Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades Polinomiais Graduadas para Álgebras de Matrizes

por

Sirlene Trajano Alves

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Março/2012

Identidades Polinomiais Graduadas para Álgebras de Matrizes

por

Sirlene Trajano Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Prof. Dr. Plamen Koshlukov

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2012

Abstract

The main theme of this dissertation is the description of the **graded polynomial identities** of the algebra $M_n(K)$. Different methods are used depending on the characteristic of the field: if *Char* $K = 0$, the description of the graded identities is reduced to the description of the multilinear graded identities, what was done in Chapter 2, where the identities of $M_n(K)$ are described for a wide class of elementary gradings; if *Char* $K = p > 0$ and K is infinite, the description of the graded identities is reduced to the study of the multi-homogeneous identities, wich makes it harder, and techniques such as the construction of generic algebras are necessary. In Chapter 3 the $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}_n$-graded identities of $M_n(K)$ are described for an infinite field K.

Keywords: Graded Algebras, Matrix Algebras, G-Graded Identities.

Resumo

O tema central desta dissertação é a descrição das **identidades polinomiais graduadas** da álgebra $M_n(K)$. Métodos diferentes são empregados conforme a característica do corpo: se *Char* $K = 0$, à descrição das identidades graduadas se reduz a descrição das identidades multilineares, o que foi feito no Capítulo 2, onde são descritas as identidade de $M_n(K)$ com uma classe ampla de graduações elementares; se *Char K =p>0* e K é infinito, a descrição das identidades graduadas é reduzida à descrição das identidades multi-homogêneas, que torna o problema mais difícil, e técnicas como a construção de álgebras genéricas são necessárias. No Capítulo 3 são descritas as identidades $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ para um corpo infinito K.

Palavras-chave: Álgebras Graduadas, Álgebras Matriciais, Identidades G-Graduadas.

Agradecimentos

Minha eterna gratidão a Deus, por me conceder o maravilhoso dom da vida, por todas as oportunidades e pela força maior que me fez persistir diante dos obstáculos.

Aos meus pais Severina Alves e José Alves, por sempre acreditarem em mim e por fazerem o possível para me proporcionar uma boa educação, mesmo em suas limitações.

As minhas irmãs Simone e Sidene, minha sobrinha Thamys e meu cunhado Augusto pelo carinho.

Ao meu amor, Kennedy Nunes, por ter sido presente nos momentos de angustia.

Ao Prof. Diogo Diniz, pelo aprendizado nas disciplinas ministradas, pela orientação, paciência, dedicação e por todas as sugestões que ajudaram a melhorar consideravelmente o nosso trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFCG que contribuíram com meu aprendizado nestes dois anos: Antônio Brandão, Bráulio Maia, Claudianor Alves, Daniel Cordeiro, Henrique Fernandes, Júlio Corrêa e Marco Aurélio.

Aos professores da Universidade Estadual da Paraíba: Aldo Maciel, Vandenberg Lopes, Davis Matias, Kátia Suzana e Samuel Duarte, por todo aprendizado e incentivo.

Aos professores Antônio Brandão e Plamen Koshlukov, por terem aceito compor a banca examinadora, por avaliarem o trabalho e pelas sugestões dadas.

A todos os colegas de mestrado e em especial: A Tatá, pela amizade e pelos momentos intensos de estudos que tivemos nos primeiros semestres do mestrado. A Nancy minha "irmã acadêmica" pelo companherismo, amizade e pela ajuda nos momentos finais deste trabalho. A Bruno Fontes, Marciel e a Leomaques pelas ótimas dicas.

A Andrezza, Suênia, Aninha, Du, Davi, Totinha, Rodrigo e Renato os funcionários do DME/UFCG que com toda simpatia sempre estiveram dispostos a me ajudar.

E por fim, a Capes pelo financiamento do trabalho.

O êxito da vida não se mede pelo que você conquistou, mas sim pelas dificuldades que superou no caminho. (Abraham Lincon)

Dedicatória

A meus pais Severina Alves e José Alves.

Conteúdo

Introdução

A **Teoria das PI-Álgebras** (do inglês *Polynomial Identity*), também chamada **PI-Teoria**, é um ramo da álgebra que estuda a classe das álgebras que satisfazem uma identidade polinomial, isto é, a classe das PI-álgebras. As principais linhas de pesquisa envolvem a descrição da estrutura de uma álgebra sabendo que ela satisfaz uma identidade polinomial, o estudo dos T-ideais e variedades de álgebras, que são classes de álgebras determinadas por um sistema de identidades polinomiais, e o estudo das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A.

Uma **identidade polinomial** de uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A, e se existe uma identidade polinomial não nula desta álgebra dizemos que A é uma **PI-álgebra**. O polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra comutativa, o polinômio standard S_n é uma identidade para qualquer álgebra de dimensão menor que n, as álgebras nilpotentes satisfazem identidades do tipo $x_1 \ldots x_n$ e a álgebra de Grassmann satisfaz a identidade $[[x_1, x_2], x_3]$, onde $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Além disso, o produto tensorial de duas PI-álgebras ainda é uma PI-algebra e todas as subálgebras, imagens homomórficas e produtos diretos de álgebras que satisfazem uma identidade f ainda satisfazem a mesma identidade. Assim, a classe das PI-álgebras é ampla e engloba as álgebras comutativas, álgebras de dimensão finita, álgebras nilpotentes, a álgebra de Grassmann, entre outras.

Historicamente, o desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais teve inicio por volta de 1930, embora de forma implícita, com os trabalhos dos matemáticos Dehn ([12]) e Wagner ([46]), mas foi a partir de 1948 que esta teoria desenvolveu-se mais intensamente após o artigo de Kaplansky ([28]), onde o autor mostrou que toda

PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples e de dimensão finita.

Dois anos após o trabalho de Kaplansky, Amitsur e Levitski ([1]) demonstraram, usando argumentos combinatórios, que o polinômio standard s_{2n} é uma identidade polinomial de grau mínimo para a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo K. Este resultado marcou o começo de uma nova abordagem à PI-teoria, que visa descrever as identidades de uma álgebra dada, e novas demonstrações para este resultado surgiram nos anos seguintes: Swan ([43]) deu uma demonstração usando teoria dos grafos, tratando produtos não nulos de matrizes elementares como caminhos em grafos Eulerianos; Kostant ([31]) relacionou o teorema de Amitsur-Levitzki com teoria de cohomologia e teoria de invariantes de matrizes $n \times n$; Razmyslov ([37]) deu uma demonstração utilizando o fato que como consequência do teorema de Cayley-Hamilton o polinômio característico de uma matriz é uma identidade com traço e Rosset ([40]) deu uma prova elementar envolvendo a álgebra de Grassmann e propriedades básicas da álgebra de matrizes.

O conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra associativa A, que denotamos por $T(A)$, é um ideal da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ invariante por qualquer endomorfismo desta álgebra. Ideais com esta propriedade são chamados **T-ideais**. Reciprocamente, todo T-ideal da álgebra associativa livre é o ideal das identidades de alguma álgebra associativa, e portanto o problema descrever as identidades de álgebras é o mesmo que descrever os T-ideais de $K\langle X\rangle$. Entretanto a correspondência entre álgebras e T-ideais não é biunívoca, isto é, existem álgebras não-isomorfas associadas ao mesmo T-ideal, por isso a teoria de T-ideais foi ligada à teoria de variedades de álgebras. Uma **variedade de álgebras** é uma classe de álgebras que satisfazem um conjunto dado de identidades. O conceito foi introduzido por Birkhoff ([9]) e Malcev ([36]), e se tornou a linguagem natural na teoria das identidades.

Em 1950, mesmo ano em que Amitsur e Levitzki publicaram seus resultados, W. Specht ([42]) conjecturou que para corpos de característica zero todo T-ideal próprio é finitamente gerado. Ao longo das próximas décadas apenas resultados parciais foram obtidos, e apenas em 1987, Kemer ([29]) deu uma resposta afirmativa para o Problema de Specht. A teoria desenvolvida por Kemer na solução do problema de Specht se baseia em uma teoria estrutural de T-ideais e envolve o estudo de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas (ou superidentidades) e certos produtos tensoriais graduados com a álgebra de Grassmann, chamados envelopes de Grassmann. Esta teoria é hoje uma das ferramentas básicas no estudo das identidades de uma álgebra dada. Entretanto, no caso de corpos de característica positiva a conjectura de Specht não é verdadeira. Em 1999 os matemáticos Belov ([7]) e Grishin ([24]) exibiram contra-exemplos para um corpo de característica 2.

Identidades polinomiais em álgebras de matrizes têm sido objeto de estudo na teoria das PI-álgebras desde seu início e problemas relacionados têm estimulado seu desenvolvimento ao longo dos anos, os T-ideais de álgebras de matrizes aparecem na classificação feita por Kemer em sua teoria estrutural dos T-ideais na lista dos T-ideais T-primos e são de grande importância na PI-teoria. A seguir listamos alguns dos principais resultados acerca das identidades das álgebras de matrizes.

A existência de bases finitas para $T(M_n(K))$ é garantida pelos resultados de Kemer no caso de corpos de característica zero. Já no caso em que K é um corpo finito a existência de tal base é conseqüência dos resultados obtidos por Kruse ([32]) e Lvov ([34]). Contudo, se $charK > 0$ e K é infinito, não sabemos se $M_n(K)$ possui tal base para $n \geq 3$.

Em 1973, Razmyslov ([37]) exibiu um conjunto com 9 polinômios e demonstrou que no caso em que, K é um corpo infinito de característica diferente de 2, as identidades multilineares de $M_2(K)$ são consequências destes polinômios. Como no caso de corpos de característica zero as identidades de uma álgebra são determinadas pelas identidades multilineares desta, o resultado de Razmyslov resolve o problema da descrição de $T(M_2(K))$ para corpos de característica zero. Drensky ([14]), em 1981, melhorou esse resultado demonstrando que s_4 e $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ é um conjunto gerador minimal de $T(M_2(K))$. Koshlukov ([30]) estendeu este resultado para corpos de característica maior que 3; entretanto para corpos de característica 3 mais uma identidade é necessária.

O problema de descrever o T-ideal das identidades de $M_n(K)$ quando K é um corpo infinito permanece em aberto para $n \geq 3$. De modo geral, dada uma álgebra A, a descrição do T-ideal $T(A)$ é um problema complicado e além da álgebra $M_2(K)$ foi resolvido apenas para alguns casos, os principais sendo os ideais de identidades das álgebras: de Grassmann G, o quadrado tensorial da álgebra de Grasmann $G \otimes G$ e a álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores.

Assim, surge o interesse por pesquisar outros tipos de identidades polinomiais como as identidades graduadas ou as identidades com traço. Estas últimas foram descritas, independentemente, por Razmyslov e Procesi, e têm um comportamento melhor que as identidades ordinárias: o teorema de Cayley-Hamilton pode ser reescrito como uma identidade com traço por meio das fórmulas de Newton e se $CharK > 0$ as identidades com traço de $M_n(K)$ são todas consequências desta. As identidades graduadas foram uma das principais ferramentas usadas por Kemer para resolver o problema de Specht para identidades polinomiais de álgebras sobre um corpo de característica zero, e a partir daí o estudo de identidades graduadas tomou impulso, tornando-se uma linha de pesquisa independente e ativa.

As álgebras E, $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ possuem $\mathbb{Z}_2$-graduações naturais e os geradores de suas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas já são conhecidos. As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$ e de $M_{1,1}(E)$ foram descritas por Di Vincenzo ([13]), em característica zero, e por Koshlukov e Azevedo ([4]), para corpos infinitos de característica diferente de 2.

A descrição das identidades polinomiais graduadas de $M_n(K)$ é bem mais simples, comparada com as identidades ordinárias. A álgebra das matrizes quadradas de ordem n possui graduações naturais pelos grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$ e suas identidades $\mathbb{Z}$-graduadas e $\mathbb{Z}_n$-graduadas foram descritas para n qualquer por Vasilovsky ([44], [45]), em característica zero, e por Azevedo([2], [3]), para corpos infinitos. Em ([16]) Drensky e Bahturin obtiveram resultados semelhantes aos de Vasilovsky, também para corpos de característica zero, considerando **graduações elementares** por um grupo arbitrário G em $M_n(K)$ (isto é, graduações em que as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas) onde a componente neutra $(M_n(K))_e$ (e denota o elemento neutro do grupo G) é o subespaço das matrizes diagonais. As graduações pelos grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$ consideradas por Vasilovsky são graduações elementares deste tipo.

O objetivo desta dissertação é apresentar estes resultados sobre as identidades graduadas de $M_n(K)$ para corpos infinitos, bem como os conceitos básicos necessários ao entendimento destes resultados. A dissertação consiste de 3 capítulos e está organizada da seguinte maneira.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos, e é assumido o conhecimento por parte do leitor de álgebra linear básica, espaços vetoriais e conceitos relacionados.

Iniciamos com a definição de álgebras e resultados relacionados, e apresentamos a definição de álgebra associativa livre, identidades polinomiais, T-ideais e Variedades, polinômios multilineares e multi-homogêneos. Em seguida definimos álgebras graduadas e identidades graduadas, que são os principais conceitos nesta dissertação. Por fim, apresentamos alguns resultados sobre matrizes genéricas que são importantes no desenvolvimento do Capítulo 3.

No Capítulo 2, considerando K um corpo de característica zero, apresentamos a descrição feita por Drensky e Bahturin das identidades polinomiais graduadas para álgebra de matrizes de ordem n no caso em que temos uma graduação elementar por um grupo arbitrário e $(M_n(K))_e$ consiste das matrizes diagonais. Em seguida, considerando a álgebra $M_3(K)$ descreveremos uma base de identidades polinomiais S_3-graduadas de $M_3(K)$ e por fim descrevemos as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas e $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra $M_n(K)$ como consequência do resultados obtidos por Drensky e Bahturin.

No Capítulo 3 constrímos um modelo genérico para álgebra graduada das matrizes, e provamos alguns resultados básicos sobre esse modelo que são utilizados adiante. Com o auxílio do modelo genérico citado, apresentamos os resultados de Azevedo que descrevem identidades polinomiais graduadas por uma $\mathbb{Z}$ e uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para algébra $M_n(K)$, considerando K um corpo de caracteristica positiva, e estendem os resultados de Vasilovsky.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo definimos nosso objeto de estudo que são as PI-álgebras e apresentamos alguns conceitos básicos e resultados de grande utilidade no estudo das identidades polinomiais e que são necessários para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho. No texto K denotará um corpo e consideraremos todas as álgebras e espaços vetoriais definidos sobre K.

1.1 Álgebras e Álgebras Livres

Nesta seção apresentaremos os conceitos de álgebra, subálgebra, homomorfismo de álgebras e álgebras livres. Enunciaremos a propriedade universal do produto tensorial que será útil na seção 1.5 e apresentaremos alguns exemplos relevantes.

Definição 1.1.1 *Uma K-**álgebra** (álgebra sobre K ou simplesmente álgebra) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e "$*$" é uma operação binária em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz*

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$.

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, a operação "$*$" é chamada de multiplicação. Para simplificar a notação, vamos denotar uma K-álgebra $(A, *)$ por A, e escreveremos ab, em vez de $a * b$, para $a, b \in A$.

Um subconjunto β é uma base da álgebra A se é uma base de A como espaço vetorial. Neste caso, definimos a *dimensão* da álgebra A como sendo a dimensão do espaço vetorial A.

Definição 1.1.2 *Dizemos que uma álgebra A é:*
(i) ***associativa*** *se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.*
(ii) ***comutativa*** *se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.*
(iii) ***unitária*** *(ou com unidade) se o produto possui elemento neutro, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$, chamado de unidade de A, tal que*

$$1_A a = a 1_A = a \text{ para todo } a \in A.$$

(iv) ***álgebra de Lie*** *se para quaisquer $a, b, c \in A$ valem*

$$a^2 = aa = 0 \ (anticomutatividade),$$

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \ (identidadedeJacobi).$$

Observação 1.1.3 *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto gerador de A (como espaço vetorial). Então, não é difícil verificar que:*
(i) A é associativa se, e somente se, $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in S$.
(ii)A é comutativa se, e somente se, $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in S$.
(iii)A é unitária se, e somente se, se existe um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$ para todo $a \in S$.

Em todo o texto trabalhamos com álgebras associativas e unitárias. Portanto, daqui em diante, o termo álgebra deverá ser entendido como álgebra associativa e unitária. Em toda álgebra A, sendo 1 sua unidade e $\lambda \in K$, $\lambda 1$ será identificado naturalmente com λ e $\{\lambda 1 | \lambda \in K\}$ com K.

Se A é uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o *comutador* de a, b por

$$[a, b] = ab - ba.$$

Mais geralmente, definimos o *comutador de comprimento n* como sendo

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n]$$

onde $a_i \in A$. A partir de um cálculo direto, podemos mostrar que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \text{ para quaisquer } a, b, c \in A. \tag{1.1}$$

Veremos a seguir alguns exemplos de álgebras:

Exemplo 1.1.4 *(**Álgebra das matrizes**) Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K, munido da multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra, cuja a unidade é a matriz identidade I_n. Destacamos nesta álgebra as matrizes elementares, onde para $1 \leq i, j \leq n$, E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. O produto de tais matrizes é dado por:*

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

onde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & se \quad j \neq k \\ 1, & se \quad j = k \end{cases}.$$

É fácil ver que as matrizes unitárias formam uma base para $M_n(K)$ e portanto a dimensão desta álgebra é n^2.

Mais geralmente, se A é uma álgebra, considerando o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. O produto em $M_n(A)$ é análogo ao produto em $M_n(K)$ e temos que $M_n(A)$, munido deste produto, é uma álgebra.

Exemplo 1.1.5 *(**Álgebra de Grassmann**) Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a **álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior)** de V, denotada por E, como sendo a álgebra com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_ie_j = -e_je_i \text{ para quaisquer } i, j \in \mathbb{N}.$$

Destacamos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- *E_0, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_m} \mid m \text{ é par}\}$;*
- *E_1, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid k \text{ é ímpar}\}$.*

Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. Desde que $e_ie_j = -e_je_i$ temos $(e_{i_1} \ldots e_{i_m})(e_{j_1} \ldots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1} \ldots e_{j_k})(e_{i_1} \ldots e_{i_m})$ para quaiquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. Observamos facilmente que se $char K = 2$, então E é uma álgebra comutativa.

*Considerando E' a álgebra com base $\{e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$, temos que E' não tem unidade e é chamada de **álgebra exterior sem unidade**.*

Exemplo 1.1.6 ***(Álgebra dos polinômios)*** *O espaço vetorial $K[x]$ dos polinômios na variável x com coeficientes em K, munido do produto usual de polinômios, é uma álgebra comutativa. De maneira geral, considerando o conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, podemos definir a álgebra comutativa dos polinômios em n variáveis e denotamos por $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

Exemplo 1.1.7 ***(Álgebra de Lie)*** *Se A é uma álgebra associativa, a multiplicação dada por $[a, b] = ab - ba$ define em A uma nova estrutura de álgebra, que denotaremos por $A^{(-)}$, e como $[a, a] = 0$ e $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ (identidade de Jacobi) para quaisquer $a, b, c \in A$, segue que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. Em decorrência do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que veremos adiante, toda álgebra de Lie é subálgebra de uma álgebra $A^{(-)}$.*

Exemplo 1.1.8 ***(Adjunção formal da unidade)*** *Seja A uma álgebra sem unidade. Consideremos o espaço vetorial*

$$K \oplus A = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in K, a \in A\}$$

*Definimos em $K \oplus A$ o seguinte produto $(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)$. O conjunto $K \oplus A$, munido deste produto, é uma álgebra associativa com unidade (o elemento (1,0)). Esta construção é chamada de **adjunção formal da unidade** à álgebra A.*

Apresentaremos agora os conceitos de subálgebra e ideal bilateral.

Definição 1.1.9 *Seja A uma álgebra. Dizemos que:*
*(i) Um subespaço vetorial B de A é uma **subálgebra** de A se $1 \in B$ e B é multiplicativamente fechado, ou seja, se $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.*
*(ii) Um subespaço vetorial I de A é um **ideal** (bilateral) de A se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$, ou seja, se $ax,\ xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.*

Exemplo 1.1.10 *Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada **centro de** A. Um fato conhecido da Álgebra Linear elementar é que dado $n \in \mathbb{N}$ tem-se $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares). Se $A = E$(álgebra exterior), definida no exemplo 1.1.5, então $Z(E) = E_0$ ($\mathrm{char} K \neq 2$).*

Exemplo 1.1.11 ***(Subálgebra gerada)*** *Sejam A uma álgebra e $\emptyset \neq S \subseteq A$. Consideremos o subespaço B_S de A gerado por $\{1, s_1 s_2 \ldots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Temos que B_S é multiplicativamente fechado e $1 \in B_S$. Portanto, B_S é uma subálgebra de A, chamada de **subálgebra gerada por** S. Além disso, toda subálgebra de A que contém S deve conter B_S, e assim B_S é a menor subálgebra de A contendo S.*

Vamos definir a seguir o produto tensorial de espaços vetoriais.

Definição 1.1.12 *Sejam V e W espaços vetoriais com bases $\{v_i | i \in I\}$ e $\{w_j | j \in J\}$ respectivamente. O* ***produto tensorial*** *$V \otimes W$ de V e W é o espaço vetorial com base $\{v_i \otimes w_j | i \in I, j \in J\}$, onde vale*

$$(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i) \otimes (\sum_{j \in J} \beta_j w_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_j (v_i \otimes w_j),$$

onde os $\alpha_i, \beta_j \in K$ são escalares e as somas são finitas.

Veremos a seguir que para definir uma multiplicação em um espaço vetorial A, de modo a torná-lo uma álgebra, basta defini-la entre os elementos de uma base de A. Para isto utilizamos a proposição a seguir.

Proposição 1.1.13 *Se A é um espaço vetorial com base β e $f : \beta \times \beta \to A$ é uma função qualquer, então existe uma única função bilinear $F : A \times A \to A$ estendendo f.*

Demonstração: Dado $a \in A$ temos que $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, onde $\alpha_u \in K$ e o conjunto $\{u \in \beta \mid \alpha_u \neq 0\}$ é finito. Assim, dados $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, $b = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \in A$, defina $* : A \times A \to A$ da seguinte maneira:

$$a * b = \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v)$$

observe que $*$ está bem definida, pois se $\sum_{v \in \beta} \gamma_v v = \sum_{v \in \beta} \gamma_v^{'} v$, com $\gamma_v, \gamma_v^{'} \in K$, então, $\gamma_v = \gamma_v^{'}$ para todo $v \in \beta$. Tomando agora $\mu \in K$ e $a = \sum_{u \in \beta} \alpha_u u$, $a_1 = \sum_{u \in \beta} \alpha_u^{'} u$, $b = \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \in A$, temos,

$$\begin{aligned}
(a + a_1) * b &= \sum_{u \in \beta} (\alpha_u + \alpha_u^{'}) u * \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \\
&= \sum_{u,v \in \beta} (\alpha_u + \alpha_u^{'}) \lambda_v f(u, v) \\
&= \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u \lambda_v f(u, v) + \sum_{u,v \in \beta} \alpha_u^{'} \lambda_v f(u, v) \\
&= (a * b) + (a_1 * b)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu(a * b) &= \sum_{u,v \in \beta} \mu \alpha_u \lambda_v f(u, v) = \sum_{u \in \beta} (\mu \alpha_u) u * \sum_{v \in \beta} \lambda_v v \\
&= (\mu a) * b
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $\mu(a*b) = a*(\mu b)$ e que $a*(b_1+b_2) = (a+b_1)*(a+b_2)$, para quaisquer $b_1, b_2 \in A$. Logo $*$ é bilinear.

Considerando agora $u_1, u_2 \in \beta$, temos que $u_1 = \sum_{u\in\beta} \alpha_u u$, onde $\alpha_u = 1$ se $u = u_1$ e $\alpha_u = 0$ se $u \neq u_1$. Analogamente, $u_2 = \sum_{v\in\beta} \lambda_v v$, onde $\lambda_v = 1$ se $v = u_2$, e $\lambda_v = 0$ se $v \neq u_2$. Daí,

$$u_1 * u_2 = \sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v f(u,v) = \alpha_{u_1}\lambda_{u_2} f(u_1,u_2) = f(u_1,u_2)$$

donde temos que $*$ estende f.

Resta mostrar que $*$ é a única aplicação com esta propriedade. Para isto suponhamos que existe $*_1 : A \times A \to A$ estendendo f. Daí devemos ter

$$a *_1 b = \sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v (u *_1 v) = \sum_{u,v\in\beta} \alpha_u \lambda_v f(u,v) = a * b,$$

donde $*$ é igual a $*_1$ e segue o resultado. ■

Segue da proposição acima que para definir em $V \otimes W$ uma multiplicação basta definir a multiplicação de um elemento $v \otimes w$, com v numa base de V e w numa base de W, por outro do mesmo tipo, e isto pode ser feito naturalmente no caso em que V e W são álgebras. Assim, definimos a seguir o **produto tensorial de álgebras**.

Definição 1.1.14 *Se V e W são álgebras com bases (como espaços vetoriais) $\{v_i | i \in I\}$ e $\{w_j | j \in J\}$ respectivamente então $V \otimes W$ é uma álgebra com a multiplicação dada por:*

$$(v_{i_1} \otimes w_{j_1})(v_{i_2} \otimes w_{j_2}) = (v_{i_1} v_{i_2}) \otimes (w_{j_1} w_{j_2}), \quad i_1, i_2 \in I, \quad j_1, j_2 \in J.$$

Observação 1.1.15 *Em [39], Regev empregou métodos quantitativos para responder afirmativamente uma pergunta de Kaplansky se o produto tensorial de duas PI-Álgebras é sempre uma PI-álgebra. Neste artigo Regev mostrou que dada uma PI-álgebra A sua n-ésima codimensão $c_n(A) = dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$ é limitada exponencialmente, isto é, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(A) \leq a^n$ para todo n. Além disso, Regev mostrou que dadas duas PI-álgebras A e B vale a desigualdade $c_n(A \otimes B) \leq c_n(A) \otimes c_n(B)$. A existência de identidades polinomiais não nulas para $A \otimes B$ segue diretamente destes resultados pois para n suficientemente grande segue que $c_n(A \otimes B) < n!$ e portanto $dim\ P_n \cap T(A \otimes B) > 0$. Este resultado garante que a classe das PI-álgebras é fechada para o produto tensorial e permite obter novos exemplos de PI-álgebras.*

Enunciaremos agora uma propriedade de grande importância quando tratamos do produto tensorial de álgebras e a mesma será usada na seção 1.5.

Teorema 1.1.16 ***(Propriedade Universal)*** *Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre um corpo K e $f : V \times W \to U$ uma aplicação linear. Então existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \to U$ tal que $T_f : (v \otimes w) = f(v, w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Demonstração: Veja [10], página 61. ■

Definição 1.1.17 *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um* ***homomorfismo*** *de álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$ e $\varphi(1_A) = 1_B$.*

O conjunto $Ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, chamado de *núcleo de* φ é um ideal de A, e o conjunto $Im\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, chamado de *imagem de* φ, é uma subálgebra de B.

Dizemos que φ é um **mergulho** (ou monomorfismo) se φ é um homomorfismo injetivo. Se φ é biunívoca diremos que φ é um **isomorfismo**. Se $A = B$ diremos que φ é um **endomorfismo** e se φ é um endomorfismo biunívoco diremos que φ é um **automorfismo**.

Denotamos por $EndA$ e $AutA$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Quando existe um isomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos importantes de homomorfismos.

Exemplo 1.1.18 *Sendo A uma álgebra a transformação linear $T : M_n(K) \otimes A \longrightarrow M_n(A)$ tal que $T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}(a)$ é a matriz de $M_n(A)$ que tem $a \in A$ na entrada ij e 0 nas demais, é um isomorfismo de álgebras.*

De fato, primeiramente note que $\{E_{ij}(a) \mid 1 \leq i, j \leq n, a \in \beta\}$, onde β é uma base de A, é uma base de $M_n(A)$ como espaço vetorial. Considere agora a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} S : M_n(A) & \longrightarrow & M_n(K) \otimes A \\ E_{ij}(a) & \longmapsto & S(E_{ij}(a)) = E_{ij} \otimes a \ . \end{array}$$

Note que

$$S(T(E_{ij} \otimes a)) = S(E_{ij}(a)) = E_{ij} \otimes a$$

e

$$T(S(E_{ij}(a))) = T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}(a) \ .$$

Daí, $S = T^{-1}$ e assim T é bijetiva. Mostraremos agora que T é um homomorfismo de álgebras. Note que

$$E_{ij}(a)E_{st}(b) = \begin{cases} 0, & se \quad j \neq s \\ E_{it}(ab), & se \quad j = s \end{cases} .$$

Se $j \neq s$, temos

$$\begin{aligned} T((E_{ij} \otimes a)(E_{st} \otimes b)) &= T(E_{ij}E_{st} \otimes ab) = T(0 \otimes ab) = 0 = \\ &= E_{ij}(a)E_{st}(b) = T(E_{ij}(a))T(E_{st}(b)) \ . \end{aligned}$$

Se $j = s$, tem-se que

$$\begin{aligned} T((E_{ij} \otimes a)(E_{st} \otimes b)) &= T(E_{ij}E_{st} \otimes ab) = T(E_{it} \otimes ab) = E_{it}(ab) = \\ &= E_{ij}(a)E_{st}(b) = T(E_{ij}(a))T(E_{st}(b)) \ , \end{aligned}$$

e portanto as álgebras $M_n(A)$ e $M_n(K) \otimes A$ são isomorfas.

Exemplo 1.1.19 *As álgebras E (álgebra exterior) e $K \oplus E'$ (Exemplo 1.1.8) são isomorfas. Com efeito, não é difícil verificar que a aplicação $\Psi : K \oplus E' \longrightarrow E$, definida por $\Psi(\lambda, x) = \lambda + x$ é um isomorfismo.*

Vamos agora definir álgebras quocientes. Consideremos uma álgebra A e $I \subset A$ um ideal (bilateral) de A. Definiremos inicialmente a relação de congruência módulo I:

Definição 1.1.20 *Sejam $a, b \in A$. Dizemos que a é congruente ao elemento b módulo I, e escrevemos $a \equiv b \ (mod\ I)$ ou $a \equiv_I b$, se $a - b \in I$.*

Notação 1.1.21 *A classe de equivalência de a é o conjunto $\{b \in A \mid a \equiv b \ (mod\ I)\} = \{a + i \mid i \in I\}$ e será denotada por $\overline{a}$ ou $a + I$. O conjunto das classes de equivalência será denotado por A/I.*

Definição 1.1.22 *Sejam A uma álgebra, I um ideal (bilateral) de A, e consideremos no espaço vetorial quociente A/I o produto $(a + I)(b + I) = ab + I$ para $a, b \in A$. Este produto está bem definido, pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais, e torna A/I uma álgebra, conhecida por **álgebra quociente** de A por I.*

Agora podemos enunciar o Teorema dos Isomorfismos. A sua demonstração é análoga ao teorema para anéis e grupos e será omitida.

Teorema 1.1.23 ***(Teorema dos Isomorfismos):*** *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então $Ker(\varphi)$ é um ideal bilateral de A e a álgebra quociente $A/Ker(\varphi)$ é isomorfa a $Im(\varphi)$.*

Exemplo 1.1.24 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = \overline{a}$, é um homomorfismo de álgebras, chamado de projeção canônica.*

Definiremos agora álgebras livres em uma classe de álgebras e construiremos a álgebra livre na classe das álgebras associativas e com unidade. Os conceitos básicos na teoria das PI-álgebras são definidos nestas álgebras: as identidades polinomiais de uma álgebra associativa são elementos da álgebra associativa livre e os conjuntos de identidades de álgebras associativas, chamados de T-ideais, são ideais da álgebra associativa livre invariantes por endomorfismos desta álgebra.

Definição 1.1.25 *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathfrak{B}$ é* ***livre na classe*** *$\mathfrak{B}$ se existe $X \subseteq F$ tal que X gera F e para cada álgebra $A \in \mathfrak{B}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow A$ estendendo h. Nestas condições, dizemos que F é* ***livremente gerada*** *por X.*

Exemplo 1.1.26 *Considere a álgebra polinomial $K[x]$, e observe que esta álgebra é gerada pelo conjunto $\{x\}$. Além disso, sendo A uma álgebra e $a \in A$, temos que o homomorfismo $\varphi_a : K[x] \to A$, definido por $\varphi_a(f(x)) = f(a)$, satisfaz $\varphi_a(x) = a$. Portanto, $K[x]$ é uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas e unitárias, livremente gerada por $\{x\}$.*

Exemplo 1.1.27 *A álgebra $M_2(K)$ não é livre na classe das álgebras associativas com unidade. De fato, suponha por contradição que ela é livre. Como esta álgebra não é comutativa qualquer conjunto gerador tem pelo menos dois elementos e portanto toda álgebra associativa gerada por dois elementos deve ser imagem homomórfica de $M_2(K)$. Como vimos na introdução esta álgebra é uma PI-álgebra que satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$, e portanto toda imagem homomórfica de $M_2(K)$, e consequentemente toda álgebra associativa gerada por dois elementos, satisfaz esta identidade. Tomando agora*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

observamos que $[[A, B]^2, B] \neq 0$, o que é uma contradição já que a subálgebra de $M_3(K)$ gerada por $S = \{A, B\}$ deve satisfazer a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$. Concluímos portanto que $M_2(K)$ não é livre na classe das álgebras associativas.

Vamos agora construir uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto não-vazio e enumerável de *variáveis* não-comutativas. Definimos uma *palavra* em X como sendo uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. Definimos o *tamanho* da palavra $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ como sendo n. Quando $n = 0$, vamos chamar esta palavra de *palavra vazia* que denotaremos por 1. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_n = j_n$.

Consideremos $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem por base o conjunto de todas as palavras em X. Dessa forma, os elementos de $K\langle X\rangle$, que chamaremos de **polinômios**, são somas (formais) de termos (ou monômios) que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X. Consideremos em $K\langle X\rangle$ a seguinte multiplicação definida em uma base:

$$(x_{i_1}\ldots x_{i_k})(x_{j_1}\ldots x_{j_l}) = x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_{j_1}\ldots x_{j_l} \quad \textit{onde} \quad x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

O espaço vetorial $K\langle X\rangle$, munido deste produto é uma álgebra associativa com unidade, que é a palavra vazia. Observe que X gera $K\langle X\rangle$ como álgebra.

Proposição 1.1.28 *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{B}$ a classe das álgebras associativas com unidade e seja $A \in \mathfrak{B}$ uma álgebra. Considere uma aplicação $h : X \longrightarrow A$ dada por $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Então existe uma única aplicação linear $\varphi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}\ldots x_{i_n}) = a_{i_1}\ldots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único que satisfaz $\varphi_h|_X = h$. Portanto $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade. ■

Notação 1.1.29 *A imagem de $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pelo homomorfismo φ_h será denotada por $h(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e diremos que o elemento $h(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é obtido pela substituição das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pelos elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ no polinômio associativo $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.*

1.2 Identidades Polinomiais, T-Ideais e Variedades

Consideremos $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade livremente gerada por X.

Definição 1.2.1 *Sejam $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e A uma álgebra. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** para a álgebra A, se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Observação 1.2.2 *Considere $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, então $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A.*

Definição 1.2.3 *Se A satisfaz uma identidade polinomial não nula, então A é dita uma **PI-álgebra** (ou **álgebra com identidade polinomial**).*

De agora em diante dada uma álgebra A denotaremos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Veremos adiante que estes conjuntos são ideais de $K\langle X\rangle$ invariantes por endomorfismos (chamados **T-ideais**), isto é, $\varphi(T(A)) \subset T(A)$, $\forall \varphi \in \mathrm{End}K\langle X\rangle$. Além disso, dado um ideal I de $K\langle X\rangle$ invariante por endomorfismos, existe uma PI-álgebra B tal que $T(B) = I$. Essa correspondência entre T-ideais e ideais de identidades de álgebras não é biunívoca. Por exemplo, não é difícil demonstrar que se K é infinito e A e B são K-álgebras comutativas com unidade então $T(A) = T(B)$.

Definição 1.2.4 *Se A_1 e A_2 são álgebras tais que $T(A_1) = T(A_2)$, dizemos que A_1 e A_2 são **PI-equivalentes**.*

Vejamos alguns exemplos importantes de álgebras com identidades polinomiais.

Exemplo 1.2.5 *Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para A. Portanto, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.2.6 *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial de E. Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 = Z(E)$ para quaisquer $a, b \in E$.*

Exemplo 1.2.7 *O quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $E \otimes E$ é uma PI-álgebra (pois é o produto tensorial de duas PI-álgebras), e não é difícil verificar que $E \otimes E$ satisfaz a identidade polinomial $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$.*

Exemplo 1.2.8 *A álgebra $M_{1,1}(E)$ das matrizes em $M_2(E) \simeq M_2(K) \otimes E$ com entradas na diagonal principal em E_0 e na diagonal secundária em E_1 é uma PI-álgebra. De fato $M_2(K) \otimes E$ é uma PI-álgebra pois é o produto tensorial de duas álgebras com identidades polinomiais e toda subálgebra desta, em particular $M_{1,1}(E)$, também é uma PI-álgebra. O Teorema do Produto Tensorial de Kemer garante que para corpos de característica zero $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ são PI-equivalentes, e uma demonstração elementar deste fato usando o conceito de identidades graduadas pode ser encontrada em [4].*

Exemplo 1.2.9 *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$, conhecida como a identidade de Hall. De fato, basta observar que:*

(1) *Se $A, B \in M_2(K)$, então $tr([A, B]) = 0$;*

(2) *Se $A \in M_2(K)$ e $tr(A) = 0$, então $A^2 = \lambda I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(K)$, e este fato decorre do Teorema de Cayley-Hamilton.*

Exemplo 1.2.10 *Considere o polinômio*

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. O polinômio s_n é chamado de ***polinômio standard de grau*** *n. Sendo A uma álgebra associativa com $dimA < n$, temos que a álgebra A satisfaz o polinômio standard s_n. Em 1950 Amitsur e Levitzki [1] provaram que $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$, fato conhecido como* ***Teorema de Amitsur-Levitzki****.*

Exemplo 1.2.11 *Sendo R uma álgebra de dimensão finita, sobre um corpo finito mostraremos que R satisfaz uma identidade polinomial não trivial em uma variável. De fato, é imediato que a álgebra R é finita e portanto para cada elemento $r \in R$ existem $k > l$ tais que $r^k = r^l$, isto é, definindo $f_r(x) = x^k - x^l$, temos $f_r(r) = 0$. Como R é um conjunto finito podemos definir $g(x) = \prod_{r \in R} f_r(x)$ que claramente é uma identidade polinomial para R.*

Definição 1.2.12 *Seja I um ideal de $K\langle X \rangle$. Dizemos que I é um* ***T-ideal*** *de $K\langle X \rangle$ se $\phi(I) \subseteq I$ para todo $\phi \in EndK\langle X \rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X \rangle$.*

A seguir demonstraremos um importante resultado que garante que o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra é um T-ideal.

Proposição 1.2.13 *O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Demonstração: É fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in End\ K\langle X\rangle$, arbitrários. Se $\psi : K\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo qualquer, então $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$, pois $\psi \circ \varphi : K\langle X\rangle \to A$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(A)$. Daí, $\varphi(f) \in Ker(\psi)$ e portanto $\varphi(f) \in T(A)$.

Seja I um T-ideal de $K\langle X\rangle$. Tomemos a álgebra quociente $B = K\langle X\rangle/I$ e a projeção canônica $\pi : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle/I$. Se $f \in T(B)$, então $f \in Ker(\pi)$. Como $Ker(\pi) = I$, temos $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$, então $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ e daí $f(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \ldots, g_n)} = \overline{0}$. Logo, $f \in T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

Não é difícil ver que a intersecção de uma família qualquer de T-ideais é ainda um T-ideal. Segue então a seguinte definição.

Definição 1.2.14 *Seja S um subconjunto de $K\langle X\rangle$. Definimos o **T-ideal gerado por** S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contém S. Dessa forma, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal contendo S.*

Uma caracterização construtiva do T-ideal gerado por S é que este coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle\}.$$

Sendo A uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$ dizemos que S é uma **base das identidades** de A. Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \langle S\rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é consequência de S.

Se existe S finito tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$ para uma álgebra A, dizemos que A possui propriedade de base finita para as identidades. A questão da existência de base finita para as identidades das álgebras associativas ficou conhecida como problema de

Specht, e Kemer [29] deu uma resposta positiva para este problema sobre corpos de característica zero.

Vejamos agora alguns exemplos de bases de identidades para algumas álgebras importantes.

Exemplo 1.2.15 *Se A é uma álgebra comutativa com unidade e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.*

Exemplo 1.2.16 *Sendo E a álgebra de Grassmann e K um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ (Veja [21] e [33]).*

Exemplo 1.2.17 *Em 1973 Razmyslov [37] provou que $T(M_2(K))$ é finitamente gerado para $\mathrm{char} K = 0$, determinando uma base com 9 identidades. Posteriormente, Drensky [14] mostrou que $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$, também quando $\mathrm{char} K = 0$. Em 2001 Koshlukov [30] generalizou este resultado de Drensky para K infinito e de característica diferente de 2 e 3. Para $\mathrm{char} K = 2$ o problema ainda encontra-se em aberto.*

Definição 1.2.18 *Seja $S \subset K\langle X \rangle$ um conjunto não vazio de polinômios. A classe $\mathcal{B}$ de todas as álgebras A tais que $f = 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada **variedade** $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(S)$ determinada por S.*

Observe que dado $S \subset K\langle X \rangle$ e uma álgebra A temos $S \subset T(A)$ se, e somente se, $\langle S \rangle^T \subset T(A)$, e portanto a variedade determinada por S é a mesma variedade determinada pelo T-ideal $\langle S \rangle^T$, ou seja

$$\mathfrak{V}(S) = \mathfrak{V}(\langle S \rangle^T).$$

É possível verificar que $\langle S \rangle^T = \cap_{A \in \mathfrak{V}} T(A)$ e assim a cada variedade $\mathfrak{V}$ corresponde um T-ideal, que será denotado por $T(\mathfrak{V})$. Diferentemente da correspondência entre álgebras e T-ideais, que associa a cada álgebra o T-ideal $T(A)$, esta correspondência entre T-ideais e variedades é biunívoca conforme podemos ver no teorema a seguir.

Teorema 1.2.19 *Existe uma correspondência biunívoca entre T-ideais de $K\langle X \rangle$ e variedades de álgebras. Nesta correspondência, à variedade $\mathfrak{V}$ corresponde o T-ideal de identidades $T(\mathfrak{V})$ e ao T-ideal I corresponde a variedade $\mathfrak{V}(I)$.*

Demonstração: Veja [23, Teorema 1.2.5, página 5]. $\blacksquare$

Não é difícil verificar que variedades são fechadas para produtos diretos, imagens homomórficas e subálgebras. O teorema a seguir garante que estas propriedades caracterizam uma variedade.

Teorema 1.2.20 (Birkhoff) *Uma classe não-vazia de álgebras $\mathcal{B}$ é uma variedade se, e somente se, é fechada a produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes.*

Demonstração: Veja [15], página 24. ■

Definição 1.2.21 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. A álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma* ***álgebra relativamente livre de*** $\mathcal{V}$*, se F é livre na classe $\mathcal{V}$ (livremente gerada por Y, veja Definição 1.1.25). A cardinalidade de Y é chamada o* ***posto de*** *F.*

Teorema 1.2.22 *Toda variedade $\mathcal{V}$ (não-trivial) possui alguma álgebra relativamente livre. Além disso, duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$ são isomorfas.*

Demonstração: Seja $T(\mathcal{V}) = \bigcap_{R \in \mathcal{V}} T(R)$ e considere $\pi : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ a projeção canônica. Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Consideremos uma álgebra não-nula A de $\mathcal{V}$ e um elemento não-nulo $a \in A$. Então existe um homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\psi(x_1) = a$ e $\psi(x_2) = 0$. Como $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker\psi$, existe um homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \longrightarrow A$ tal que $\phi \circ \pi = \psi$. Mas, $a = \psi(x_1) = (\phi \circ \pi)(x_1) = (\phi \circ \pi)(x_2) = \psi(x_2) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\pi|_X$ é injetora e portanto $\pi(X)$ é enumerável.

A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é gerada pelo conjunto $\pi(X)$ e pertence a $\mathcal{V}$, pois satisfaz todas as identidades de $T(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em $\mathcal{V}$, livremente gerada por $\pi(X)$. Sejam $A \in \mathcal{V}$ e σ uma aplicação de $\pi(X)$ em A. Como $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \pi : X \longrightarrow A$ estende-se a um homomorfismo $\theta : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Existe um homomorfismo $\rho : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \longrightarrow A$ para o qual $\rho \circ \pi = \theta$, pois $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker\theta$. Se $x \in X$, temos que $\rho(\pi(x)) = (\rho \circ \pi)(x) = \theta(x) = (\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x))$, ou seja, o homomorfismo ρ estende a aplicação σ. Além disso, não é difícil verificar que ρ estende a aplicação σ de maneira única. Portanto, $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra livre na variedade $\mathcal{V}$.

Suponhamos agora F_1 e F_2 álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$. Sendo F_1 e F_2 livremente geradas por Y_1 e Y_2 respectivamente, tomemos uma bijeção $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$. Temos então que existem homomorfismos de álgebras $\varphi_1 : F_1 \longrightarrow F_2$

e $\varphi_2 : F_2 \longrightarrow F_1$ estendendo g e g^{-1}, respectivamente. Logo, $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(y) = y$ e $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(z) = z$, para quaisquer $y \in Y_1$ e $z \in Y_2$. Segue então que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = Id_{F_1}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2 = Id_{F_2}$, e portanto φ_1 e φ_2 são isomorfismos. ■

Observação 1.2.23 *Nem toda classe de álgebras possui uma álgebra relativamente livre. É possível verificar, por exemplo, que a classe das PI-álgebras não possui álgebra relativamente livre.*

Observação 1.2.24 *A classe das álgebras associativas é uma variedade determinada pelo conjunto vazio de polinômios. A classe das álgebras comutativas é uma variedade e a álgebra relativamente livre de posto n é a álgebra $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dos polinômios em n variáveis comutativas. Além desses exemplos, a classe das álgebras de Lie também pode ser vista como uma variedade (definida em termos da álgebra livre, que não é associativa) determinada por duas identidades, a anti-comutatividade e a identidade de Jacobi.*

Podemos definir identidades polinomiais no contexto das álgebras de Lie, entretanto tais identidades são elementos da álgebra de Lie livre que é a álgebra relativamente livre de posto enumerável nesta variedade. A seguir fazemos um breve desvio em nosso texto e, por completude, construimos a álgebra de Lie livre e definimos uma classe importante de polinômios, chamados polinômios próprios, que têm aplicações importantes na PI-teoria. Estes resultados não serão usados no decorrer do texto e sua leitura pode ser omitida. Lembramos que, se A uma álgebra associativa, considerando em A o produto $[a, b] = ab - ba$, para $a, b \in A$, temos em A uma nova estrutura de álgebra, que denotamos por $A^{(-)}$ e, conforme vimos no exemplo 1.1.7, é uma álgebra de Lie.

Definição 1.2.25 *Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma* ***álgebra envolvente de L****.*

Exemplo 1.2.26 *Seja L uma álgebra de Lie com base $\{u, v\}$ tal que $u * v = v$. A álgebra $M_2(K)$ é uma álgebra envolvente de L, pois o subespaço vetorial V de $M_2(K)$ gerado por $\{E_{11}, E_{12}\}$ é uma subálgebra de $M_2(K)^{(-)}$ e a aplicação linear $\varphi : L \longrightarrow V$ que satisfaz $\varphi(u) = E_{11}$ e $\varphi(v) = E_{12}$ é um isomorfismo de álgebras.*

Definição 1.2.27 *Seja L uma álgebra de Lie. Dizemos que uma álgebra associativa U é uma* ***álgebra universal envolvente de*** *L, e denotamos por $U = U(L)$, se L é uma* *subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa R e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \to R^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to R$ que estende φ, ou seja, tal que $\psi|_L = \varphi$.*

Os teoremas que serão apresentados a seguir nos ajudarão a determinar uma base de $K\langle X\rangle$ a partir de uma base da álgebra de Lie livre.

Teorema 1.2.28 (Poincaré, Birkhoff, Witt) *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismos) álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L tem uma base $\{e_i \mid i \in I\}$ onde o conjunto de indices I é ordenado, então $U(L)$ tem uma base dada por*

$$e_{i_1} \ldots e_{i_p},\ i_1 \leq \ldots \leq i_p,\ i_k \in I,\ p = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $p = 0$ nos dá a unidade de $U(L)$.

Demonstração: Veja [15], página 11. ■

Sendo $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, consideremos

$$ComX = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] \mid\ k \geq 2,\ x_{i_j} \in X\}.$$

Sejam $B(X)$ a subálgebra (com unidade) de $K\langle X\rangle$ gerada por $ComX$ e $L(X)$ o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado por $X \cup ComX$. Os polinômios de $B(X)$ são chamados de *polinômios próprios*. Consideremos agora a álgebra de Lie $K\langle X\rangle^{(-)}$. Mostra-se que se $u, v \in X \cup ComX$, então $[u, v] \in L(X)$. Portanto, $L(X)$ é uma subálgebra de Lie de $K\langle X\rangle^{(-)}$.

Teorema 1.2.29 (Witt) $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.

Demonstração: Considere a inclusão $i : L(X) \to K\langle X\rangle^{(-)}$. Sendo A uma álgebra associativa qualquer e $\phi : L(X) \to A^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie, considere a restrição $\phi_0 : X \to A$ de ϕ a X e o homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \to A$ que estende ϕ_0.

Dados $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X$ temos:
$\varphi([x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]) = [\varphi(x_{i_1}), \ldots, \varphi(x_{i_n})] = [\phi(x_{i_1}), \ldots, \phi(x_{i_n})] = \phi([x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}])$ e assim φ coincide com ϕ em $L(X)$. Daí, $U(L(X)) = K\langle X\rangle$. ■

Pode ser demonstrado que a álgebra $L(X)$ é livre na classe das álgebras de Lie. De fato, sejam L uma álgebra de Lie e $h : X \longrightarrow L$ uma aplicação qualquer. Por $K\langle X\rangle$ ser livremente gerada por X, existe um homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow U(L)$ estendendo h. Temos que $\varphi([x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]) = [\varphi(x_{i_1}), \varphi(x_{i_2}), \ldots, \varphi(x_{i_k})]$ para $k \geq 2$, e assim $\varphi(L(X)) \subseteq L$, além disso, é imediato ver que se $f_1, f_2 \in L(X)$, então $\varphi([f_1, f_2]) = [\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$. Logo, $\varphi|_{L(X)} : L(X) \longrightarrow L$ é um homomorfismo de álgebras de Lie que estende h. Dizemos então que $L(X)$ é a *álgebra de Lie livre, livremente gerada por* X.

Consideremos agora uma base ordenada de $L(X)$ consistindo dos elementos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$$

onde $\{u_1, u_2, \ldots\} \subseteq ComX$ é uma base de $[L(X), L(X)]$, o subespaço vetorial de $L(X)$ gerado por $ComX$. Dos teoremas 1.2.28 e 1.2.29 segue que $K\langle X\rangle$ possui uma base formada pelos elementos

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \ldots x_{i_k}^{n_k} u_{j_1} u_{j_2} \ldots u_{j_q},\ k, q, n_i \geq 0 \tag{1.2}$$

onde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_q$. Note que os elementos com $k = 0$ formam uma base para $B(X)$ e que se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, então

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} g_a, \tag{1.3}$$

onde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \geq 0$, $\alpha_a \in K$ e $g_a \in B(X)$. Além disso, pela independência dos elementos em 1.2, temos que esta maneira de se expressar f é única.

1.3 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Nesta seção definiremos dois tipos de polinômios que têm grande importância na descrição de T-ideais de identidades de uma álgebra, a saber, polinômios multi-homogêneos e polinômios multilineares.

Definição 1.3.1 *Um monômio m tem grau k em x_i se a variável x_i ocorre em m exatamente k vezes. Um polinômio é* ***homogêneo*** *de grau k em x_i se todos os seus monômios têm grau k em x_i, e denotamos este fato por $deg_{x_i} f = k$. Se para cada variável x_i todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i o polinômio é* ***multi-homogêneo****. Um polinômio* ***linear*** *em x_i é um polinômio de grau 1 em x_i; se o polinômio é linear em cada variável que ocorre em f dizemos que ele é* ***multilinear****.*

Se $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um monômio de $K\langle X\rangle$, o **multigrau** de m é a k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i = deg_{x_i} m$. A soma de todos os monômios de $f \in K\langle X\rangle$ com um dado multigrau é dita ser uma **componente multi-homogênea** de f. Notemos ainda que $f \in K\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea. Além disso, $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle$ é multilinear se é multi-homogêneo com multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$. Neste caso f pode ser escrito como:

$$\sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(k)}, \ a_\sigma \in K.$$

Os próximos resultados nos darão uma importante ferramenta no trabalho de determinar geradores para T-ideais sobre corpos infinitos e corpos de característica zero.

Proposição 1.3.2 *Sejam I um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I$. Se K é infinito, então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração: Seja n o maior grau em x_1 de algum monômio de f. Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, consideremos $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1 (a componente de grau i em x_1). Temos claramente que $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$. Como K é infinito, podemos escolher $n + 1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$. Para cada $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ temos $g_j = f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_k) = f_0 + \alpha_j f_1 + \ldots + \alpha_j^n f_n$ e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Observe que $g_0, g_1, \ldots, g_n \in I$, pois I é um T-ideal. Além disso, a primeira matriz na igualdade anterior é uma matriz de Vandermonde invertível. Logo, devemos ter $f_0, f_1, \ldots, f_n \in I$.

Agora, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ e cada $t = 0, 1, 2, \ldots$, tomemos f_{i_t} como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2. Usando então os mesmos argumentos anteriores, concluímos que $f_{i_t} \in I$ e assim, repetindo o processo para cada variável, temos a primeira afirmação. Finalmente, observando que f é a soma de suas componentes multi-homogêneas, concluímos que I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. ∎

Proposição 1.3.3 *Se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $charK = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração: Como $charK = 0$, temos que K é infinito e portanto, pela proposição 1.3.2, podemos assumir que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$ é um polinômio multi-homogêneo. Seja $n = deg_{x_1} f$. Tomando y_1 e y_2 variáveis de X distintas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, consideremos o polinômio $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$. Sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k)$ a componente homogênea de $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_k)$ de grau 1 em y_1, temos que $deg_{y_2} h_1 = n - 1$ e que $h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_k) = nf(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Por $charK = 0$, segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, \ldots, x_k)$. Notemos que $deg_{y_2} h_1 = n - 1$ e assim, caso seja necessário, repetimos o argumento para as variáveis $y_2, x_2, \ldots, x_k$ em h_1. Continuando com este processo (chamado de *processo de linearização* ou *polarização*), concluímos que f é consequência de algum polinômio multilinear de I e assim segue o resultado. ∎

1.4 Álgebras Graduadas e Identidades Polinomiais Graduadas

Nesta seção apresentaremos os conceitos de álgebra graduada e identidades polinomiais para álgebras graduadas. Estas ideias serão fundamentais no desenvolvimento do restante do texto. No que segue, G denotará um grupo.

Definição 1.4.1 *A álgebra A é G-**graduada** se pode ser escrita como uma soma direta de subespaços de A*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad \textit{de modo que} \quad A_g A_h \subseteq A_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$. O subespaço A_g é chamado de componente homogênea *de grau g e os seus elementos de* elementos homogêneos *de grau g. Dizemos que um subespaço B de A é **homogêneo** na G-graduação de A se*

$$B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A_g),$$

e neste caso os subespaços $B \cap A_g$ serão denominados de subespaços homogêneos de grau g. Sendo I um ideal de A, é possível verificar que A/I é uma álgebra G-graduada, onde $\overline{A_g} = (A_g + I)/I$ é uma família de subespaços de A/I e de maneira análoga, ao feito anteriormente, podemos definir ideal homogêneo de A.

Observação 1.4.2 *Se A é uma álgebra G-graduada com unidade, então $1 \in A_e$.*

A seguir daremos alguns exemplos de álgebras graduadas.

Exemplo 1.4.3 *Toda álgebra A admite uma G-graduação. Basta considerar $A_e = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{e\}$, sendo e o elemento neutro de G. Esta graduação é chamada de* ***graduação trivial****.*

Exemplo 1.4.4 *A álgebra exterior E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 e E_1 são os subespaços definidos no exemplo 1.1.5. É possível demonstrar que não existe $\mathbb{Z}_3$-graduação para a álgebra E.*

Exemplo 1.4.5 *Considere n um inteiro positivo e $A = M_n(K)$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M_\gamma = \langle E_{ij} \mid \overline{j - i} = \gamma \rangle$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, consideremos*

$$M_k = \begin{cases} \{0\}, & se \quad |k| \geq n \\ \langle E_{ij} \mid j - i = k \rangle, & se \quad |k| < n \end{cases}.$$

Observe que $M_{\overline{0}} = M_0$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base de A segue que

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma \quad e \quad A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k.$$

Agora para ver que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(K)$, basta notarmos que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & se \quad j \neq k \\ E_{il}, & se \quad j = k \end{cases}$$

donde segue que $M_{\gamma_1}M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1+\gamma_2}$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$ e $M_{k_1}M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

As graduações do exemplo anterior são casos particulares de um tipo de graduação em $M_n(K)$ chamada graduação elementar que é definida a seguir.

Seja G um grupo qualquer e considere $G^n = G \times \ldots \times G$. Fixado $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, definiremos uma graduação em $M_n(K)$ associada a g tomando cada componente homogênea A_g como o subespaço gerado pelas matrizes elementares $E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, tais que $g_i^{-1}g_j = g$, ou seja:

$$E_{ij} \in A_g \Leftrightarrow g = g_i^{-1}g_j \ . \tag{1.4}$$

Sabemos que as matrizes E_{ij} formam uma base para o espaço vetorial $M_n(K)$ e cada E_{ij} pertence à componente homogênea A_g, onde $g = g_i^{-1}g_j$. E conforme implicação acima, para cada $g \in G$ fixado temos $A_g = 0$ ou $A_g = \oplus_{g=g_r^{-1}g_s}[E_{rs}]$, e então $M_n(K) = \oplus_{i,j=1}^{n}[E_{ij}] = \oplus_{g\in G}A_g$.

Mostraremos que a condição 1.4 realmente define uma graduação de $M_n(K)$. De fato, sejam $E_{ij} \in A_g$ e $E_{kl} \in A_h$, então $E_{ij}E_{kl} = 0$ se $j \neq k$, e se $j = k$ temos $E_{ij}E_{kl} = E_{il} \in A_x$, onde $x = g_i^{-1}g_l = g_i^{-1}g_jg_j^{-1}g_l = g_h$, pois $g = g_i^{-1}g_j$ e $h = g_j^{-1}g_l$. Portanto $A_gA_h \subseteq A_{gh}$.

Definição 1.4.6 *A G-graduação em $M_n(K)$, definida acima, é a* ***graduação elementar*** *induzida pela n-upla $g = (g_1, \cdots, g_n)$.*

Observação 1.4.7 *Considerando uma graduação elementar em $M_n(K)$ podemos provar que $M_n(K)$ é isomorfa à álgebra dos endomorfismos graduados do espaço vetorial G-graduado $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$, com base $v_1, \ldots, v_n$ onde $\alpha(v_j) = g_j$, $j = 1, \ldots, n$. Assim, tomando cada espaço vetorial como sendo o corpo K, podemos provar que as graduações elementares provêm de graduações em K^n.*

Um fato interessante que foi provado em 1999 por Ion e outros([11]) garante que uma G- graduação de $M_n(K)$ é elementar se, e somente se, todas as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas.

Definição 1.4.8 *Sejam A e B álgebras G-graduadas. Uma aplicação $\psi : A \longrightarrow B$ é dita ser um* ***homomorfismo G-graduado*** *se ψ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\psi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$. De modo análogo, definimos endomorfismo, automorfismo e isomorfismo G-graduado.*

Vamos tratar agora de identidades G-graduadas. Antes precisaremos do conceito de álgebra associativa livre G-graduada. Para defini-la, consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X\rangle$. Definimos agora

$$\alpha(1) = e \ \text{ e } \ \alpha(x_1x_2\ldots x_m) = \alpha(x_1)\alpha(x_2)\ldots\alpha(x_m)$$

onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X\rangle$, dizemos que $\alpha(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X\rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } K\langle X\rangle, \omega(m) = g\rangle$$

temos

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle_g \quad e \quad K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$, e assim $K\langle X\rangle$ é chamada **álgebra associativa livre G-graduada**. Se $f \in K\langle X\rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de G-grau g e usamos a notação $\alpha(f) = g$.

Definição 1.4.9 *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma **identidade polinomial G-graduada** para A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.*

No estudo das identidades ordinárias o conceito de T-ideal é de extrema importância. Para o caso de identidades G-graduadas temos um conceito análogo, a saber, o de T_G-ideal.

Definição 1.4.10 *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um **T_G-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $K\langle X\rangle$. Dado um subconjunto S de $K\langle X\rangle$ definimos o **T_G-ideal gerado por S** como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S.*

Observação 1.4.11 *Quando $G = Z_n$ o T_G-ideal será denotado por T_n.*

Não é difícil ver que I é um T_G-ideal se, e somente se, $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$, para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_i \in K\langle X\rangle_{\alpha(x_i)}$.

Se A é uma álgebra G-graduada, então o conjunto $T_G(A)$ das identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal de $K\langle X\rangle$. As proposições 1.3.2 e 1.3.3 também são válidas no caso de T_G-ideal.

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades ordinárias e graduadas.

Proposição 1.4.12 *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y\rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, e seja $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in T(A)$. Dados $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$, tomemos $b_{i_g} \in B_g$, para $i = 1, \ldots, n$ e $g \in G$, tais que $b_i = \sum_{g\in G} b_{i_g}$. Para cada $b_{i_g} \neq 0$, tomemos $x_{i_g} \in X_g$ e consideremos o polinômio $f_1 = f(\sum_{g\in G} x_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{n_g}) \in K\langle X\rangle$. Como $f \in T(A)$, temos $f_1 \in T_G(A)$ e daí $f_1 \in T_G(B)$. Fazendo então as substituições $x_{i_g} = b_{i_g}$, para $i = 1, \ldots, n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f\left(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \sum_{g\in G} b_{2_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{n_g}\right) = 0$$

e assim $f \in T(B)$.

Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ e $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, donde temos a última afirmação. ■

É importante observar que a recíproca do resultado acima é falsa. Considere na álgebra exterior E a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial $E = E \oplus \{0\}$. Temos que $f(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$, com $\alpha(y_1) = \alpha(y_2) = 0$, é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E com respeito à primeira graduação, mas não é identidade graduada com respeito à graduação trivial.

1.5 Identidades Estáveis, Elementos Genéricos e Matrizes Genéricas

Nesta seção faremos um breve estudo das identidades estáveis, elementos genéricos e das matrizes genéricas, e enunciaremos alguns resultados que serão de fundamental importância para o desenvolvimento do capítulo 3.

Se A é uma álgebra, então estendendo os escalares podemos obter uma nova álgebra cujas identidades são satisfeitas por A.

Considere C uma álgebra comutativa e a álgebra $A\otimes C$. Algumas das identidades polinomiais de A podem desaparecer em $A\otimes C$. Às identidades que permanecem damos um nome especial.

Definição 1.5.1 *Seja f uma identidade da álgebra A. Dizemos que f é uma* ***identidade estável*** *de A se para cada álgebra comutativa C, f ainda é identidade de $A \otimes C$.*

É claro que se K é um corpo finito nem todas identidades de K são estáveis. Por exemplo, se $\mid K \mid= q$, então $x^q - x \equiv 0$ é uma identidade de K, mas não é uma identidade para qualquer extensão própria de K.

Lema 1.5.2 *Se K é um corpo infinito e A é uma álgebra, então toda identidade polinomial de A é estável.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de A, e sejam C uma álgebra comutativa e $\overline{A} = A \otimes C$. Como K é infinito, podemos assumir que f é multihomogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$.

Para $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \in \overline{A}$ devemos provar que $f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) = 0$. Suponhamos primeiramente que $\overline{a_1} = a_1 \otimes c_1, \ldots, \overline{a_n} = a_n \otimes c_n$, então

$$f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \ldots c_n^{m_n} = 0$$

e fica demonstrado neste caso.

Agora sendo $\overline{a_1} = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2$, $\overline{a_2} = a_2 \otimes c_2, \ldots, \overline{a_n} = a_n \otimes c_n$, então

$$\begin{aligned} f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) &= f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1 - 1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) \end{aligned}$$

onde

$$f(x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m_1 - 1} f_i(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.5}$$

e $deg_{x_1} f_i = i$. Como todo polinômio f_i em 1.5 é consequência multi-homogênea de f, segue do argumento anterior que $f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) = 0$.

Generalizando este argumento para $\overline{a_1} = \sum a_{1_j} \otimes c_{1_j}, \ldots, \overline{a_n} = \sum a_{n_j} \otimes c_{n_j} \in \overline{A}$ e $c_{ij} \in C$ arbitrários escrevemos $f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$ como uma soma de expressões da forma:

$$\overline{g} = g(a_{i_1 j_1} \otimes c_{i_1 j_1}, \ldots, a_{i_k j_k} \otimes c_{i_k j_k})$$

onde $g = g(x_1, \ldots, x_k)$ é homogêneo e consequência de f. Novamente pelo primeiro argumento obtemos $\overline{g} = 0$. ■

Como uma aplicação do lema anterior encontraremos uma forma explícita útil para a álgebra relativamente livre de uma variedade gerada por uma álgebra de dimensão finita. Esta álgebra será gerada por "elementos genéricos".

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo infinito K. Considere $dimA = n$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de A.

Sejam $y_i^{(k)}, i \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, variáveis comutativas e $K[y_i^{(k)}/i \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n]$ o anel dos polinômios sobre K nestas variáveis. Construimos $B = A \otimes K[y_i^{(k)}]$ que é a álgebra produto tensorial de A e $K[y_i^{(k)}]$.

Definição 1.5.3 *O elemento:*

$$y^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes y_i^{(k)}, i = 1, 2, \ldots$$

é chamado ***elemento genérico****. A subálgebra $\widetilde{A}$ de B gerada por $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots$ sobre K é chamada de* ***álgebra dos elementos genéricos****.*

Teorema 1.5.4 *Se K é infinito, então a álgebra $\widetilde{A}$ é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade $var(A)$, isto é, $\widetilde{A} \cong K\langle X\rangle/T(A)$, onde X é enumerável.*

Demonstração: Considere $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ enumerável e seja $\psi : K\langle X\rangle \to \widetilde{A}$ o homomorfismo induzido pela aplicação $x_i \to y^{(i)}, i \in \mathbb{N}$. Provaremos que $ker\psi = T(A)$. Pelo lema anteior, $T(A \otimes K[y_i^{(k)}]) = T(A)$, e daí $ker\psi \supseteq T(A)$. Suponha agora que $g = g(x_1, \ldots, x_m) \in ker\psi$, isto é, $g = g(y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}) = 0$ em $\widetilde{A}$ e sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos arbitrários de A.

Escreva cada a_i como uma combinação linear da base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de A:

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^k u_k$$

com $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k \in K$. Como $K[y_i^{(k)}]$ é uma álgebra comutativa livre de posto enumerável qualquer aplicação $y_i^{(k)} \to \lambda_i^k$ se estende a um homomorfismo $K[y_i^{(k)}] \to K$. Assim, devido à propriedade universal do produto tensorial, o homomorfismo de álgebras $\varphi : A \otimes K[y_i^{(k)}] \to A$ onde $\varphi(y^{(i)}) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$, estende a aplicação:

$$a \otimes y_i^{(k)} \to \lambda_i^k a, \; a \in A, \quad k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Assim,

$$0 = \varphi(g(y^{(1)}, \ldots, y^{(m)})) = g(\varphi(y^{(1)}), \ldots, \varphi(y^{(m)})) = g(a_1, \ldots, a_m).$$

Como $a_1, \ldots, a_n$ são elementos arbitrários de A, $g(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0$ é uma identidade de A e $ker\psi = T(A)$. ■

Um caso interessante é quando A é a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre K. Vejamos: para um inteiro $n \geq 2$, fixaremos a notação Ω_n para a K-álgebra dos polinômios em variáveis comutativas

$$\Omega_n = K[y_{pq}^{(i)} \mid p, q = 1, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots].$$

Definição 1.5.5 *As matrizes de* $M_n(\Omega_n)$

$$y_i = \sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(i)} E_{pq},\ i = 1, 2, \ldots$$

são chamadas matrizes genéricas $n \times n$*. A álgebra gerada pelas matrizes genéricas* y_i*,* $i = 1, 2, \ldots$*, denotada por* R_n*, é chamada de álgebra das matrizes genéricas de ordem* n*. Nós denotaremos por* $R_{n,m}$ *a subálgebra de* R_n *gerada pelas* m *primeiras matrizes genéricas* $y_1, y_2, \ldots, y_m$*.*

Exemplo 1.5.6 *Para* $n = m = 2$*, trocando a notação e assumindo que* $y_{pq}^{(1)} = x_{pq}$ *e* $y_{pq}^{(2)} = y_{pq}$*, a álgebra* $R_{2,2}$ *é gerada por*

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ e } y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Sendo C uma K-álgebra comutativa, as matrizes $n \times n$ com entradas em C podem ser obtidas por especializações das matrizes genéricas, isto é, $\alpha = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pq} E_{pq}$, com $\gamma_{pq} \in C$, é obtida de $y_1 = \sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(1)} E_{pq}$ trocando-se as variáveis $y_{pq}^{(1)}$ por γ_{pq}.

Segue do teorema 1.5.4 o seguinte resultado:

Corolário 1.5.7 *A álgebra* R_n *das matrizes genéricas* $n \times n$ *sobre um corpo infinito* K *é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável na variedade gerada por* $M_n(K)$*.*

Capítulo 2

Identidades Graduadas em $M_n(K)$, $char K = 0$

Neste capítulo estudaremos as identidades polinomiais de $M_n(K)$ com respeito a graduações elementares sobre um corpo de caracteristica zero. Considerando G um grupo arbitrário apresentaremos a descrição, feita por Bahturin e Drensky ([16]) das identidades polinomiais para a álgebra $M_n(K)$ e encontraremos uma base de identidades G-graduadas de $M_n(K)$ com uma graduação elementar tal que a componente identidade coincide com o subespaço de $M_n(K)$ das matrizes diagonais.

Analisaremos alguns exemplos particulares como a descrição de uma base de identidades polinomiais S_3-graduadas de $M_3(K)$, e base de identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas e $\mathbb{Z}$-graduadas para a álgebra $M_n(K)$.

2.1 Identidades G-Graduadas para as matrizes

Apresentaremos algumas definições e resultados que serão usados na demonstração do Teorema (2.1.8), que descreve as identidades G-graduadas para a álgebra $M_n(K)$.

Definição 2.1.1 *Definimos o suporte da G-graduação de $M_n(K)$, e denotamos por G_0, como sendo o conjunto dos elementos $g \in G$ tais que a componente homogênea de grau g é não nula, isto é,*

$$G_0 = \{g \in G | (M_n(K))_g \neq 0\}.$$

Observação 2.1.2 *A quantidade de elementos do suporte da G-graduação de $M_n(K)$ é limitada por n^2, isto é, $|G_0| \leq n^2$.*

Sendo G um grupo arbitrário, denotaremos por $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada, onde $X = \bigcup_{\gamma\in G} X_\gamma$, e $M_n(K)$ a álgebra das matrizes com uma G-graduação. De acordo com as notações introduzidas na seção 1.4, denotamos por T_G o conjunto das identidades G-graduadas de $M_n(K)$.

Fixemos uma G-graduação elementar de $M_n(K)$ induzida por $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G^n$, onde $g_1, g_2, \cdots, g_n$ são duas a duas distintas.

Denotaremos por U o ideal das identidades G-graduadas em $K\langle X\rangle$ gerado pelas identidades:

$$
\begin{aligned}
x_e y_e - y_e x_e &= 0 && (2.1)\\
x_g y_{g^{-1}} z_g - z_g y_{g^{-1}} x_g &= 0 \;\; se\ e \neq g \in G_0 && (2.2)\\
x_g &= 0 \;\; se\ g \notin G_0 && (2.3)
\end{aligned}
$$

onde o índice denota o grau da variável.

Observação 2.1.3 *Neste capítulo as matrizes unitárias serão denotadas por $E_{a_i b_j}$, com $1 \leq i, j \leq n$, e definidas da mesma maneira do exemplo 1.1.4.*

Lema 2.1.4 *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz as identidades polinomiais G-graduadas do T_G-ideal U.*

Demonstração: Observe inicialmente que se $A \in M_n(K)_e$, então A é uma matriz diagonal, já que todos os $g_i's$ na definição da graduação elementar de $M_n(K)$ são distintos. Desde que duas matrizes diagonais comutam, temos que $M_n(K)$ satisfaz a identidade graduada (2.1). Claramente, $M_n(K)$ também satisfaz (2.3). Por outro lado, as identidades (2.2) são multilineares, logo precisamos mostrar que as identidades em (2.2) são satisfeitas para

$$x_g = E_{a_1b_1}, \quad y_{g^{-1}} = E_{a_2b_2}, \quad z_g = E_{a_3b_3},$$

onde $E_{a_1b_1}, E_{a_3b_3} \in (M_n(K))_g$ e $E_{a_2b_2} \in (M_n(K))_{g^{-1}}$, com $g = g_{a_1}^{-1} g_{b_1} = g_{a_3}^{-1} g_{b_3}$, $g^{-1} = g_{a_2}^{-1} g_{b_2}$. Notemos que $E_{a_1b_1}E_{a_2b_2}E_{a_3b_3} \neq 0$ se, e somente se,

$$b_1 = a_2 \text{ e } b_2 = a_3. \tag{2.4}$$

e daí

$$g = g_{a_1}^{-1} g_{a_2} = g_{b_2}^{-1} g_{b_3} = (g_{a_2}^{-1} g_{b_2})^{-1} = g_{b_2}^{-1} g_{a_2}.$$

Assim, $g_{a_1} = g_{b_2}$, $g_{a_2} = g_{b_3}$ e temos que $a_1 = b_2 = a_3$ e $b_1 = a_2 = b_3$. Portanto $E_{a_1b_1} = E_{a_3b_3}$ e segue que $E_{a_1b_1}E_{a_2b_2}E_{a_3b_3} = E_{a_3b_3}E_{a_2b_2}E_{a_1b_1}$.

Similarmente, se $E_{a_3b_3}E_{a_2b_2}E_{a_1b_1} \neq 0$, então $E_{a_1b_1} = E_{a_3b_3}$ e se $E_{a_1b_1}E_{a_2b_2}E_{a_3b_3} = 0$, $E_{a_3b_3}E_{a_2b_2}E_{a_1b_1} = 0$, o que conclui a demonstração. ■

A proposição seguinte garante que identidades do tipo monômio aparecem em quantidade finita em uma base das identidades G-graduadas de $M_n(K)$. Esta afirmação será útil para obtermos resultados similares aos obtidos por Vasilovsky([44], [45]) em um contexto mais geral.

Proposição 2.1.5 *Sejam G_0 o suporte da G-graduação de $M_n(K)$ e I o conjunto de todas sequências finitas $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ de elementos de G_0 tais que $x_{h_1 1} \ldots x_{h_n n} = 0$ é identidade polinomial G-graduada de $M_n(K)$. Então existe um inteiro positivo n_0 tal que $x_{h_1 1} \ldots x_{h_n n} = 0$ é consequência de identidades polinomiais como (2.1)-(2.3) juntamente com $x_{h_1 1} \ldots x_{h_m m} = 0$, onde $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m) \in I$ e $m \leq n_0$.*

Demonstração:

Seja $|G_0| = s \leq n^2$ e consideremos $n_0 = 4s^{2s+2}$ (como veremos adiante, na seção 2.2, esta não é a melhor estimativa para n_0). Consideremos J o T_G-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado pelas identidades da forma (2.1)-(2.3), e por uma quantidade finita de monômios, de comprimento limitado por n_0, da forma $x_{h_1 1} \ldots x_{h_m m}$, onde $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in I$. Demonstraremos que toda identidade $x_{h_1 1} \cdots x_{h_n n} = 0$ pertencem a J, por indução sobre n.

Seja $n > n_0$ e seja $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in I$ uma sequência fixada e considere $2ts^{2s+2} < n \leq 2(t+1)s^{2s+2}, t \geq 2$, ou seja $t < \frac{n}{2s^{2s+2}} \leq t+1$. Considere também os produtos $k_r = h_1 \ldots h_r$, onde $r = 1, \ldots, n$.

Se algum k_r não pertence a G_0, então $x_{k_r} = 0$ é uma identidade G-graduada para $M_n(K)$ e $x_{k_r} = 0 \in J$. Uma vez que $x_{h_1 1} \ldots x_{h_r r} \in (K\langle X \rangle)_{k_r} \in J$ obtemos que $x_{h_1 1} \ldots x_{h_r r} = 0$ é consequência de $x_{k_r} = 0$. Daí $x_{h_1 1} \ldots x_{h_r r} \in J$ e $x_{h_1 1} \ldots x_{h_n n} \in J$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que todo k_r pertence a G_0.

Como $|G_0| = s$, usando o princípio da casa de pombos, obtemos que existem pelo menos $\frac{n}{s} > 2ts^{2s+1}$ valores de r onde os k_r correspondentes são iguais, isto é, existem m_i, para $i = 1, \ldots, 2ts^{2s+1}+1$, tais que $k_{m_1} = k_{m_2} = \ldots = k_{m_{2ts^{2s+1}+1}}, k_{m_i} = k_{m_{i+1}}$ onde $h_1 \ldots h_{m_i} = h_1 \ldots h_{m_i}(h_{m_i+1} \ldots h_{m_{i+1}})$. Portanto $h_{m_i+1} \ldots h_{m_{i+1}} = 1, i = 1, \ldots, 2ts^{2s+1}, t \geq 2$.

Mostraremos agora que pelo menos s^{2s+1} produtos $(h_{m_i+1} \cdots h_{m_{i+1}})$ têm comprimento $< 2s$.

De fato, se pelo menos $(2t-1)s^{2s+1}$ produtos $(h_{m_i+1} \ldots h_{m_{i+1}})$ tivessem comprimento maior do que $2s$ então

$$(2t+2)s^{2s+2} \geq n \geq (2s+1)(2t-1)s^{2s+1},$$

$$(2t+2)s \geq (2s+1)(2t-1), \ 2(s+1)t \leq 4s+1$$

e, como $t \geq 2$, teríamos que $4(s+1) \leq 4s+1$, o que é impossível. Desta forma, menos de $(2t-1)s^{2s+1}$ produtos $(h_{m_i+1} \ldots h_{m_{i+1}})$ são de comprimento $> 2s$ e pelo menos s^{2s+1} têm comprimento $\leq 2s$.

Afirmamos que existem i e j tais que as sequências $(h_{m_i+1}, \ldots, h_{m_{i+1}})$ e $(h_{m_j+1}, \ldots, h_{m_{j+1}})$ são iguais.

De fato, como o número total de sequências $(h_{t_1}, \ldots, h_{t_k}) \in I, k \leq 2s$, é delimitada por $1 + s + s^2 + \ldots + s^{2s} < s^{2s+1}$, concluímos que existem duas sequências $(h_{m_i+1}, \ldots, h_{m_{i+1}})$ e $(h_{m_j+1}, \ldots, h_{m_{j+1}})$ iguais. E usando (2.1) podemos admitir, sem perda de generalidade, que $i = 1$ e $j = 2$.

Consideremos a sequência $h' = (h_1, \cdots, h_{m_1}, h_{m_2+1} \cdots h_n)$ obtida de $h = (h_1, \ldots, h_n)$ removendo $(h_{m_1+1}, \cdots, h_{m_2})$.

Se a sequência $h' \in I$, temos por hipótese de indução que $x_{h_1 1} \cdots x_{h_{m_1} m_1}(y_e x_{h_{m_2+1}, m_2+1}) \cdots x_{h_n n} \in J$ e substituindo y_e por $x_{h_{m_1+1}, m_1+1} \cdots x_{h_{m_2}, m_2}$ obtemos que $x_{h_1 1} \cdots x_{h_n n}$ também pertence a J.

Por outro lado, $h' \notin I$ se, e somente se, existem matrizes unitárias $v_i \in (M_n(K))_{h_i}$ tais que:

$(v_1 \cdots v_{m_1})(v_{m_2+1} \cdots v_{m_3})(v_{m_3+1} \cdots v_n) \neq 0$

mas $v_{m_2+1} \cdots v_{m_3} \in (M_n(K))_e$, e assim $v = v_{m_2+1} \cdots v_{m_3} = E_{qq}$ para algum $q = 1, \cdots, n$ e daí $v^2 = v$.

Observe ainda que se substituirmos em $x_{h_1 1} \cdots x_{h_n n}$ a variável $x_{h_i i}$ por v_i para $i = 1, \cdots, m_1$ e para $i = m_2+1, \cdots, n$ e $x_{h_{m_1+1}, m_1+1}, \cdots x_{h_{m_2}, m_2}$, respectivamente com

$v_{m_1+1} = v_{m_2+1}, \cdots v_{m_2} = v_{m_3}$ obtemos que:

$$\begin{aligned} v_1 \cdots v_n &= v_1 \cdots v_{m_1}(v_{m_2+1} \cdots v_{m_3})^2 v_{m_3+1} \cdots v_n \\ &= v_1 \cdots v_{m_1}(v_{m_2+1} \cdots v_{m_3}) v_{m_3+1} \cdots v_n \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $h \notin I$, que é uma contradição, e completamos o argumento de indução. ■

Lema 2.1.6 *Sejam $v_i = E_{a_ib_i} \in M_n(K)_{h_i}$, $h_i = g_{a_i}^{-1} g_{b_i}, i = 1, \cdots, m$ matrizes unitárias tais que $v_1 \cdots v_m \neq 0$. Então para todo $i \leq j$ o produto $v_i \cdots v_j$ pertence a $M_n(K)_h$, com $h = g_{a_i}^{-1} g_{b_j}$.*

Demonstração: Como por hipótese $v_1 \cdots v_m \neq 0$, onde $v_i = E_{a_ib_i} \in M_n(K)_{h_i}$, devemos ter $b_1 = a_2,\ b_2 = a_3, \ldots, b_{m-1} = a_m$. Portanto para todo $i \leq j$ temos:

$$v_i \cdots v_j = E_{a_ib_i} \ldots E_{a_jb_j} = E_{a_ib_j} \in M_n(K)_h$$

onde $h = g_{a_i}^{-1} g_{b_j}$. ■

Proposição 2.1.7 *Seja $k = (k_1, \cdots, k_m) \in G^m$ e sejam σ e τ duas permutações de S_n tais que:*

$$x_{k_{\sigma(1)}\sigma(1)} \cdots x_{k_{\sigma(m)}\sigma(m)} = 0 \quad e \quad x_{k_{\tau(1)}\tau(1)} \cdots x_{k_{\tau(m)}\tau(m)} = 0$$

não são identidades polinomiais G- graduadas de $M_n(K)$. Se existem matrizes unitárias $v_i \in M_n(K)_{k_i}, i = 1, \cdots, m$, tais que $v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(m)} = v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(m)} \neq 0$ então:

$$x_{k_{\sigma(1)}\sigma(1)} \cdots x_{k_{\sigma(m)}\sigma(m)} = x_{k_{\tau(1)}\tau(1)} \cdots x_{k_{\tau(m)}\tau(m)}$$

é uma identidade polinomial graduada de $M_n(K)$, a qual é consequência de (2.1)-(2.3) e de identidades graduadas da forma $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0$.

Demonstração: Seja J o T_G-ideal de $K\langle X\rangle$ considerado na proposição 2.1.5. Devemos mostrar que

$$x_{k_{\sigma(1)}\sigma(1)} \ldots x_{k_{\sigma(m)}\sigma(m)} \equiv x_{k_1 1} \ldots x_{k_m m} (mod\ J).$$

É suficiente considerarmos somente os casos $\sigma \neq e$ e $\tau = e$.

Sejam $v_i = E_{a_ib_i}$, $i = 1, \ldots, m$, e $\sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(c) = c$, $\sigma(c+1) \neq c+1$. Claramente $c \leq m-2$ (já que $c = m$ ou $c = m-1$ implica $\sigma = id$) e $c+1 = \sigma(r)$ para algum $r > c+1$.

Escolhamos t o menor inteiro positivo que satisfaz $t \geq c+1$ e $\sigma^{-1}(t+1) < r$. Seja $q = \sigma^{-1}(t+1)$, $t = \sigma(s)$. Então $c+1 \leq q < r \leq \sigma^{-1}(t) = s$. Uma vez que $v_{\sigma(1)}\dots v_{\sigma(m)} = v_1\dots v_m = E_{a_1b_m} \neq 0$, obtemos que $b_i = a_{i+1}$, $b_{\sigma(i)} = a_{\sigma(i+1)}$, $a_1 = a_{\sigma(1)}$, $b_m = b_{\sigma(m)}$. Em particular, $a_{\sigma(c+1)} = a_{c+1} = a_{\sigma(r)}$, $b_{\sigma(s)} = b_t = a_{t+1} = a_{\sigma(q)}$.

Consideraremos dois casos:

Caso 1: $q > c+1$.

Sendo $q > c+1$, pelo lema 2.1.6:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_{\sigma(c+1)}\dots v_{\sigma(q-1)} = E_{a_{\sigma(c+1)}b_{\sigma(q-1)}} = E_{a_{\sigma(c+1)}a_{\sigma(q)}} = \\
&= E_{a_{c+1}b_t} \in (M_n(K))_{h_1} \quad para \quad h_1 = g_{a_{c+1}}^{-1}g_{b_t} \\
w_2 &= v_{\sigma(q)}\dots v_{\sigma(r-1)} = E_{a_{\sigma(q)}b_{\sigma(r-1)}} = E_{a_{\sigma(q)}a_{\sigma(r)}} = \\
&= E_{b_ta_{c+1}} \in (M_n(K))_{h_2} \quad para \quad h_1 = g_{b_t}^{-1}g_{a_{c+1}} \\
w_3 &= v_{\sigma(r)}\dots v_{\sigma(s)} = E_{a_{\sigma(r)}b_{\sigma(s)}} = E_{a_{c+1}b_t} \in (M_n(K))_{h_1}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$x_{h_{\sigma(c+1)}\sigma(c+1)}\dots x_{h_{\sigma(q-1)}\sigma(q-1)}, \quad x_{h_{\sigma(r)}\sigma(r)}\dots x_{h_{\sigma(s)}\sigma(s)} \in (K\langle X\rangle)_{h_1},$$
$$x_{h_{\sigma(q)}\sigma(q)}\dots x_{h_{\sigma(r-1)}\sigma(r-1)} \in (K\langle X\rangle)_{h_1^{-1}}$$

e aplicando a identidade 2.2 obtemos:

$$(x_{h_{\sigma(c+1)}\sigma(c+1)}\dots x_{h_{\sigma(q-1)}\sigma(q-1)})(x_{h_{\sigma(q)}\sigma(q)}\dots x_{h_{\sigma(r-1)}\sigma(r-1)})(x_{h_{\sigma(r)}\sigma(r)}\dots x_{h_{\sigma(s)}\sigma(s)}) \equiv$$
$$\equiv (x_{h_{\sigma(r)}\sigma(r)}\dots x_{h_{\sigma(s)}\sigma(s)})(x_{h_{\sigma(q)}\sigma(q)}\dots x_{h_{\sigma(r-1)}\sigma(r-1)})(x_{h_{\sigma(c+1)}\sigma(c+1)}\dots x_{h_{\sigma(q-1)}\sigma(q-1)})(mod\ J).$$

Como $\sigma(r) = c+1$, obtemos:

$$x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)}\dots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} = x_{h_11}\dots x_{h_cc}(x_{h_{\sigma(c+1)}\sigma(c+1)}\dots x_{h_{\sigma(s)}\sigma(s)})(x_{h_{\sigma(s+1)}\sigma(s+1)}\dots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)}) \equiv$$
$$\equiv (x_{h_11}\dots x_{h_{c+1}c+1})(x_{h_{\rho(c+2)}\rho(c+2)}\dots x_{h_{\rho(s)}\rho(s)})(x_{h_{\rho(s+1)}\rho(s+1)}\dots x_{h_{\rho(m)}\rho(m)})(mod\ J)$$

onde $\rho \in S_n$ é tal que $\rho(i) = i,\ i = 1,\dots,c+1$, e $\rho(i) = \sigma(i)$ para $i = s+1,\dots,m$.

Caso 2: $q = c+1$.

Similarmente ao caso anterior, se $q = c+1$, então com a definição acima de w_1, w_2, w_3 obtemos que $a_{\sigma(q)} = a_{c+1} = b_{\sigma(s)} = b_t$ e $w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = E_{a_{c+1}a_{c+1}}$. Assim,

$$(x_{h_{\sigma(r)}\sigma(r)}\dots x_{h_{\sigma(s)}\sigma(s)}), \quad (x_{h_{\sigma(q)}\sigma(q)}\dots x_{h_{\sigma(r-1)}\sigma(r-1)}) \in (K\langle X\rangle)_e,$$

e aplicamos a identidade 2.1 para obtermos novamente

$$x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)}\dots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} \equiv x_{h_11}\dots x_{h_{c+1,c+1}}(x_{h_{\rho(c+2)}\rho(c+2)}\dots x_{h_{\rho(m)}\rho(m)})(mod\ J).$$

Desta forma podemos aplicar indução em c e obtemos que módulo J

$$x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)} \ldots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} \equiv x_{h_1 1} \ldots x_{h_m m}.$$

■

A seguir veremos o principal teorema desta seção.

Teorema 2.1.8 *Considere G um grupo qualquer e a n-upla $g = (g_1, \cdots, g_n) \in G^n$ que induz a G-graduação elementar de $M_n(K)$, com $g_1, \cdots, g_n$ distintos. Então uma base de identidades polinomiais graduadas de $M_n(K)$ consiste das identidades (2.1)-(2.3) e uma quantidade finita de identidades da forma $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0, m \geq 2$, onde o grau m é limitado por uma função de n.*

Demonstração: O lema (2.1.4) nos garante que $M_n(K)$ satisfaz as identidades (2.1)-(2.3).

Seja J o T_G- ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por (2.1)-(2.3), $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m}$, $h = (h_1, \cdots, h_m) \in I$, onde I é o conjunto de todas as sequências finitas $h = (h_1, \cdots, h_m)$ de elementos de G_0 tais que $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0$ é identidade polinomial G-graduada de $M_n(K)$.

Pela proposição 2.1.5 existe um inteiro positivo n_0 tal que é suficiente incluir no conjunto gerador de U somente $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0$ com $m \leq n_0$. Podemos fixar $n_0 = 4s^{2s+2}$ e como $|G_0| \leq n^2$ podemos escolher n_0 dependendo somente de n.

Devemos mostrar que toda identidade polinomial graduada de $M_n(K)$ pertence a J.

Suponha por absurdo que

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)} \cdots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} = 0, \alpha_\sigma \in K \tag{2.5}$$

é uma identidade polinomial G-graduada de $M_n(K)$ tal que

$$f(x_{h_1 1}, \cdots, x_{h_m m}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)} \cdots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} \notin J \tag{2.6}$$

Escolhamos o polinômio (2.5) com o número mínimo possível de coeficientes α_σ não nulos. Fixemos $\sigma \in S_n$ com $\alpha_\sigma \neq 0$, em (2.6), e matrizes correspondentes $v_1, \cdots, v_m$ tal que $v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(m)} \neq 0$.

Para qualquer $\tau \in S_n$ ou $v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(m)} = 0$ ou $v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(m)} = E_{rs}$ para algum r, s. Daí, existe um $\tau \in S_n$ tal que $\tau \neq \sigma$ e $\alpha_\tau \neq 0$, e

$$v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(m)} = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(m)} \neq 0.$$

Pela proposição 2.1.7

$$x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)}, \cdots, x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} - x_{h_{\tau(1)}\tau(1)} \cdots x_{h_{\tau(m)}\tau(m)} \in J.$$

Substituindo em (2.6) o polinômio $f(x_{h_1 1}, \cdots, x_{h_m m})$ por:

$$f(x_{h_1 1}, \cdots, x_{h_m m}) - \alpha_\sigma(x_{h_{\sigma(1)}\sigma(1)} \cdots x_{h_{\sigma(m)}\sigma(m)} - x_{h_{\tau(1)}\tau(1)} \cdots x_{h_{\tau(m)}\tau(m)}) \tag{2.7}$$

obtemos uma identidade graduada da forma (2.5) que é uma combinação linear de tamanho menor que $f(x_{h_1 1}, \cdots, x_{h_m m}) = 0$, o que contradiz nossa escolha de f. ■

Corolário 2.1.9 *Se G é um grupo e a G-graduação de $M_n(K)$ é tal que as matrizes unitárias são homogêneas e a componente identidade de $M_n(K)$ coincide com a diagonal $KE_{11} + \ldots + KE_{pp}$, então as identidades graduadas de $M_n(K)$ são consequências das identidades (2.1)-(2.3) e de uma quantidade finita de identidades da forma $x_{h_1 1} \ldots x_{h_m m} = 0, m \geq 2$.*

2.2 Identidades G-Graduadas Concretas

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de identidades polinomias G-graduadas.

Considerando a álgebra $M_3(K)$ e sendo G o grupo de permutações S_3, descreveremos uma base de identidades polinomiais S_3-graduadas de $M_3(K)$. Este resultado mostra como o Teorema 2.1.8 pode ser aplicado no caso de uma graduação concreta. Descreveremos também as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas e $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ que, apesar de historicamente terem sido estudadas anteriormente às identidades G-graduadas, podemos considerá-las como uma consequência dos resultados obtidos na seção 2.1.

Teorema 2.2.1 *As identidades graduadas*

$$\begin{aligned} x_e y_e - y_e x_e &= 0 \\ x_\sigma y_{\sigma^{-1}} z_\sigma - z_\sigma y_{\sigma^{-1}} x_\sigma &= 0, \qquad \sigma \in S_3, \sigma \neq e, (12) \\ x_{(12)} = 0, \quad x_{(123)} y_{(123)} = 0, \quad x_{(132)} y_{(132)} &= 0 \end{aligned}$$

formam uma base das identidades de $M_3(K)$ com respeito à S_3-graduação elementar induzida por $g = ((12),(23),(123))$.

Demonstração: Observemos inicialmente que:

- $(M_3(K))_e = KE_{11} + KE_{22} + KE_{33} \Rightarrow E_{11}, E_{22}, E_{33} \in (M_3(K))_e$,
- $(M_3(K))_{(12)^{-1}(23)} = (M_3(K))_{(123)} = KE_{12} \Rightarrow E_{12} \in (M_3(K))_{(123)}$,
- $(M_3(K))_{(23)^{-1}(12)} = (M_3(K))_{(132)} = KE_{21} \Rightarrow E_{21} \in (M_3(K))_{(132)}$,
- $(M_3(K))_{(12)^{-1}(123)} = (M_3(K))_{(23)^{-1}(123)} = (M_3(K))_{(23)} = KE_{13} + KE_{31} \Rightarrow E_{13}, E_{31} \in (M_3(K))_{(23)}$,
- $(M_3(K))_{(23)^{-1}(123)} = (M_3(K))_{(123)^{-1}(23)} = (M_3(K))_{(13)} = KE_{23} + KE_{32} \Rightarrow E_{23}, E_{32} \in (M_3(K))_{(13)}$.

Como $(M_3(K))_{(12)} = 0$, temos que $x_{(12)} = 0$ é uma identidade S_3-graduada de $(M_3(K))$. Além disso

$$0 = (KE_{12})^2 = (M_3(K))_{(123)}^2 \subset (M_3(K))_{(123)^2} = (M_3(K))_{(132)} \neq 0,$$

e assim obtemos que $x_{(123)}y_{(123)} = 0$ é identidade graduada. Similarmente $x_{(132)}y_{(132)} = 0$ também é identidade graduada. Observe que se

$$(M_3(K))_{(123)}(M_3(K))_{h_1} \neq 0, \quad (M_3(K))_{h_1}(M_3(K))_{h_2} \neq 0$$

para $h_1, h_2 \in S_3$, então

$$(M_3(K))_{(123)}(M_3(K))_{h_1}(M_3(K))_{h_2} = (M_3(K))_{(123)}(M_3(K))_{h_1h_2}$$

e

$$(M_3(K))_{h_1}(M_3(K))_{h_2}(M_3(K))_{(123)} = (M_3(K))_{h_1h_2}(M_3(K))_{(123)}.$$

De forma semelhante, a observação acima também é válida para a permutação (132).

Seja $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0$ uma identidade polinomial S_3-graduada de $M_3(K)$ que não é consequência de uma identidade semelhante de grau menor. Assim, para algum $1 \leq i \leq j \leq m$, a igualdade $(M_3(K))_{h_i} \cdots (M_3(K))_{h_j} = 0$ implica que $i = 1$ e $j = m$.

Se $h_i = e$ para $i = 1, \cdots, m$, então $M_n(K)_e M_n(K)_h = M_n(K)_h$, e daí

$$\begin{aligned} 0 &= M_n(K)_{h_1} \cdots M_n(K)_{h_{i-1}} M_n(K)_e M_n(K)_{h_{i+1}} \cdots M_n(K)_{h_m} = \\ &= M_n(K)_{h_1} \cdots M_n(K)_{h_{i-1}} M_n(K)_{h_{i+1}} \cdots M_n(K)_{h_m} \end{aligned}$$

e $x_{h_1 1} \cdots x_{h_{i-1}, i-1}(x_{e,i} x_{h_{i+1}, i+1}) \cdots x_{h_m, m} = 0$ é consequência da identidade graduada $x_{h_1 1} \cdots x_{h_{i-1}, i-1} x_{h_{i+1}, i+1} \cdots x_{h_m m} = 0$ de $M_3(K)$, o que é impossível pela nossa escolha da identidade. Portanto $h_i \neq e$.

Para todo $1 \leq i \leq j \leq m$ também podemos assumir que $h_i \cdots h_j \neq (12)$ pois $x_{(12)} = 0$ é uma identidade graduada.

Observe que para $m = 2$ todas as identidades graduadas $x_{h_1} x_{h_2} = 0$ são consequências das identidades $x_{(12)} = 0, \;\; x_{(123)} y_{(123)} = 0, \;\; x_{(132)} y_{(132)} = 0$.

Se $m \geq 3$, assumiremos que $h_1 \neq (123)$. Senão

$$\begin{aligned} (M_3(K))_{(123)} (M_3(K))_{h_2} \cdots (M_3(K))_{h_m} &= 0, \\ (M_3(K))_{(123)} (M_3(K))_{h_2} (M_3(K))_{h_3} &= M_3(K)_{(123)} (M_3(K))_{h_2 h_3} \end{aligned}$$

e teríamos que $x_{h_{(123)},1} x_{h_2 2} x_{h_3 3} \cdots x_{h_m m} = 0$ é consequência de $x_{h_{(123)},1} x_{h_2 h_3} \cdots x_{h_m} = 0$, o que é impossível, pois consideramos que identidades de $M_3(K)$ não são consequências de identidades de grau menor. Similarmente podemos assumir que $h_1 \neq (132)$, $h_m \neq (123), (132)$.

Se $m \geq 4$, então $h_i \neq (123), (132)$ para todo i. E temos duas possibilidades a considerar: para todo i temos $h_i \in \{(13), (23)\}$, ou $m = 3$ e $h_2 = \{(123), (132)\}$. Se $(M_3(K))_{h_1} (M_3(K))_{(123)} (M_3(K))_{h_3} = 0$, $h_1, h_3 = (13), (23)$ e $h_1(123) \neq (12)$, $h_1(123) \neq (12)$, então
$h_1 \neq (12)(123)^{-1} = (13) \Rightarrow h_1 = (23), \quad h_3 \neq (123)^{-1}(12) = (23) \Rightarrow h_3 = (13)$
mas $(M_3(K))_{(23)} (M_3(K))_{(123)} (M_3(K))_{(13)} = K E_{32} \neq 0$. Similarmente para $h_2 = (132)$.

Assim as únicas possibilidades para considerar são $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0$ onde $x_{h_i} = (13), (23)$.

Se $m \geq 3$ e $h_i \neq h_{i+1}$ para algum i, então $h_i h_{i+1} = (13)(23) = (132)$ ou $h_i h_{i+1} = (23)(13) = (123)$. Em ambos os casos, como $(M_3(K))_{(123)}$ e $(M_3(K))_{(132)}$ são unidimensionais podemos obter que:

$$(M_3(K))_{h_i} (M_3(K))_{h_{i+1}} = (M_3(K))_{h_i h_{i+1}},$$

$$(M_3(K))_{h_1} \cdots (M_3(K))_{h_i} (M_3(K))_{h_{i+1}} \cdots (M_3(K))_{h_m} = 0$$

da mesma forma $x_{h_1 1} \cdots x_{h_i h_{i+1}, i} x_{h_m m} = 0$ é uma identidade graduada de $M_3(K)$ que é consequência de uma identidade de grau menor.

Se $h_i = h_{i+1}$ para todo i, por exemplo, $h_i = (13)$ então usando que

$$(M_n(K))^3_{(13)} = (M_n(K))_{(13)} \neq 0$$

obtemos que $x_{h_1 1} \cdots x_{h_m m} = 0$ não é uma identidade graduada de $M_3(K)$. ■

Observe que para o caso descrito acima, se limitássemos o grau m dos monômios $x_{h_1 1} \ldots x_{h_m m} = 0$, que são identidades polinomiais para $M_3(K)$, pelo n_0 apresentado na proposição (2.1.5), teríamos que a quantidade de identidades desta forma seria menor que $n_0 = 4s^{2s+2} = 976.562.500$, e na verdade apenas 2 monômios são necessários no conjunto gerador do T_G-ideal em questão. Portanto, a estimativa apresentada não é a melhor.

Observação 2.2.2 *A álgebra das matrizes tem uma gradução natural para o semi-grupo G com unidade associado ao conjunto das matrizes elementares. Os elementos de G são 0 e todos os pares $(i,j), 1 \leq i,j \leq n$, e a multiplicação é dada por:*

$$\begin{aligned} 0.(i,j) &= (i,j).0 = 0 \\ (i,j).(k,l) &= (i,l) \quad se \quad j = k \\ (i,j).(k,l) &= 0 \quad se \quad j \neq k \end{aligned}$$

Então, de maneira análoga ao feito na seção anterior, podemos considerar álgebras graduadas por semi-grupos e descrever as identidades polinomiais graduadas de $M_n(K)$ graduadas por um semi-grupo associativo.

Podemos descrever as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_n$-graduadas e $\mathbb{Z}$-graduadas (Ver exemplo 1.4.5) para a álgebra $M_n(K)$ utilizando as ideias apresentadas no teorema 2.1.8.

Teorema 2.2.3 *[45] Todas as identidades polinomiais da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ seguem de*

$$\begin{aligned} x_1x_2 - x_2x_1 = 0 \ , &\qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \overline{0}; \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 = 0 \ , &\qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2). \end{aligned}$$

Demonstração: Basta provar que não são satisfeitas identidades da forma $x_{h_1 1} \cdots x_{h_k k} = 0, h_i \in \mathbb{Z}_n$. De fato, aplicando indução sobre k temos que no caso $k = 1$ é trivial, bastando considerar $x_{h_1 1} = E_{a_1 b_1}$ tal que $\overline{b_1 - a_1} = \alpha(x_{h_1 1})$. Suponhamos, por hipótese de indução, que para qualquer monômio de comprimento $k-1$, $x_{h_1 1} \cdots x_{h_{k-1},k-1}$ existe uma substituição

$$x_{h_1 1} = E_{a_1 b_1}, \quad x_{h_2 2} = E_{a_2 b_2}, \quad \ldots, \quad x_{h_{k-1} k-1} = E_{a_{k-1} b_{k-1}}, \tag{2.8}$$

tal que

$$x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_{k-1} k-1} = E_{a_1 b_1} E_{a_2 b_2} \ldots E_{a_{k-1} b_{k-1}} = E_{a_1 b_{k-1}} \neq 0. \tag{2.9}$$

Seja $x_{h_1 1} \cdots x_{h_k k}$ um monômio e suponhamos que $\alpha(x_{h_k}) = h_k = \bar{t}$. Consideremos agora a substituição formada pelos elementos (2.8) e $x_{h_k} = E_{b_{k-1} a_k}$, onde

$$a_k = \begin{cases} b_{k-1} + t, & se \quad b_{k-1} + t \leq n, \\ b_{k-1} + t - n, & se \quad b_{k-1} + t > n. \end{cases}$$

Logo, por 2.9

$$x_{h_1 1} \cdots x_{h_k k} = E_{a_1 b_{k-1}} E_{b_{k-1} b_k} = E_{a_1 b_k} \neq 0.$$

Considerando agora o fato de que o suporte da $\mathbb{Z}_n$-graduação de $M_n(K)$ é todo o $\mathbb{Z}_n$, segue imediatamente do teorema 2.1.8 o resultado. ■

Descreveremos agora as identidades $\mathbb{Z}$-graduada de $M_n(K)$ utilizando as ideias do teorema 2.1.8.

Teorema 2.2.4 *[44] Todas as identidades polinomiais da álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $M_n(K)$ seguem de*

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0 \ , \qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0; \tag{2.10}$$

$$x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1 = 0 \ , \qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2); \tag{2.11}$$

$$x = 0 \ , \qquad |\alpha(x)| \geq n. \tag{2.12}$$

Primeiramente apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados na demonstração do teorema.

Uma substituição $\mathcal{S}$ do tipo

$$x_{h_1 1} = E_{a_1 b_1}, x_{h_2 2} = E_{a_2 b_2}, \ldots, x_{h_k k} = E_{a_k b_k}, \tag{2.13}$$

onde

$$\overline{b_s - a_s} = h_s, \ s = 1, 2, \ldots, k \tag{2.14}$$

é conhecida como *substituição Standard*.

Para um monômio $m = x_{h_1 1}x_{h_2 2}\ldots x_{h_k k}$ e dois inteiros $1 \leq p \leq q \leq k$, denotaremos por $m^{[p,q]}$ a *subpalavra* obtidada de m descartando os $p-1$ primeiros e os últimos $k-q$ fatores, ou seja,

$$m^{[p,q]} = x_{h_p p}x_{h_{p+1} p+1}\ldots x_{h_q q}.$$

Lema 2.2.5 *Seja*

$$x_{h_1 1} = E_{a_1 b_1}, x_{h_2 2} = E_{a_2 b_2}, \ldots, x_{h_k k} = E_{a_k b_k}, \tag{2.15}$$

uma substituição Standard tal que $\max\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\} = n - t$*, onde* $t \geq 1$ *(respectivamente* $\min\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\} = 1 + r$*, onde* $r \geq 1$*).*

(i) Se $m(x_{h_1 1}, x_{h_2 2}, \ldots, x_{h_k k})|_{(2.15)} = 0$*, então quando a substituição Standard*

$$x_{h_1 1} = E_{a'_1 b'_1}, x_{h_2 2} = E_{a'_2 b'_2}, \ldots, x_{h_k k} = E_{a'_k b'_k}, \tag{2.16}$$

com $a'_s = a_s + t$ *e* $b'_s = b_s + t$ *(resp.* $a'_s = a_s - r$ *e* $a'_s = b_s - r$*),* $s = 1, 2, \ldots, k$*, é feita, temos*

$$m(x_{h_1 1}, x_{h_2 2}, \ldots, x_{h_k k})|_{(2.16)} = 0$$

(ii) Se $m(x_{h_1 1}, x_{h_2 2}, \ldots, x_{h_k k})|_{(2.15)} = E_{a_1 b_k}$*, então* $m(x_{h_1 1}, x_{h_2 2}, \ldots, x_{h_k k})|_{(2.16)} = E_{a'_1 b'_k}$.

Demonstração:

(i) Da igualdade

$$m|_{(2.15)} = E_{a_1 b_1}E_{a_2 b_2}\ldots E_{a_k b_k} = 0,$$

temos que $b_s \neq a_{s+1}$ para algum $s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Então

$$b'_s = b_s + t \neq a_{s+1} + t = a'_{s+1} \ (resp.\ b'_s = b_s - r \neq a_{s+1} - r = a'_{s+1}).$$

Portanto, $m|_{(2.16)} = 0$.

(ii) Para $s = 1, \ldots, k-1$, a igualdade $b_s = a_{s+1}$, nos dá $b'_s = a'_{s+1}$. Portanto,

$$m|_{(2.16)} = E_{a'_1 b'_1}E_{a'_2 b'_2}\ldots E_{a'_k b'_k} = E_{a'_1 b'_k},$$

concluindo assim a demonstração. ∎

Para um monômio graduado $\mathtt{m}(x_{h_1 1}, x_{h_2 2}, \ldots, x_{h_k k}) = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ e $1 \leq p \leq q \leq k$, denotaremos por $|\alpha(\mathtt{m}^{[p,q]})|$ o valor absoluto do grau da subpalavra $\mathtt{m}^{[p,q]}$. Consideremos

$$\widehat{\alpha}(\mathtt{m}) = \max\{|\alpha(\mathtt{m}^{[p,q]})| \ / \ 1 \leq p \leq q \leq k\}.$$

Lema 2.2.6 *Se*

$$x_{h_0 0} x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k} = 0,$$

é uma identidade graduada de $M_n(K)$, *com* $\widehat{\alpha}(x_{h_0 0} m) \leq n - 1$, *onde* $m = x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k}$, *então* $x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k} = 0$ *é uma identidade que é consequência das identidades (2.12).*

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que existe uma substituição Standard $\mathcal{S}$ tal que

$$m|_{\mathcal{S}} = E_{a_1 b_k} \neq 0.$$

Analisaremos dois casos.

Caso 1: $\alpha(x_{h_0 0}) = h_0 \geq 0$.

Podemos supor sem perda de generalidade que

$$\max\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\} = n,$$

pois se $\max\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\} = n - t$ com $t \geq 1$, então, pelo Lema 2.2.5, a substituição $\mathcal{S}'$ da forma $x_s = E_{a'_s b'_s}$, com $a'_s = a_s + t$ e $b'_s = b_s + t$, $s = 1, 2, \ldots, k$ é tal que $\max\{a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \ldots, a'_k, b'_k\} = n$ e $m|_{\mathcal{S}'} \neq 0$.

Como $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$ temos que

$$b_1 = a_2, \ldots . b_{k-1} = a_k. \tag{2.17}$$

Então, se $\max\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} < n$, tem-se $a_1 = n$. Logo,

$$n - h_0 \leq n, \text{ de onde, } a_1 - h_0 \leq n.$$

Além disso,

$$h_0 = |h_0| \leq \widehat{\alpha}(x_{h_0 0} m) \leq n - 1, \text{ou seja, } 1 \leq a_1 - h_0.$$

Portanto, $1 \leq a_1 - h_0 \leq n$.

Agora vamos supor que $\max\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = n$ e consideremos $n = b_r$, para algum $1 \leq r \leq k$. Temos

$$\alpha(x_{h_0 0} m^{[1,r]}) = \alpha(x_{h_0 0}) + b_r - a_1 = h_0 + n - a_1.$$

Combinando isto com $\alpha(x_{h_0 0} m^{[1,r]}) \leq |\alpha(x_{h_0 0} m^{[1,r]})| \leq \widehat{\alpha}(x_{h_0 0} m) \leq n - 1$, obtemos que

$$h_0 + n - a_1 \leq n - 1, \text{ isto é, } 1 \leq a_1 - h_0.$$

Além disso, $a_1 \leq n \leq h_0 + n$, isto é, $a_1 - h_0 \leq n$. Daí, $1 \leq a_1 - h_0 \leq n$.

Caso 2: $\alpha(x_{h_0 0}) = h_0 < 0$.

De maneira semelhante ao caso anterior, também podemos supor que $\min\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\} = 1$.

Em virtude de (2.17) se $\min\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} > 1$, então $a_1 = 1$ para $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Daí,

$$1 = a_1 < a_1 - h_0.$$

Além do mais, por $-h_0 = |h_0| \leq \widehat{\alpha}(x_{h_0 0} m) \leq n - 1$, temos que $a_1 - h_0 = 1 - h_0 \leq n$.

Suponhamos agora que $\min\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = 1$ e tome $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $1 = b_r$. Temos

$$\alpha(x_{h_0 0} m^{[1,r]}) = \alpha(x_{h_0 0}) + b_r - a_1 = h_0 + 1 - a_1.$$

Combinando isto com

$$-\alpha(x_{h_0 0} m^{[1,r]}) \leq |\alpha(x_{h_0 0} m^{[1,r]})| \leq \widehat{\alpha}(x_{h_0 0} m) \leq n - 1,$$

obtemos que $-h_0 - 1 + a_1 \leq n - 1$, isto é, $a_1 - h_0 \leq n$. Por outro lado,

$$1 \leq a_1 < a_1 - h_0, \text{ ou seja}, 1 \leq a_1 - h_0.$$

Logo, $1 \leq a_1 - h_0 \leq n$.

Finalmente, escolha $a_0 = a_1 - h_0, b_0 = a_1$ e pelo que foi exposto anteriormente, de fato $1 \leq a_0 \leq n$. Considerando a substituição Standard $\mathcal{S}'$ formada por $\mathcal{S}$ e $x_{h_0 0} = E_{a_0, b_0}$, temos que

$$(x_{h_0 0} m)|_{\mathcal{S}'} = E_{a_0, b_0} E_{a_1 b_k} = E_{a_0, b_k} \neq 0,$$

contradizendo a hipótese do Lema. ■

Demonstração: (Do teorema 2.2.4)

Pelo corolário (2.1.9), basta demonstrar que toda identidade do tipo $x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k}$ é consequência de identidades da forma $x_{h_0 0}$.

Com efeito, se $| \widehat{\alpha}(x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k}) | \leq n - 1$, então, usando o Lema(2.2.6) várias vezes, concluímos que $(x_{h_k k})$ é identidade, o que é um absurdo!

Portanto,

$$| \widehat{\alpha}(x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k}) | \geq n$$

e existem i, j tais que $h_0 = \alpha(x_{h_i i} \ldots x_{h_j j})$ tem módulo maior ou igual a n. Assim $x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_k k}$ pode ser obtido de

$$x_{h_1 1} x_{h_2 2} \ldots x_{h_{i-1} i-1} x_{h_0 0} x_{h_{i+1} i+1} \ldots x_{h_k k}$$

substituindo $x_{h_0 0}$ por $x_{h_i i} \ldots x_{h_j j}$. Mas, este último é consequência de $x_{h_0 0}$, concluindo assim nossa demonstração. ■

Capítulo 3

Identidades Graduadas em $M_n(K)$, $char K = p$

No capítulo anterior descrevemos as identidades polinomiais graduadas para a álgebra $M_n(K)$ considerando K um corpo de caracteristica zero com uma graduação elementar. Neste capítulo, baseados nos artigos [2] e [3], trataremos das identidades graduadas para a álgebra $M_n(K)$ sobre corpos infinitos, generalizando os trabalhos de Vasilovsky [44] e [45], e descreveremos as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas e $\mathbb{Z}$-graduadas para a álgebra $M_n(K)$.

Até o final deste capítulo consideraremos que K é um corpo infinito.

3.1 Identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$

Vasilovsky [45] provou que quando K é um corpo de característica 0 todas as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra $M_n(K)$ seguem das identidades

$$\begin{aligned} x_1x_2 = x_2x_1, \quad \alpha(x_1) &= \alpha(x_2) = 0 \\ x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1, \quad \alpha(x_1) &= -\alpha(x_2) = \alpha(x_3). \end{aligned}$$

Utilizando matrizes genéricas foi provado por Azevedo [3] que estes resultados ainda são válidos para corpos infinitos.

Com base na notação já estabelecida no capítulo 1, podemos descrever uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural para $M_n(K)$, onde $M_n(K)_{\bar{0}}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \ a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in K$$

e, para $0 < t \leq n-1$, $M_n(K)_{\bar{t}}$ consiste das matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $a_{1,t+1}, a_{2,t+2}, \ldots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, \ldots, a_{n,t} \in K$. E como já vimos no exemplo 1.4.5, os subespaços acima definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para álgebra $M_n(K)$.

Seja I o ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $K\langle X\rangle$ gerado pelas identidades graduadas $x_1x_2 = x_2x_1$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$, e $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$, com $\alpha(x_1) = -\alpha(x_2) = \alpha(x_3)$.

Lema 3.1.1 *A álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ satisfaz todas as identidades graduadas do T_n-ideal I.*

Demonstração: A demonstração é feita de modo análogo ao lema 2.1.4. ■

Seja $\Omega = K[y_i^\alpha \mid i \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_n]$ a álgebra dos polinômios comutativos gerada pelas variáveis y_i^α. Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_n$, seja $M_n(\Omega)_\alpha$ o subespaço de $M_n(\Omega)$ que consiste de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-i} \\ f_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $f_1, \ldots, f_n \in \Omega$ e $\overline{i} = \alpha$. O próximo lema mostra que a decomposição acima define uma $\mathbb{Z}_n$- graduação para a álgebra $M_n(\Omega)$.

Lema 3.1.2 *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-i} \\ a_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-j} \\ b_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

matrizes de $M_n(\Omega)$, onde $0 \leq i, j \leq n-1$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1b_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2b_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_xb_{i_x} \\ a_{x+1}b_{i_{x+1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_nb_{i_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $i_k = (i + k - 1)\ mod\ n + 1$ *e* $x = n - (i + j)\ mod\ n$.

Demonstração: O elemento a_1 está na posição $(1, i + 1)$ da matriz A. Logo, como $k = 1$, temos que $i_1 = i + 1 = (i + k - 1)\ mod\ n + 1$.

Para $k \geq 2$, a posição do elemento a_k é $(k, i + k)$ se $i + k \leq n$ ou, $(k, i + k - n)$ se $i + k > n$. Logo, a posição de a_k é $(k, (i + k - 1)\ mod\ n + 1)$. Portanto, $i_k = (i + k - 1)\ mod\ n + 1$.

O elemento $a_xb_{i_x}$ está na última coluna da matriz AB. Por outro lado, como b_{n-j} está na última coluna da matriz B, sabemos que $n - j = i_x$. Portanto, $n - j = (i + x - 1)\ mod\ n + 1$. Há dois possíveis casos:

Se $0 \leq i+x-1 < n$, então $n-j = i+x$, donde $x = n-(i+j)$. Como $1 \leq x \leq n$, temos que $0 \leq i + j \leq n - 1$. Logo $x = n - (i + j)\ mod\ n$.

Por outro lado se $n \leq i + x - 1 \leq 2n - 2$, então $n - j = i + x - n$, donde $x = n - (i + j - n)$. Como $1 \leq x \leq n$, temos que $0 \leq i + j - n \leq n - 1$. Logo $x = n - (i + j - n)\ mod\ n = n - (i + j)\ mod\ n$. ■

Denote por F a subálgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_i^{(\bar{0})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_i^{(\bar{1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_i^{(-\alpha(x_i)-\bar{1})} \\ y_i^{(-\alpha(x_i))} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_i^{(\overline{n-1})} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $A_i \in M_n(\Omega)_{\alpha(x_i)}$, para $i \in \mathbb{N}$.

Lema 3.1.3 *A álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada relativamente livre $K\langle X\rangle/T_n(M_n(K))$ é isomorfa à álgebra F.*

Demonstração: A aplicação $\phi : K\langle X\rangle \to F$ definida por $\phi(f(x_1,\ldots,x_m)) = f(A_1,\ldots,A_m)$ é um homomorfismo $\mathbb{Z}_n$-graduado. Claramente, ϕ é sobrejetiva. Além disso, $ker\phi = T_n(M_n(K))$ e ϕ induz um isomorfismo. ∎

Observação 3.1.4 *Seja $f(x_1,\ldots,x_m) \in K\langle X\rangle$. Temos que $A_i \in M_n(\Omega)_{\alpha(x_i)}$ e $f(A_1,A_2,\ldots,A_m) = (F_{ij})_{n\times n}$, onde $F_{ij} \in \Omega$. De K ser infinito segue que F_{ij} se anula para quaisquer valores de y_i^α em K se, e somente se, F_{ij} é o polinômio nulo. Logo, $f \in I$ se, e somente se, $f(A_1,A_2,\ldots,A_m) = 0$.*

Lema 3.1.5 *Para todo monômio $0 \neq m(x_1,\ldots,x_m) \in K\langle X\rangle$ de comprimento q, existem inteiros $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_q \leq m$ e elementos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de $\mathbb{Z}_n$ tais que*

$$m(A_1,\ldots,A_m) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_{\bar{0}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_{\bar{1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_{-\alpha(x_i)-\bar{1}} \\ \omega_{-\alpha(x_i)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_{\overline{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\omega_\delta = y_{i_1}^{(\alpha_1+\delta)} \ldots y_{i_q}^{(\alpha_q+\delta)}$.

Demonstração: Usamos indução sobre o comprimento de m. Se $q = 1$, obviamente temos o resultado. Se $q > 1$, então existe um monômio $0 \neq n(x_1,\ldots,x_m) \in K\langle X\rangle$ de comprimento $q-1$ tal que $m(x_1,\ldots,x_m) = n(x_1,\ldots,x_m)x_i$, onde $1 \leq i \leq m$. Pela hipótese de indução e o Lema (3.1.2), podemos concluir a demonstração. ∎

Lema 3.1.6 *Sejam $m(x_1,\ldots,x_m)$ e $n(x_1,\ldots,x_m)$ dois monômios de $K\langle X\rangle$. Se as matrizes $m(A_1,\ldots,A_m)$ e $n(A_1,\ldots,A_m)$ têm na primeira linha a mesma entrada não-nula, então $m(A_1,\ldots,A_m) = n(A_1,\ldots,A_m)$.*

Demonstração: Segue imediatamente do Lema(3.1.5). ∎

Lema 3.1.7 *Sejam $m(x_1,\ldots,x_m)$ e $n(x_1,\ldots,x_m)$ dois polinômios de $K\langle X\rangle$. Se $m(A_1,\ldots,A_m) = n(A_1,\ldots,A_m)$, então $m(x_1,\ldots,x_m) \equiv n(x_1,\ldots,x_m)(mod\ I)$.*

Demonstração: Se $m(A_1,\ldots,A_m)$ e $n(A_1,\ldots,A_m)$ têm na primeira linha a mesma entrada não-nula, vimos pelo lema (3.1.5) que $m(A_1,\ldots,A_m) = n(A_1,\ldots,A_m)$.

Seja q o comprimento de m. Usaremos indução sobre q. Se $q = 1$, obviamente temos o resultado. Suponhamos então que $q > 1$.

Afirmamos que se x_p é uma variável de $m(x_1,\ldots,x_k)$ e $m_1,\ldots,m_l$ são monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_1x_pm_2x_pm_3\ldots m_{l-1}x_pm_l$, então existem monômios $n_1,\ldots,n_l$ em $K\langle X\rangle$ e uma correspondência biunívoca $\varphi : \{1,\ldots,l\} \to \{1,\ldots,l\}$ tais que $n = n_1x_pn_2x_pn_3\ldots n_{l-1}x_pn_l$ e $\alpha(m_1x_pm_2\ldots m_t) = \alpha(n_1x_pn_2\ldots n_{\varphi(t)})$.

Suponhamos que x_p é uma variável de $m(x_1,\ldots,x_k)$ e m_1 e m_2 são dois monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_1x_pm_2$. Pelo Lema (3.1.5), sabemos que existem monômios $\omega_1,\ldots,\omega_n,\eta_1,\ldots,\eta_n$, de Ω e inteiros $0 \le i,j \le n-1$ tais que

$$m_1(A_1,\ldots,A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-i} \\ \omega_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$m_2(A_1,\ldots,A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \eta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{n-j} \\ \eta_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

observe que os graus homogêneos de $m_1(A_1,\ldots,A_k)$ e $m_2(A_1,\ldots,A_k)$ em F são respectivamente $\bar{i}$ e $\bar{j}$. Pelo Lema (3.1.2), temos que $m_1(A_1,\ldots,A_k)A_p$ é igual a

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \omega_1 y_p^{(\alpha_1)} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_x y_p^{(\alpha_x)} \\
\omega_{x+1} y_p^{(\alpha_x+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \omega_n y_p^{(\alpha_n)} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

onde $\alpha_r = \overline{(i+r-1)}$ e $x = n - (i + a_p) \ mod \ n$, sendo $\alpha(x_p) = \overline{a_p}$. Logo a matriz $m(A_1, \ldots, A_k) = m_1(A_1, \ldots, A_k) A_p m_2(A_1, \ldots, A_k)$ é igual a

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \omega_1 y_p^{(i_1)} \eta_{j_1} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_y y_p^{(i_y)} \eta_{j_y} \\
\omega_{y+1} y_p^{(i_{y+1})} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \omega_n y_p^{(i_n)} \eta_{j_n} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

onde $j_s = (n - x + s - 1) \ mod \ n + 1$ e $y = n - (n - x + j) \ mod \ n$. Assim a variável $y_p^{(\alpha_1)}$ deve aparecer pelo menos uma vez na primeira linha de $n(A_1, \ldots, A_k)$. Aplicando o mesmo raciocínio a n, existem dois monômios n_1 e n_2 em $K\langle X \rangle$ tais que $n = n_1 x_p n_2$ e $n_1(A_1, \ldots, A_k)$ tem grau $\bar{i}$ em F, porque caso contrário a variável $y_p^{(\alpha_1)}$ não apareceria na primeira linha de $n(A_1, \ldots, A_k)$. Uma vez que $m_1(A_1, \ldots, A_k)$ e $n_1(A_1, \ldots, A_k)$ têm o mesmo grau em F temos que $\alpha(m_1) = \alpha(n_1)$ e assim podemos concluir nossa afirmação.

Seja x_i a primeira variável de m. Logo existem dois monômios n_1 e n_2 de $K\langle X \rangle$ tais que $n = n_1 x_i n_2$ e $\alpha(n_1) = 0$. Temos três casos a considerar:

Caso 1: Existem dois monômios m_1 e m_2 em $K\langle X \rangle$ tais que $m = x_i m_1 x_i m_2$ e $\alpha(x_i m_1) = 0$. Então existem três monômios n_3, n_4, n_5 em $K\langle X \rangle$ tais que $n = n_3 x_i n_4 x_i n_5$, $\alpha(n_3) = 0$ e $\alpha(n_3 x_i n_4) = 0$.

Caso 2: Existem duas variáveis x_a e x_b, e seis monômios $m_1, m_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ em $K\langle X \rangle$ tais que $m = m_1 x_a x_b m_2$, $n = n_3 x_a n_4 x_i n_5 x_b n_6$, $n_1 = n_3 x_a n_4$, $\alpha(m_1) = \alpha(n_3)$ e $\alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a n_4 x_i n_5)$. Então com cálculo simples verificamos que $\alpha(n_4 x_i n_5) = 0$.

Caso 3: Não ocorre nenhum dos casos anteriores. Considere $m = x_{i_1} \dots x_{i_q}$. Seja r um inteiro de $\{1, \dots, q-1\}$ e sejam n_3, n_4, n_5, n_6 monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $n_1 = n_3 x_{i_r} n_4$, $\alpha(n_3) = \alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_{r-1}})$, $n = n_5 x_{i_{r+1}} n_6$, $\alpha(n_5) = \alpha(x_{i_1} \dots x_{i_r})$. Então o comprimento de n_5 é menor que o comprimento de n_1, para que não ocorram os casos anteriores (se o comprimento de n_5 é igual ao comprimento de n_1 então ocorre o caso 1, se é maior ocorre o caso 2). Aplicando a mesma ideia a $r+1, r+2, \dots$, concluimos que existe $r_0 \in \{1, \dots, q\}$ tal que para $r \geq r_0$, todo x_{i_r} aparece em n_1 está em $x_{i_{r0}} x_{i_{r0+1}} \dots x_{i_q}$. Logo n_1 e $x_{i_{r0}} x_{i_{r0+1}} \dots x_{i_q}$ possuem o mesmo multigrau. Sejam m_3, m_4, m_5 monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_3 m_4 x_j m_5$ onde x_j é a primeira variável de n, $\alpha(m_3 m_4) = 0$ e $m_4 x_j m_5 = x_{i_{r0}} x_{i_{r0+1}} \dots x_{i_q}$, portanto $\alpha(m_4 x_j m_5) = \alpha(x_{i_{r0}} x_{i_{r0+1}} \dots x_{i_q}) = \alpha(n_1) = 0$.

Trocando as letras m e n se ocorre o caso 3, podemos concluir que existem quatro monômios n_7, n_8, n_9, n_{10} em $K\langle X\rangle$ tais que $n = n_7 n_8 x_i n_9 n_{10}$, $\alpha(n_7 n_8) = 0$ e $\alpha(n_8 x_i n_9) = 0$. Definimos:

$$\mathbf{w}(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_i n_9 n_7 n_8 n_{10}, & se \quad \alpha(n_8) = 0, \\ x_i n_9 n_8 n_7 n_{10}, & se \quad \alpha(n_8) \neq 0. \end{cases}$$

Se $\alpha(n_8) = 0$ então $\alpha(x_i n_9) = 0$ e, usando a identidade $x_1 x_2 = x_2 x_1$ com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$, temos que $\mathbf{w}(x_1, \dots, x_k) \equiv n(x_1, \dots, x_k)(mod\ I)$. Por outro lado, se $\alpha(n_8) \neq 0$ então $\alpha(n_7) = \alpha(x_i n_9) = -\alpha(n_8)$ e, usando a identidade $x_1 x_2 x_3 = x_3 x_2 x_1$ com $\alpha(x_1) = -\alpha(x_2) = \alpha(x_3)$, temos que $\mathbf{w}(x_1, \dots, x_k) \equiv n(x_1, \dots, x_k)(mod\ I)$.

Como

$$\mathbf{w}(x_1, \dots, x_k) - n(x_1, \dots, x_k) \in I \subseteq T_n(M_n(K)) = T_n(R),$$

temos que

$$\mathbf{w}(A_1, \dots, A_k) = n(A_1, \dots, A_k) = m(A_1, \dots, A_k).$$

Se $\mathbf{w_0}$ e m_0 são monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $\mathbf{w} = x_i \mathbf{w_0}$ e $m = x_i m_0$ então usando o fato que a álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ satisfaz todas as identidades graduadas do T_n-ideal I é fácil ver que $\mathbf{w_0}(A_1, \dots, A_k) = m_0(A_1, \dots, A_k)$. Pela hipótese de indução, temos que $\mathbf{w_0}(x_1, \dots, x_k) \equiv m_0(x_1, \dots, x_k)(mod\ I)$, portanto $\mathbf{w}(x_1, \dots, x_k) \equiv m(x_1, \dots, x_k)(mod\ I)$. ■

Teorema 3.1.8 *Todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ seguem de:*

$$\begin{aligned} x_1x_2 = x_2x_1, \quad \alpha(x_1) &= \alpha(x_2) = 0 \\ x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1, \quad \alpha(x_1) &= -\alpha(x_2) = \alpha(x_3). \end{aligned}$$

Demonstração:

Sabemos que $I \subseteq T_n(M_n(K))$. Por isso, basta mostrarmos a inclusão contrária. Como o corpo K é infinito precisamos apenas provar que qualquer identidade polinomial graduada multi-homogênea $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ de $M_n(K)$ pertence a I. Seja r o menor inteiro não-negativo para o qual o polinômio f pode ser expresso módulo I como uma combinação linear de r monômios multi-homogêneos:

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_q m_q \ (mod\ I)$$

onde $0 \neq a_q \in K, m_1, m_2, \ldots, m_r \in K\langle X \rangle$. Mostraremos que $r = 0$. Suponhamos, pelo contrário, que $r > 0$. Pelo Lema (3.1.3), sabemos que $f \in T_n(F)$. Como

$$a_1m_1(A_1, A_2, \ldots, A_m) = -\sum_{q=2}^{r} a_q m_q(A_1, \ldots, A_m)$$

segue que existe $p \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que $m_1(A_1, \ldots, A_m)$ e $m_p(A_1, \ldots, A_m)$ têm na primeira linha a mesma entrada não-nula. Então, pelos Lemas (3.1.6) e (3.1.7), $m_1 \equiv m_p \ (mod\ I)$ e

$$f \equiv (a_1 + a_p)m_1 + \sum_{q=2}^{p-1} a_q m_q + \sum_{q=p+1}^{r} a_q m_q \ (mod\ I)$$

Portanto f pode ser expresso módulo I como uma combinação linear de no máximo $r - 1$ monômios multi-homogêneos, o que contradiz nossa escolha do número r. ■

3.2 Identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $M_n(K)$

Ao tentar descrever as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas da álgebra $M_n(K)$, Vasilovsky [45] encontrou uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas dessa álgebra sobre um corpo de característica zero. Esse resultado também pode ser generalizado para os corpos infinitos, conforme foi provado por Azevedo [3].

Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}$, seja $M_n(K)_\alpha$ o subespaço de $M_n(K)$ gerado por todas as matrizes elementares E_{ij} tais que $j - i = \alpha$. Assim, $M_n(K)_0$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$$

e, para $0 < \alpha \leq n - 1$, $M_n(K)_\alpha$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-\alpha} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ a_1, a_2, \ldots, a_{n-\alpha} \in K,$$

enquanto $M_n(K)_{-\alpha}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-\alpha} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ a_1, a_2, \ldots, a_{n-\alpha} \in K.$$

Finalmente, $M_n(K)_\alpha = 0$ para $\mid \alpha \mid \geq n$. Como $E_{ij}E_{js} = E_{is}$ se $j = r$, e $E_{ij}E_{rs} = 0$ se $j \neq r$, segue que $M_n(K)_\alpha M_n(K)_\beta \subseteq M_n(K)_{\alpha+\beta}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, portanto os subespaços acima definem uma $\mathbb{Z}$-graduação para álgebra $M_n(K)$.

Seja $\Omega = K[y_i^{(k)} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n]$ a álgebra dos polinômios comutativos gerada pelas variáveis $y_i^{(k)}$. Se $0 \leq \alpha \leq n - 1$, então $M_n(\Omega)_\alpha$ consiste de todas as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-\alpha} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $f_1, \ldots, f_{n-\alpha} \in \Omega$. Analogamente $M_n(K)_{-\alpha}$ consite das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{n-\alpha} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

com $f_1, \ldots, f_{n-\alpha} \in \Omega$. Se $\mid \alpha \mid \geq n$, então $M_n(\Omega)_\alpha = 0$.

Denote por F a subálgebra $\mathbb{Z}$-graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_i^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_i^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_i^{(n-\alpha(x_i))} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $0 \leq \alpha(x_i) \leq n-1$,

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_i^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_i^{(2)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_i^{(n+\alpha(x_i))} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $-n+1 \leq \alpha(x_i) \leq -1$, e $A_i = 0$ se $\mid \alpha(x_i) \mid \geq n$.

Lema 3.2.1 *A álgebra $\mathbb{Z}$-graduada relativamente livre $K\langle X\rangle/T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ é isomorfa à álgebra F.*

Demonstração: A demonstração é feita de forma análoga à demonstração do lema 3.1.3. ■

Seja I o ideal das identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $K\langle X\rangle$ gerado pelas identidades graduadas

$$x_1 = 0 \ , \qquad |\alpha(x_1)| \geq n;$$
$$x_1x_2 - x_2x_1 = 0 \ , \qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0;$$
$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 = 0 \ , \qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2),$$

Lema 3.2.2 *A álgebra $\mathbb{Z}$-graduada $M_n(K)$ satisfaz todas as identidades graduadas do $T_{\mathbb{Z}}$-ideal I.*

Demonstração: A demonstração é feita de forma análoga à demonstração do Lema (2.1.4) ■

Lema 3.2.3 *Seja $m = x_{i_1} \ldots x_{i_q}$ um monômio de grau α. Se $A_{i_1} \ldots A_{i_q} \neq 0$, então existem $1 \leq s \leq t \leq n \in \mathbb{N}$ tais que $A_{i_1} \ldots A_{i_q} = \sum_{i=s}^{t} \omega_i e_{i,i+\alpha}$ onde $\omega_i = y_{i_1}^{(h_1,i)} \ldots y_{i_q}^{(h_q,i)}$ e $h_{j,i+1} = h_{j,i} + 1$ para todo $s \leq i \leq t-1$, $1 \leq j \leq q$.*

Demonstração: Usaremos indução sobre q. Se $q = 1$, é trivial. Supondo $q > 1$ e aplicando a hipótese de indução para o monômio $x_{i_l} \ldots x_{i_{q-1}}$ e multiplicando as matrizes $A_{i_1} \ldots A_{i_{q-1}}$ e A_{i_q} temos o resultado. ■

Lema 3.2.4 *Seja* $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_m)$ *um monômio de* $K\langle X\rangle$*. Se* $\mathbf{m} = 0$ *é uma identidade polinomial* $\mathbb{Z}$*-graduada de* $M_n(K)$*, então* $\mathbf{m}$ *pertence ao ideal* I*.*

Demonstração: Se $\mathbf{m} = x_{i_1} \ldots x_{i_q}$, seja $\mathbf{n} = x_{j_1} \ldots x_{j_q}$ um monômio multilinear tal que $\alpha(x_{j_m}) = \alpha(x_{i_m})$. Cada entrada da matriz $A_{i_1} \ldots A_{i_q}$ ou é nula ou é um monômio da forma $y_{i_1}^{(\alpha_1)} \ldots y_{i_q}^{(\alpha_q)}$ para $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \{1, \ldots, n\}$. As matrizes A_{i_m} e A_{j_m} tem entradas nulas nas mesmas posições, e em uma determinada posição da matriz A_{i_m} será $y_{i_m}^{(\alpha)}$ se, e somente se, a A_{j_m} for $y_{j_m}^{(\alpha)}$. Portanto, onde a matriz $A_{i_1} \ldots A_{i_q}$ for 0 a matriz $A_{j_1} \ldots A_{j_q}$ também será 0, e onde a matriz $A_{i_1} \ldots A_{i_q}$ for $y_{i_1}^{(\alpha_1)} \ldots y_{i_q}^{(\alpha_q)}$ a matriz $A_{j_1} \ldots A_{j_q}$ também será $y_{j_1}^{(\alpha_1)} \ldots y_{j_q}^{(\alpha_q)}$. Assim, $\mathbf{m} \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) = T_{\mathbb{Z}}(F)$(Lema 3.2.1) e temos que $A_{i_1} \ldots A_{i_q} = 0$ implica que $A_{j_1} \ldots A_{j_q} = 0$. Por isso $\mathbf{n} = 0$ é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}$- graduada de $M_n(K)$ e $\mathbf{n} \in I$. Substituindo a variável $x_{j_m} \mapsto x_{i_m}$ segue que $\mathbf{m} \in I$, pois I é um $T_{\mathbb{Z}}$-ideal. ■

Lema 3.2.5 *Sejam* $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_m)$ *e* $\mathbf{n}(x_1, \ldots, x_m)$ *monômios de* $K\langle X\rangle$*. Se as matrizes* $\mathbf{m}(A_1, \ldots, A_m)$ *e* $\mathbf{n}(A_1, \ldots, A_m)$ *têm na mesma posição a mesma entrada não-nula então* $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{n}(x_1, \ldots, x_m)$ *(mod* I*).*

Demonstração: Seja (h, k) a posição onde as matrizes $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_m)$ e $\mathbf{n}(x_1, \ldots, x_m)$ têm a mesma entrada não-nula. Seja q o comprimento de $\mathbf{m}$. Usaremos indução sobre q. Se $q = 1$, o resultado é óbvio. Suponha que $q > 1$.

Suponhamos que x_p é uma variável de $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_k)$ e $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$ são dois monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 x_p \mathbf{m}_2$. Denote por $r = \alpha(\mathbf{m}_1)$, $s = \alpha(x_p)$, $t = \alpha(\mathbf{m}_2)$. Pelo Lema (3.2.3) a (h, k)-entrada de $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_m)$ é obtida pelo produto:

$$(\omega_h^{'} e_{h,h+r}) y_p^{(i)} e_{h+r,k-t} (\omega_{k-t}^{''} e_{k-t,k})$$

onde $i = h + r$ se $\alpha(x_p) \geq 0$, caso contrário $i = k - t$. Daí x_p ocorre em $\mathbf{n}$, e A_p em $\mathbf{n}(A_1, \ldots, A_m)$. Observe que para cada produto $B := A_{j_1} \ldots A_{j_q}$ não-nulo de matrizes genéricas, cada matriz A_l contribui com uma entrada não-nula em B exatamente uma vez com uma variável adequada, a saber y_l^e. Portanto, podemos assumir que existem subpalavras $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ de $\mathbf{n}$ tais que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 x_p \mathbf{n}_2$ e A_p que contribuem com $y_p^{(i)}$ para o cálculo da (h, k)- entrada de $\mathbf{n}(A_1, \ldots, A_m)$. (observe que se $\mathbf{n}_1 = 1$ então $\mathbf{n}_1(A_1, \ldots, A_m)$ é uma matriz identidade). Usando o Lema (3.2.3) mais uma vez, sabemos que a (h, k)-entrada de $\mathbf{n}(A_1, \ldots, A_m)$ é obtida pelo produto:

$$(\eta_h^{'} e_{h,h+r}) y_p^{(i)} e_{h+r,k-t} (\eta_{k-t}^{''} e_{k-t,k})$$

onde $\eta_h^{'}$ é a $(h, h+r)$-entrada de $\mathbf{n}_1(A_1, \ldots, A_m)$ e $\eta_{k-t}^{''}$ é a $(k-t, k)$-entrada de $\mathbf{n}_2(A_1, \ldots, A_m)$. Observe que $\eta_h^{'}$ é não-nula pois a (h,k)-entrada de $\mathbf{n}(A_1, \ldots, A_m)$ é não-nula, então $\mathbf{n}_1(A_1, \ldots, A_m)$ tem uma entrada não-nula na posição $(h, h+r)$. Daí o $\mathbb{Z}$-grau de $\mathbf{n}_1(A_1, \ldots, A_m)$ em F é r e $\alpha(\mathbf{n}_1) = r = \alpha(m_1)$. Portanto, podemos concluir que se x_p é uma variável de $\mathbf{m}(x_1, \ldots, x_m)$ e $m_1, \ldots, m_l$ são monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 x_p \mathbf{m}_2 x_p \mathbf{m}_3 \ldots \mathbf{m}_{l-1} x_p \mathbf{m}_l$, então existem monômios $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_l$ em $K\langle X\rangle$ e uma correspondência biunívoca $\varphi : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l\}$ tais que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 x_p \mathbf{n}_2 x_p \mathbf{n}_3 \ldots \mathbf{n}_{l-1} x_p \mathbf{n}_l$ e $\alpha(\mathbf{m}_1 x_p \mathbf{m}_2 \ldots \mathbf{m}_t) = \alpha(\mathbf{n}_1 x_p \mathbf{n}_2 \ldots \mathbf{n}_{\varphi(t)})$.

Mostraremos que existem monômios ω_1, ω_2 tal que $\mathbf{m} \equiv \omega_1 (mod\ I)$, $\mathbf{n} \equiv \omega_2 (mod\ I)$ e ω_1, ω_2 começam com a mesma variável. Seja x_i a primeira variável de $\mathbf{m}$. Logo existem dois monômios $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ de $K\langle X\rangle$ tais que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 x_i \mathbf{n}_2$ e $\alpha(\mathbf{n}_1) = 0$. Temos três casos a considerar:

Caso 1: Existem dois monômios $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$ em $K\langle X\rangle$ tais que $\mathbf{m} = x_i \mathbf{m}_1 x_i \mathbf{m}_2$ e $\alpha(x_i \mathbf{m}_1) = 0$. Então existem três monômios $\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5$ em $K\langle X\rangle$ tal que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_3 x_i \mathbf{n}_4 x_i \mathbf{n}_5$, $\alpha(\mathbf{n}_3) = \alpha(\mathbf{n}_3 x_i \mathbf{n}_4) = 0$. Logo, $\alpha(x_i \mathbf{n}_4) = 0$ e portanto $\mathbf{n} \equiv x_i \mathbf{n}_4 \mathbf{n}_3 x_i \mathbf{n}_5\ (mod\ I)$.

Caso 2: Existem duas variáveis x_a e x_b, e seis monômios $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_6$ em $K\langle X\rangle$ tais que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 x_a x_b \mathbf{m}_2$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_3 x_a \mathbf{n}_4 x_i \mathbf{n}_5 x_b \mathbf{n}_6$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_3 x_a \mathbf{n}_4$, $\alpha(\mathbf{m}_1) = \alpha(\mathbf{n}_3)$ e $\alpha(\mathbf{m}_1 x_a) = \alpha(\mathbf{n}_3 x_a \mathbf{n}_4 x_i \mathbf{n}_5)$. Então com cálculo simples verificamos que $\alpha(\mathbf{n}_4 x_i \mathbf{n}_5 = 0)$.

Caso 3: Não ocorre nenhum dos casos anteriores. Considere $\mathbf{m} = x_{i_1} \ldots x_{i_q}$. Seja x_l a variável que ocorre em $\mathbf{n}_1$, isto é, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_3 x_l \mathbf{n}_4$. Então existe $r \in \{1, \ldots, q\}$ tal que $x_l = x_{i_r}$ e $\alpha(\mathbf{n}_3) = \alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_{r-1}})$. Assuma que $r \neq q$ e seja $\mathbf{n}_5$ e $\mathbf{n}_6$ dois monômios tais que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_5 x_{i_{r+1}} \mathbf{n}_6$ e $\alpha(\mathbf{n}_5) = \alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_r})$. Então o comprimento de $\mathbf{n}_5$ é menor que o comprimento de $\mathbf{n}_1$, para que os casos anteriores não aconteça (se o comprimento de $\mathbf{n}_5$ é igual ao comprimento de $\mathbf{n}_1$ então teremos o caso 1, se o comprimento é maior temos o caso 2). Deste modo $x_{i_{r+1}}$ também aparece em $\mathbf{n}_1$. Concluimos que existe $r_0 \in \{1, \ldots, q\}$ tal que os monômios $\mathbf{n}_1$ e $x_{i_{r0}} x_{i_{r0}+1} \ldots x_{i_q}$ são multi-homogêneos. Seja x_j a primeira variável de $\mathbf{n}$, então existem monômios $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5$ monômios tal que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_4 x_j \mathbf{m}_5$, $\alpha(\mathbf{m}_3 \mathbf{m}_4) = 0$ e $\mathbf{m}_4 x_j \mathbf{m}_5 = x_{i_{r0}} x_{i_{r0}+1} \ldots x_{i_q}$. Portanto $\alpha(\mathbf{m}_4 x_j \mathbf{m}_5) = \alpha(x_{i_{r0}} x_{i_{r0}+1} \ldots x_{i_q}) = \alpha(\mathbf{n}_1) = 0$. Então segue que $\alpha(\mathbf{m}_3) = -\alpha(\mathbf{m}_4) = \alpha(x_j \mathbf{m}_5)$ e $\mathbf{m} \equiv x_j \mathbf{m}_5 \mathbf{m}_4 \mathbf{m}_3 (mod\ I)$ que começa como $\mathbf{n}$.

Considere agora x a primeira variável de $\boldsymbol{\omega_1}$ e $\boldsymbol{\omega_2}$, e sejam $\boldsymbol{\omega_1^{'}}$ e $\boldsymbol{\omega_2^{'}}$ dois monômios tais que $\omega_{\mathbf{1}} = x\omega_{\mathbf{1}}'$ e $\omega_{\mathbf{2}} = x\omega_{\mathbf{2}}'$. Como $\mathbf{m} - \omega_{\mathbf{1}}$ e $\mathbf{n} - \omega_{\mathbf{2}}$ pertencem a $I \subseteq T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) = T_{\mathbb{Z}}(F)$, temos que $\mathbf{m}(A_1, \ldots, A_m) = \omega_{\mathbf{1}}(A_1, \ldots, A_m)$ e $\mathbf{n}(A_1, \ldots, A_m) = \omega_{\mathbf{2}}(A_1, \ldots, A_m)$. Então as matrizes $\omega_{\mathbf{1}}'(A_1, \ldots, A_m)$ e $\omega_{\mathbf{2}}'(A_1, \ldots, A_m)$ tem na mesma posição a mesma entrada não-nula, porque acontece o mesmo com $\omega_{\mathbf{1}}(A_1, \ldots, A_m)$ e $\omega_{\mathbf{2}}(A_1, \ldots, A_m)$. Por hipótese de indução, temos $\omega_{\mathbf{1}}' \equiv \omega_{\mathbf{2}}'(mod\ I)$, portanto $\omega_{\mathbf{1}} \equiv \omega_{\mathbf{2}}(mod\ I)$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 3.2.6 *Todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}$- graduada $M_n(K)$ seguem de*

$$\begin{aligned} x_1 = 0\ , &\qquad |\alpha(x_1)| \geq n; \\ x_1x_2 - x_2x_1 = 0\ , &\qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0; \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 = 0\ , &\qquad \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2), \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Lema (3.2.2), sabemos que $I \subseteq T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$. Por isso, basta mostrarmos a inclusão contrária. Como o corpo K é infinito precisamos apenas provar que qualquer identidade polinomial graduada multi-homogênea $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ de $M_n(K)$ pertence a I. Seja r o menor inteiro não-negativo para o qual o polinômio f pode ser expresso módulo I como uma combinação linear de r monômios multi-homogêneos:

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_q m_q\ (mod\ I)$$

onde $0 \neq a_q \in K$, $m_1, m_2, \ldots, m_r \in K\langle X\rangle$. Observe que $|\alpha(m_i)| < n$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, pois senão $m_i \in I$. Mostraremos que $r = 0$. Suponhamos pelo contrário que $r > 0$. Pelo Lema (3.2.1), sabemos que $f \in T_{\mathbb{Z}}(F)$. Como:

$$a_1m_1(A_1, A_2, \ldots, A_m) = -\sum_{q=2}^{r} a_q m_q(A_1, \ldots, A_m)$$

segue que existe $p \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que $m_1(A_1, \ldots, A_m)$ e $m_p(A_1, \ldots, A_m)$ têm na primeira linha a mesma entrada não-nula. Então, pelo Lema (3.2.5), $m_1 \equiv m_p\ (mod\ I)$ e

$$f \equiv (a_1 + a_p)m_1 + \sum_{q=2}^{p-1} a_q m_q + \sum_{q=p+1}^{r} a_q m_q\ (mod\ I)$$

Portanto f pode ser expresso módulo I como uma combinação linear de no máximo $r - 1$ monômios multi-homogêneos, o que contradiz nossa escolha do número r. ■

Bibliografia

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463, 1950.

[2] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Comm. Algebra **30**, 5849–5860, 12 (2002).

[3] S. S. Azevedo, *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal **29 (2)**, 149-158 (2003).

[4] S. S. Azevedo, P. Koshlukov, *Graded identities for T-prime algebras over field of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157-176 (2002).

[5] Yu. A. Bakhturin, *Identical relations in Lie Algebras*, Translated from the Russian by Bakhturin, VNU Science Press, b. b., Utrecht, (1987).

[6] A. Berele, *Magnum PI*, Israel J. Math. **51**, no. 1-2, 13-19, (1985).

[7] A. Ya. Belov, *On non-Spechtian varieties*, Fund. Prikl. Mat **5**, 47-66(1999).

[8] A. Ya. Belov, L. H. Rowen, *Computational Aspects of polynomial identities*, Research Notes in Mathematics **9**, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.

[9] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Camb. Philos. Soc. **31**, 433-454 (1935).

[10] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publishers, 1962.

[11] S. Dăscălescu, B. Ion, C. Năstăsescu, J. Rios Montes, *Group gradings on full matrix rings*, J. Algebra **220**, 709-728, 1999.

[12] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, (German) Math. Ann. **85**, 184-194, 1922.

[13] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra **31(3)**, 1453-1474 (2003).

[14] V. Drensky, *A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20(3)**, 188-194(1981).

[15] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, (1999).

[16] V. Drensky, Y. Bahturin, *Graded polynomial identities of matrices*, Linear Algebra e Application, 15-34 (2002).

[17] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial Identity Rings*, CRM Advanced Courses in Mathematics, Birkhäuser, Basel (2004).

[18] E. Formanek, *The ring of generic matrices*, J. Algebra, **258**, no. 1, 310-320 (2002).

[19] G. K. Genov, *A basis for identities of third order matrix algebra over a finite field*, Algebra and Logic, **20**, 241-257(1981).

[20] G. K. Genov, P.N. Siderov, *A basis for identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field I*, II Serdica 8, 313-323, 351-366(1982).

[21] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in caracteristic $p > 0$*, Israel J. Math. **122**, 305-316 (2001).

[22] A. Giambruno, A. Valenti, *Central polynomial and matrix invariant*, Israel J. Math. **96**, 281-297 (1996).

[23] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surv. and Monographs **122**, AMS.

[24] A.V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic 2 without the finite basis property*, Fund. Prikl. Mat **5**, 101-118(1999).

[25] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Carus Math. Monographs Mat **15**, Math. Assoc. Amer., New York (1968).

[26] N. Jacobson, *PI-Algebras, an introduction*, Springer Lecture Notes in Math. **441**, Springer, (1975).

[27] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, Freeman, New York (1980).

[28] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54 220**, 496-500, 1948.

[29] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, 362-397(1987).

[30] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of caracteristic* $p \neq 2$, J. Algebra **241**, 410-434 (2001).

[31] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levizki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237-264, 1958.

[32] R. L. Kruse, *Identities satisfied by a finite ring*, J. Algebra **26**, 298-318(1973).

[33] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc.**52**, 1033-1035(1946).

[34] I. V. Lvov, *Varieties of associative rings*, Algebra and Logic **12** No 3, 667-688(1973).

[35] Yu. N. Maltsev, E. N. Kuzmin, *A basis for the identities of the algebra of second-order over a finite field*, Algebra and Logic **17** No. 1, 18-21(1978).

[36] A. I. Malcev, *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik* (German), Rec. Mat. Moscou, n. Ser. 1, 323-335 (1936).

[37] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47-63(1973).

[38] Yu. P. Razmyslov, *Trace Identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **38**, 723-756 (1974).

[39] A. Regev, *Existence of identities in* $A \otimes B$, Israel J. Math. **11**, 131-152 (1972).

[40] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math. **23**, 187-188 (1976).

[41] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Acad. Press Pure and Applied Math., vol. 84, New York (1980).

[42] W. Specht, *Gesetze in ringen*, Math. Zeitschrift **52**, 557-589(1950).

[43] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 367-373 (1963).

[44] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra **26 (2)**, 601-612 (1998).

[45] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**, 3517-3524 (1999).

[46] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, (German) Math. Ann. **113**, 528-567, 1936.