y) \in T_2(A),$$

para qualquer $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, l \in L$.

Seja $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = 0$ uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de A e seja $f^{(q)}$ a componente homogênea de grau q em $z_1, \ldots, z_n$. Vamos mostrar que todo $f^{(q)}$ segue de

$$\{z_1z_2, f_l(y), f^1_{l_1}(y)z_1, z_1f^2_{l_2}(y); l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, l \in L\}$$

Se $q > 1$, então qualquer monômio de $f^{(q)}$ contém uma subpalavra $z_{p_1}y_{i_1} \cdots y_{i_k}z_{p_2}$. Como $z_{p_1}y_{i_1} \cdots y_{i_k}, z_{p_2} \in (K\langle X\rangle)_1$, a superidentidade $z_{p_1}y_{i_1} \cdots y_{i_k}z_{p_2} = 0$ é uma conseqüência de $z_1z_2 = 0$, isto é, $f^{(q)} = 0$ segue de $z_1z_2 = 0$. Logo, podemos assumir que $f = f^{(0)} + f^{(1)}$. Como $A_0 \cap A_1 = \{0\}$, então $f^{(0)} = 0$ e $f^{(1)} = 0$ são ambas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para A.

Se $q = 0$, então $f^{(0)}(y_1, \ldots, y_m) = 0$ é uma identidade para A se, e somente se, $f^{(0)}(r^1)e_{11} + f^{(0)}(r^2)e_{22} = 0$ para todo $r^1_i \in R_1, r^2_i \in R_2$, com $i = 1, \ldots, m$. Logo $f^{(0)}(u) \in T(R_1) \cap T(R_2)$ e a superidentidade $f^{(0)}(y) = 0$ é uma conseqüência de $\{f_l(y); l \in L\}$.

Finalmente, se $q = 1$, isto é

$$f^{(1)}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f^1_{ij}(y)z_1f^2_{ij}(y), \quad k_i > 0.$$

neste caso, considerando as componentes misturadas de $f^{(1)}(y, z_1, \ldots, z_n)$, podemos assumir que $n = 1$, ou seja,

$$f^{(1)}(y_1, \ldots, y_m, z_1) = \sum_{j=1}^{k} f^1_j(y)z_1f^2_j(y), \quad k > 0.$$

Vamos fazer uso de algumas idéias utilizadas na demonstração em [19]. Observe que toda identidade polinomial ordinária $f^1(u_1, \ldots, u_m) = 0$ para R_1 possui a seguinte forma

$$f^1(u_1, \ldots, u_m) = \sum w^1 f^1_{l_1}(t_1, \ldots, t_{m_{l_1}})w^2 = 0,$$

para alguns $w^1, w^2, t_1, \ldots, t_{m_{l_1}} \in K\langle U\rangle$. Como $w^2(y_1, \ldots, y_m)z_1 \in (K\langle X\rangle)_1$, para qualquer $f^1(u) \in T(R_1)$ a superidentidade $f^1(y)z_1 = 0$ é uma conseqüência de $\{f^1_{l_1}(y)z_1 = 0; l_1 \in L_1\}$; Analogamente, para $f^2(u) \in T(R_2)$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir na expressão de $f^{(1)}(y, z_1)$, que $f^2_j, j = 1, \ldots, k$, são linearmente independentes módulo $T(R_2)$ e $f^1_j(u) \in T(R_1)$, para cada $j = 1, \ldots, k$. Vamos mostrar que isto nos leva a uma contradição.

Seja P o $(R_1, K_{ord}(R_2))$-bimódulo livre gerado por v_1. Como $f^1_1(u) \in T(R_1)$, então existem $r^1_1, \ldots, r^1_m \in R_1$ tais que $f^1_1(u) \neq 0$, isto é,

$$\overline{f}(y, v_1) = \sum_{j=1}^{k} f^1_j(r^1_1, \ldots, r^1_m)v_1 f^2_j(y_1, \ldots, y_m) \neq 0$$

em P. Reescrevemos $\overline{f}(y, v_1)$ como

$$\overline{f}(y, v_1) = \sum_{i=1}^{p} s^1_i v_1 g^2_i(y),$$

onde $s^1_1, \ldots, s^1_p$ são linearmente independentes em R_1. Como $f^2_1, \ldots, f^2_k$ são linearmente independentes em $K_{ord}(R_2)$, obtemos que $g^2_i(u) \in T(R_2), i = 1, \ldots, p$, e $p > 0$. Daí, $g^2_1(r^2) \neq 0$ para algum $r^2_1, \ldots, r^2_m \in R_2$ e, para um elemento $m_1 \in M$ do conjunto gerador livre do (R_1, R_2)-bimódulo M, a soma $\sum_{i=1}^{p} s^1_i m_1 g^2_i(r^2)$ é diferente de 0 em M. como

$$f^{(1)}(r^1_1 e_{11} + r^2_1 e_{22}, \ldots, r^1_m e_{11} + r^2_m e_{22}, m_1 e_{12}) = \left(\sum_{i=1}^{p} s^1_i m_1 g^2_i(r^2)\right) e_{12},$$

então $f^{(1)}(y, z_1)$ não desaparece em A.

Isto completa a demonstração de que a base do $T_2(A)$ é

$$\{z_1 z_2, f_l(y), f^1_{l_1}(y)z_1, y_1 f^2_{l_2}(y); l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, l \in L\}.$$

■

Teorema 4.2.2 *Mantendo as notações do teorema anterior, sejam $U_2(R_1)$ e $U_2(R_2)$ as correspondentes álgebras relativamente livres e livremente geradas por $\{u_1^1, u_1^2, \dots\}$ e $\{u_2^1, u_2^2, \dots\}$, respectivamente, e seja V o $(U_2(R_1), U_2(R_2))$-bimódulo livre com geradores livres $w_1, w_2, \dots$. A superálgebra relativamente livre $U_2(A)$ é isomorfa a superálgebra $U_2^1(A)$ de*

$$\begin{pmatrix} U_2(R_1) & V \\ 0 & U_2(R_2) \end{pmatrix}$$

gerada por

$$y_i^1 = u_1^i E_{11} + u_2^i E_{22} \text{ e } z_1^i = w_i E_{12} \text{ com } i = 1, 2, \dots.$$

Prova: Seja $w : U\langle X\rangle \to U_2^1(A)$ o homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado, definido por $w(y_i) = \overline{y}_i, w(z_i) = \overline{z}_i, i = 1, 2, \dots$. É suficiente mostrar que $Ker\ w = T_2(A)$. Seja $\{f_{l_1}^1; l_1 \in L_1\}, \{f_{l_2}^2; l_2 \in L_2\}$ e $\{f_l; l \in L\}$ bases dos T-ideais (ordinários) $T(R_1), T(R_2)$ e $T(R_1) \cap T(R_2)$, respectivamente. Obviamente, a superálgebre $U_2^1(A)$ satisfaz as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas $z_1z_2 = 0, f_l(y) = 0, f_{l_1}^1(y)z_1 = 0, z_1 f_{l_2}^2(y) = 0, l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, l \in L$ e pelo teorema anterior, temos que $Ker\ w \supset T_2(A)$.

Seja $f(y, z) = f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in Ker\ w$. Seguiremos as principais etapas da demonstração anterior. Seja $f^{(q)}$ a componente homogênea de grau q em $z_1, \dots, z_n$. É fácil ver que $f^{(q)} \in T_2(A) \subseteq Ker\ w$ para $q > 1$, pois $z_{p_1} y_{i_1} \cdots y_{i_k} z_{p_2} \in T_2(A)$, e daí, $f^{(0)} + f^{(1)} \in Ker\ w$. Como as componentes pares e ímpares da superálgebra $U_2^1(A)$ se intersectam trivialmente, obtemos que $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$ pertencem ao $ker\ w$. Logo, $f^{(0)}(u) \in T(R_1) \cap T(R_2)$ e dessa forma, $f^{(0)}(y) \in T_2(A)$. Finalmente, para $q = 1$, podemos verificar que para cada elemento não-nulo

$$f^{(1)}(y, w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} f_{ij}^1(y) w_i f_{ij}^2(y) \in W.$$

existem $r_1^1, \dots, r_m^1 \in R_1$, $r_1^2, \dots, r_m^2 \in R_2$, $m_1, \dots, m_n \in M$ tais que

$$f^{(1)}(r_1^1 e_{11} + r_1^2 e_{22}, \dots, r_m^1 e_{11} + r_m^2 e_{22}, m_1 e_{12}, \dots, m_n e_{12}) \neq 0,$$

ou seja, $f(y, z) \in Ker\ w$ implica $f^{(1)}(y, z) \in T_2(A)$. Logo, $f(y, z) = 0$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para A e $Ker\ w \subset T_2(A)$. Isto completa a demonstração do teorema. ■

4.3 Exemplos

Seja K um corpo de característica zero e seja

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & N \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

a álgebra das matrizes triangulares em bloco com $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, nos seguintes casos:

(1) R_1 e R_2 são as matrizes triangulares superiores de ordem p e q, respectivamente, e N a álgebra das matrizes de ordem p por q, com $p > q$;

(2) $R_1 = R_2 = N = M_2(K)$;

(3) $R_1 = N = M_2(K)$ e R_2 é a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem dois.

Então, as bases das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de A são, respectivamente,

(1) z_1z_2, $[y_1, y_2] \ldots [y_{2p-1}, y_{2p}]$ e $z_1[y_1, y_2] \ldots [y_{2q-1}, y_{2q}]$;

(2) z_1z_2, $s_4(y)$ e $[[y_1, y_2]^2, y_1]$, onde $s_4(y) = s_4(y_1, y_2, y_3, y_4)$ é o polinômio standard de grau 4;

(3) z_1z_2, $s_4(y)$,$[[y_1, y_2]^2, y_1]$ e $z_1[y_1, y_2][y_3, y_4]$.

4.4 Comentários finais

(1) Em estudos recentes, S. M. Alves e P. Koshlukov generalizaram os resultados acima para matrizes em blocos de ordem n;

(2) Atualmente, A. Brandão está descrevendo os polinômios centrais de tais álgebras;

(3) Um problema interessante é tentar encontrar identidades fracas para superálgebras, pois a partir delas podemos obter identidades ordinárias e polinômios centrais.

Referências Bibliográficas

[1] A. Berele, *Generic Verbally Prime Algebras and their GK-dimensions*, Commun. Algebra, 21(5), $1487-1504$, 1993.

[2] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specth problem*, Mathematic of the USSR-Sbornik, 191, $N^o.3-4$, $329-340$, 2000.

[3] A.K. Belov, L.H. Rowen, *Computational Aspects of Polynomial Identities*, A.K. Peters, Wellesley, 2005.

[4] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math., 80(3), $323-335$, 1992.

[5] O. M. Di Vincenzo and V. Drensky, *The Basis of the Polynomial Identities for Superalgebras of triangular Matrices, Commun. in Algebra.* Math., 24(2), $727-735$, 1996.

[6] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.

[7] V. Drensky, *Gelfand-Kirillov dimension of PI algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 198, Denker, New York, $97-113$, 1998.

[8] A. V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals in characteristic* 2 *withot finite basis property(in Russian)*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, 5, $N^o.1$, $101-118$, 1999.

[9] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations Math. Monographs 87, Amer. Math. Soc., Providence. RI, 1991.

[10] A. Kemer, *The standard identities in characteristic p: A conjecture of I.B. Volichenko*, Israel J. Math., 81(3), $343-355$, 1993.

[11] J. Lewin, *A matrix representation for associative algebras*, I, Trans. Amer. Math. Soc., 188, $293-308$, 1974.

[12] V.T. Markov, *The Gelfand-Kirillov dimension: Nilpotency representability, Non matrix varieties (in Russian)*, Siberian School on Varieties of Algebraic Systems, Abstracts, Barnaul, $43-45$, 1988.

[13] C. Procesi, *Non-commutative Affine Rings*, Atti Accad. Naz. Lincei menh. Cl. Sci. Fis. Mat Natur. Sez I, 8(8), $239-255$, 1967.

[14] A. Regev, *Existence of identities in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*, Israel J. Math., 11, $131-152$, 1972.

[15] V.V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 191, $N^o.3-4$, $459-476$, 2000.

[16] W. Specth, *Gesetze in ringen*, Math. Z., 52, $557-589$, 1950.

[17] K. Zhevlakov, A. Slinko, I. Shestakov and A. Shirshov, *Rings that are Nearly associative*, Pure Appl. Math., 104, Academic Press, New York - London, 1982.

[18] I. B. Volichenko, *Non-homogeneus subalgebras of comutative superalgebras*, preprint 20 Institute of Mathematics, Bielorusian Academic of Sciencs, 1985.

[19] U. Leron, A. Vapne, *Polynomial identities of related rings*, Israel J. Math. 8, $127-137$, 1975.