Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teorema sobre o Produto Tensorial em Característica Positiva

por

Suene Ferreira Campos

sob orientação de

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Dezembro/2008

O Teorema sobre o Produto Tensorial em Característica Positiva

por

Suene Ferreira Campos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Prof. Dr. Marcello Fidélis

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro/2008

Abstract

In this work we present a study about the behavior of polynomial identities of tensor products of T-prime T-ideals over infinite fields of different characteristics. More precisely, we present the Tensor Product Theorem (TPT), described by Kemer for fields of characteristic zero, and verify its validity over infinite fields with positive characteristic. First, based on results of Azevedo and Koshlukov, we study the T-ideals of the algebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$, for infinite fields of characteristic zero and characteristic $p > 2$. Here, $G = G_0 \oplus G_1$ is the Grassmann algebra of infinite dimension and $M_{1,1}(G)$ is the subalgebras of $M_2(G)$ consisting of matrices of order 2 which main diagonal entries are in G_0 and the secondary diagonal entries are in G_1. Second, using methods introduced by Regev and developed by Azevedo, Fidélis and Koshlukov, we verify the validity of the TPT for fields of positive characteristic, when it is restricted to multilinear polynomials. Finally, we present some results of Alves, Azevedo, Fidelis and Koshlukov, which show that the TPT is false when the basis field is infinite and has characteristic $p > 2$.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre o comportamento das identidades polinomiais dos produtos tensoriais de álgebras T-primas sobre corpos infinitos com diferentes características. Mais precisamente, apresentamos o Teorema sobre Produto Tensorial (TPT), descrito por Kemer para corpos de característica zero, e verificamos a sua validade sobre corpos infinitos com característica positiva. Incialmente, a partir de resultados apresentados por Azevedo e Koshlukov, estudamos os T-ideais das álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$, para corpos infinitos com característica zero e característica $p > 2$. Aqui, $G = G_0 \oplus G_1$ é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{1,1}(G)$ é a subálgebra de $M_2(G)$ que consiste das matrizes de ordem 2 que têm na diagonal principal entradas em G_0 e na diagonal secundária entradas em G_1. Em seguida, utilizando métodos introduzidos por Regev e desenvolvidos por Azevedo, Fidélis e Koshlukov, verificamos a validade do TPT para corpos de característica positiva, quando o mesmo é restrito a polinômios multilineares. Finalmente, apresentamos alguns resultados obtidos por Alves, Azevedo, Fidélis e Koshlukov, que comprovam que o TPT é falso quando o corpo base é infinito e tem característica $p > 2$.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

A **Deus**, força maior que nos inspira e nos faz persistir diante dos obstáculos. *"Tudo posso naquele que me fortalece"*.

Aos meus pais, **Manoel e Maria do Socorro**, pela vida, educação e anos de dedicação para que eu pudesse ter condições de chegar até aqui. A minhas irmãs, **Sandra, Shirley e Suellem**, pelo incentivo, e meu sobrinho **Heitor**, pelas horas de divertimento.

Ao meu namorado, **Adalberto Sérgio**, pelo amor, companherismo, encorajamento e tudo que representa para mim.

Aos professores do DM/UFPB pela minha formação em João Pessoa. Aos professores e amigos, **Liliane Machado** (DI/UFPB) e **Ronei Moraes** (DE/UFPB), pelas oportunidades e ensinamentos nos meus primeiros passos no mundo da pesquisa.

Ao meu orientador, professor **Sérgio Mota**, pela confiança, orientação e toda ajuda que me concedeu com o seu conhecimento matemático. Aos professores **Rossana Marques** e **Vânio Fragoso**, por terem direcionado o início desta etapa da minha formação.

Aos professores e funcionários da Pós-Graduação em Matemática da UFCG, que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação e conclusão deste trabalho. Em especial, ao professor **Antônio Brandão**, pela constante disponibilidade para discussões e valorosas contribuições com meu trabalho.

Aos amigos e companheiros de João Pessoa e Campina Grande, pessoas que me encorajaram a seguir com meus projetos profissionais e tantas vezes contribuíram com os mesmos, em especial, **Leomaques, Maria Joseane, Rosângela, Tatiana, Graciana, Rodrigo Arruda, Jamilson, Verônica e Jocemir.**

Eu devo muito a estas e algumas outras pessoas que não citei. **Obrigada!**

"Dizem que o desejo de conhecimento nos fez perder o paraíso no passado; verdade ou não, é certo que nos dará o paraíso no futuro."

Ingersoll

Dedicatória

Aos meus pais, Neco e Socorro.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Apresentação 1

1.2 Motivação 2

1.3 Objetivos 3

1.4 Desenvolvimento da PI-Teoria 3

1.5 Organização da Dissertação 3

2 PI-álgebras: Conceitos Básicos **5**

2.1 Álgebras, PI-Álgebras e Variedades 5

2.1.1 Álgebras 5

2.1.2 Álgebras Livres 10

2.1.3 Álgebras com Identidades Polinomiais 12

2.1.4 Variedades e Álgebras Relativamente Livres 16

2.1.5 Polinômios Homogêneos, Multilineares e Próprios 19

2.2 Álgebras Graduadas e Identidades Graduadas 24

2.2.1 Álgebras Graduadas 24

2.2.2 Álgebras Graduadas Livres e Identidades Graduadas 27

2.3 A Teoria Estrutural de Kemer 30

3 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas em álgebras T-primas **32**

3.1 Álgebras livres $\mathbb{Z}_2$-graduadas e supercomutativas 32

3.2 A Álgebra $M_{1,1}(G)$ 34

3.2.1 Um modelo genérico para $M_{1,1}(G)$ 35

3.2.2 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(G)$ 37

3.2.3 Um outro modelo genérico para $M_{1,1}(G)$ 40
3.3 A Álgebra $G \otimes G$ 43
3.3.1 Um modelo genérico para $G \otimes G$ 43
3.3.2 Um pouco de Combinatória 44
3.3.3 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $G \otimes G$ 46

4 Teorema do Produto Tensorial: Caso Multilinear 51

4.1 Teorema do Produto Tensorial - TPT 51
4.1.1 O TPT Multilinear 52
4.2 Álgebras de Matrizes 52
4.3 Equivalências Multilineares 55
4.4 A Demonstração do TPT Multilinear 64

5 Teorema do Produto Tensorial em Característica Positiva 70

5.1 O TPT é falso para $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ 70
5.2 Alguns resultados técnicos 72
5.3 O TPT é falso para $M_{a+b}(G)$ e $M_{a,b}(G) \otimes G$ 76
5.4 O TPT é falso para $M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)$ e $M_{ad+bc,ac+bd}(G)$ 76

Bibliografia 79

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo será apresentado o objeto de nosso estudo, uma motivação e uma breve discussão sobre o desenvolvimento da PI-Teoria, área da álgebra na qual este trabalho está inserido. Apresentamos ainda nossos objetivos e oferecemos um esquema de como este trabalho foi organizado.

1.1 Apresentação

Em 1987, Kemer apresentou a sua densa teoria sobre a estrutura dos T-ideais. Este trabalho, como poderá ser observado na subseção 1.4, tornou-se importante não somente por responder afirmativamente ao famoso Problema de Specht, mas por ter tratado das álgebras T-primas, que nada mais são do que álgebras cujos T-ideais são T-primos. Kemer mostra em seu trabalho que os únicos T-ideais T-primos não triviais em característica zero são os T-ideais das álgebras $M_n(K), M_n(G)$ e $M_{a,b}(G)$, onde G é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{a,b}(G)$ é a subálgebra de $M_{a+b}(G)$ que consiste das matrizes que têm na diagonal principal um bloco $a \times a$ e outro $b \times b$ com entradas em G_0, o centro de G, e na diagonal secundária blocos com entradas em G_1, a parte anticomutativa de G. A partir do trabalho de Kemer foi demonstrado ainda o seguinte resultado:

Teorema do Produto Tensorial (TPT) *Seja um corpo K com característica zero, então:*

(1) $T(M_{a,b}(G) \otimes G) = T(M_{a+b}(G))$;

(2) $T(M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(G))$;

(3) $T(G \otimes G) = T(M_{1,1}(G))$.

onde $T(\mathcal{A})$ denota o T-ideal das identidades da álgebra $\mathcal{A}$. Demonstrações alternativas para as afirmações do TPT foram obtidas por diversos autores com o intuito de chegar a estes resultados de forma independente da Teoria Estrutural. Novas questões acerca desta teoria, no entanto, passaram a surgir, dentre elas, uma pergunta natural relacionada ao TPT: *O TPT é válido quando consideramos corpos com característica positiva?* O nosso trabalho analisa as possibilidades desta questão.

O presente trabalho apresenta um estudo dos resultados obtidos nos artigos [21], [22] e [23] onde obtemos informações sobre as identidades ordinárias satisfeitas por álgebras T-primas a partir de identidades graduadas das mesmas, com graduações convenientes. A partir desses artigos, observamos ainda a validade do TPT em característica positiva quando consideramos apenas identidades polinomiais multilineares. Finalmente, é feito um breve resumo dos resultados dos artigos [22], [28], [29] donde pode-se concluir a não validade do TPT no seu caso geral sobre corpos infinitos com característica positiva.

1.2 Motivação

A teoria das PI-álgebras, álgebras que satisfazem identidades polinomiais é uma importante parte da Teoria de Anéis. Uma identidade polinomial de uma álgebra $\mathcal{A}$ é um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra quando existe um polinômio não nulo nestas condições, como exemplos, podemos citar as álgebras de matrizes sobre corpos, as álgebras comutativas e as de dimensão finita.

Uma vez que as identidades polinomiais dizem muito sobre a estrutura de uma álgebra, seu estudo passa a ser de grande relevância. Acreditamos que os resultados presentes neste estudo possibilitam o entendimento do comportamento dos T-ideais T-primos em característica positiva. As aplicações dos mesmos passam então a ser puramente teóricas.

1.3 Objetivos

O principal objetivo deste estudo é adquirir um melhor entendimento da estrutura dos T-ideais de álgebras T-primas em característica positiva a partir da assimilação dos resultados até agora concluídos e da familiarização com os conceitos inerentes a tais resultados.

1.4 Desenvolvimento da PI-Teoria

A teoria das álgebras com identidades polinomiais (ou PI-teoria) teve início com trabalhos de matemáticos como Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov (podemos citar como exemplos [1], [2], [3], [4]), que tratavam da estrutura de anéis (ou álgebras) que satisfazem uma identidade polinomial, e começou a se desenvolver mais intensamente por volta de 1950 quando foi provado o Teorema de Amitsur-Levitzki [7], o qual afirma que a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K satisfaz a identidade "standard" de grau $2n$.

Uma das principais questões da PI-teoria relaciona-se à descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, isto é, a determinação de uma base para o T-ideal (ideal das identidades) desta álgebra. Em 1950, Specht levantou a seguinte questão "*Toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?*". Esta pergunta ficou conhecida como Problema de Specht e motivou boa parte do desenvolvimento desta teoria. Kemer, em seu importante trabalho ([5],[6]), sobre a estrutura dos T-ideiais em característica zero, deu uma resposta afirmativa para este problema. Contudo, Kemer não mostra como determinar uma tal base finita e portanto não resolve o problema da descrição das identidades de uma álgebra, problema este que continua em aberto até hoje, tendo sido resolvido apenas para algumas álgebras em particular.

1.5 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada da seguinte maneira:

O primeiro capítulo apresenta conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Definimos álgebra, identidade polinomial e T-ideal, entre outros conceitos importantes, como álgebras relativamente livres, variedades de álgebras e discutimos brevemente as propriedades mais importantes destes conceitos. Ainda neste capítulo, introduzimos álgebras graduadas, identidades graduadas e todos os conceitos necessários relacionados às mesmas.

No segundo capítulo, apresentamos o conceito de álgebra supercomutativa e estudam-se as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$, onde G é a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior), $G \otimes G$ é o quadrado tensorial de G, $M_{1,1}(G)$ é uma subálgebra especial de $M_2(G)$ (todas definidas formalmente no primeiro capítulo). Neste capítulo, são construídos modelos genéricos para as álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ e a partir dos mesmos encontramos uma base para as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas procuradas. Este processo, utilizado no decorrer de todo o capítulo, é muito importante para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Os resultados apresentados encontram-se em [21].

No capítulo 3, definimos equivalência multilinear e apresentamos o Teorema do Produto Tensorial de Kemer (TPT) para corpos de característica zero. A partir daí, apresentamos e demonstramos o TPT em sua versão multilinear para corpos com característica $p > 2$ utilizando as idéias expostas no artigo [22], seguindo os passos de Regev no artigo [23].

Finalmente, no quarto capítulo é apresentado de forma bastante sucinta, os resultados dos artigos [22], [28], [29] onde são feitos estudos, para corpos com característica positiva, sobre as bases de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$, $M_{a+b}(G)$ e $M_{a,b}(G) \otimes G$, e $M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)$ e $M_{ad+bc,ac+bd}(G)$. Respectivamente, os resultados apresentados comprovam a não validade do Teorema do Produto Tensorial para corpos infinitos com característica positiva.

Capítulo 2

PI-álgebras: Conceitos Básicos

Neste capítulo serão apresentados definições e resultados importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. Em todo seu conteúdo, K será sempre um corpo e, a menos de alguma menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre K.

2.1 Álgebras, PI-Álgebras e Variedades

Nesta seção, introduzimos os conceitos de álgebra, álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra), variedades e álgebras relativamente livres. Iniciamos com o conceito de álgebra, nosso objeto de estudo.

2.1.1 Álgebras

Definição 2.1.1 *Um K-espaço vetorial $\mathcal{A}$ tem estrutura de uma K-álgebra (álgebra sobre K ou simplesmente* ***álgebra****) se, munido de uma operação binária, $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, denominada de multiplicação, satisfizer:*

(1) $(a+b)*c = a*c + b*c$;

(2) $a*(b+c) = a*b + a*c$;

(3) $\alpha(a*b) = (\alpha a)*b = a*(\alpha b)$.

para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Por simplicidade, escreveremos ab ao invés de $a*b$. Dizemos que β é uma base da álgebra $\mathcal{A}$ se β é uma base de $\mathcal{A}$ como espaço vetorial e definimos a dimensão de $\mathcal{A}$ como sendo a dimensão de $\mathcal{A}$ como espaço vetorial.

Definição 2.1.2 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser:*

- ***Associativa***, *se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$.*
- ***Comutativa***, *se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$.*
- ***Unitária***, *se possui uma unidade, isto é, se existe um elemento $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tal que $1_{\mathcal{A}}a = a1_{\mathcal{A}} = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Neste texto, usaremos 1 ao invés de $1_{\mathcal{A}}$.*
- ***Álgebra de Lie***, *se para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$ valem $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (identidade de Jacobi).*

Trabalharemos com álgebras associativas unitárias tendo corpo base infinito. Assim, no que segue, a menos que seja feita menção explícita em contrário, o termo álgebra deverá ser entendido como K-álgebra associativa unitária.

Definição 2.1.3 *Um K-subespaço vetorial $\mathcal{B}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ será denominado uma K-subálgebra de $\mathcal{A}$ (ou simplesmente* ***subálgebra*** *de $\mathcal{A}$), se tiver estrutura de álgebra, isto é, se $\mathcal{B}$ for fechado com relação a multiplicação definida para $\mathcal{A}$. O K-subespaço $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ será denominado um* ***ideal à esquerda*** *de $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. De modo similar, definimos* ***ideal à direita*** *de $\mathcal{A}$. Um ideal bilateral é um ideal à esquerda e à direita e será simplesmente denominado de* ***ideal****.*

Nos próximos exemplos apresentamos algumas álgebras e subálgebras que serão utilizadas no decorrer do texto.

Exemplo 2.1.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $S \subseteq \mathcal{A}$. Consideremos o subespaço $\mathcal{B}_S$ de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{1, s_1 s_2 \ldots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Temos que $\mathcal{B}_S$ é multiplicativamente fechado e $1 \in \mathcal{B}_s$. Logo, $\mathcal{B}_S$ é subálgebra de $\mathcal{A}$, chamada de* ***subálgebra gerada por*** *S. Observe que toda subálgebra de $\mathcal{A}$ que contém S deve conter $\mathcal{B}_S$ e assim $\mathcal{B}$ é a menor subálgebra de $\mathcal{A}$ contendo S.*

Exemplo 2.1.5 *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a* ***álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior)*** *de V, denotada por G, como sendo a álgebra com base*

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_i e_j = -e_j e_i \text{ para quaisquer } i, j \in \mathbb{N}.$$

Destacamos em G os seguintes subespaços vetoriais:

- G_0, *gerado pelo conjunto* $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$

- G_1, *gerado pelo conjunto* $\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$

Claramente, $G = G_0 \oplus G_1$ *como espaço vetorial. Desde que* $e_ie_j = -e_je_i$ *segue* $(e_{i_1}\ldots e_{i_m})(e_{j_1}\ldots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}\ldots e_{j_k})(e_{i_1}\ldots e_{i_m})$ *para quaiquer* $m, k \in \mathbb{N}$*, e assim podemos concluir que* $ax = xa$ *para quaisquer* $a \in G_0$ *e* $x \in G$*, e* $bc = -cb$ *para quaisquer* $b, c \in G_1$*. Observamos facilmente que se a característica de* K *for igual a* 2 *(*$charK = 2$*), então* G *é uma álgebra comutativa.*

Tomando G' *como a álgebra com base* $\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$*, temos que* G' *não tem unidade e é chamada de* ***álgebra exterior sem unidade****. Ainda, se* V_n *é o subespaço de* V *gerado por* $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$*, denotaremos por* $G(V_n)$ *sua álgebra de Grassmann correspondente.*

Exemplo 2.1.6 *O conjunto* $Z(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ax = xa, \forall x \in \mathcal{A}\}$ *é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$ *denominada* ***centro de*** $\mathcal{A}$ *e seus elementos são ditos centrais. Se* $\mathcal{A} = G$ *(álgebra de Grassmann) temos que* $Z(G) = G_0$ *(para* $charK \neq 2$*) e* $Z(G) = G$ *(para* $charK = 2$*).*

Exemplo 2.1.7 *Se* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra associativa, então* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra de Lie com a multiplicação* $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$*. Essa álgebra é denotada por* $\mathcal{A}^{(-)}$*.*

Exemplo 2.1.8 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra. Considere* $\mathcal{A}^{op} = \mathcal{A}$*, como espaço vetorial. Definimos em* $\mathcal{A}^{op}$ *a multiplicação* $*$ *como:*

$$a * b = ba, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathcal{A}^{op}.$$

Dessa forma, $\mathcal{A}^{op}$ *é uma álgebra, chamada de* ***álgebra oposta de*** $\mathcal{A}$*.*

Exemplo 2.1.9 *O* K*-espaço vetorial das matrizes* $n \times n$ *com entradas no corpo* K*, denotado por* $M_n(K)$*, munido da multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra. Nesta álgebra é importante destacar as matrizes unitárias* $E_{i,j}$*, para* $1 \leq i, j \leq n$*, onde* $E_{i,j}$ *é a matriz cuja única entrada não nula é* 1 *na i-ésima linha e j-ésima coluna. É fácil ver que elas formam uma base para* $M_n(K)$*.*

Exemplo 2.1.10 *O* K*-espaço vetorial das matrizes* $n \times n$ *com entradas na álgebra de Grassmann* G*, denotado por* $M_n(G)$*, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra. Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$*, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o* K*-subespaço de* $M_{a+b}(G)$

$$M_{a,b}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A \in M_a(G_0), B \in M_{a\times b}(G_1), C \in M_{b\times a}(G_1), D \in M_b(G_0) \right\}$$

é uma subálgebra de $M_{a+b}(G)$ *e portanto tem estrutura de álgebra.*

Observação 2.1.11 *Consideremos a subálgebra de $M_{a+b}(K)$ definida por:*

$$M_aM_b = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \ / \ A \in M_a(K), B \in M_{a\times b}(K) \text{ e } C \in M_b(K) \right\}$$

Denotaremos por $\overline{M_aM_b}$ a subálgebra de M_aM_b obtida fazendo $B = 0$.

Definição 2.1.12 *Sejam V e W espaços vetoriais e $K(V \times W)$, o K-espaço vetorial com base $V \times W$, isto é, o espaço vetorial formado pelas somas formais*

$$\sum_{(v,w)\in V\times W} \alpha_{(v,w)}(v, w)$$

onde $\alpha_{(v,w)} \in K$ e $\{(v, w) \in V \times W \mid \alpha_{(v,w)} \neq 0\}$ é finito. Sendo $\mathcal{U}$ um subespaço de $K(V \times W)$ gerado pelos elementos dos tipos

$$\begin{gathered} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{gathered}$$

com $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$. Definimos o ***produto tensorial*** *de V e W, denotado por $V \otimes_K W$ (ou simplesmente por $V \otimes W$) como sendo o espaço vetorial quociente $K(V\times W)/\mathcal{U}$. Dado $(u, w) \in V \times W$, denotamos por $v\otimes w$ o elemento $\overline{(v, w)}$ de $V \otimes W$ e o chamamos de tensores. Desta forma, temos que $\{v\otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$ e*

$$\begin{gathered} (v_1 + v_2) \otimes w = (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w) \\ v \otimes (w_1 + w_2) = (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2) \\ (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) \\ v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w) \end{gathered}$$

para quaisquer $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in K$. Concluímos que todos os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\Sigma(v_i \otimes w_i)$, com $v_i \in V$ e $w_i \in W$.

A proposição a seguir nos diz que para definir uma multiplicação em um espaço vetorial A, de modo a torná-lo uma álgebra, basta defini-la entre os elementos de uma base de A. A demonstração da mesma é simples e será omitida.

Proposição 2.1.13 *Se $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial com base β e $f : \beta \times \beta \to \mathcal{A}$ uma função qualquer, existe uma única função bilinear $F : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ estendendo f.*

Considerando a definição acima e esta proposição, podemos apresentar mais um exemplo de álgebra, muito importante para este trabalho.

Exemplo 2.1.14 *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são álgebras com bases (como espaços vetoriais) $\{a_i \mid i \in I\}$ e $\{b_j \mid j \in J\}$ respectivamente, então o* ***produto tensorial de álgebras****, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, é uma álgebra com a multiplicação dada por*

$$(a_{i_1} \otimes b_{j_1})(a_{i_2} \otimes b_{j_2}) = (a_{i_1} b_{j_1}) \otimes (a_{i_2} b_{j_2}), \quad i_1, i_2 \in I, j_1, j_2 \in J.$$

O elemento $1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}$ é a unidade desta álgebra.

Seguimos com o conjunto de definições e resultados relevantes para a continuação desta leitura.

Definição 2.1.15 *Uma transformação linear $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de álgebras é um* ***homomorfismo****, se $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ e além disso $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$. Analogamente às demais estruturas algébricas, chamamos ϕ de* ***isomorfismo*** *quando ϕ for um homomorfismo bijetor,* ***mergulho*** *quando ϕ for injetor,* ***endomorfismo*** *quando ϕ for um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ e* ***automorfismo*** *quando ϕ for um endomorfismo bijetor.*

Denotamos por $End\mathcal{A}$ e $Aut\mathcal{A}$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra $\mathcal{A}$. Quando existe um isomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, dizemos que as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas e denotamos este fato por $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Exemplo 2.1.16 *Seja $\mathcal{A}'$ uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar $\mathcal{A}'$ numa álgebra com unidade. Com efeito, seja $\mathcal{A} = K \oplus \mathcal{A}'$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em $\mathcal{A}$ a seguinte multiplicação, para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}'$ e $\alpha, \beta \in K$*

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b + a\beta + ab)$$

Assim, $(1, 0)$ é unidade de $\mathcal{A}$ e a inclusão $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ é um mergulho. Diremos que $\mathcal{A}$ ***é obtida a partir de $\mathcal{A}'$ por adjunção da unidade****.*

Definiremos agora o quociente de uma álgebra por um ideal. Este conjunto nos permitirá apresentar um resultado análogo ao Teorema dos Isomorfismos para anéis, grupos e espaços vetoriais o qual também chamaremos de Teorema dos Isomorfismos.

Considere uma álgebra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ um ideal de $\mathcal{A}$. Apresentamos o conceito da relação de congruência módulo I:

Definição 2.1.17 *Sejam $a, b \in \mathcal{A}$. Diremos que a é* ***congruente*** *a b módulo $\mathcal{I}$, e escrevemos $a \equiv b (\mathrm{mod}\ \mathcal{I})$ ou $a \equiv_{\mathcal{I}} b$, se $a - b \in \mathcal{I}$.*

Notação 2.1.18 *A classe de equivalência de a é o conjunto $\{b \in \mathcal{A} \mid b \equiv a(\mathrm{mod}\, \mathcal{I})\} = \{a + i \mid i \in \mathcal{I}\}$ e será denotada por $\overline{a}$ ou $a + \mathcal{I}$. O **conjunto das classes de equivalência** será denotado por $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.*

Não é difícil verificar que a relação definida acima é uma relação de equivalência. A proposição a seguir garante que podemos definir operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação em $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ de maneira natural, tornando este conjunto uma álgebra. Omitiremos a demonstração devido a mesma ser análoga ao caso de anéis.

Proposição 2.1.19 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mathcal{I}$ um ideal, $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in K$. Então as operações:*

(i) $\lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$ *(multiplicação por escalar);*

(ii) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$ *(soma);*

(iii) $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$ *(multiplicação),*

*estão bem definidas e fazem do conjunto $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ uma álgebra chamada de **álgebra quociente**.*

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mathcal{I}$ um ideal. A aplicação $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$ é um homomorfismo chamado de *projeção canônica*.

Uma vez apresentadas as definições acima, enunciaremos o Teorema dos Isomorfismos. A sua demonstração é análoga ao caso de anéis e será omitida.

Teorema 2.1.20 (Teorema dos Isomorfismos) *Seja $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo de álgebras. Então o núcleo de ϕ, $Ker(\phi) = \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a) = 0\}$, é um ideal de $\mathcal{A}$ e a álgebra quociente $\mathcal{A}/Ker(\phi)$ é isomorfa à imagem de ϕ, $Im(\phi) = \{\phi(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$.*

2.1.2 Álgebras Livres

Nesta seção, definiremos as álgebras livres cuja importância reside no fato das identidades polinomiais serem desenvolvidas sobre as mesmas.

Definição 2.1.21 *Seja $\mathcal{V}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma **álgebra livre** de $\mathcal{V}$ se existe um subconjunto Y (enumerável) gerador de F tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $h : Y \to \mathcal{A}$ existe um homomorfismo de álgebras $\varphi : F \to \mathcal{A}$ estendendo h. F é então dita ser livremente gerada por Y e a cardinalidade $|Y|$ do conjunto Y é chamada de posto de F.*

Construiremos uma álgebra livre na classe formada por todas as álgebras associativas. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto não vazio e enumerável de *variáveis* não comutativas. Uma *palavra* em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$ (para $n = 0$ temos a palavra vazia e denotaremos por 1). Considerando $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X e definindo que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_n = j_n$, denotaremos por $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto $S(X)$. Os elementos de $K\langle X\rangle$ serão, portanto, somas (formais) de termos que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Definição 2.1.22 *Os produtos (formais) de um escalar por uma palavra são chamados de **monômios** e os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados de **polinômios**.*

Definindo em $S(X)$ a seguinte multiplicação:

$$(x_{i_1}\ldots x_{i_k})(x_{j_1}\ldots x_{j_l}) = x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_{j_1}\ldots x_{j_l} \quad \textit{onde} \quad x_{i_t}, x_{j_s} \in X$$

observamos que a mesma é associativa e possui elemento neutro (a palavra vazia). A álgebra $K\langle X\rangle$ munida da multiplicação induzida por ela, é uma álgebra associativa com unidade. Observemos que, nos termos do exemplo 2.1.4, $K\langle X\rangle$ é gerada por X. A proposição seguinte mostra que a álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras associativas.

Proposição 2.1.23 *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Demonstração: Considere $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e unitária e h uma aplicação de X em $\mathcal{A}$. Tomando $h(x_i) = a_i$ para $i \in I$, considere a aplicação $\varphi_h : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$ onde $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. $\blacksquare$

Portanto, a álgebra $K\langle X\rangle$ é uma álgebra livre, gerada por X, na classe de álgebras associativas com unidade. No momento, esta é a informação que necessitamos para darmos continuidade ao trabalho. Mais detalhes sobre as álgebras livres serão tratados na seção 2.1.4.

2.1.3 Álgebras com Identidades Polinomiais

Uma vez definida na seção anterior a *álgebra associativa livre* $K\langle X\rangle$ gerada pelo conjunto X, definiremos as identidades polinomiais e as álgebras com identidades polinomiais. Notemos que a álgebra $K\langle X\rangle$ é, em outras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

Definição 2.1.24 *Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$ é denominado uma **identidade polinomial** da álgebra $\mathcal{A}$, se $f(a_1,\ldots,a_n)=0$ para quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$. Uma **álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra[1])** é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial (polinômio não nulo).*

Observemos que $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ é uma identidade de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em $\mathcal{A}$. Denotamos por $T(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$, e assim, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra se $T(\mathcal{A}) \neq \{0\}$.

Definição 2.1.25 *Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras, dizemos que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são **PI-equivalentes** se $T(\mathcal{A}_1)=T(\mathcal{A}_2)$.*

Seguem alguns exemplos importantes de álgebras com identidades polinomiais.

Exemplo 2.1.26 *Toda álgebra comutativa $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra, pois o polinômio comutador $f(x_1,x_2)=[x_1,x_2]=x_1x_2-x_2x_1$ é uma identidade polinomial para $\mathcal{A}$.*

Exemplo 2.1.27 *A álgebra de Grassmann G é uma PI-álgebra, pois um cálculo direto usando os elementos da base de G mostra que o polinômio $f(x_1,x_2,x_3)=[[x_1,x_2],x_3]$ é uma identidade polinomial para G.*

Exemplo 2.1.28 *(Regev [7]) Seja G' a álgebra de Grassmann sem unidade sobre um corpo infinito K com $charK = p \neq 0$. Então, $f(x)=x^p$ é uma identidade polinomial para G'.*

Exemplo 2.1.29 *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1,x_2,x_3)=[[x_1,x_2]^2,x_3]$ conhecida como a identidade de Hall. De fato, basta observar que:*

(1) *Se $A,B \in M_2(K)$ então $tr([A,B])=0$;*

(2) *Se $A \in M_2(K)$ e $tr(A)=0$ então $a^2=\lambda I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(K)$.*

[1] a sigla vem do inglês - polynomial identity.

Exemplo 2.1.30 *Uma generalização do polinômio comutador é dado pelo polinômio*

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

chamado de polinômio standard de grau n. Nesta expressão, S_n é o grupo simétrico das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ. Note que $S_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$.

Teorema 2.1.31 *(Amitsur-Levitzki [7]) A álgebra $M_n(K)$ satisfaz o polinômio de grau $2n$, S_{2n}. Ademais, $M_n(K)$ não satisfaz identidades sob a forma, S_m^k, para todo k quando $m < 2n$.*

Exemplo 2.1.32 *Uma K-álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser uma* ***Nil-álgebra*** *se para cada $a \in \mathcal{A}$ existe um número natural n tal que $a^n = 0$. O menor natural n com tal propriedade é denominado* ***índice de nilpotência*** *do elemento a. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma Nil-álgebra de índice limitado n se $a^n = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Toda Nil-álgebra de índice limitado n é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio $f(x) = x^n$.*

Exemplo 2.1.33 *Uma K-álgebra é dita ser* ***nilpotente*** *se existe um natural fixo n tal que o produto de quaisquer n elementos de $\mathcal{A}$ é igual a zero. O menor natural n com tal propriedade é denominado o* ***índice de nilpotência*** *da álgebra $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}$ é denominada uma* ***álgebra nilpotente*** *de classe $n-1$. Toda álgebra associativa nilpotente de classe $n-1$ é uma PI-álgebra, pois ela satisfaz o polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. (Observamos que neste exemplo e no anterior, as álgebras consideradas não possuem unidade.)*

Exemplo 2.1.34 *(Regev, [8]) O produto tensorial $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de duas PI-àlgebras é uma PI-álgebra.*

Após todos estes exemplos de PI-álgebras, surge um questionamento: Existem álgebras que não são PI-álgebras? A resposta é sim e, para comprovar isto, consideremos a álgebra $K\langle X\rangle$. Esta álgebra não satisfaz nenhuma identidade polinomial não nula. De fato, supondo por absurdo que $f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma identidade polinomial não nula de $K\langle X\rangle$, então $f(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ onde $f_i(x_i) = x_i$ para $1 \leq i \leq n$, o que é absurdo pois $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

O próximo teorema mostra que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.

Teorema 2.1.35 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita, digamos n. Então, ela satisfaz o polinômio standard de grau $n+1$, isto é, o polinômio*

$$S_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n+1)}.$$

Demonstração: Da definição de polinômio standard temos que $S_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ se $x_i = x_j$ para algum i e algum j em $\{1, \ldots, n+1\}$. Sejam $a_1, \ldots, a_{n+1}$ elementos arbitrários da álgebra $\mathcal{A}$ e $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $\mathcal{A}$. Podemos representar cada um dos elementos a_i na forma de uma combinação linear dos elementos $u_1, \ldots, u_n$ com coeficientes em K. A partir daí, por multilinearidade, a expressão $S_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ será uma combinação linear de termos da forma $S_{n+1}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}})$, onde cada u_{i_k} é um elemento do conjunto β. Existirão portanto, dois argumentos iguais em cada termo $S_{n+1}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}})$ que farão deles termos nulos e assim $S_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$. ■

O conceito que apresentaremos agora, assim como suas propriedades, são de extrema importância na PI-teoria.

Definição 2.1.36 *Um ideal $\mathcal{I}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é dito ser um T-**ideal** se $\mathcal{I}$ for invariante sob todos os endomorfismos ϕ de $\mathcal{A}$, isto é, se $\phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ para todo $\phi \in End\mathcal{A}$.*

Teorema 2.1.37 *Um ideal $\mathcal{I}$ de $K\langle X\rangle$ é um T-ideal se, e somente se, $f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{I}$ para todo $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$ e para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{I}$ seja um T-ideal de $K\langle X\rangle$ com $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$. Ainda, considere o endomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ definido por $\phi(x_i) = g_i$ quando $1 \leq i \leq n$ e $\phi(x_i) = 0$, caso contrário. Temos que, $f(g_1, \ldots, g_n) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = \phi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathcal{I}$. Por outro lado, suponha que $f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{I}$, para todo $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$ e quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$. Se $\phi \in EndK\langle X\rangle$ então $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) \in \mathcal{I}$ pois $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n) \in K\langle X\rangle$. ■

Teorema 2.1.38 *O ideal $T(\mathcal{A})$ das identidades da álgebra $\mathcal{A}$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Demonstração: Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(\mathcal{A})$ e $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo qualquer. Ora, se $\psi : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$ é um homomorfismo qualquer então $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$ pois $\psi \circ \varphi : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(\mathcal{A})$. Assim, $\varphi(f) \in Ker(\psi)$ e daí $\varphi(f) \in T(\mathcal{A})$. ■

Teorema 2.1.39 *Se $\mathcal{I}$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então $\mathcal{I} = T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$.*

Demonstração: Considere a projeção canônica $\pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/\mathcal{I}$. Temos que, caso $f \in T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$ então $f \in Ker(\pi)$. Como $Ker(\pi) = \mathcal{I}$ então $T(K\langle X\rangle/\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$.

Por outro lado, se $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{I}$, sendo $g_1,\ldots,g_n \in K\langle X\rangle$ então $f(g_1,\ldots,g_n) \in \mathcal{I}$. Daí, $f(g_1+\mathcal{I},\ldots,g_n+\mathcal{I}) = f(g_1,\ldots,g_n)+\mathcal{I} = \mathcal{I}$ e assim $f \in T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$ o que nos diz que $\mathcal{I} \subseteq T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$. ∎

Não é difícil ver que a intersecção de uma família de T-ideais é ainda um T-ideal. Segue então a seguinte afirmação.

Definição 2.1.40 *Seja S um conjunto qualquer de $K\langle X\rangle$, podemos definir o* ***T-ideal gerado por*** *S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $K\langle X\rangle$ que contém S. Assim, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal contendo S.*

Do ponto de vista prático, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1,\ldots,g_n)h_2 \mid f(x_1,\ldots,x_n) \in S; h_1,h_2,g_i \in K\langle X\rangle\}.$$

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e $S \subseteq T(\mathcal{A})$ é tal que $T(\mathcal{A}) = \langle S\rangle^T$ dizemos que S é uma ***base das identidades*** *de $\mathcal{A}$. Se um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ pertence a $\langle S\rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é uma consequência de S. Dois subconjuntos de $K\langle X\rangle$ são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.*

Um dos principais problemas da PI-teoria é encontrar, para uma dada álgebra, bases para as suas identidades polinomiais. Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra, caso $T(\mathcal{A})$ possua uma base finita S, dizemos que $\mathcal{A}$ possui a propriedade de Specth. Isto deve-se ao fato da questão da existência de base finita para as identidades das álgebras associativas sobre corpos de característica zero ter sido formulada em 1950 por Specth [9] (Problema de Specth). Em 1987, Kemer deu uma solução afirmativa para este problema [10]. Anteriormente, em 1973, Krause e Lvov, separadamente, provaram que o problema de Specht tem resposta positiva para álgebras de dimensão finita. A resposta para o Problema de Specth é negativa no caso de álgebras sobre corpos infinitos e de característica positiva. Encerraremos aqui a discussão sobre este importante problema devido a mesma não estar diretamente relacionada ao conteúdo deste trabalho.

Vejamos agora alguns exemplos de bases de identidades para algumas álgebras importantes.

Exemplo 2.1.41 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa qualquer e K é um corpo infinito, então $T(\mathcal{A}) = \langle [x_1,x_2]\rangle^T$. Dizemos então que todas as identidades de $\mathcal{A}$ seguem (ou são consequências) do polinômio $[x_1,x_2]$.*

Exemplo 2.1.42 *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(G) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. (Veja [11] e [12])*

Exemplo 2.1.43 *Em 1973, Razmyslov [13] provou que $T(M_2(K))$ é finitamente gerado para $charK = 0$, determinando uma base com 9 identidades. Posteriormente, Drensky [14] mostrou que $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$, também para $charK = 0$. Em 2001, Koshlukov [15] generalizou este resultado de Drensky para K infinito de característica diferente de 2 e 3. Quando $charK = 3$, uma terceira identidade é necessária para gerar o T-ideal (veja [16]). Para $charK = 2$, o problema da descrição de $T(M_2(K))$ ainda está em aberto.*

2.1.4 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Apresentaremos nesta seção os conceitos de variedades e álgebras relativamente livres. Aqui, iremos complementar o que já foi visto na seção 2.1.2. No decorrer do trabalho, utilizaremos estas informações para relacionar as PI-álgebras de acordo com as identidades que estas satisfazem.

Definição 2.1.44 *Seja I um subconjunto de $K\langle X \rangle$. A classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras que têm todos os polinômios de I como identidades é chamada de **variedade** (de álgebras associativas) definida por I. A **variedade trivial** é a classe de álgebras que contém apenas a álgebra nula (em outras palavras, é a variedade cujo conjunto de identidades que a definem é $K\langle X \rangle$).*

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras, é imediato que o conjunto

$$T(\mathcal{V}) = \{f \in K\langle X \rangle \mid f \in T(\mathcal{A}) \text{ } para \text{ } cada \text{ } \mathcal{A} \in \mathcal{V}\}$$

é um ideal de $K\langle X \rangle$. Além disso, $T(\mathcal{V})$ é invariante sob todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$. Com efeito, seja $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in T(\mathcal{V})$ e $\varphi : K\langle X \rangle \to K\langle X \rangle$ um endomorfismo definido por $\varphi(x_i) = g_i$ com $1 \leq i \leq n$ e $\varphi(x_i) = 0$ caso contrário. Podemos assumir que $g_{i_j} = g_{i_j}(x_1, \ldots, x_r)$ para r suficientemente grande. Sejam $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{A}$. Definindo $a_{i_j} = g_{i_j}(a_1, \ldots, a_r)$ notemos que

$$0 = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = f(g_{i_1}(a_1, \ldots, a_r), \ldots, g_{i_n}(a_1, \ldots, a_r)) = \varphi(f)(a_1, \ldots, a_r).$$

Logo, $\varphi(f) \in T(\mathcal{V})$ e disto concluimos que o conjunto $T(\mathcal{V})$ é um T-ideal chamado de T-ideal de $\mathcal{V}$.

Definição 2.1.45 *Para um conjunto fixo Y, a álgebra $U_Y(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$ é chamada uma* ***álgebra relativamente livre*** *de $\mathcal{V}$, se $U_Y(\mathcal{V})$ é livre na classe $\mathcal{V}$ (livremente gerada por Y). A cardinalidade de Y é chamada o posto de $U_Y(\mathcal{V})$.*

A proposição a seguir caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade.

Proposição 2.1.46 *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto qualquer e $\mathcal{I}$ o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_i \in K\langle Y\rangle; i \in I\}.$$

Então, a álgebra $\mathcal{U} = K\langle Y\rangle/\mathcal{I}$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$ com conjuntos de geradores livres $\overline{Y} = \{y + \mathcal{I} \mid y \in Y\}$. Duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$ são isomorfas.

Demonstração:

(1) Vamos mostrar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$. Seja $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ uma das identidades que definem $\mathcal{V}$ e sejam $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n \in \mathcal{U}$ onde $\overline{g}_j = g_j + \mathcal{I}$ com $g_j \in K\langle Y\rangle$. Temos que $f_i(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{I}$ devido ao modo como este foi definido. Logo,

$$f_i(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n) = f_i(g_1, \ldots, g_n) + \mathcal{I} = \mathcal{I}.$$

Isto mostra que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é identidade polinomial para $\mathcal{U}$. Daí, $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$.

(2) Mostremos agora que $\mathcal{U}$ é uma álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra qualquer de $\mathcal{V}$ e considere $\Psi : \overline{Y} \to \mathcal{A}$ uma função arbitrária. Definimos a função $\Theta : Y \to \mathcal{A}$ pondo $\Theta(y) = \Psi(\overline{y})$ e, por $K\langle Y\rangle$ ser a álgebra associativa livre gerada por Y, estendemos Θ a um homomorfismo (também denotado por Θ) $\Theta : K\langle Y\rangle \to \mathcal{A}$. Para provar que Ψ pode ser estendido a um homomorfismo $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$, é suficiente mostrarmos que $\mathcal{I} \subseteq Ker(\Theta)$, uma vez que esta informação indicará que o mesmo está bem definido. Seja $f \in \mathcal{I}$, isto é,

$$f = \sum_{i \in I} u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) v_i \quad onde \quad g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle Y\rangle.$$

Temos que

$$\Theta(f) = \sum_{i \in I} u_i \Theta(f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})) v_i = \sum_{i \in I} u_i (f_i(\Theta(g_{i_1}), \ldots, \Theta(g_{i_n}))) v_i = 0$$

pois $\Theta(g_{i_1}), \ldots, \Theta(g_{i_n}) \in \mathcal{A}$ e f_i é uma das identidades que definem $\mathcal{V}$. Logo $\mathcal{I} \subseteq Ker(\Theta)$ e $\mathcal{U}$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$ livremente gerada por $\overline{Y}$.

(3) Se $|Y| = |Z|$ com $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ e $Z = \{Z_i \mid i \in I\}$. Sejam $F_Y(\mathcal{V})$ e $F_Z(\mathcal{V})$ suas correspondentes álgebras livres. Sendo ambas relativamente livres, podemos definir homomorfismos

$$\Psi : F_Y(\mathcal{V}) \to F_Z(\mathcal{V}) \ \ e \ \ \Phi : F_Z(\mathcal{V}) \to F_Y(\mathcal{V})$$

pondo $\Psi(y_i) = z_i$ e $\Phi(z_i) = y_i$. Assim, Ψ e Φ são isomorfismos

A partir de (1), (2) e (3) demonstramos a proposição. ■

O clássico Teorema de Birkhoff (veja [7], pág. 24) demonstra que uma classe não vazia de álgebras é uma variedade se, e somente se, ela é fechada com respeito a produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes. Uma variedade $\mathcal{V}$ de álgebras é gerada por uma classe $\mathcal{U}$ de álgebras se toda álgebra de $\mathcal{V}$ pode ser obtida das álgebras de $\mathcal{U}$ por uma sequência finita de aplicações das operações citadas acima: denotamos este fato por $\mathcal{V} = var(\mathcal{U})$, ou por $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$, quando a classe $\mathcal{U}$ contém apenas uma álgebra $\mathcal{A}$.

No próximo Teorema, listamos algumas das propriedades básicas das variedades. É importante salientar que ele só é válido devido a X ser infinito.

Teorema 2.1.47 *Sejam $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ duas classes de álgebras e $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Então,*

(1) $T(\mathcal{U}_1) = \cap_{\mathcal{A} \in \mathcal{U}_1} T(\mathcal{A}) = T(var(\mathcal{U}_1))$;

(2) Se $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \Rightarrow T(\mathcal{U}_2) \subseteq T(\mathcal{U}_1)$;

(3) $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{V} \Leftrightarrow T(\mathcal{V}) \subseteq T(\mathcal{U}_1)$;

(4) Se $\mathcal{F}$ é uma álgebra livre em $\mathcal{V}$ então $T(\mathcal{V}) = T(\mathcal{F})$.

Demonstração: Imediata. ■

Corolário 2.1.48 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então $T(var(\mathcal{A})) = T(\mathcal{A})$.*

Observação 2.1.49 *Nos termos da proposição 2.1.46, sendo $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial e $\pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ a projeção canônica. Então a álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto gerador $\pi(X)$.*

As idéias de variedades e álgebras relativamente livres são mais gerais do que acabamos de apresentar. Para maiores detalhes, veja [7], Seções 1.2, 2.2 e 2.3.

2.1.5 Polinômios Homogêneos, Multilineares e Próprios

Nesta seção, verificamos que sob determinadas condições podemos simplificar as identidades que estamos trabalhando. À primeira vista, estes resultados parecem apenas simplificar as técnicas, mas a sua importância vai muito além disso, como veremos no decorrer do texto.

Definição 2.1.50 *Sejam $m \in K\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i}m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é dito **homogêneo** em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. f é dito **multi-homogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis. Um polinômio é **linear** em x_i quando tem grau 1 na variável x_i. Desta forma, um polinômio é **multilinear** quando é linear em todas as variáveis. O **grau de um polinômio** é o grau do seu maior monômio.*

Definição 2.1.51 *Sejam f um polinômio de $K\langle X\rangle$ de grau n e x_k uma variável de f. Podemos escrever f como uma soma $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio f_i é homogêneo de grau i na variável x_k. Cada polinômio f_i é chamado de **componente homogênea** de grau i em x_k do polinômio f.*

Se $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um monômio de $K\langle X\rangle$, o **multigrau** de m é a k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i = deg_{x_i}m$. Observe que se somarmos todos os monômios de f com um dado multigrau, obteremos uma **componente multi-homogênea** de f. Notemos ainda que $f \in K\langle X\rangle$ é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.

Os polinômios multilineares e multi-homogêneos, desempenham um papel importante na busca de bases para as identidades polinomiais sobre determinados tipos de corpos.

Lema 2.1.52 *Seja $\mathcal{I}$ um T-ideal de $K\langle X\rangle$:*

(i) Se o corpo K é infinito então cada componente multi-homogênea de f pertence a $\mathcal{I}$. Consequêntemente, $\mathcal{I}$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.

(ii) Se a característica do corpo é zero então $\mathcal{I}$ é gerado por seus polinômios multilineares.

Demonstração:

(i) Considere $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I}$ e f_i a componente homogênea de grau i em x_1 onde $i \leq n$. Por K ser infinito, podemos escolher $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$ onde para cada $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ teremos:

$$g_j = f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Considerando estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$, segue que

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha_0 x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f(\alpha_n x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$$

Observando então que a primeira matriz na igualdade acima é uma matriz de Vandermonde invertível. Ainda, sendo $g_j \in \mathcal{I}$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, pois $\mathcal{I}$ é T-ideal. Temos que $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{I}$.

Agora, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ e cada $t = 0, 1, 2, \ldots$, tomemos f_{i_t} como sendo a componente homogênea f_i de grau t em x_2. Usando então os mesmos argumentos acima, concluímos que $f_{i_t} \in \mathcal{I}$ e assim, repetindo o processo para cada variável, temos a primeira afirmação. Finalmente, observando que f é a soma de suas componentes multi-homogêneas, concluímos que $\mathcal{I}$ é gerador por seus polinômios multi-homogêneos.

(ii) Como $\mathrm{char}K = 0$, temos que K é infinito e portanto, pelo item (i), podemos assumir que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$ é um polinômio multi-homogêneo. Considerando $k = deg_{x_1} f$ e tomando y_1 e y_2 variáveis de X distintas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definamos o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

Sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ a componente homogênea de $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ de grau 1 em x_1, temos que $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$ pois este é T-ideal, e como K é infinito, $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$. Notando então que

$$h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e da hipótese de $\mathrm{char}K = 0$, segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, \ldots, x_n)$.

Notemos que $deg_{y_2} h_1 = n-1$ e assim, caso seja necessário, continuamos o processo para as variáveis $y_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ em h_1. Usando as mesmas idéias concluímos que f é consequência de algum polinômio multilinear de $\mathcal{I}$ e assim o resultado segue. ■

Corolário 2.1.53 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então,*

(i) Se o corpo K é infinito todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem de suas identidades multi-homogêneas, ou seja, $T(\mathcal{A})$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.

(ii) Se o corpo K tem característica zero todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem de suas identidades multilineares, ou seja, $T(\mathcal{A})$ é gerado por seus polinômios multilineares.

Quando a álgebra é unitária podemos restringir a nossa busca de identidades polinomiais a um determinado tipo de polinômios (polinômios próprios), conforme explicamos a seguir.

Definição 2.1.54 *O comutador de comprimento n é definido indutivamente a partir de $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ tomando $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado **polinômio próprio** (ou comutador), se ele é uma combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,..,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] \ ; \ \alpha_{i,..,j} \in K.$$

(Assumimos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores.) Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$.

O Lema 2.1.59 mostra a importância dos polinômios próprios para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. A demonstração está baseada no Teorema de Witt e no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Antes de enunciá-los precisamos da definição a seguir.

Definição 2.1.55 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa e a álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de Lie $\mathcal{A}^{(-)}$, definida no exemplo 2.1.7, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra **envolvente** de L. A álgebra associativa $U = U(L)$ é a **álgebra envolvente universal da álgebra de Lie** L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa $\mathcal{R}$ e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \to R^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to R$ que estende φ, ou seja, tal que $\psi(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in L$.*

Teorema 2.1.56 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt) *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismos) álgebra envolvente universal $U(L)$. Se L tem uma base $\{e_i \mid i \in I\}$ onde o conjunto de indices I é ordenado, então $U(L)$ tem uma base dada por*

$$\{e_{i_1} \dots e_{i_p}, i_1 \leq \dots \leq i_p, i_k \in I, p = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Demonstração: [7], Teorema 1.3.2, pg.11. ∎

Teorema 2.1.57 (Witt) *A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é livre na classe das álgebras de Lie, além disso $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Demonstração: [7], Teorema 1.3.5, pg 14. ∎

Agora vamos utilizar estes dois teoremas para encontrar uma base de $K\langle X\rangle$ que será bastante útil.

Proposição 2.1.58 *Suponhamos que os elementos*

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \dots,$$

formam uma base ordenada de $L(X)$ onde os elementos $x_1, x_2, \dots$ precedem os comutadores. Então

(i) O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \dots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c,$$

onde $a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$, na ordenação da base de $L(X)$.

(ii) Os elementos desta base tais que $a_1 = \dots = a_m = 0$ formam uma base do espaço vetorial $B(X)$ de polinômios próprios.

Demonstração: O item (i) segue do Teorema de Witt que garante que $U(L(X)) = K\langle X\rangle$, e do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que nos diz como encontrar uma base para $U(L(X))$ a partir de uma base ordenada de $L(X)$. O item (ii) segue diretamente do item (i) e da definição de $B(X)$. ∎

Finalmente, fazendo uso da base de $K\langle X\rangle$ dada na proposição anterior, provaremos que quando o corpo é infinito as identidades de uma álgebra unitária seguem de seus polinômios próprios.

Lema 2.1.59 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito então todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(\mathcal{A}) \cap B(X)$). Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica* 0 *então todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem das suas identidades próprias multilineares.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade polinomial de $\mathcal{A}$. Como K é infinito, podemos assumir que f é multi-homogênea. Utilizando a proposição acima, escrevamos f da seguinte forma,

$$f = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m), \ \alpha_a \in K$$

onde $\omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in B(X)$ e a soma é feita sobre todas as m-uplas $a = (a_1, \ldots, a_m)$ tais que $a_i \leq deg_{x_i} f$, $1 \leq i \leq m$. Definamos então o conjunto

$$M(f) = \{M_1, \ldots, M_l\} = \{a_1 \mid a = (a_1, \ldots, a_m) \ e \ \alpha_a \neq 0\}$$

onde $M_1 > \ldots > M_l > 0$. A demonstração do Lema segue da seguinte afirmação:

Se $f \in T(\mathcal{A})$ e f é multi-homogênea, então

$$g_j = \sum_{a_1 = M_j} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(\mathcal{A})$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Demonstremos esta afirmação. É fácil ver que $\omega_a(x_1 + 1, \ldots, x_m) = \omega_a(x_1, \ldots, x_m)$. Como $f(x_1 + 1, \ldots, x_m)$ também é identidade polinomial de $\mathcal{A}$, concluímos que

$$f(x_1 + 1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ i \end{pmatrix} x_1^i x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(\mathcal{A}).$$

Como f é multi-homogênea, $a_1 + deg_{x_1} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) = deg_{x_1} f$ e assim a componente homogênea de $f(x_1 + 1, \ldots, x_m)$ com menor grau possível em relação a x_1 se obtém quando $a_1 = M_1$ e é dada por

$$\sum_{a_1 = M_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \qquad (2.1)$$

onde o sub-índice do somatório indica que a soma é feita sobre todos os $a = (a_1, \ldots, a_m)$ onde $a_1 = M_1$. Como o corpo é infinito, do corolário 2.1.53, segue que o polinômio 2.1

pertence a $T(\mathcal{A})$. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $j = 1, 2, \ldots, k$, onde k é um número natural menor que m. Multiplicando $g_1 + g_2 + \ldots + g_k$ à esquerda por $x_1^{a_1}$ e subtraindo o produto de $f(x_1, \ldots, x_m)$ obtemos

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{a_1 > M_k} \alpha_a x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(\mathcal{A}).$$

É claro que $M(h) = \{M_{k+1}, \ldots, M_l\}$ e aplicando os mesmos argumentos anteriores a este polinômio conluímos que

$$\sum_{a_1 = M_{k+1}} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(\mathcal{A})$$

o que prova a afirmação. ■

2.2 Álgebras Graduadas e Identidades Graduadas

No estudo das bases de identidades polinomiais para álgebras, pouco foi desenvolvido [17]. Assim, somos levados a pesquisar outros tipos de identidades polinomiais como as identidades fracas, identidades com involução, identidades com traço, identidades graduadas. Estas identidades, além dos seus valores intrínsecos, nos fornecem informações sobre as identidades polinomiais comuns (identidades ordinárias). Para nosso propósito, usaremos apenas as identidades polinomiais graduadas.

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de álgebras e identidades graduadas. Em todo o seu texto, $(\mathcal{G}, +)$ denota um grupo abeliano aditivo.

2.2.1 Álgebras Graduadas

Neste momento, apresentaremos alguns conceitos gerais sobre as álgebras graduadas.

Definição 2.2.1 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Definimos uma **$\mathcal{G}$-graduação** em $\mathcal{A}$ como sendo uma família $\{\mathcal{A}_g \mid g \in \mathcal{G}\}$ de subespaços de $\mathcal{A}$ tais que*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{A}_g \quad e \quad \mathcal{A}_g \mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{g+h}$$

*para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$. Definimos uma **álgebra $\mathcal{G}$-graduada** como sendo uma álgebra munida de uma $\mathcal{G}$-graduação.*

Na definição acima, o subespaço $\mathcal{A}_g$ é chamado de *componente homogênea* de grau g e os seus elementos de *elementos homogêneos* de grau g (Sendo $a \in \mathcal{A}_g$ para algum $g \in \mathcal{G}$, o grau homogêneo a é igual a g e denota-se $\omega_{\mathcal{G}}(a) = g$).

Definição 2.2.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada. Dizemos que um subespaço W de $\mathcal{A}$ é um* ***subespaço homogêneo*** *se $W = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}}(W \cap \mathcal{A}_g)$.*

Considere $\mathcal{A}$ uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada, sendo $\mathcal{A}_g$ a componente homogênea de grau $g \in \mathcal{G}$. Sendo $\mathcal{B}$ uma subálgebra homogênea de $\mathcal{A}$, temos $\mathcal{B} = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}}(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_g)$. Ademais, para $g, h \in \mathcal{G}$, vale a inclusão $(\mathcal{B}\cap\mathcal{A}_g)(\mathcal{B}\cap\mathcal{A}_h) \subseteq \mathcal{B}\cap\mathcal{A}_{g+h}$ e assim a família de subespaços $\{\mathcal{B}\cap\mathcal{A}_g \mid g \in \mathcal{G}\}$ é uma $\mathcal{G}$-graduação em $\mathcal{B}$ induzida pela $\mathcal{G}$-graduação de $\mathcal{A}$ (**subálgebra $\mathcal{G}$-graduada**). Podemos fazer o mesmo com um ideal homogêneo $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de álgebras graduadas. Desde que uma mesma álgebra pode ter diferentes graduações, estes exemplos serão importantes para apresentarmos as graduações que usaremos no decorrer do texto, também denominadas de graduações canônicas (ou usuais).

Exemplo 2.2.3 *Toda álgebra $\mathcal{A}$ admite uma $\mathcal{G}$-graduação. Basta tomar $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_g = \{0\}$ para todo $g \in \mathcal{G} - \{0\}$. Esta graduação é chamada de graduação trivial.*

Exemplo 2.2.4 *A álgebra de Grassmann G possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural dada por $G = G_0 \oplus G_1$, onde G_0 e G_1 são os subespaços definidos no exemplo 2.1.5.*

Exemplo 2.2.5 *A partir da graduação canônica da álgebra de Grassmann, construiremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $G \otimes G$. Para tanto, é suficiente considerarmos*

$$(G \otimes G)_0 = (G_0 \otimes G_0) \oplus (G_1 \otimes G_1) \text{ e } (G \otimes G)_1 = (G_0 \otimes G_1) \oplus (G_1 \otimes G_0).$$

Usando o fato de que o produto tensorial é distributivo em relação a soma direta, é imediato verificar que

$$(G \otimes G) = (G \otimes G)_0 \oplus (G \otimes G)_1.$$

Além disso, verifica-se diretamente que

$$(G \otimes G)_i (G \otimes G)_j \subseteq (G \otimes G)_{i+j} \text{ para quaiquer } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Portanto, a álgebra $(G \otimes G)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 2.2.6 *A álgebra $M_{1,1}(G)$ é $\mathbb{Z}_2-$ graduada. De fato, consideramos*

$$M_{1,1}(G) = (M_{1,1}(G))_0 \oplus (M_{1,1}(G))_1$$

onde

$$(M_{1,1}(G))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in G_0 \right\} \text{ e } (M_{1,1}(G))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in G_1 \right\}$$

e verificamos diretamente que

$$(M_{1,1}(G))_i(M_{1,1}(G))_j \subseteq (M_{1,1}(G))_{i+j} \text{ para quaisquer } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

A seguinte caracterização sobre subálgebras $\mathcal{G}$-graduadas será bastante útil.

Lema 2.2.7 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada e $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{B}$ é subálgebra $\mathcal{G}$-graduada de $\mathcal{A}$;

(2) $\mathcal{B}$ é uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada tal que $\mathcal{B}_g \subseteq \mathcal{A}_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$;

(3) As componentes homogêneas de cada elemento de $\mathcal{B}$ pertencem a $\mathcal{B}$;

(4) $\mathcal{B}$ é gerada por elementos homogêneos.

Demonstração: Suponha que vale (1), então a decomposição $\mathcal{B} = \oplus_{g\in\mathcal{G}}\mathcal{B}_g$, onde $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g \cap \mathcal{B}$ é uma $\mathcal{G}$-graduação em $\mathcal{B}$. Daí $\mathcal{B}_g \subseteq \mathcal{A}_g$ e portanto vale (2).

Sendo válido o ítem (2), seja $b \in \mathcal{B}$ onde $b = \sum_{g\in\mathcal{G}} b_g$ com $b_g \in \mathcal{B}_g$ é a decomposição de b como soma de elementos homogêneos em relação a $\mathcal{G}$-graduação de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}_g \subset \mathcal{A}_g$, cada b_g também é homogêneo em relação à $\mathcal{G}$-graduação de $\mathcal{A}$ e (3) está provada.

Uma vez válido o ítem (3) considere $b \in \mathcal{B}$ onde a decomposição de b como soma de elementos homogêneos em relação à $\mathcal{G}$-graduação de $\mathcal{A}$ é dada por $b = \sum_{g\in\mathcal{G}} b_g$ tal que $b_g \in \mathcal{A}_g$. Uma vez que $b_g \in \mathcal{B}$ então $b_g \in \mathcal{B} \cap (\cup_{g\in\mathcal{G}}\mathcal{A}_g)$ e assim vale (4).

Suponha que vale (4). Seja C uma base de $\mathcal{B}$, $C \subset (\cup_{g\in\mathcal{G}}\mathcal{A}_g)$ composta de elementos homogêneos e seja $\mathcal{B}_g = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_g$. O elemento $b = \sum_{i=1}^{n} c_i$, onde $c_i \in C$, é homogêneo de grau g se, e somente se, $\omega_{\mathcal{G}}(c_i) = g$, $1 \leq i \leq n$. Assim, $C_g = C \cap \mathcal{A}_g$ é uma base para $\mathcal{B}_g$ e como $C = \cup_{g\in\mathcal{G}}C_g$ segue que $\mathcal{B} = \oplus_{g\in\mathcal{G}}\mathcal{B}_g$ e o Lema está provado.

■

Definição 2.2.8 *Uma aplicação $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre álgebras $\mathcal{G}$-graduadas é chamada* ***homomorfismo $\mathcal{G}$-graduado****, se ϕ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\phi(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{B}_g$ para todo $g \in \mathcal{G}$. De modo análogo, definimos* ***isomorfismo, endomorfismo e automorfismo $\mathcal{G}$-graduado****.*

Proposição 2.2.9 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal $\mathcal{G}$-graduado de uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada $\mathcal{A}$ então $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada considerando $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_g = \{a + \mathcal{I} \mid a \in \mathcal{A}_g\}$.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \sum_{g\in\mathcal{G}}(\mathcal{A}/\mathcal{I})_g$ e $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_g(\mathcal{A}/\mathcal{I})_h \subseteq (\mathcal{A}/\mathcal{I})_{g+h}$. Devemos apenas mostrar que a soma é direta. Suponha que $(\sum_{g\in\mathcal{G}}(a_g + \mathcal{I})) = 0$. Neste caso, $(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g) \in \mathcal{I}$ e como $\mathcal{I}$ é $\mathcal{G}$-graduado segue do Lema 2.2.7 que $a_g \in \mathcal{I}$, ou seja, $(a_g + \mathcal{I}) = 0$, assim $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \oplus_{g\in\mathcal{G}}(\mathcal{A}/\mathcal{I})_g$ e a proposição está provada. ■

O teorema a seguir é uma versão graduada do Teorema 2.1.20. Ao longo da dissertação, também iremos nos referir a ele como Teorema dos Isomorfismos.

Teorema 2.2.10 (Teorema dos Isomorfismos) *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras $\mathcal{G}$-graduadas e $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo $\mathcal{G}$-graduado. Então, o $Ker(\phi)$ é um ideal $\mathcal{G}$-graduado de $\mathcal{A}$ e a álgebra quociente $\mathcal{A}/Ker(\phi)$ é isomorfa (como álgebra graduada) à $Im(\phi) = \phi(\mathcal{A})$.*

Demonstração: É fácil ver que $Ker(\phi)$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Vamos mostrar que esse ideal é $\mathcal{G}$-graduado. Para isso seja $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \in Ker(\phi)$ onde $g_1, g_2, \ldots, g_n$ são elementos distintos de $\mathcal{G}$ e $a_i \in \mathcal{A}_{g_i}$. Como ϕ é $\mathcal{G}$-graduado, temos $\phi(a_i) \in \mathcal{B}_{g_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, $0 = \phi(a) = \phi(a_1) + \phi(a_2) + \ldots + \phi(a_n)$ e daí $\phi(a_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, pois $\{\mathcal{B}_g \mid g \in \mathcal{G}\}$ é uma família de subespaços independentes. Logo, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $a_i \in Ker(\phi)$ e pelo Lema 2.2.7 obtemos o desejado.

A aplicação $\psi : \mathcal{A}/Ker(\phi) \to \mathcal{B}$ dada por $\psi(a + Ker(\phi)) = \phi(a)$ está bem definida pois se $a, b \in \mathcal{A}$ são tais que $a + Ker(\phi) = b + Ker(\phi)$, então $a - b \in Ker(\phi)$ e $\phi(a) = \phi(b)$, ou seja, $\psi(a+Ker(\phi)) = \psi(b+Ker(\phi))$. É fácil ver que ψ é homomorfismo graduado, assim resta apenas mostrar que ψ é injetor. Se $\psi(a + Ker(\phi)) = 0$ então $\phi(a) = 0$ e $a \in Ker(\phi)$, logo $a + Ker(\phi) = 0$ e o Teorema está provado. ■

2.2.2 Álgebras Graduadas Livres e Identidades Graduadas

Vamos agora tratar de identidades $\mathcal{G}$-graduadas. Antes, precisamos do conceito de álgebra associativa livre $\mathcal{G}$-graduada. Para definí-lo, consideremos uma família

$\{X_g \mid g \in \mathcal{G}\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X\rangle$. Definimos agora

$$\omega_{\mathcal{G}}(1) = 0 \ \ e \ \ \omega_{\mathcal{G}}(x_1x_2\ldots x_m) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \ldots + \omega(x_m)$$

onde $\omega(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X\rangle$, dizemos que $\omega_{\mathcal{G}}(m)$ é o $\mathcal{G}$-grau de m. Tomando para cada $g \in \mathcal{G}$

$$K\langle X\rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } K\langle X\rangle \text{ e } \omega_{\mathcal{G}}(m) = g\rangle$$

temos

$$K\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} K\langle X\rangle_g \ \ e \ \ K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$, assim $K\langle X\rangle$ é chamada *álgebra associativa livre $\mathcal{G}$-graduada.* Se $f \in K\langle X\rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de $\mathcal{G}$-grau g e usamos a notação $\omega_{\mathcal{G}}(f) = g$.

Agora estamos prontos para definir identidade $\mathcal{G}$-graduada.

Definição 2.2.11 *Um polinômio $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle$, ou mesmo a expressão $f(x_1,\ldots,x_n)$, é uma* ***identidade polinomial $\mathcal{G}$-graduada*** *da álgebra $\mathcal{G}$-graduada $\mathcal{A}$, se $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ para todo $a_i \in \mathcal{A}_{g_i}$, onde $g_i = \omega_{\mathcal{G}}(x_i)$ e $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Exemplo 2.2.12 *Consideremos a álgebra de Grassmann G com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural (conforme definida no Exemplo 2.2.3). Como $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in G_1$, temos que $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2x_1 \in K\langle X\rangle$, onde $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, com $\omega_{\mathbb{Z}_2}(x_1) = \omega_{\mathbb{Z}_2}(x_2) = 1$, é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de G.*

No estudo das identidades ordinárias, o conceito de T-ideal tem importância fundamental, como foi visto nas seções anteriores. Para o caso das identidades $\mathcal{G}$-graduadas temos conceito análogo, a saber, o conceito de $T_{\mathcal{G}}$-ideal.

Definição 2.2.13 *Um ideal $\mathcal{I}$ numa álgebra $\mathcal{G}$-graduada $\mathcal{A}$ é chamado de* ***$T_{\mathcal{G}}$-ideal*** *se $\mathcal{I}$ é invariante por todos os endomorfismos $\mathcal{G}$-graduados de $\mathcal{A}$, isto é, $\Phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ para todo endomorfismo $\mathcal{G}$-graduado Φ de $\mathcal{A}$. Dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X\rangle$, definimos o* ***$T_{\mathcal{G}}$-ideal gerado*** *por S, que é denotado por $K\langle S\rangle^{T_{\mathcal{G}}}$, como sendo a interseção de todos os $T_{\mathcal{G}}$-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S.*

É claro que $K\langle X\rangle$ é um $T_{\mathcal{G}}$-ideal que contém S, assim na definição acima $K\langle S\rangle^{T_{\mathcal{G}}}$ é interseção de uma família não vazia de conjuntos, além disso não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer de $T_{\mathcal{G}}$-ideais é ainda um $T_{\mathcal{G}}$-ideal, portanto $K\langle S\rangle^{T_{\mathcal{G}}}$ está bem definido e é o menor $T_{\mathcal{G}}$-ideal que contém S.

O $T_{\mathcal{G}}$-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1,\ldots,g_n)h_2 \mid f(x_1,\ldots,x_n)\in S, h_1,h_2,g_1,\ldots,g_n\in K\langle X\rangle$$
$$\omega_{\mathcal{G}}(g_1)=\omega_{\mathcal{G}}(x_1),\ldots,\omega_{\mathcal{G}}(g_n)=\omega_{\mathcal{G}}(x_n)\}.$$

A proposição a seguir é bastante útil e sua demonstração é simples, sendo por isso omitida.

Proposição 2.2.14 *Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra $\mathcal{G}$-graduada, temos que o conjunto $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$ das identidades $\mathcal{G}$-graduadas de $\mathcal{A}$ é um $T_{\mathcal{G}}$-ideal de $K\langle X\rangle$.*

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades polinomiais ordinárias e graduadas.

Proposição 2.2.15 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ possuem $\mathcal{G}$-graduações tais que $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})\subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{B})$, então $T(\mathcal{A})\subseteq T(\mathcal{B})$. Ademais, se $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})=T_{\mathcal{G}}(\mathcal{B})$, então $T(\mathcal{A})=T(\mathcal{B})$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y\rangle$, onde $Y=\{y_1,y_2,\ldots\}$ e seja $f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in T(\mathcal{A})$. Dados $b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathcal{B}$, tomemos $b_{i_g}\in\mathcal{B}_g$, para $i=1,\ldots,n$ e $g\in\mathcal{G}$, tais que $b_i=\sum_{g\in\mathcal{G}} b_{i_g}$. Para cada $b_{i_g}\neq 0$, tomemos $x_{i_g}\in X_g$ e consideremos o polinômio $f_1=f(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_{1_g},\ldots,\sum_{g\in\mathcal{G}} x_{n_g})\in K\langle X\rangle$. Como $f\in T(\mathcal{A})$, temos $f_1\in T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$ e daí $f_1\in T_{\mathcal{G}}(\mathcal{B})$. Fazendo então as substituições $x_{i_g}=b_{i_g}$, para $i=1,\ldots,n$ e $g\in\mathcal{G}$, temos

$$f(b_1,b_2,\ldots,b_n)=f\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} b_{1_g},\sum_{g\in\mathcal{G}} b_{2_g},\ldots,\sum_{g\in\mathcal{G}} b_{n_g}\right)=0$$

e assim $f\in T(\mathcal{B})$.

Se $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})=T_{\mathcal{G}}(\mathcal{B})$, então $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})\subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{B})$ e $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{B})\subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$, donde temos a última afirmação. ■

Observação 2.2.16 *A recíproca do resultado acima é falsa. Considere na álgebra de Grassmann G a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica $G=G_0\oplus G_1$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial $G=G\oplus\{0\}$. Temos que $y_1y_2=y_2y_1$, com $deg_{\mathbb{Z}_2}(y_1)=deg_{\mathbb{Z}_2}(y_2)=0$, é identidade graduada para G com a graduação canônica mas não é identidade graduada para G com a graduação trivial. Portanto, uma mesma álgebra pode ter identidades graduadas diferentes em relação a graduações diferentes.*

De modo análogo ao caso ordinário, as álgebras com identidades polinomiais graduadas possuem as mesmas propriedades no que diz respeito a variedades, polinômios lineares, polinômios homogêneos, etc. Assim, por exemplo, dizemos que $h \in K\langle X\rangle$ é $T_{\mathcal{G}}$-consequência de f (ou segue de f como identidade graduada) se h pertence ao $T_{\mathcal{G}}$-ideal gerado por f em $K\langle X\rangle$, bem como dado um conjunto de polinômios $\{f_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$, a classe $\mathcal{V}$ de todas as álgebras $\mathcal{G}$-graduadas determinada pelo sistema de identidades $f_i = 0$, para todo i, é chamada uma variedade de álgebras $\mathcal{G}$-graduadas determinada pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$, e desse modo adaptamos as propriedades ordinárias para as identidades graduadas.

2.3 A Teoria Estrutural de Kemer

Nesta seção, faremos uma síntese da teoria de A. Kemer [10] sobre a estrutura dos T-ideais. Essa teoria foi desenvolvida para álgebras sobre corpos de característica 0, portanto assumimos até o final desta seção que a característica do corpo K é 0.

Definição 2.3.1 *Diremos que:*

*(1) Um T-ideal $\mathcal{S}$ é T-**semiprimo** se, para qualquer T-ideal $\mathcal{J}$ tal que $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{S}$, para algum n, temos $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$.*

*(2) Um T-ideal $\mathcal{S}$ é T-**primo** se, para quaisquer T-ideais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ tais que $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{S}$, temos $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{S}$ ou $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{S}$.*

Os próximos resultados podem ser encontrados nas seções 2 e 3 do Capítulo I de [10].

Teorema 2.3.2 (Kemer [10])

(1) Seja $\mathcal{V} \neq \emptyset$ uma variedade. Então $\mathcal{V} = \mathcal{N}_m\mathcal{W}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice $\leq m$, $\mathcal{W}$ é a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{V}$ e o produto de duas variedades $\mathcal{N}\mathcal{M}$ consiste das álgebras $\mathcal{A}$ tendo um ideal $\mathcal{I}$ contido em $\mathcal{N}$ e cujo quociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ está em $\mathcal{M}$.

(2) O T-ideal $\mathcal{I}$ é semiprimo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{I}_q$, onde os T-ideais $\mathcal{I}_j$ são T-primos.

(3) Os únicos T-ideais T-primos não triviais são

$$M_n(K)\ ,\ M_n(G) \text{ e } M_{a,b}(G).$$

Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada então

$$G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 \oplus G_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus G_1$$

é denominada o *envelope de Grassmann* de $\mathcal{A}$.

Kemer demonstrou ainda os seguintes resultados, veja [?]:

(1) Todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada.

(2) O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra também $\mathbb{Z}_2$-graduada e de dimensão finita.

(3) De (1) e (2) segue que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e de dimensão finita.

Um dos corolários mais importantes dos resultados acima mencionados foi a solução positiva do problema de Specht em característica 0. Como a teoria de Kemer está fortemente baseada nas propriedades das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas, isso induziu vários estudos sobre as identidades e álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

É importante ressaltar que, em característica positiva, a teoria de Kemer não se aplica diretamente. Um dos obstáculos é o surgimento de novos T-ideais T-primos, chamados de T-ideais irregulares, cuja descrição completa é ainda um problema em aberto. No entanto, vimos que as identidades polinomais graduadas podem ser usadas no estudo das identidades polinomiais ordinárias em álgebras de qualquer característica.

Recentemente, foi provado por Belov [18], Grishin [19] e Shchigolev [20], que o problema de Specht resolve-se em negativo sobre corpos de característica positiva.

Capítulo 3

Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas em álgebras $\boldsymbol{T}$-primas

Neste capítulo estudaremos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas e determinaremos bases para essas identidades satisfeitas pelas álgebras T-primas $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$. As álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ tiveram suas $\mathbb{Z}_2$-graduações definidas nos exemplos 2.2.5 e 2.2.6 respectivamente. Os resultados aqui apresentados encontram-se no artigo [21].

3.1 Álgebras livres $\mathbb{Z}_2$-graduadas e supercomutativas

A partir das álgebras livres as identidades polinomiais de uma dada álgebra são definidas e no caso das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ não é diferente. A álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada é construída de maneira análoga ao processo visto na seção 2.2. No entanto, detalharemos algumas notações particulares e reforçaremos algumas propriedades.

Definição 3.1.1 *Numa álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathcal{A}$, o subespaço $\mathcal{A}_0$ é chamado **subespaço par** e seus elementos são os **elementos pares**, ao passo que o subespaço $\mathcal{A}_1$ é chamado **subespaço ímpar** e seus elementos são os **elementos ímpares**.*

Com o uso da definição acima, a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada $K\langle X\rangle$ recebe algumas notações especiais. Sejam $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dois subconjuntos disjuntos de X, conjunto gerador de $K\langle X\rangle$, tais que $X = Y \cup Z$. Assumindo que as variáveis do conjunto Y têm grau par e as variáveis do conjunto Z têm grau ímpar, estabelecemos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para $K\langle X\rangle$ entre monômios pares e monômios ímpares. Em outras palavras, definindo a função $\omega = \omega_{\mathbb{Z}_2} : X \to \mathbb{Z}_2$ dada por $\omega_{\mathbb{Z}_2}(x) = 0$ se $x \in Y$, e $\omega_{\mathbb{Z}_2}(x) = 1$ se $x \in Z$. A partir da extensão da mesma para $K\langle X\rangle$ onde $\omega(1) = 0$ *e* $\omega(x_1x_2\ldots x_n) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \ldots + \omega(x_n)$, dado um monômio $f \in K\langle X\rangle$, poderemos classificá-lo como par $(\omega(f) = 0)$ ou ímpar $(\omega(f) = 1)$. A $\mathbb{Z}_2$-graduação para a álgebra $K\langle X\rangle$ tem, portanto, a seguinte forma:

$$K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$$

onde $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço gerado pelos monômios pares e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço gerado pelos monômios ímpares.

Definição 3.1.2 *Uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ é dita ser* ***supercomutativa*** *se $ab = (-1)^{\omega(a)\omega(b)}ba$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$*

Exemplo 3.1.3 A álgebra de Grassmann, com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica $G = G_0 \oplus G_1$, é uma álgebra supercomutativa.

Definição 3.1.4 *Considere $K\langle X\rangle$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. Para os monômios $f, g \in K\langle X\rangle$, considere as relações da forma $fg = (-1)^{\omega(f)\omega(g)}gf$ e o ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado $\mathcal{I}$ gerado pelas mesmas. A álgebra $K(Y;Z) = K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada de* ***álgebra livre supercomutativa****.*

De acordo com a definição 3.1.2, dizer que uma álgebra $\mathcal{A}$ é supercomutativa equivale a dizer que $\mathcal{A}_0 \subseteq Z(\mathcal{A})$ e $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}_1$. Para a álgebra $K\langle Y;Z\rangle$ o estabelecimento destas propriedades entre seus elementos será de grande utilidade para o nosso trabalho. Notemos que, para a álgebra $K\langle X\rangle$, nenhuma propriedade entre elementos é estabelecida.

Como foi dito na introdução desta subseção, encontraremos bases para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$. Para tanto, recordaremos um fato simples da álgebra linear que será utilizado posteriormente.

Lema 3.1.5 *Sejam U_1 e U_2 dois subespaços de um espaço vetorial V tais que $U_1 \subseteq U_2$. Se $v_1, \ldots, v_n$ são elementos de V tais que o conjunto $\{v_1+U_1, \ldots, v_n+U_1\}$ gera V/U_1 e o conjunto $\{v_1+U_2, \ldots, v_n+U_2\}$ é linearmente independente em V/U_2 então $U_1 = U_2$.*

Demonstração: Seja u um elemento de U_2. Uma vez que $u+U_1 \in V/U_1$, por hipótese, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $u + U_1 = \alpha_1(v_1 + U_1) + \ldots + \alpha_n(v_n + U_n)$ e assim

$$u - \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in U_1 \subseteq U_2. \tag{3.1}$$

De 3.1 temos que $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ em V/U_2 e observando que $0+U_2 = u+U_2 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + U_2 = \alpha_1(v_1 + U_2) + \ldots + \alpha_n(v_n + U_2)$, obtemos, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Novamente por 3.1, concluímos que $u \in U_1$. ■

Agora, enunciaremos um Lema para identidades $\mathbb{Z}_2$- graduadas correspondente ao Lema 2.1.59.

Lema 3.1.6 *Se $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in K\langle X\rangle$ é um polinômio multi-homogêneo, então ele é equivalente, como identidade graduada, a uma coleção finita de identidades graduadas tais que as variáveis $y_1, \ldots, y_m$ aparecem nas mesmas apenas em comutadores.*

Demonstração: A prova é a mesma que a da proposição 4.3.3 de [7]. Note que podemos substituir x_i por $x_i + 1$ apenas quando $x_i \in Y$, pois $1 \in K\langle X\rangle$ pertence a $K\langle X\rangle_0$. ■

Denotamos por $B_2 = B_2(X)$ o conjunto dos polinômios f em $K\langle X\rangle$ tais que toda variável y_i aparece apenas em comutadores. Um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $K\langle X\rangle$ será simplesmente chamado de T_2-ideal.

Corolário 3.1.7 *Se $\mathcal{I}$ é um T_2-ideal em $K\langle X\rangle$. Então $\mathcal{I}$ é gerado como T_2-ideal pelo conjunto $\mathcal{I} \cap B_2$.*

Demonstração: Imediata. ■

3.2 A Álgebra $M_{1,1}(G)$

Recordemos que $M_{1,1}(G)$ é a álgebra das matrizes M de ordem 2, com entradas na álgebra de Grassmann, da forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde $a, d \in G_0$ e $b, c \in G_1$. As operações em $M_{1,1}(G)$ são as operações usuais para matrizes. A $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica de $M_{1,1}(G)$ é dada por

$$M_{1,1}(G) = (M_{1,1}(G))_0 \oplus (M_{1,1}(G))_1$$

com

$$(M_{1,1}(G))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in G_0 \right\} \text{ e } (M_{1,1}(G))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in G_1 \right\}.$$

3.2.1 Um modelo genérico para $M_{1,1}(G)$

O nosso objetivo nesta seção é descrever o T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas pela álgebra $M_{1,1}(G)$. A fim de identificarmos as identidades desejadas, precisamos estabelecer um caminho a ser seguido. Neste sentido, consideremos em $var(M_{1,1,}(G))$, a variedade $\mathbb{Z}_2$-graduada gerada por $M_{1,1}(G)$, a álgebra livre $F_2(M_{1,1}(G))$. Segundo as versões graduadas do Teorema 2.1.47 e do Corolário 2.1.48, obtemos que

$$T_2(M_{1,1}(G)) = T_2(F_2(M_{1,1}(G))) \tag{3.2}$$

Esta igualdade nos diz que para descrevermos as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $M_{1,1}(G)$, basta determinarmos as identidades satisfeitas pela álgebra livre $F_2(M_{1,1}(G))$. Este então será o trajeto que seguiremos para atingir o nosso objetivo. Notemos, no entanto, que a igualdade 3.2 relaciona conjuntos de identidades satisfeitas por elementos de diferentes naturezas (enquanto o conjunto $T_2(M_{1,1}(G))$ tem suas identidades satisfeitas por matrizes, o conjunto $T_2(F_2(M_{1,1}(G)))$ tem suas identidades satisfeitas por polinômios). Para que possamos trabalhar com o conjunto $T_2(F_2(M_{1,1}(G)))$ de forma que as suas identidades se relacionem de forma mais clara com as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $M_{1,1}(G)$, buscaremos um novo modelo para a álgebra $F_2(M_{1,1}(G))$ que deverá apresentar propriedades e forma semelhantes à álgebra $M_{1,1}(G)$. Chamaremos este modelo de *modelo genérico da álgebra* $M_{1,1}(G)$.

Considere os conjuntos $Y = \{y_i^j \mid i \geqslant 1, j = 1,2\}$ (das variáveis de grau 0) e $Z = \{z_i^j \mid i \geqslant 1, j = 1,2\}$ (das variáveis de grau 1) como os conjuntos geradores da álgebra livre supercomutativa $K(Y;Z)$. Considere agora as matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & 0 \\ 0 & y_i^{(2)} \end{pmatrix} \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$$

e a subálgebra $Gen(M_{1,1}(G))$ de $M_2(K(Y;Z))$ gerada por essas matrizes. Esta subálgebra é $\mathbb{Z}_2$-graduada considerando

$$Gen(M_{1,1}(G)) = Gen(M_{1,1}(G))_0 \oplus Gen(M_{1,1}(G))_1$$

onde

$$Gen(M_{1,1}(G))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} \mid f_{11}, f_{22} \in (K\langle Y; Z\rangle)_0 \right\}$$

e

$$Gen(M_{1,1}(G))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & f_{12} \\ f_{21} & 0 \end{pmatrix} \mid f_{12}, f_{21} \in (K\langle Y; Z\rangle)_1 \right\}$$

Veremos a seguir que a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $Gen_2(M_{1,1}(G))$ é isomorfa à álgebra relativamente livre $F_2(M_{1,1}(G))$. Para provar isso precisamos do lema abaixo.

Lema 3.2.1 *Se K é um corpo infinito e $f(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) \in K(Y; Z)$ é tal que $f(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m) = 0$ para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in G_0$ e $h_1, \ldots, h_m \in G_1$ então $f = 0$.*

Demonstração: Usando as relações $gh = (-1)^{\omega(g)\omega(h)}hg$, podemos escrever f na forma

$$f(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}),$$

onde $m_i \in K(Y; Z)$ são monômios de multigraus distintos. Como o corpo K é infinito, segue do Corolário 2.1.53 que $\alpha_i m_i(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m) = 0$ para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in G_0$ e $h_1, \ldots, h_m \in G_1$. Mas neste caso é fácil ver que $\alpha_i m_i(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) = 0$ e o lema está provado. ■

Lema 3.2.2 *A álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $Gen(M_{1,1}(G))$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável,*

$$F_2(M_{1,1}(G)) = K\langle X\rangle / T_2(M_{1,1}(G))$$

na variedade de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas determinadas por $M_{1,1}(G)$.

Demonstração: Considere a aplicação $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow Gen(M_{1,1}(G))$ definida por $\varphi(f(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m)) = f(A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m)$. Esta aplicação é claramente um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado sobrejetor. Observemos que $T_2(M_{1,1}(G)) = Ker\varphi$. De fato, $Ker\varphi \subset T_2(M_{1,1}(G))$, já que cada matriz de $M_{1,1}(G)$ é uma especialização de uma matriz de $Gen(M_{1,1}(G))$. Seja $f(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m) \in T_2(M_{1,1}(G))$, aplicando em φ, temos que existem

$$f_{ij}(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) \in K(Y; Z), 1 \leq i, j \leq 2,$$

tais que a matriz $M = f(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m) = \varphi(f(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m))$, é da forma

$$M = E_{11}f_{11} + E_{12}f_{12} + E_{21}f_{21} + E_{22}f_{22}.$$

Como $f \in T_2(M_{1,1}(G))$ os polinômios f_{ij} são tais que

$$f_{ij}(g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \ldots, g_n^{(2)}, h_1^{(1)}, \ldots, h_m^{(2)}) = 0$$

para quaisquer $g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \ldots, g_n^{(2)} \in G_0$ e $h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, \ldots, h_n^{(2)} \in G_1$. Assim segue do Lema 3.2.1 que $f_{ij} = 0$, ou seja, $f(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m) = 0$ e portanto, $f \in Ker\varphi$. A partir do Teorema dos Isomorfismos, concluímos que:

$$K\langle X\rangle / T_2(M_{1,1}(G)) \simeq Gen(M_{1,1}(G))$$

■

Com a informação dada no Lema 3.2.2, temos a possibilidade de trabalhar com a álgebra $Gen(M_{1,1}(G))$ sempre que for citada a álgebra relativamente livre $F_2(M_{1,1}(G))$ ou quisermos utilizar um modelo genérico da álgebra $M_{1,1}(G)$.

3.2.2 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(G)$

Utilizando o modelo genérico de $M_{1,1}(G)$ encontraremos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(G)$.

Proposição 3.2.3 *Seja $\mathcal{I}$ o T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(G)$. Então os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$ pertencem a $\mathcal{I}$.*

Demonstração: Um cálculo direto usando o fato de que $Z(G) = G_0$ e que $a_1a_2a_3 = -a_3a_2a_1$ para todo $a_i \in G_1$, $i = 1, 2, 3$ demonstra esta proposição. ■

Para simplificar a notação, sempre que aparecer no texto o símbolo $\wedge$ sobre uma variável significa que ela pode ser omitida. Por exemplo, $z_{a_1}z_{b_1}\ldots z_{a_n}\widehat{z_{b_n}}$ representa qualquer um dos monômios $z_{a_1}z_{b_1}\ldots z_{a_n}z_{b_n}$ ou $z_{a_1}z_{b_1}\ldots z_{a_n}$. Ainda, de agora em diante, identificaremos as variáveis y_i e z_i com as suas imagens pela projeção canônica $K\langle X\rangle \rightarrow K\langle X\rangle/J$, onde J é o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$. Definimos o conjunto $\mathcal{B} \subset K\langle X\rangle$ como sendo o conjunto formado pelos monômios

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_1}\cdots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}$$

onde $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_l$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ e $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$. Nos monômios do segundo tipo $k + l \geq 1$ e para os da última linha, se $k = l = 0$, seu grau é maior que 2. Aqui, a imagem de $\mathcal{B}$ pela projeção canônica também será denotada por $\mathcal{B}$.

Proposição 3.2.4 *O conjunto $\mathcal{B}$ gera $K\langle X\rangle/J$.*

Demonstração: Se $f \in K\langle X\rangle_0$ então

$$y_i f - f y_i \in J. \tag{3.3}$$

Assim, todo polinômio em $K\langle X\rangle/J$ é combinação linear de monômios da forma

$$m = h_1(y)\widehat{z_{e_1}}h_2(y)z_{e_2}z_{e_3}\ldots z_{e_k} + J$$

onde $h_1(y), h_2(y)$ são monômios nas variáveis $y_i's$.

Observando que devido a 3.3 podemos assumir que os índices das variáveis em $h_1(y)$ e $h_2(y)$ crescem (com possíveis repetições). Ainda, pela identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = 0$, podemos assumir que $e_1 < e_3 < e_5 < \ldots$ e $e_2 < e_4 < e_6, \ldots$. (Note que se $e_1 > e_3$ num monômio, podemos usar o fato de $z_{e_1}(m_2z_{e_2})z_{e_3} = -z_{e_3}(m_2z_{e_2})z_{e_1}$ pertencer a J). Concluímos que $\mathcal{B}$ gera $K\langle X\rangle/J$. ■

Proposição 3.2.5 *O conjunto $\mathcal{B} \subset K\langle X\rangle$ é linearmente independente módulo $T_2(M_{1,1}(G))$.*

Demonstração: Como K é um corpo infinito, basta mostrar que cada subconjunto multi-homogêneo de $\mathcal{B}$ é linearmente independente em $K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(G))$. Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ monômios distintos em $\mathcal{B}$ multi-homogêneos e $\lambda_i \in K, 1 \leq i \leq n$ escalares tais que

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_n M_n \in T_2(M_{1,1}(G)).$$

Denotando por $\overline{M}$ a matriz obtida pela substituição de y_i por A_i e z_i por B_i em $M \in \mathcal{B}$, consideremos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: Se A_i e B_i são as matrizes definidas na seção anterior então

$$A_{a_1}A_{a_2}\ldots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}\ldots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\ldots B_{c_m}\widehat{B_{d_m}}$$

é igual a expressão

$$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\ldots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}\ldots y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\ldots \widehat{z_{d_m}^{(2)}}E_{t_1t_2}+$$

$$y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\ldots y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\ldots y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\ldots \widehat{z_{d_m}^{(1)}}E_{t_3t_4},$$

onde as variáveis $z_{d_m}^{(1)}, z_{d_m}^{(2)}$ parecem se, e somente se, a matriz B_{d_m} aparece. Além disso, se a matriz for par temos $t_1 = t_2 = 1$ e $t_3 = t_4 = 2$ e se for ímpar então $t_1 = t_4 = 1$ e $t_3 = t_4 = 2$.

Afirmação 2: Se $M \in \mathcal{B}$ então a matriz $\overline{M}$ é da forma $P_M^1E_{ij} + P_M^2E_{kl}$, os índices i, j, k, l são determinados pela paridade da matriz $\overline{M}$ e os multigraus dos monômios $P_M^1, P_M^2 \in K(Y;Z)$ dependem injetivamente de M, isto é, a aplicação que associa a cada matriz M de $\mathcal{B}$ o multigrau da matriz P_M^1 (resp. P_M^2) é injetiva. Além disso $P_M^1 \neq 0$ e $P_M^2 \neq 0$.

A afirmação 1 é comprovada a partir de um cálulo direto. A segunda afirmação, por sua vez, tem a sua primeira parte obtida diretamente da afirmação 1. A segunda parte da mesma segue observando-se que se

$$P_M^1 = y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\ldots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}\ldots y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\ldots \widehat{z_{d_m}^{(2)}},$$

então M é um monômio nas variáveis y_{a_1},y_{a_2}, ..., y_{a_k}, y_{b_1}, y_{b_2}, ..., y_{b_l}, z_{c_1}, z_{c_2}, z_{d_1}, z_{d_2}, ..., z_{c_m}, $\widehat{z_{d_m}}$, onde a variável z_{d_m} aparece no monômio M se, e somente se, $z_{d_m}^2$ aparece em P_M^1. Assim, podemos determinar a partir de P_M^1 as variáveis que aparecem em M. Agora observamos que como $M \in \mathcal{B}$ a ordem em que as variáveis aparecem em M fica determinada pelos índices superiores nas variáveis $y_n^{(a)}, z_m^{(b)}$ de P_M^1 e o resultado segue. Se $M \in \mathcal{B}$ então $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_l, c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ e $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, $k \geq 0, l \geq 0$, portanto $P_M^1 \neq 0$ e $P_M^2 \neq 0$ e a segunda afirmação está provada.

De posse destas afirmações e dando continuidade a demonstração da proposição, como $T_2(M_{1,1}(G)) = T_2(Gen(M_{1,1}(G)))$ se substituirmos y_i por A_i e z_i por B_i obtemos

$$\overline{M} = \lambda_1\overline{M}_1 + \lambda_2\overline{M}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{M}_n = 0 \tag{3.4}$$

Segue da afirmação 2 que as matrizes $\overline{M}_a$ são da forma $P^1_M E_{ij} + P^2_M E_{kl}$, onde os índices i, j, k, l são determinados pela paridade da matriz $\overline{M}_a$. Observe que como os M_l são multi-homogêneos as matrizes $\overline{M}_l$ têm a mesma paridade. Então a equação 5.1 fica

$$0 = (\lambda_1 P^1_{M_1} + \lambda_2 P^1_{M_2} + \ldots + \lambda_n P^1_{M_n})E_{ij} + (\lambda_1 P^2_{M_1} + \lambda_2 P^2_{M_2} + \ldots + \lambda_n P^2_{M_n})E_{kl}.$$

Logo

$$0 = \lambda_1 P^1_{M_1} + \lambda_2 P^1_{M_2} + \ldots + \lambda_n P^1_{M_n} = \lambda_1 P^2_{M_1} + \lambda_2 P^2_{M_2} + \ldots + \lambda_n P^2_{M_n}.$$

Pela afirmação 2, os multigraus dos monômios não-nulos $P^1_{M_a}$ e $P^2_{M_a}$ dependem injetivamente de M_a donde concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. ■

Apresentamos agora o principal teorema desta seção.

Teorema 3.2.6 *Todas as identidades polinomiais graduadas das álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $M_{1,1}(G)$ seguem das identidades $y_1y_2 = y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 = -z_3z_2z_1$.*

Demonstração: Sabemos da Proposição 3.2.3 que $J \subset T_2(M_{1,1}(G))$. Utilizando então as Proposições 3.2.4 e 3.2.5 juntamente com o Lema 3.1.5, obtemos o resultado desejado. ■

Observação 3.2.7 *Se um polinômio multi-homogêneo $f \in K\langle X\rangle$ não é uma identidade de $M_{1,1}(G)$ e a variável z_i ocorre nos monômios de f, então $deg_{z_i} f \leq 2$. Isto ocorre devido, caso existam três letras z_i num monômio, ao menos duas delas estarão numa das seqüências c_i ou d_i. No entanto, devido à identidade $z_1z_2z_3 = -z_3z_2z_1$ tais monômios desaparecem.*

Observação 3.2.8 *Quando a característica de K é $p > 2$, o polinômio $[y^p, z]$ não é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_{1,1}(G)$. Com efeito, escolhendo $y = E_{11} + 2E_{22}$ e $z = gE_{12} + gE_{21}$, onde $g \neq 0 \in G_1$. Então $y^p = E_{11} + 2^pE_{22}$ e desde que $2^p = 2 \neq 1$ em K, segue que $[y^p, z] = g(1 - 2^p)E_{12} + g(2^p - 1)E_{21} \neq 0$.*

3.2.3 Um outro modelo genérico para $M_{1,1}(G)$

A fim de explorarmos outras propriedades das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(G)$, construiremos um novo modelo para $Gen(M_{1,1}(G))$. Neste sentido, sejam os conjuntos $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ de variáveis comutativas e anticomutativas, respectivamente. A partir deles, geramos a álgebra livre supercomutativa $K(Y;Z)$ e consideramos a álgebra L gerada por $\widetilde{1} = E_{11} + E_{22}$ e pelas matrizes

$$\widetilde{A}_i = a_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{B}_i = a_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assumindo que os $\widetilde{A}_i's$ são elementos pares e os $\widetilde{B}_i's$ são elementos ímpares segue que L é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.

A proposição a seguir mostra que L é de fato um outro modelo genérico para $M_{1,1}(G)$.

Proposição 3.2.9 *A álgebra L é isomorfa à $Gen(M_{1,1}(G))$.*

Demonstração: Seja $\varphi : Gen(M_{1,1}(G)) \to L$ o homomorfismo definido por $\varphi(A_i) = \widetilde{A}_i$ e $\varphi(B_i) = \widetilde{B}_i$. É imediato que φ é um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado e o resultado segue. ■

Note que as matrizes $a_i^{(0)}(E_{11} + E_{22})$ comutam com as matrizes de L. Denotando por $B_2(L)$ a subálgebra de L gerada por $\widetilde{1}$ e pelos elementos de L tais que as matrizes $\widetilde{A}_i's$ aparecem apenas em comutadores, temos que os elementos $a_i^{(0)}(E_{11} + E_{22})$ não aparecerão em nenhum polinômio não-nulo de $B_2(L)$.

Lema 3.2.10 *As matrizes $E_i = b_i^{(0)}(E_{11}-E_{22})$ e $D_i = \widetilde{B}_i = a_i^{(1)}E_{12}+b_i^{(1)}E_{21}$ satisfazem as seguintes relações:*

$$E_iE_j \text{ são centrais, } E_iE_j = E_jE_i,$$
$$E_iD_j = -E_jD_i, \ D_i^2D_j = -D_jD_i^2.$$

Demonstração: Imediata. ■

Denotamos por $B_2(M_{1,1}(G))$ a subálgebra de $Gen(M_{1,1}(G))$ gerada por $\widetilde{1}$ e pelos elementos de $Gen(M_{1,1}(G))$ tais que as matrizes $A_i's$ aparecem apenas em comutadores. O próximo Lema mostra que podemos identificar as álgebras $B_2(M_{1,1}(G))$ e $B_2(L)$.

Lema 3.2.11 *As álgebras $B_2(M_{1,1}(G))$ e $B_2(L)$ são isomorfas.*

Demonstração: Basta considerarmos a restrição do isomorfismo existente entre $Gen(M_{1,1}(G))$ e L às álgebras $B_2(M_{1,1}(G))$ e $B_2(L)$. ■

A vantagem de mudarmos o modelo da álgebra $Gen(M_{1,1}(G))$ é vista no resultado abaixo, este nos permite organizar os polinômios próprios da mesma, o que será de grande utilidade na próxima seção.

Proposição 3.2.12 *Se $f \in B_2(L)$ é um polinômio multi-homogêneo, então f é uma combinação linear de polinômios da forma:*

$$E_{i_1}^{\alpha_1}E_{i_2}^{\alpha_2}\dots E_{i_k}^{\alpha_k}D_{j_1}^2D_{j_2}^2\dots D_{j_l}^2 g(D_{n_1},\dots,D_{n_m}),$$

onde $i_1 < i_2 < \dots < i_k, \{j_1, j_2, \dots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \dots, n_m\} = \emptyset$ e g é um polinômio multilinear.

Demonstração: Considere $f \in B_2(L)$. Como $\widetilde{1} = E_{11} + E_{22}$ é central, temos que não aparecerão matrizes do tipo $a_i^{(0)}(E_{11}+E_{22})$. Pelo Lema 3.2.10 podemos escrever

$$f = E_{i_1}^{\alpha_1}E_{i_2}^{\alpha_2}\dots E_{i_k}^{\alpha_k}\widetilde{f}(D_1, D_2, \dots, D_t)$$

onde $\widetilde{f}$ é um polinômio multi-homogêneo e $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Sabemos da Observação 3.2.7 que se $deg_{D_i}\widetilde{f} > 2$ para algum D_i, $\widetilde{f}$ seria uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_{11}(G)$. Assim, temos que $deg_{D_i}\widetilde{f} \leq 2$ para todo i. Escrevamos então $\widetilde{f}$ da seguinte forma

$$\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i$$

onde $\lambda_i \in K$ e M_i é um monômio formado apenas por $D_i's$, onde cada D_i pode aparecer no máximo duas vezes. Usando a identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = 0$ como na Proposição 3.2.4, podemos escrever

$$M_i = D_{c_1}D_{d_1}D_{c_2}D_{d_2}\dots D_{c_m}\widehat{D_{d_m}}$$

com $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$. Agora observando que se $c_i = c_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$ segue de $z_1z_2z_1 = 0$ que $M_i = 0$. Logo $c_i \neq c_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$ e analogamente $d_i \neq d_{i+1}$,$1 \leq i \leq m-1$. Disto segue que, se $deg_{D_i}\widetilde{f} = 2$, devemos ter o índice i contido em cada sequência, um em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ e outro em $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Assim, a menos de sinal, temos $M_i = \dots D_i^2 \dots$ e usando as identidades $D_i^2D_j = -D_jD_i^2$ e $D_i^2D_j^2 = D_j^2D_i^2$ segue que

$$M_i = D_{j_1}^2D_{j_2}^2\dots D_{j_l}^2 g_i(D_{n_1}, D_{n_2}, \dots, D_{n_m})$$

onde $j_1 < j_2 < \dots < j_l$, g_i é um monômio multilinear e $\{j_1, j_2, \dots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \dots, n_m\} = \emptyset$. Como todos os $M_i's$ têm o mesmo multigrau, o resultado segue.
■

3.3 A Álgebra $G \otimes G$

Como foi visto no Capítulo 1 a álgebra $G \otimes G$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica dada por

$$(G \otimes G) = (G \otimes G)_0 \oplus (G \otimes G)_1$$

onde

$$(G \otimes G)_0 = (G_0 \otimes G_0) \oplus (G_1 \otimes G_1) \ e \ (G \otimes G)_1 = (G_0 \otimes G_1) \oplus (G_1 \otimes G_0).$$

Nesta seção encontraremos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas por essa álgebra com a $\mathbb{Z}_2$-graduação acima.

3.3.1 Um modelo genérico para $G \otimes G$

Da mesma forma que foi feito para a álgebra $M_{1,1}(G)$, faremos uso de um modelo genérico para encontrarmos o T_2-ideal de $G \otimes G$. Tal modelo será construído nesta seção.

Sejam $a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}$ variáveis comutativas e $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ variáveis anticomutativas, $i \geq 1$. Consideramos $K(Y;Z)$ a álgebra livre supercomutativa gerada pelos conjuntos $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)} \mid i \geq 1\}$ e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)} \mid i \geq 1\}$ das variáveis pares e ímpares, respectivamente. Denotamos por F a subálgebra de $K(Y;Z) \otimes K(Y;Z)$ gerada pelos elementos da forma:

$$Y_i = a_i^{(0)} \otimes b_i^{(0)} + a_i^{(1)} \otimes b_i^{(1)}, \ Z_i = c_i^{(0)} \otimes d_i^{(1)} + c_i^{(1)} \otimes d_i^{(0)}.$$

A álgebra F tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, considerando-se os Y_i's como as variáveis pares e os Z_i's como as variáveis ímpares.

Proposição 3.3.1 *A álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada F é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $K\langle X\rangle/T_2(G\otimes G)$ na variedade das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas definidas por $G \otimes G$.*

Demonstração: Considere o homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \rightarrow F$ determinado por $\varphi(y_i) = Y_i$ e $\varphi(z_i) = Z_i$. Este homomorfismo é claramente $\mathbb{Z}_2$-graduado e sobrejetor. Para concluir basta mostrar que $Ker(\varphi) = T_2(G \otimes G)$ e a demonstração segue do Teorema dos Isomorfismos.

É fácil ver que $Ker(\varphi) \subset T_2(G \otimes G)$ uma vez que cada elemento de $G \otimes G$ é uma especialização de um elemento de F. Por outro lado, se $f \in T_2(G \otimes G)$ então $\varphi(f)$ é um polinômio em F que se anula para cada substituição dos $a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}$ por elementos de G_0 e dos $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ por elementos de G_1. Daí segue do Lema 3.2.1 que $\varphi(f) = 0$ em F, ou seja, $f \in Ker(\varphi)$ e a proposição está demonstrada. ■

3.3.2 Um pouco de Combinatória

Para as demonstrações da próxima seção, precisaremos de alguns resultados de combinatória. Nesta seção, apresentaremos e provaremos esses resultados.

Definição 3.3.2 *Sejam $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ uma permutação dos símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que*

$$A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

*Um par (i_α, i_β), $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, forma uma **inversão colorida** (em relação a partição $\{A, B\}$) se $1 \leq \alpha < \beta \leq n$, $\{\alpha, \beta\} \subset A$ ou $\{\alpha, \beta\} \subset B$, e $i_\alpha > i_\beta$. Se q é o número de inversões coloridas então $(-1)^q$ é o **sinal colorido** desta permutação com relação a partição $\{A, B\}$.*

Exemplo 3.3.3 *A tabela abaixo mostra os sinais coloridos de todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$.*

Permutações

Partições		123	132	231	213	312	321
	123	+	-	+	-	+	-
	12;3	+	+	+	-	-	-
	13;2	+	+	-	+	-	-
	23;1	+	-	-	+	+	-

Observação 3.3.4 *Consideraremos as partições como pares não ordenados. Deste modo o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tem exatamente 2^{n-1} partições, incluindo a partição trivial. No caso da partição trivial, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $B = \emptyset$, obviamente, o sinal colorido é igual a 1 para todas as permutações pois não possui nenhuma inversão.*

Lema 3.3.5 *As transposições $(t, t+2)$ mudam o sinal colorido de qualquer permutação em relação a qualquer partição.*

Demonstração: Considere as permutações $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ e $j = (i_1, \ldots, i_t, i_{t+1}, i_{t+2}, \ldots, i_n)$ dos símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$. Além disso, seja $\{A, B\}$ uma partição qualquer deste conjunto e a partir dela defina q_A^i como sendo o número de inversões coloridas (i_α, i_β) tais que $\{\alpha, \beta\} \subset A$ na permutação i e, de modo análogo, defina q_B^i, q_A^j, q_B^j.

Com relação aos elementos i_t, i_{t+1}, i_{t+2} temos duas possibilidades:

(1) Os três elementos pertencem ao mesmo conjunto na partição;

(2) Não acontece (1).

Para o caso (1), suponhamos sem perda de generalidade que i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem ao conjunto A. Teremos então $q_B^i = q_B^j$ e q_A^i com paridade diferente de q_A^j.

Caso a possibilidade (2) ocorra, podemos supor, sem perda de generalidade, que dois dos símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem a A e o outro pertence a B. Aqui, devemos considerar três possibilidades: $i_t, i_{t+1} \in A$, $i_t, i_{t+2} \in A$ ou $i_{t+1}, i_{t+2} \in A$. Não é difícil ver que para qualquer um dos três casos $q_B^i = q_B^j$ e q_A^i tem paridade diferente de q_A^j. ∎

Proposição 3.3.6 *Seja $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ uma permutação fixa de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Então o sinal colorido de i é igual a 1 ou -1 com relação a todas as partições, ou então é igual a 1 para 2^{n-2} partições e -1 para as outras 2^{n-2} partições.*

Demonstração: Usando o Lema acima, é suficiente provar a proposição apenas para permutações i tais que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Faremos indução sobre n. Para $n = 1$ e $n = 2$ o resultado é óbvio. Para $n = 3$ o resultado segue do exemplo 3.3.3.

Suponhamos que $n > 3$ e que o resultado é válido para $1, 2, \ldots, n-1$. Sendo $i' = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ a permutação de $n-1$ símbolos $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i_n\}$ obtida da permutação i apagando a sua última entrada. Então a proposição é verdadeira para i' devido à indução. Note que ou $i_n = n$ ou $i_{n-1} = n$ pois $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$.

Se $i_{n-1} < i_n$ então $i_n = n$. Se $\{A; B\}$ é uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i_n\}$ então $\{A \cup \{i_n\}, B\}$ e $\{A, B \cup \{i_n\}\}$ são partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e os sinais coloridos destas partições são os mesmos de i' com relação a partição $\{A; B\}$.

Caso $i_{n-1} > i_n$ então $i_{n-1} = n$ e neste caso i_{n-1} forma inversão colorida apenas com i_n. Definindo $i'' = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i_n)$ então a nossa afirmação se mantém para i''.

Seja (C, D) uma partição de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ e ε o sinal colorido de i'' com relação a (C, D). Formamos duas partições $\{C \cup \{n\}, D\}$ e $\{C, D \cup \{n\}\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Numa delas $i_{n-1} = n$ e i_n pertencem a conjuntos diferentes da partição, logo o sinal colorido de i com relação a essa partição será ε. Analogamente, na outra partição $i_{n-1} = n$ e i_n estão no mesmo conjunto e, como eles formam uma inversão, isso produz o sinal colorido $-\varepsilon$.

A partir de ambos os casos tratados, a prova está completa. ■

Proposição 3.3.7 *Seja $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ tal que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Se $i \neq (1, 2, \ldots, n)$, então o sinal colorido de i é igual a 1 para 2^{n-2} partições e é igual a -1 para as outras 2^{n-2} partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demonstração: Segue da demonstração da Proposição anterior. Usamos indução sobre n e notamos que, por hipótese de indução, tanto no caso $i_{n-1} < i_n$, quanto no caso $i_{n-1} > i_n$, obtemos 2^{n-2} vezes o sinal colorido 1 e 2^{n-2} vezes o sinal colorido -1.
■

3.3.3 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $G \otimes G$

Nesta seção encontraremos uma base para o T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $G \otimes G$.

Proposição 3.3.8 *Os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra $G \otimes G$. Se char$K = p > 2$, então o polinômio $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$ também é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para $G \otimes G$.*

Demonstração: Um cálculo direto mostra que $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades graduadas de $G \otimes G$. Para o caso de *char*$K = p > 2$, considere $a \in (G_0 \otimes G_0) \oplus (G_1 \otimes G_1)$, ou seja, $a = \sum(e_i \otimes f_i + g_i \otimes h_i)$ onde $e_i, f_i \in G_0, g_i, h_i \in G_1$.

Como a é uma soma de elementos que comutam dois a dois e char$K = p$, segue que

$$a^p = \sum e_i^p \otimes f_i^p + g_i^p \otimes h_i^p$$

Observemos que $g_i^3 = h_i^3 = 0$, devido a identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$. Como $p > 2$, segue que $g_i^p = h_i^p = 0$ e daí

$$a^p = \sum e_i^p \otimes f_i^p.$$

Desde que este elemento é central em $G \otimes G$, temos que $[y^p, z]$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada, como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.3.9 *A álgebra $B_2(F) = B_2(X)/B_2(X) \cap T_2(G \otimes G)$ é imagem homomórfica de $B_2(L) \simeq B_2(M_{1,1}(G)) = B_2(X)/B_2(X) \cap T_2(M_{1,1}(G))$.*

Demonstração: Sabemos que $T_2(M_{1,1}(G)) \subset T_2(G \otimes G)$ e portanto $B_2(X)/B_2(X) \cap T_2(G \otimes G)$ é imagem homomórfica de $B_2(X)/B_2(X) \cap T_2(M_{1,1}(G))$ pela aplicação induzida por $\pi : K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(G)) \to K\langle X\rangle/T_2(G \otimes G)$, onde $\pi(f + T_2(M_{1,1}(G))) = f + T_2(G \otimes G)$ e $f \in K\langle X\rangle$. ■

Lema 3.3.10 *Sejam $g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ polinômios multilineares independentes módulo o T_2-ideal $T_2(M_{1,1}(G))$. Então, os polinômios*

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 z_{n+2}^2 \ldots z_{n+r}^2 g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

são linearmente independentes módulo o T_2-ideal $T_2(M_{1,1}(G))$.

Demonstração: Como o corpo K é infinito basta mostrar que os polinômios acima de mesmo multigrau são linearmente independentes. Mas neste caso, qualquer combinação linear é um polinômio da forma

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 \ldots z_{n+r}^2 g(z_1, z_2, \ldots, z_n), \tag{3.5}$$

onde $g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ é uma combinação linear dos $g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Se mostrarmos que o polinômio 5.2 pertence a $T_2(M_{1,1}(G))$ somente quando $g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ pertence a $T_2(M_{1,1}(G))$ o resultado está provado, já que os $g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ são linearmente independentes módulo $T_2(M_{1,1}(G))$.

Observemos que

$$E_i^\alpha = (b_i^{(0)})^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^\alpha \text{ e } D_i^2 = (c_i^{(1)} d_i^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim fazendo $y_i = E_i, 1 \leq i \leq k$ e $z_j = D_j, 1 \leq j \leq n + r$, podemos concluir que o monômio $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 \ldots z_2^{n+r}$ é igual a

$$(b_i^{(0)})^{i_1} (b_i^{(0)})^{i_2} \ldots (b_i^{(0)})^{i_k} (c_{n+1}^{(1)} d_{n+1}^{(1)}) \ldots (c_{n+r}^{(1)} d_{n+r}^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{(i_1+i_2+\ldots+i_k+r)}$$

Assim, se

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 \dots z_{n+r}^2 g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

segue que o polinômio $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ se anula quando substituímos $z_1 = D_1, \dots, z_n = D_n$. Logo $g(z_1, z_2, \dots, z_n) \in T_2(M_{1,1}(G))$, e o resultado segue. ■

Corolário 3.3.11 *Os monômios multilineares*

$$m_{ij} = z_{i_1} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \dots z_{i_m} \widehat{z_{j_m}},$$

onde $i_1 < i_2 < \dots < i_m, j_1 < j_2 < \dots < j_{m-1} < j_m$ *e* z_{j_n} *é omitido quando o grau de* m_{ij} *é ímpar, são linearmente independentes módulo as identidades* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas de* $G \otimes G$.

Demonstração: Suponha por absurdo que os monômios sejam linearmente dependentes, isto é, suponha que existem escalares α_{ij}, não todos nulos, e monômios m_{ij} tais que $\sum \alpha_{ij} m_{ij} = 0$ em $K\langle X \rangle / T_2(G \otimes G)$. Deste modo, temos que $\sum \alpha_{ij} m_{ij} \in T_2(G \otimes G)$. Como o corpo K é infinito, podemos supor que estes monômios têm o mesmo multigrau e, renomeando suas variáveis, podemos supor que todos os m_{ij} são monômios nas variáveis $z_1, z_2, \dots, z_k$ para $k \in \mathbb{N}$ conveniente. Suponha que o monômio $z_1 z_2 \dots z_{k-1} z_k$ participa desta combinação linear com coeficiente não nulo α.

Considere a identidade $\sum \alpha_{ij}(m_{ij} z_{k+1})$ e uma partição $\{A, B\}$ do conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ onde $|A| = n$ e $|B| = m$. Fazendo as substituições $z_i \mapsto e_{2i-1} \otimes 1$, se $i \in A$, $z_i \mapsto 1 \otimes e_{2i}$, se $i \in B$ e $z_{k+1} \mapsto e_{2n+1} e_{2n+3} \dots e_{2k-1} \otimes e_{2m+2} e_{2m+4} \dots e_{2k}$ e denotando por $\overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)}$ o resultado do monômio $m_{ij} z_{k+1}$ após a substituição, temos que, como $\sum \alpha_{ij}(m_{ij} z_{k+1})$ é uma identidade para $G \otimes G$, então $\sum \alpha_{ij} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)} = 0$. Assim

$$0 = \sum_{(A;B)} \left(\sum \alpha_{ij} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)} \right)$$

onde o primeiro somatório é feito sobre todas as 2^{k-1} partições de $\{1, 2, \dots, k\}$. Reorganizando a soma obtemos

$$0 = \sum \alpha_{ij} \left(\sum_{(A;B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)} \right) \tag{3.6}$$

<u>Afirmação:</u> $\sum_{(A;B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)} = 0$ sempre que $m_{ij} \neq z_1 z_2 \dots z_k$.

De fato, suponha que $m_{ij} = z_{n_1} \dots z_{n_k} \neq z_1 \dots z_k$, então

$$\overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)} = (-1)^{\sigma(A;B)} e_1 e_3 \dots e_{2k-1} \otimes e_2 e_4 \dots e_{2k},$$

onde $\sigma(A;B)$ é o sinal colorido da permutação $(n_1, \ldots, n_k)$ com relação à partição $A \cup B$. Sabemos por hipótese que $n_1 < n_3 < \ldots$, e $n_2 < n_4 < \ldots$ em m_{ij}. Como $(n_1, \ldots, n_k) \neq (1, 2, \ldots, k)$, segue da Proposição 3.3.7 que

$$\sum_{(A;B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A;B)} = \left(\sum_{(A;B)} (-1)^{\sigma(A;B)} \right) e_1 e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2 e_4 \ldots e_{2k} = 0.$$

A afirmação acima diz que no somatório 3.6 os monômios $m_{ij} \neq z_1 z_2 \ldots z_k$ darão contribuição nula. Como para o monômio $z_1 z_2 \ldots z_{k-1} z_k$ o sinal colorido é 1 em relação a qualquer partição, obtemos de 3.6 que

$$\alpha 2^{k-1}(e_1 e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2 e_4 \ldots e_{2k}) = 0,$$

o que é absurdo pois $\alpha \neq 0$ e $charK \neq 2$. ■

Lema 3.3.12 *Seja $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in B_2(M_{1,1}(G)) \equiv B_2(L)$ um polinômio onde substituímos E_i por y_i e D_i por z_i nos geradores de L. Então, módulo $T_2(G \otimes G)$, f é igual a uma combinação linear de polinômios da forma*

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \ldots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l}),$$

onde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \emptyset$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e g_j é um polinômio multilinear. Se $charK = p > 0$ impomos $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$.

Além disso, se os polinômios multilineares $g_j's$ forem linearmente independentes módulo $T_2(G \otimes G)$, então os polinômios acima também o são.

Demonstração: Como o corpo K é infinito, podemos considerar f multi-homogêneo e a prova é a mesma feita na proposição 3.2.12. Se $charK = p > 0$ e $a \in G_1 \otimes G_1$ então $a^p = 0$ (como visto na demonstração da Proposição 3.3.8), desta forma, impomos $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$. Caso os polinômios $g_j's$ sejam linearmente independentes módulo $T_2(G \otimes G)$ procedemos de modo análogo à demonstração da proposição 3.3.10. ■

Teorema 3.3.13 *O ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $G \otimes G$ é gerado pelos polinômios $y_1 y_2 - y_2 y_1, z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1$, e se $charK = p > 2$, também por $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$.*

Demonstração:

A idéia central desta demonstração é mostrar que se um polinômio não é consequência das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas $y_1 y_2 - y_2 y_1, z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1$, e se $charK = p > 2$, $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$, então ele não é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $G \otimes G$.

Como os dois primeiros formam uma base para as identidades graduadas de $M_{1,1}(G)$ e $T_2(M_{1,1}(G)) \subseteq T_2(G \otimes G)$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre determinada por eles, ou seja, em $Gen(M_{1,1}(G))$. Ainda, de acordo com o Corolário 3.1.7, podemos considerar apenas os polinômios onde as variáveis pares aparecem apenas em comutadores.

Suponha, sem perda de generalidade, o polinômio próprio $f \neq 0$ em $Gen(M_{1,1}(G))$. Isto é, pelo Lema 3.3.9, $0 \neq f \in B_2(M_{1,1}(G)) \cong B_2(L)$. Segundo a Proposição 3.2.12 teremos que f é combinação linear de polinômios da forma

$$E_{i_1}^{\alpha_1} E_{i_2}^{\alpha_2} \dots E_{i_k}^{\alpha_k} D_{j_1}^2 D_{j_2}^2 \dots D_{j_l}^2 g(D_{n_1}, \dots, D_{n_m}),$$

onde $i_1 < i_2 < \dots < i_k, \{j_1, j_2, \dots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \dots, n_m\} = \emptyset$ e g é um polinômio multilinear. Se substituirmos E_i por y_i e D_i por z_i em f temos pelo Lema 3.3.12 que, módulo $T_2(G \otimes G)$, f é igual a uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \dots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_l}),$$

onde $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, g_j é um polinômio multilinear e, se $char K = p > 0$, devemos impor $\alpha_i < p$, $i = 1, \dots, m$.

Observe que se $\alpha_i < p$, $i = 1, \dots, m$ então f não pode ser consequência de $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$. Ainda, fazendo as substituições, $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 1 \otimes 1 \in G_0 \otimes G_0$ e $z_{i_r} = (e_{i_r} + e_{u_r}) \otimes 1$ e $z_{j_s} = e_{j_s} \otimes 1 \in G_1 \otimes G_0$ para $\{u_1, u_2, \dots, u_k\} \cap \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \neq \emptyset$ vemos que f não pertence a $T_2(G \otimes G)$ e isto conlui a demonstração. ■

Como corolário do último teorema obtemos uma nova prova da coincidência dos T-ideais das álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ sobre um corpo de característica 0.

Corolário 3.3.14 *Se $char K = 0$ então as álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ são PI-equivalentes, ou seja, $T(M_{1,1}(G)) = T(G \otimes G)$.*

Demonstração: Se char$K = 0$ então segue dos Teoremas 3.2.6 e 3.3.13 que $T_2(M_{1,1}(G)) = T_2(G \otimes G)$, e o resultado segue da Proposição 2.2.15. ■

Capítulo 4

Teorema do Produto Tensorial: Caso Multilinear

Dentre as consequências dos estudos de Kemer sobre a estrutura dos T-ideais, destacamos o Teorema sobre o Produto Tensorial (TPT). Este resultado estabelece a igualdade entre os T-ideais de determinadas álgebras, sobre corpos com característica zero. Neste capítulo, apresentamos e demonstramos o TPT em sua versão multilinear para corpos com característica $p > 2$. As idéias expostas nas demonstrações são encontradas no artigo [22] seguindo os passos de Regev no artigo [23].

4.1 Teorema do Produto Tensorial - TPT

Apresentamos o Teorema do Produto Tensorial de Kemer (TPT):

Teorema 4.1.1 (Kemer) *Seja K um corpo com característica zero e $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Então:*

(1) $T(M_{a,b}(G) \otimes G) = T(M_{a+b}(G))$;

(2) $T(M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(G))$;

(3) $T(M_{1,1}(G)) = T(G \otimes G)$.

Este resultado foi também demonstrado por Regev em [23], sem utilizar a Teoria Estrutural do T-ideais. A demonstração de Regev é mais simples, pois faz uso de argumentos combinatórios e (implicitamente) identidades graduadas. No artigo [22] foi indicada uma demonstração, quando K é um corpo infinito com característica diferente de dois, para a versão multilinear do TPT. Isto é, quando nos restringimos aos T-ideais gerados apenas pelos polinômios multilineares. Nas próximas seções desenvolveremos as idéias de Regev [23], com as devidas modificações, para demonstrarmos o TPT multilinear como foi sugerido no artigo [22].

4.1.1 O TPT Multilinear

Nesta seção enunciaremos o resultado principal deste capítulo: o TPT multilinear. Sabemos da Definição 2.1.25 que duas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas PI-equivalentes se $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. Denotando por $P(\mathcal{A})$ o T-ideal gerado pelas identidades polinomiais multilineares satisfeitas por $\mathcal{A}$, segue a definição.

Definição 4.1.2 *Considere duas PI-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Quando $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$, dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão em **equivalência multilinear**.*

Observemos que, quando consideramos álgebras sobre corpos com característica zero, a PI-equivalência é conseqüência da equivalência multilinear (Lema 2.1.52). Até o fim deste trabalho, verificaremos que para corpos infinitos com característica positiva, isto não é verdade.

Enunciaremos agora o TPT multilinear:

Teorema 4.1.3 *Seja K um corpo infinito com qualquer característica diferente de dois e $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Então:*

(1) $P(M_{a,b}(G) \otimes G) = P(M_{a+b}(G))$;

(2) $P(M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)) = P(M_{ac+bd,ad+bc}(G))$;

(3) $P(M_{1,1}(G)) = P(G \otimes G)$.

4.2 Álgebras de Matrizes

Apresentamos, nesta seção, uma nova notação para as matrizes presentes no TPT. Esta nova notação goza de boas propriedades, o que facilitará o nosso trabalho.

Definição 4.2.1 *Seja I um conjunto finito e $v : I \to \mathbb{Z}_2$ uma função. O par (I, v) é chamado **conjunto a valores em** $\mathbb{Z}_2$. Escrevemos $I = I_0 \cup I_1$, onde $I_g = v^{-1}(g)$, $g \in \mathbb{Z}_2$. Dado um segundo conjunto (I', v'), $v' : I' \to \mathbb{Z}_2$, definimos:*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{v} = (v, v') : I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (i, i') & \longmapsto & (v(i), v'(i')) \end{array}$$

e também

$$\begin{array}{rcl} v_+ : I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ (i, i') & \longmapsto & v(i) + v'(i') \end{array}$$

Observação 4.2.2 *A partir da definição acima, podemos escrever a álgebra $M_{a,b}(G)$ de outro modo. De fato, seja $I = I_0 \cup I_1$ onde $|I_0| = a$, $|I_1| = b$ com $v : I \to \mathbb{Z}_2$ como definido acima. Considerando $v_+ : I \times I \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ e organizando os elementos de I de forma que os a elementos de I_0 sejam menores do que os b elementos de I_1, sendo os elementos de cada conjunto ordenados de forma crescente:*

$$M_{a,b}(G) = \{(a_{ij})_{I\times I} \ / \ a_{ij} \in G_{v_+(i,j)}\} = M_I(G_{v_+(i,j)} \ / \ i, j \in I). \tag{4.1}$$

Denotaremos por simplicidade $G_{i,j} = G_{v_+(i,j)}$. Desta forma, escreveremos

$$M_I(G_{i,j}) = M_I(G_{v_+(i,j)} \ / \ i, j \in I).$$

Recordamos que $G_g G_h \subseteq G_{g+h}$ se $g, h \in \mathbb{Z}_2$ e a soma $g+h$ é a soma de $\mathbb{Z}_2$. Então $G_{i_1,i_2} G_{i_2,i_3} \subseteq G_{i_1,i_3}$ para quaisquer $i_1, i_2, i_3 \in I$.

Observe que a igualdade 4.1 é apresentada a nível de espaço vetorial. Isto ocorre porque a multiplicação entre elementos de $M_I(G_{i,j})$ não é definida. Para que possamos identificar a nível de álgebras os conjuntos $M_{a,b}(G)$ e $M_I(G_{i,j})$, trabalharemos na definição da multiplicação em $M_I(G_{i,j})$.

Denotando por $E_{i,j}$, onde $i, j \in I$, a matriz unidade onde a única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna, podemos escrever

$$M_I(G_{i,j}) = \oplus_{i,j\in I} G_{i,j} E_{i,j} = \oplus_{i,j\in I} G_{i,j}$$

onde a última igualdade é dada pelo isomorfismo existente entre os espaços vetoriais $G_{i,j}E_{i,j}$ e $G_{i,j}$ para quaisquer $i, j \in I$. Considerando as inclusões canônicas

$$\eta_{r,s} : G_{r,s} \longrightarrow \oplus_{i,j\in I} G_{i,j}$$

podemos definir a multiplicação em $M_I(G_{i,j})$ como sendo distributiva e:

$$\eta_{i,j}(a_{i,j}) \cdot \eta_{r,s}(a_{r,s}) = \begin{cases} 0 \in M_I(G_{i,j}) \ \textit{se} \ j \neq r \\ \eta_{i,s}(a_{i,j} \ a_{r,s}) \ \textit{se} \ j = r \end{cases}$$

Esta definição faz com que a igualdade apresentada na Observação 4.2.2 passe a valer a nível de álgebras. A seguir, veremos como funciona o produto tensorial das matrizes $M_I(G_{i,j})$.

Observação 4.2.3 *Sejam* (I, v) *e* (I', v') *conjuntos de valores em* $\mathbb{Z}_2$. *Considerando* $G_{i,j} = G_{v_+(i,j)}$ *e* $G_{r,s} = G_{v'_+(r,s)}$ *podemos reescrever a definição da álgebra* $G \otimes G$ *para definir a álgebra* $G_{i,j} \otimes G_{r,s}$, *da seguinte maneira: O produto tensorial* $G_{i,j} \otimes G_{r,s}$ *é uma álgebra com a multplicação dada por*

$$(a_{i_1,j_1} \otimes a_{r_1,s_1})(a_{i_2,j_2} \otimes a_{r_2,s_2}) = a_{i_1,j_1}a_{i_2,j_2} \otimes a_{r_1,s_1}a_{r_2,s_2}.$$

Teorema 4.2.4 *Sejam* (I, v) *e* (I', v') *conjuntos de valores em* $\mathbb{Z}_2$, *considerando* $M_I(G_{i,j})$ *e* $M_{I'}(G_{r,s})$, *temos o seguinte isomorfismo de álgebras*

$$M_I(G_{i,j}) \otimes M_{I'}(G_{r,s}) \simeq M_{I\times I'}(G_{i,j} \otimes G_{r,s})$$

Demonstração: As seguintes igualdades seguem das propriedades de espaços vetoriais:

- $M_I(G_{i,j}) \otimes M_{I'}(G_{r,s}) = \Big(\oplus_{i,j\in I} G_{i,j}\Big)\otimes\Big(\oplus_{r,s\in I'} G_{r,s}\Big)$
- $M_{I\times I'}(G_{i,j} \otimes G_{r,s}) = \oplus_{i,j\in I} \oplus_{r,s\in I'} (G_{i,j} \otimes G_{r,s})$

Definindo então a aplicação,

$$\varphi : \Big(\oplus_{i,j\in I} G_{i,j}\Big)\otimes\Big(\oplus_{r,s\in I'} G_{r,s}\Big) \mapsto \oplus_{i,j\in I} \oplus_{r,s\in I'} (G_{i,j} \otimes G_{r,s})$$

dada por $\varphi(\eta_{i,j}(a_{i,j}) \otimes \eta_{r,s}(a_{r,s})) = \eta_{(i,r)(j,s)}(a_{i,j} \otimes a_{r,s})$ e estendendo a mesma por linearidade, temos que φ é um homomorfismo de espaços vetoriais.

Com alguns cálculos diretos verificamos ainda que φ é injetora e

$$\varphi((\eta_{i_1,j_1}(a_{i_1,j_1}) \otimes \eta_{r_1,s_1}(a_{r_1,s_1}))(\eta_{i_2,j_2}(a_{i_2,j_2}) \otimes \eta_{r_2,s_2}(a_{r_2,s_2}))) =$$

$$\varphi(\eta_{i_1,j_1}(a_{i_1,j_1}) \otimes \eta_{r_1,s_1}(a_{r_1,s_1}))\varphi(\eta_{i_2,j_2}(a_{i_2,j_2}) \otimes \eta_{r_2,s_2}(a_{r_2,s_2}))$$

A partir daí, uma vez que estamos tratando de espaços com mesma dimensão, concluímos que φ é um isomorfismo de álgebras. Assim,

$$\Big(\oplus_{i,j\in I} G_{i,j}\Big)\otimes\Big(\oplus_{r,s\in I'} G_{r,s}\Big) \simeq \oplus_{i,j\in I} \oplus_{r,s\in I'} (G_{i,j} \otimes G_{r,s})$$

donde

$$M_I(G_{i,j}) \otimes M_{I'}(G_{r,s}) \simeq M_{I\times I'}(G_{i,j} \otimes G_{r,s}).$$

■

Observação 4.2.5 *Nos termos da Observação 4.2.2,*

$$M_{ac+bd,ad+bc}(G) = M_{I\times I'}(G_{v(i,j)+v'(r,s)}).$$

Por simplicidade, escreveremos $G_{(i,j)(r,s)} = G_{v(i,j)+v'(r,s)}$. *Assim,*

$$M_{I\times I'}(G_{v(i,j)+v'(r,s)}) = M_{I\times I'}(G_{(i,j)(r,s)}).$$

4.3 Equivalências Multilineares

A fim de desenvolver grande parte da técnica necessária para a demonstração do TPT multilinear, nesta seção apresentaremos algumas simplificações nas notações e demonstraremos duas equivalências multilineares essenciais para o nosso objetivo.

De início, definamos a multiplicação μ, ponto de partida para os próximos passos.

Definição 4.3.1 *Definimos a multiplicação $\mu : G \otimes G \longrightarrow G$ onde $\mu(x \otimes y) = xy$.*

Observação 4.3.2 *De acordo com a aplicação acima, para $g, h, g+h \in \mathbb{Z}_2$, temos que*

$$\mu(G_g \otimes G_h) \subseteq G_{g+h}.$$

Sendo $D(l) = \{1, e_{i_1} \ldots e_{i_l} \;/\; 1 \leq i_1 < \ldots < i_l\}$, $G^{(n)}$ o subespaço de G gerado pela união $\cup_{l \geq n} D(l)$ e $G_g^{(n)} = G_g \cap G^{(n)}$, temos que

$$\mu(G_0 \otimes G_g) = \mu(G_g \otimes G_0) = G_g \text{ e } \mu(G_1 \otimes G_1) = G_0^{(2)}.$$

Deste modo, denotaremos $\mu(G_g \otimes G_h) = G_{g+h}^{(g,h)}$.

Neste momento, simplificaremos algumas notações utilizando a Observação acima. Estas serão também usadas em outras seções.

Notação 4.3.3 *Dados $(I, v), (I', v')$ conjuntos de valores em $\mathbb{Z}_2$, denotaremos:*

- $G[i, j, r, s] = G_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)}^{(v_+(i,j), v'_+(r,s))}$;
- $M_1 = M_{I \times I'}(G[i, j, r, s])$;
- $M = M_{I \times I'}(G_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)})$;
- $N = M_{I \times I'}(G_{v_+(i,j)} \otimes G_{v'_+(r,s)})$.

A ação de μ nas entradas de N induz uma aplicação sobrejetora $\mu^* : N \longrightarrow M_1 \subseteq M$. Mais precisamente, se $(x_{k,l})_{k,l \in I \times I'} \in N$, então $\mu^*((x_{k,l})_{k,l \in I \times I'}) = (\mu(x_{k,l}))_{k,l \in I \times I'}$. É imediato ver que a aplicação μ^* é linear.

Apresentaremos agora a primeira equivalência multilinear desta seção.

Teorema 4.3.4 *Sejam M_1 e M como nas Notações 4.3.3. Então $P(M) = P(M_1)$.*

Para demonstrarmos este teorema faremos uso do seguinte resultado:

Lema 4.3.5 *Sejam $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ duas PI-álgebras satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, existem $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in Z(\mathcal{A})$ tais que:*

(1) *$a'_i a_i \in \mathcal{B}$ para $i = 1, \ldots, n$;*

(2) *Para qualquer $a \in K\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ temos $a'_1 a'_2 \ldots a'_n \cdot a = 0$ se, e somente se, $a = 0$.*

Então $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$.

Demonstração: Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ então $P(\mathcal{A}) \subseteq P(\mathcal{B})$. Para continuarmos a demonstração, considere $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade multilinear de $\mathcal{B}$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Sendo $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ e considerando $a'_1, \ldots, a'_n \in Z(\mathcal{A})$, temos por (1) que

$$0 = f(a'_1 a_1, \ldots, a'_n a_n) = a'_1 \ldots a'_n f(a_1, \ldots, a_n) = a'_1 \ldots a'_n a$$

e por (2) que, $a = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, o que conclui a demonstração. ∎

Demonstração (Teorema 4.3.4):

Notemos que, sendo $G[i, j, r, s] = G^{(v_+(i,j), v'_+(r,s))}_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)} \subseteq G_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)}$, temos que $M_1 = M_{I\times I'}(G[i, j, r, s]) \subseteq M_{I\times I'}(G_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)}) = M$. Desta forma, para esta demonstração, verificaremos as condições (1) e (2) do Lema 4.3.5.

Sabemos que para k, l convenientes, temos que $M_{k,l}(G) = M$ (Observação 4.2.2). Assim, dados $u_1, \ldots, u_t \in M$ podemos considerar $n = n(u_1, \ldots, u_t)$ inteiro, tal que $u_1, \ldots, u_t \in M_{k,l}(G(V_n))$. Considerando então $u'_1 = e_{n+1}e_{n+2}Id_M, u'_2 = e_{n+3}e_{n+4}Id_M, \ldots$ seguem as condições (1) e (2) do Lema 4.3.5, isto é:

(1) Para $s = 1, \ldots, t$ teremos $u'_s u_s \in M_1$, uma vez que $u'_s u_s$ serão matrizes $I \times I'$ com entradas determinadas por um número mínimo de elementos da base de G.

(2) Considerando $u \in K\langle u_1, \ldots, u_t\rangle$, pela forma que as matrizes u'_s, com $s = 1, \ldots, t$, foram definidas, teremos $u'_1 \ldots u'_t u = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Como queríamos demonstrar. ∎

Em busca da segunda equivalência multilinear necessária para a demonstração do TPT multilinear, apresentaremos mais uma sequência de notações, definições e resultados inerentes aos mesmos.

Notação 4.3.6 *Seja $W = I \times I'$. Dados $u, v \in W$, considere $e_{u,w} \in M_{I\times I'}(G)$ a "matriz" unidade correspondente à posição u, w. Seguindo a notação da Definição 4.2.1, dados $u, v \in W$, escreveremos em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:*

$$\widetilde{v}(u) + \widetilde{v}(w) = (g, h), g, h \in \mathbb{Z}_2,$$

Denotaremos então:

$$G(\widetilde{v}(u) + \widetilde{v}(w)) = G_g \otimes G_h.$$

Sendo $D_0 = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \ / \ 1 \leq i_1 < \dots < i_r, r = 2, 4, 6, \dots\}$, $D_1 = \{e_{i_1} \dots e_{i_r} \ / \ 1 \leq i_1 < \dots < i_r, r = 1, 3, 5, \dots\}$ onde $D = D_0 \cup D_1$ é a base de G, definimos o conjunto:

$$S = \{(c \otimes d)e_{u,w} \mid u, w \in W, c \in D_g, \ d \in D_h, \ onde \ \widetilde{v}(u) + \widetilde{v}(w) = (g, h)\}.$$

Observação 4.3.7 *Com a Notação 4.3.6, considere $u = (i, r), w = (j, s) \in W = I \times I'$. Então $\widetilde{v}(u) + \widetilde{v}(w) = (v(i) + v(j), v'(r) + v'(s)) = (v_+(i, j), v'_+(r, s)) = (g, h)$. Logo, se $c \in D_g$ e $d \in D_h$, temos que $c \otimes d \in G_{v_+(i,j)} \otimes G_{v'_+(r,s)}$ e estes elementos $c \otimes d$ geram linearmente $G_{v_+(i,j)} \otimes G_{v'_+(r,s)}$. Disto segue que o conjunto S, definido na Notação 4.3.3, gera linearmente a álgebra N.*

Definição 4.3.8 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas PI-álgebras. Uma aplicação linear sobrejetora $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dita* ***cancelável*** *se, para todo polinômio multilinear $f(x)$, temos que $\varphi \circ f(x)$ é identidade em $\mathcal{A}$ se, e somente se, $f(x)$ é identidade em $\mathcal{A}$.*

Teorema 4.3.9 *A aplicação $\mu^* : N \to M_1$ é cancelável.*

Para a demonstração deste teorema faz-se necessário o seguinte lema:

Lema 4.3.10 *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$, a base de G (Veja Notação 4.3.6). Então existem:*

(1) *Um homomorfismo $\varphi : G \to G$;*

(2) *Elementos $a'_1, a'_2, \dots, a'_n \in D$ tais que $\varphi(a'_i) = a_i$, para $1 \leq i \leq n$, e $a'_1 a'_2 \dots a'_n \neq 0$.*

Demonstração: Desde que $\dim G = \infty$, podemos encontrar elementos $a'_1, \dots, a'_n \in D$ tais que $a'_1 a'_2 \dots a'_n \neq 0$ e, $a'_i \in D_0$ se, e somente se, $a_i \in D_0, 1 \leq i \leq n$.

Definamos, inicialmente, a aplicação $\varphi' : \{a'_1, \dots, a'_n\} \to G$ onde $\varphi'(a'_i) = a_i$. Considerando $K\langle a'_1, \dots, a'_n\rangle \subseteq G$ a subálgebra gerada por $a'_1, \dots, a'_n$ e o conjunto $H = \{a'_{i_1} a'_{i_2} \dots a'_{i_r} \ / \ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$. Por $a'_i a'_j = \pm a'_j a'_i$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, segue que H é uma base linear de $K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle$. Neste contexto, definamos $\varphi'' : H \to G$ dada por

$$\varphi''(a'_{i_1}a'_{i_2}\ldots a'_{i_r}) = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_r} = \varphi'(a'_{i_1})\ldots\varphi'(a'_{i_r})$$

Estendendo φ'' linearmente para $K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle$, pela escolha dos elementos a'_i, temos que φ'' torna-se um homomorfismo de álgebras. Finalmente, sendo

$$G = K\langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle \oplus A$$

para um dado subespaço $A \subseteq G$ (podemos fazer isto utilizando o fato de G ser um espaço vetorial), definindo $\varphi : G \to G$ onde φ é uma extensão de φ'' onde $\varphi''(A) = 0$, temos o resultado desejado. ■

Demonstração (Teorema 4.3.9):

Considere $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear. Suponha inicialmente que $f(x)$ é uma identidade para N. Por μ^* ser sobrejetora e linear, obtemos que $\mu^* \circ f(x)$ é identidade para N.

Reciprocamente, supondo $\mu^* \circ f(x)$ uma identidade de N. Sendo $S \subseteq N$ e $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l} \in S$, para $1 \leq l \leq n$. Uma vez que, S gera linearmente N, é suficiente mostrarmos que $f(\overline{x}) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = 0$. Consideraremos os seguintes casos:

(i) Assuma que $c_1 \ldots c_n d_1 \ldots d_n \neq 0$ e considere $u, w \in W = I \times I'$. A entrada da matriz $f(\overline{x})$ na posição u, w será dada por $\alpha_{u,w}c_1 \ldots c_n \otimes d_1 \ldots d_n$ para algum $\alpha_{u,w} \in K$. Considerando agora a matriz $\mu^* \circ f(\overline{x}) = 0$, esta apresentará o elemento $\alpha_{u,w}c_1 \ldots c_n d_1 \ldots d_n$ na posição u, w. Assim, como $c_1 \ldots c_n d_1 \ldots d_n \neq 0$ temos que $\alpha_{u,w} = 0$, o que faz com que $f(\overline{x}) = 0$.

(ii) Suponha $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ quaisquer. Pelo Lema 4.3.10, existem $\varphi : G \to G$ homomorfismo de álgebras, $c'_1, \ldots, c'_n, d'_1, \ldots, d'_n \in D$ tais que $\varphi(c'_i) = c_i, \varphi(d'_i) = d_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e $c'_1 \ldots c'_n d'_1 \ldots d'_n \neq 0$. Definindo $\overline{x}'_l = (c'_l \otimes d'_l)e_{u_l,w_l}$ tem-se que $\overline{x}'_l \in S$ para todo $1 \leq l \leq n$. A partir daí, estendendo φ para o homomorfismo de álgebras $\varphi^* : N \to N$ pela ação de $\varphi \otimes \varphi$ nas entradas de N, temos

$$\varphi^*((c'_l \otimes d'_l)e_{u_l,w_l}) = (\varphi(c'_l) \otimes \varphi(d'_l))e_{u_l,w_l} = (c'_l \otimes d'_l)e_{u_l,w_l}.$$

Ou seja, $\varphi^*(\overline{x}'_l) = \overline{x}'_l$ para $1 \leq l \leq n$. Observando que, pelo caso (i), por $c'_1 \dots c'_n d'_1 \dots d'_n \neq 0$, temos que $f(\overline{x}') = 0$. Logo,

$$0 = \varphi^*(0) = \varphi^*(f(\overline{x}')) = f(\varphi^*(\overline{x}')) = f(\overline{x}'),$$

como queríamos demonstrar.

■

Notação 4.3.11 *Fixemos $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l} \in S, 1 \leq l \leq n$ (como no Teorema 4.3.9). Denotemos $e_\sigma = \Pi_{l=1}^n e_{u_{\sigma(l)},w_{\sigma(l)}}, \overline{x}_\sigma = \Pi_{l=1}^n \overline{x}_{\sigma(l)}$, onde $\sigma \in S_n$, o grupo das permutações de n elementos. Temos, pela forma que foram definidos, que se $e_\sigma = 0$, então $\overline{x}_\sigma = 0$. Assumindo então que $e_\sigma \neq 0$, para algum $\sigma \in S_n$. Por simplicidade, assumindo que $e_{id} \neq 0$, teremos $w_l = u_{l+1}, 1 \leq l \leq n-1$. Denotando $w_n = u_{n+1}$, o conjunto de índices $(u_1, \dots, u_{n+1})$ formado será denotado por $(\underline{u})$, ou seja, $(\underline{u}) = (u_1, \dots, u_n)$.*

Chamaremos a permutação $\sigma \in S_n$ de $(\underline{u})$-permissível se $e_\sigma \neq 0$. Isto é, $w_{\sigma(l)} = u_{\sigma(l+1)}$, para $1 \leq l \leq n-1$. Para este σ denotaremos $w_{\sigma(n)} = u_{\sigma(n)+1}$ e $(\underline{u})\sigma = (u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)+1})$.

Observação 4.3.12 *Sejam $\overline{x}_1 = (c_1 \otimes d_1)e_{u_1,w_1}, \overline{x}_2 = (c_2 \otimes d_2)e_{u_2,w_2} \in S$. Temos que $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = (c_1 \otimes d_1)e_{u_1,w_1} \cdot (c_2 \otimes d_2)e_{u_2,w_2} = (c_1c_2 \otimes d_1d_2)e_{u_1,w_2}$. Daí, sendo*

(i) $\mu^*(\overline{x}_1) = c_1d_1e_{u_1,w_1}$

(ii) $\mu^*(\overline{x}_2) = c_2d_2e_{u_2,w_2}$

(iii) $\mu^*(\overline{x}_1\overline{x}_2) = c_1c_2d_1d_2e_{u_1,w_2}$

e sabendo que $d_1c_2 = \varepsilon c_2d_1$, onde $\varepsilon = \pm 1$, obtemos $\mu^*(\overline{x}_1\overline{x}_2) = \varepsilon\mu^*(\overline{x}_1)\mu^*(\overline{x}_2)$. Se ambos os lados são não nulos, ε é unicamente determinado e depende apenas da paridade de d_1 e c_2. Logo, sendo $w_1 = u_2$ e $w_2 = u_3$, ε é determinado por (u_1, u_2, u_3). Analogamente, podemos estender estas considerações para qualquer produto de elementos $\overline{x}_l$ e, em particular, para o produto $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$. Observe que, neste caso, $\varepsilon = \pm 1$ é determinado por $(\underline{u}) = (u_1, \dots, u_{n+1})$.

Definição 4.3.13

(1) *Sejam $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \in S$ e $(\underline{u}) = (u_1, \dots, u_{n+1})$ como nas Notações 4.3.11. Então definimos $\varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon(u_1, \dots, u_{n+1})$ via:*

$$\mu^*(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n) = \varepsilon(u_1, \dots, u_{n+1})\mu^*(\overline{x}_1) \dots \mu^*(\overline{x}_n).$$

(2)*Se $\sigma \in S_n$ é $(\underline{u})$-permissível, então $\varepsilon((\underline{u})\sigma)$ é dado por:*

$$\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)} \dots \overline{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon((\underline{u})\sigma)\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}) \dots \mu^*(\overline{x}_{\sigma(n)}).$$

Observação 4.3.14 *Recordemos da Notação 4.3.6 que* $G(g,h) = G_g \otimes G_h$*, para* $g, h \in \mathbb{Z}_2$*, e a soma* $g+h$ *é a soma de* $\mathbb{Z}_2$*. Assim como* $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l}$*, onde* $c_l \otimes d_l \in G(\widetilde{v}(u_l) + \widetilde{v}(w_l))$*, para* $1 \leq l \leq n$*. Desde que* $w_l = u_{l+1}$ *para* $1 \leq l \leq n-1$ *e* $z + z = 0$ *em* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*, segue que para quaisquer* $1 \leq a \leq b \leq n$ *teremos:*

$$\prod_{l=a}^{b}(c_l \otimes d_l) \in G(\widetilde{v}(u_a) + \widetilde{v}(u_{b+1})).$$

Lema 4.3.15 *Sejam* $\varepsilon(\underline{u})$ *como na definição 4.3.13 e* $1 \leq a \leq n-1$*. Então:*

$$\varepsilon(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})\varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{n+1})\varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{n+1}).$$

Demonstração: Sejam $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ como nas Notações 4.3.11. Considerando $w_l = u_{l+1}$, para $1 \leq l \leq a$ e fazendo uso da Observação 4.3.14, temos:

$$\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l = (c' \otimes d')e_{u_1,u_{a+1}},\ c' \otimes d' \in G(\widetilde{v}(u_1) + \widetilde{v}(u_{a+1}))$$

e

$$\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l = (c'' \otimes d'')e_{u_{a+1},u_{n+1}},\ c'' \otimes d'' \in G(\widetilde{v}(u_{a+1}) + \widetilde{v}(u_{n+1})).$$

Sabemos que

$$\prod_{l=1}^{n}\overline{x}_l = (\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l)(\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l).$$

Observemos então o resultado da ação de μ^* em ambos os lados da igualdade:

(i) Da Definição 4.3.13,

$$\mu^*(\prod_{l=1}^{n}\overline{x}_l) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{n+1})\prod_{l=1}^{n}\mu^*(\overline{x}_l).$$

(ii) Por $(\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l)(\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l) = c'c'' \otimes d'd''e_{u_1,u_{n+1}}$ então

$$\mu^*((\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l)(\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l)) = c'c''d'd''e_{u_1,u_{n+1}}.$$

No entanto, $c''d' = \varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{n+1})d'c''$, $\mu^*(\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l) = c'd'e_{u_1,u_{a+1}}$ e $\mu^*(\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l)) = c''d''e_{u_{a+1},u_{n+1}}$ donde

$$\mu^*((\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l)(\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l)) = \varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{n+1})\mu^*(\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l)\mu^*(\prod_{l=a+1}^{n}\overline{x}_l))$$

Uma vez que

$$\mu^*(\prod_{l=1}^{a}\overline{x}_l) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})\prod_{l=1}^{a}\mu^*(\overline{x}_l)$$

e

$$\mu^*(\prod_{l=a+1}^{n} \overline{x}_l) = \varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{n+1}) \prod_{l=a+1}^{n} \mu^*(\overline{x}_l)$$

obtemos

$$\mu^*((\prod_{l=1}^{a} \overline{x}_l)(\prod_{l=a+1}^{n} \overline{x}_l)) = \varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{n+1})\varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})\varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{n+1}) \prod_{l=1}^{n} \mu^*(\overline{x}_l)$$

Igualando os resultados de (i) e (ii) obtemos

$$\varepsilon(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})\varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{n+1})\varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{n+1}).$$

como queríamos. ■

A Definição e o Teorema apresentado a seguir foi trabalhado por Regev [24]. Para uma melhor dinâmica do texto, optamos por não reproduzir aqui a demonstração do último.

Definição 4.3.16 ([24]) *Um elemento $\eta \in S_n$ é dito ser uma **transposição de blocos** se podemos escrever $x_1 \ldots x_n = ABCDE$ e $x_{\eta(1)} \ldots x_{\eta(n)} = ADCBE$, $(B, D \neq 1)$.*

Teorema 4.3.17 ([24]) *Sejam $e_{u_l,w_l} = e_{u_l,u_{l+1}}$, $1 \leq l \leq n$, como nas Notações 4.3.11. Então $\prod_{l=1}^{n} e_{u_l,u_{l+1}} = e_{u_1,u_{n+1}}$. Seja também $\sigma \in S_n$ tal que $e_\sigma = e_{u_1,u_{n+1}}$. Então existem transposições de blocos $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(s)} \in S_n$ tais que, se escrevermos $\eta^{(1)} \ldots \eta^{(i)} = \sigma^{(i)}(1 \leq i \leq s)$, teremos:*

(1) $\sigma = \sigma^s$

(2) $e_{\sigma^{(i)}} = e_{u_1,u_{n+1}}$, para cada $1 \leq i \leq s$.

Com o resultado acima, podemos demonstrar o próximo lema, que será usado na demonstração do principal teorema desta seção.

Lema 4.3.18 *Sejam $\overline{x}_l$, $1 \leq l \leq n$, (como nas Notações 4.3.11 e $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ correspondente), σ uma permutação $(\underline{u})$-permissível de S_n tal que $u_1 = u_{\sigma(1)}, u_{n+1} = u_{\sigma(n)+1}$ e ε como na Definição 4.3.13. Então $\varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon((\underline{u})\sigma)$.*

Demonstração: A partir das Notações 4.3.11 e do Teorema 4.3.17 é suficiente mostrarmos este lema para o caso em que σ é uma transposição de blocos $(\underline{u})$-permissível.

Assumiremos então que, sendo $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n = ABCDE$ então $\overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \overline{x}_{\sigma(n)} = ADCBE$. Supondo, sem perda de generalidade, que $A = E = 1$, passamos a ter $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n = BCD$ e $\overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \overline{x}_{\sigma(n)} = DCB$, onde cada bloco será equivalente as seguintes seqüências:

- $B = \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_a \Leftrightarrow B = (c_1 \ldots c_a \otimes d_1 \ldots d_a) \cdot e_{u_1,u_{a+1}}$
- $C = \overline{x}_{a+1} \ldots \overline{x}_b \Leftrightarrow C = (c_{a+1} \ldots c_b \otimes d_{a+1} \ldots d_b) \cdot e_{u_{a+1},u_{b+1}}$
- $D = \overline{x}_{b+1} \ldots \overline{x}_n \Leftrightarrow D = (c_{b+1} \ldots c_n \otimes d_{b+1} \ldots d_n) \cdot e_{u_{b+1},u_{n+1}}$

Reescrevendo a sequência DCB e BCD teremos:

(i) $BCD = (c' \otimes d')e_{u_1,u_{a+1}}e_{u_{a+1},u_{b+1}}e_{u_{b+1},u_{n+1}}$ onde $c' = (c_{b+1} \ldots c_n)(c_{a+1} \ldots c_b)(c_1 \ldots c_a)$ e $d' = (d_{b+1} \ldots d_n)(d_{a+1} \ldots d_b)(d_1 \ldots d_a)$.

(ii) $DCB = (c'' \otimes d'')e_{u_{b+1},u_{n+1}}e_{u_{a+1},u_{b+1}}e_{u_1,u_{a+1}}$ onde $c'' = (c_1 \ldots c_a)(c_{a+1} \ldots c_b)(c_{b+1} \ldots c_n)$ e $d'' = (d_1 \ldots d_a)(d_{a+1} \ldots d_b)(d_{b+1} \ldots d_n)$.

Desde que σ é $(\underline{u})$-permissível e por hipótese, $u_{\sigma(1)} = u_1$, $u_{\sigma(n)+1} = u_{n+1}$. Devemos ter, $\prod_{l=1}^{n} e_{u_{\sigma(l)},w_{\sigma(l)}} = e_{u_{\sigma(1)},u_{\sigma(n)+1}} = e_{u_1,u_{n+1}}$ e pela equação (ii), $\prod_{l=1}^{n} e_{u_{\sigma(l)},w_{\sigma(l)}} = e_{u_{b+1},u_{a+1}}$ consequentemente, $e_{u_1,u_{n+1}} = e_{u_{b+1},u_{a+1}}$ donde $u_1 = u_{b+1}$ e $u_{n+1} = u_{a+1}$.

Aplicando o Lema 4.3.15 duas vezes em BCD temos que $\varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$, onde $\varepsilon_1 = \varepsilon(u_1, \ldots, u_{a+1})$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(u_{a+1}, \ldots, u_{b+1})$, $\varepsilon_3 = \varepsilon(u_{b+1}, \ldots, u_{n+1})$, $\varepsilon_4 = \varepsilon(u_1, u_{a+1}, u_{b+1})$, $\varepsilon_5 = \varepsilon(u_1, u_{b+1}, u_{n+1})$. Com um argumento similar, segue de (ii) acima que $\varepsilon((\underline{u})\sigma) = \varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1\delta_4\delta_5$, onde $\delta_4 = \varepsilon(u_{b+1}, u_{n+1}, u_{b+1})$ e $\delta_5 = \varepsilon(u_{b+1}, u_{n+1}, u_{a+1})$. Uma vez que, $\varepsilon_4 = \delta_4$ e $\varepsilon_5 = \delta_5$, segue o resultado. ■

Teorema 4.3.19 *A aplicação $\mu^* : N \to M_1$ da Definição 4.3.6 satisfaz:*

(1) Existe $S \subseteq N$ tal que S gera linearmente N.

(2) Dados $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in S$ e $u, w \in W$, existe $\varepsilon = \varepsilon(u, w, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \neq 0$ tal que, para todo $\sigma \in S_n$, a entrada u, w satisfaz:

$$(\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \overline{x}_{\sigma(n)}))_{u,w} = \varepsilon \cdot (\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}) \ldots \mu^*(\overline{x}_{\sigma(n)}))_{u,w}$$

(independente de $\sigma \in S_n$).

Demonstração: Para demonstrarmos (1), basta tomarmos S como nas Notações 4.3.6. Na Observação 4.3.7 foi visto que S gera linearmente N.

Para a afirmação (2), sejam $\overline{x}_l = (c_l \otimes d_l)e_{u_l,w_l} \in S$ para $1 \leq l \leq n$ e $u, w \in W = I \times I'$.

Sendo $\sigma \in S_n$, denotemos por:

$$L(\sigma) = \left(\mu^*(\prod_{l=1}^{n} \overline{x}_{\sigma(l)})\right)_{u,w} \text{ e } R(\sigma) = \left(\prod_{l=1}^{n} \mu^*(\overline{x}_{\sigma(l)})\right)_{u,w}$$

Da Definição 4.3.13 sabemos que $L(\sigma) = \varepsilon(\sigma, u, w, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)R(\sigma)$. A fim de completarmos a demonstração, é suficiente mostrarmos que este ε não depende de σ. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que para algum $\sigma \in S_n$ temos $L(\sigma), R(\sigma) \neq 0$. Por simplicidade, assumiremos que $L(Id), L(Id) \neq 0$. Logo $w_l = u_{l+1}, 1 \leq l \leq n$, e desta forma $(\underline{u}) = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ foi determinado e

$$u_1 = u, u_{n+1} = w \tag{4.2}$$

Escreva $L(Id) = \varepsilon R(Id)$, com $\varepsilon = \pm 1$. Mostremos que para este ε temos $L(\sigma) = \varepsilon R(\sigma)$, para qualquer $\sigma \in S_n$. Claramente temos $L(\sigma) = 0$ se, e somente se, $R(\sigma) = 0$. Desta forma, podemos assumir que ambos são não-nulos. Segue que σ é $(\underline{u})$-permissível e

$$u_{\sigma(1)} = u, u_{\sigma(n)+1} = w \tag{4.3}$$

Temos portanto, $\sigma \in S_n$ uma permutação $(\underline{u})$-permissível de S_n tal que, por 4.2 e 4.3, $u_1 = u_{\sigma(1)}$ e $u_{n+1} = u_{\sigma(n)+1}$. Pelo Lema 4.3.18,

$$\mu^*\left(\prod_{l=1}^{n} \overline{x}_{\sigma(l)}\right) = \varepsilon(\underline{u}) \prod_{l=1}^{n} \mu^*(\overline{x}_{\sigma(l)}),$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon((\underline{u})\sigma)$. E isto vale para cada entrada $u, w \in W$, implicando na afirmação (2), como queríamos. ■

Mostraremos agora a segunda equivalência multilinear procurada.

Corolário 4.3.20 *Sejam N e M_1 como nas notações 4.3.3. Então $P(N) = P(M_1)$.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ uma identidade multilinear de N. Sabemos da Observação 4.3.7 que S gera linearmente N, assim uma vez que μ^* é sobrejetora e linear, $\mu^*(S)$ gera M_1. Para mostramos que $f(x_1, \ldots, x_n)$

é identidade de M_1, basta mostrarmos que para quaisquer $u, w \in W$ e $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in S$ temos $(f(\mu^*(\overline{x}_1), \ldots, \mu^*(\overline{x}_n)))_{u,w} = 0$. Seja $\varepsilon = \varepsilon(u, w, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ tal que, pelo Teorema acima, a entrada u, w satisfaz:

$$\Big(\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \overline{x}_{\sigma(n)})\Big)_{u,w} = \varepsilon(\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}) \ldots \mu^*(\overline{x}_{\sigma(n)}))_{u,w}$$

Sendo

$$f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \overline{x}_{\sigma(n)} \ e \ f(\mu^*(\overline{x}_1), \ldots, \mu^*(\overline{x}_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)}) \ldots \mu^*(\overline{x}_{\sigma(n)})$$

então

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu^*(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \overline{x}_{\sigma(n)}))_{u,w} = (\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \overline{x}_{\sigma(n)}))_{u,w} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (\mu^*(\overline{x}_{\sigma(1)} \ldots \mu^* \overline{x}_{\sigma(n)}))_{u,w} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \varepsilon (\mu^*(\overline{x}_1) \ldots \mu^*(\overline{x}_n))_{u,w} \\ &= \varepsilon(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (\mu^*(\overline{x}_1) \ldots \mu^*(\overline{x}_n))_{u,w} = \varepsilon(f(\mu^*(\overline{x}_1) \ldots \mu^*(\overline{x}_n)))_{u,w} \end{aligned}$$

Logo $f(x)$ é identidade de M_1.

Como μ^* é cancelável, segue que $P(N) = P(M_1)$, como queríamos. ■

4.4 A Demonstração do TPT Multilinear

Nesta seção, demonstraremos cada um dos ítens do TPT multilinear. Uma vez que a demonstração de cada afirmação usa técnicas distintas, demonstraremos cada uma como um novo teorema.

Teorema 4.4.1 (TPT multilinear (2)**)** *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $p = ac + bd$ e $q = ad + bc$. Então as álgebras $N_1 = M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)$ e $M = M_{p,q}(G)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração: Conforme o Teorema 4.2.4, a álgebra N_1 é isomorfa à álgebra N (Veja Notação 4.3.3). Da Observação 4.2.5, temos que $M = M_{I \times I'}(G_{v_+(i,j)+v'_+(r,s)})$. O Teorema 4.3.4 nos diz que $P(M) = P(M_1)$. Por outro lado, dos Teoremas 4.3.19, 4.3.9 e do Corolário 4.3.20, temos que, $P(N) = P(M_1)$. Destas duas equivalências multilineares segue que $P(M) = P(N)$ e pelo isomorfismo mencionado acima $P(M) = P(N_1)$, como queríamos. ■

Antes de demonstrarmos mais uma afirmação do TPT multilinear, precisamos de algumas definições.

Definição 4.4.2

(1) *Seja $a = a_0 + a_1 \in G$, onde $a_0 \in G_0, a_1 \in G_1$, e defina $g_0, g_1 : E \to M_2(G)$ por:*

$$g_0(a_0 + a_1) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad e \quad g_1(a_0 + a_1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Denote $g_i(G) = \Omega_i$, para $i = 0, 1$ e $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_1 \subseteq M_2(G)$. Observe que Ω_0 é uma subálgebra de $M_{1,1}(G)$ e $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in G \right\}$ é uma álgebra.

(2) *Defina $f : \Omega \to G$ por:*

$$f \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = x + y.$$

É imediato que f é um homomorfismo de álgebras. Além disso, $f \circ g_0 = f \circ g_1 = id_G$ donde segue que $f |_{\Omega_i}$ é injetora, para $i = 0, 1$.

(3) *Seja (I, v) um conjunto a valores em $\mathbb{Z}_2$, com $|I_0| = a$ e $|I_1| = b$. Defina a álgebra $U = M_{a+b}(U^*) \subseteq M_{2(a+b)}(G)$ onde:*

$$U^* = \{g_{v+(i,j)}(x_{i,j}) \ / \ i, j \in I, x_{i,j} \in G\}.$$

Assim, para $I' = I \times \mathbb{Z}_2$ e $v'(i, z) = v(i) + z \in \mathbb{Z}_2$, temos $U \subseteq M_{I'}(G_{v'(r,s)} \ / \ r, s \in I')$.

Lema 4.4.3 *A partir das informações da Definição 4.3.16, temos que $U \simeq M_{a+b}(G) = M_I(G)$.*

Demonstração: Definamos $f^* : U \to M_I(G)$ via:

$$f^*((g_{v+(i,j)}(x_{i,j}))_{I\times I}) = (f \circ g_{v+(i,j)}(x_{i,j}))_{I\times I} = (x_{i,j})_{I\times I}$$

para quaisquer $i, j \in I$. Observemos que:

(i) f^* é um homomorfismo de álgebras, pois herda de f esta propriedade.

(ii) f^* é sobrejetora, pois para todo $i, j \in I$ onde $x_{i,j} \in G$, existe $g_{v+(i,j)}(x_{i,j}) \in M_2(G)$ onde $(f \circ g_{v+(i,j)}(x_{i,j})) = x_{i,j}$. Assim, para todo $(x_{i,j})_{I\times I} \in M_I(G)$ existe $(g_{v+(i,j)}(x_{i,j}))_{I\times I}$ onde $f^*(g_{v+(i,j)}(x_{i,j}))_{I\times I}) = (f \circ g_{v+(i,j)}(x_{i,j}))_{I\times I} = (x_{i,j})_{I\times I}$.

(iii) f^* é injetora uma vez que $f |_{\Omega_0}$, $f |_{\Omega_1}$ são injetoras.

Segue então de $(i), (ii)$ e (iii) que f^* é um isomorfismo de álgebras. ■

Observação 4.4.4 *Seja G' a álgebra de Grassmann sem unidade e U como na Definição 4.3.16* (3). *Considere $U' = M_{a+b}(U'^*)$ onde*

$$U'^* = \{g_{v+(i,j)}(x_{i,j}) \ / \ i,j \in I \ e \ x_{i,j} \in G'\} \subseteq U^*.$$

Então, temos que $U' \subseteq U$ e com argumentos similares ao do Teorema 4.3.4, temos que $P(U) = P(U')$. Logo, para qualquer U'' tal que $U' \subseteq U'' \subseteq U$, temos que $P(U'') = P(U)$.

Teorema 4.4.5 (TPT multilinear (1)**)** *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então as álgebras $M_{a,b}(G) \otimes G$ e $M_{a+b}(G)$ satisfazem as mesmas identidades multilineares.*

Demonstração: Recordemos que $M_{a,b}(G) = M_I(G_{v+(i,j)} \ / \ i,j \in I)$ (Observação 4.2.2). Ainda, considerando o conjunto $\mathbb{Z}_2$ temos que $M_{1,1} = M_{\mathbb{Z}_2}(G_{z_1+z_2} \ / \ z_1+z_2 \in \mathbb{Z}_2)$. Denotando por $U_1 = M_I(G_{v+(i,j)} \ / \ i,j \in I) \otimes G$, o mergulho $g_0 : G \hookrightarrow M_{1,1}(G)$ induz o mergulho

$$\overline{g}_0 : M_I(G_{v+(i,j)} \ / \ i,j \in I) \otimes G \hookrightarrow M_I(G_{v+(i,j)} \ i,j \in I) \otimes M_{1,1}(G).$$

Neste momento, utilizando o Teorema 4.2.4, note que $M_I(G_{v+(i,j)} \ / \ i,j \in I) \otimes M_{1,1}(G) = M_I(G_{v+(i,j)} \ / \ i,j \in I) \otimes M_{\mathbb{Z}_2}(G_{z_1+z_2} \ / \ z_1+z_2 \in \mathbb{Z}_2) = M_{I\times\mathbb{Z}_2}(G_{v+(i,j)} \otimes G_{z_1+z_2} \ / \ z_1+z_2 \in \mathbb{Z}_2 \ e \ i,j \in I)$. Denotaremos $M_{I\times\mathbb{Z}_2}(G_{v+(i,j)} \otimes G_{z_1+z_2} \ / \ z_1+z_2 \in \mathbb{Z}_2 \ e \ i,j \in I) = \mathcal{G}$. O mergulho g_0 pode ser então re-escrito da seguinte forma:

$$\overline{g}_0 : U_1 \hookrightarrow \mathcal{G}.$$

Denotando agora, $\overline{U} = \overline{g}_0(U_1) \subseteq \mathcal{G}$ e aplicando μ^* em $\mathcal{G}$, temos:

$$\mu^* : \mathcal{G} \longrightarrow M_{I\times\mathbb{Z}_2}(G_{v+(i,j)+z_1+z_2} \ / \ i,j \in I \ e \ z_1,z_2 \in \mathbb{Z}_2).$$

Sejam $\mu^*(\overline{U}) = \mu^*(\overline{g}_0(U_1)) = U''$ e U, U' como na Definição 4.3.16(3) e Observação 4.4.4. Verifica-se diretamente que $U' \subseteq U'' \subseteq U$ e $P(U'') = P(U) = P(U')$.

Além disso, a mesma demonstração de que μ^* é cancelável e satisfaz as propriedades do Teorema 4.3.19 se aplica à restrição de μ^* à subálgebra $\overline{U} \subseteq \mathcal{G}$, com subconjunto gerador $\overline{U} \cap S$. Logo, pelo Teorema 4.4.1,

$$P(\overline{U}) = P(\mu^*(\overline{U})) = P(U'') = P(U) \tag{4.4}$$

Como $\overline{g}_0$ é um mergulho, temos que $U_1 \simeq \overline{U}$, logo $P(U_1) = P(\overline{U})$, e da igualdade 4.4 segue que $P(U_1) = P(U)$. Como $U \simeq M_{a+b}(G)$ obtemos que

$$P(M_{a+b}(G)) = P(U) = P(U_1) = P(M_{a,b}(G) \otimes G).$$

■

Para demonstrarmos a última afirmação do TPT multilinear, como nos casos anteriores, trabalharemos algumas propriedades.

Temos que G^{op} denota a álgebra oposta de G (Veja exemplo 2.1.8). A multiplicação em G^{op} é denotada por $*$ e definida por $a * b = ba$, para $a, b \in G^{op}$. É imediato que $T(G) = T(G^{op})$. Assim, de acordo com os resultados de [26], temos que $T(G \otimes G) = T(G \otimes G^{op})$ e, em particular, $P(G \otimes G) = P(G \otimes G^{op})$.

Definição 4.4.6
(a) Sejam $\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Observe que* $\underline{i}\underline{j} = \underline{k} = -\underline{j}\underline{i}, \underline{i}^2 = \underline{k}^2 = \underline{1}$ *e* $\underline{j}^2 = -\underline{1}$.

(b) Defina $g : G \to M_{1,1}(G)$, $h : G^{op} \to M_{1,1}(G)$ *por:*

$$g(a) = g(a_0 + a_1) = a_0\underline{1} + a_1\underline{i}, \quad \textit{onde} \quad a = a_0 + a_1 \in G = G_0 \oplus G_1,$$

$$h(b) = h(b_0 + b_1) = b_0\underline{1} + b_1\underline{j}, \quad \textit{onde} \quad b = b_0 + b_1 \in G^{op} = G_0^{op} \oplus G_1^{op}.$$

Observação 4.4.7 *As aplicações g, h possuem as seguintes propriedades (de verificação imediata):*
(1) $g : G \to M_{1,1}(G)$ e $h : G^{op} \to M_{1,1}(G)$ são mergulhos de álgebras.
(2) $g(a)h(b) = h(b)g(a)$, para todo $a \in G, b \in G^{op}$.

Definição 4.4.8 *Com g e h como na Definição 4.4.6(b), definimos $\varphi : G \otimes G^{op} \to M_{1,1}(G)$ por $\varphi(a \otimes b) = g(a)h(b)$.*

Lema 4.4.9 *A aplicação φ definida acima satisfaz as seguintes propriedades:*
(1) φ é homomorfismo;
(2) $\varphi(G \otimes G^{op}) \supseteq \begin{pmatrix} G_0^{(2)} & G_1 \\ G_1 & G_0^{(2)} \end{pmatrix}$.

Demonstração: A afirmação (1) é imediata.

Para demonstrarmos (2), note que se $a_1 \in G_1$, então:

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \in \varphi(G \otimes G^{op})$ pois $\frac{1}{2}[\varphi(a_1 \otimes 1) + \varphi(1 \otimes a_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$

  (Lembre que a característica de K é diferente de 2)

- $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \varphi(G \otimes G^{op})$ pois $\varphi(a_1 \otimes 1) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \varphi(G \otimes G^{op})$, uma vez que, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1b_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A afirmação (2) segue destes resultados. ■

Finalmente, estamos em condições de demonstrar a última afirmação do TPT multilinear.

Teorema 4.4.10 (TPT multilinear (3)**)** *As álgebras $G \otimes G$ e $M_{1,1}(G)$ satisfazem as mesmas identidades multilineares.*

Demonstração: Seguindo demonstração análoga à do Teorema 4.3.4 mostramos que $P(\varphi(G \otimes G^{op})) = P(M_{1,1}(G))$, onde φ é o homomorfismo dado na Definição 4.4.8.

Para concluir a demonstração, basta mostrar que $P(G \otimes G^{op}) = P(\varphi(G \otimes G^{op})$. Desde que φ é um homomorfismo, obtemos $P(G \otimes G^{op}) \subseteq P(\varphi(G \otimes G^{op})$. Busquemos a inclusão inversa. Seja,

$$f(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \in P(\varphi(G \otimes G^{op})$$

Para mostrarmos que $f(x) \in P(G \otimes G^{op})$, é suficiente fazê-lo para os elementos $\overline{x}_l = a_l \otimes b_l$ tal que $a_l, b_l \in D$ com $1 \leq l \leq n$ e verificar que:

$$f(a \otimes b) = f(a_1 \otimes b_1, \dots, a_n \otimes b_n) = 0$$

Temos que,

$$f(a\otimes b) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma[(a_{\sigma(1)}\otimes b_{\sigma(1)}) \dots (a_{\sigma(n)}\otimes b_{\sigma(n)})] = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}\otimes b_{\sigma(1)}* \dots * b_{\sigma(n)})$$

Denotando por $d(a_l) = d_l \in \mathbb{Z}_2$, se $a_l \in G_{d_l}$, e definindo $\varepsilon : S_n \times \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \pm 1$ onde $\varepsilon(\sigma, d(a_1), \dots, d(a_n)) = \pm 1$. Obtemos que $a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma, d(a_1), \dots, d(a_n))a_1 \dots a_n$ e $b_{\sigma(1)} * \dots * b_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma, d(b_1), \dots, d(b_n))b_1 * \dots * b_n$. Logo,

$$f(a \otimes b) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma, d(a_1), \dots, d(a_n))\varepsilon(\sigma, d(b_1), \dots, d(b_n))(a_1 \dots a_n \otimes b_1 * \dots * b_n) \quad (4.5)$$

Denotando $\beta = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma, d(a_1), \dots, d(a_n))\varepsilon(\sigma, d(a_1), \dots, d(a_n))$, desde que, pelo Teorema 4.3.19, ε não depende de σ, então β dependerá apenas de

$(d(a_1), \ldots, d(a_n))$ e $(d(b_1), \ldots, d(b_n))$. Podemos escolher $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in D$ tais que $a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n \neq 0$ em G. Aplicando φ em ambos os lados da equação 4.5, teremos:

$$\varphi(f(a \otimes b)) = \beta\varphi(a_1 \ldots a_n \otimes b_1 * \ldots * b_n) \tag{4.6}$$

Como $f \in P(\varphi(G \otimes G^{op}))$ temos $\varphi(f(a \otimes b)) = 0$. Por outro lado, $\varphi(a_1 \ldots a_n \otimes b_1 * \ldots * b_n) = a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n \underline{i}^r \underline{j}^s$, para r, s convenientes.

$$0 = \beta a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n \underline{i}^r \underline{j}^s.$$

Desde que $\underline{i}^r \underline{j}^s$ é uma matriz não nula e $a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n \neq 0$, temos que $\beta = 0$ e o resultado segue como queríamos.

■

Capítulo 5

Teorema do Produto Tensorial em Característica Positiva

No capítulo anterior, mostramos que a versão multilinear do Teorema do Produto Tensorial é válida para corpos infinitos com qualquer característica distinta de dois. Neste capítulo, apresentaremos resultados que comprovam a não validade do TPT, na sua versão geral, sobre corpos de base com as mesmas características acima descritas. Os resultados apresentados a seguir vêm acompanhados das devidas referências e, a menos que seja feita menção explícita em contrário, vamos considerar o corpo de base infinito com característica positiva $p > 2$.

5.1 O TPT é falso para $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$

Inicialmente, recordemos dos exemplos 2.2.5 e 2.2.6 que as álgebras $M_{1,1}(G)$ e $G \otimes G$ apresentam as seguintes $\mathbb{Z}_2$-graduações:

- $M_{1,1}(G) = (M_{1,1}(G))_0 \oplus (M_{1,1}(G))_1$ onde,

$$(M_{1,1}(G))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in G_0 \right\}, (M_{1,1}(G))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in G_1 \right\}$$

- $G \otimes G = (G_0 \otimes G_0 \oplus G_1 \otimes G_1) \oplus (G_0 \otimes G_1 \oplus G_1 \otimes G_0)$

Recordemos também que, quando a característica de K é $p > 2$, vale apenas a inclusão $T_2(M_{1,1}(G)) \subsetneq T_2(G \otimes G)$, uma vez que o ideal $T_2(G \otimes G)$ é gerado pelas identidades $[y_1, y_2]$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_3$ e $[y^p, z]$, sendo esta última não satisfeita por $M_{1,1}(G)$.

Nesta seção, apresentaremos os resultados de [22] onde é exibida mais uma identidade satisfeita por $T_2(G \otimes G)$ e não satisfeita por $T_2(M_{1,1}(G))$ quando a característica do corpo de base é positiva.

Consideremos a álgebra de Grassmann sem unidade G' e a álgebra $M_{1,1}(G')$, também sem unidade. Seja $A = M_{1,1}(G') \oplus K$ a álgebra obtida de $M_{1,1}(G)$ por adjunção formal da unidade. Temos que A apresenta uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural oriunda da $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_{1,1}(G')$. Em [22], a partir de um cálculo simples, é provado que a álgebra A satisfaz todas as identidades graduadas de $G \otimes G$ e seguindo a mesma abordagem utilizada no Capítulo 3, mostra-se que $G \otimes G$ também satisfaz as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de A, ou seja, a partir da construção de uma álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada de posto enumerável na variedade determinada por A é determinado o ideal $T_2(A)$ e disto, segue a demonstração da igualdade $T_2(G \otimes G) = T_2(A)$.

Finalmente, é apresentado um contra-exemplo que comprova a não veracidade da igualdade $T_2(G \otimes G) \subset T_2(M_{1,1}(G))$, como foi dito no início da seção.

Lema 5.1.1 *Quando a característica de K é $p > 2$, o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1^{p^2}, x_2]$ é uma identidade de A, mas não é uma identidade de $M_{1,1}(G)$.*

Demonstração: Considere $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{1,1}(G)$ para x_1. Observe que:

$$a^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^p = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^p$$

Como a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertence ao centro de $M_{1,1}(G)$, podemos utilizar o Binômio de Newton para a resolução da igualdade acima. Assim, segue que:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^p = \sum_{i=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^i$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p + \sum_{i=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{p-i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^i + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo, $a^p = a$ donde $a^{p^2} = a^p = a$. Temos que a não é um elemento central em $M_{1,1}(G)$, então, se substituirmos x_1 por a em $f(x_1, x_2)$, teremos que f não pertence a $T_2(M_{1,1}(G))$.

Agora, mostremos que, para todo $b \in A$, o elemento b^{p^2} é central. De fato, uma vez que $b = b' + kI$ onde $b' \in M_{1,1}(G')$, I é a matriz identidade e $k \in K$, então:

$$b^{p^2} = \left[\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right]^{p^2} = \sum_{i=0}^{p^2} \begin{pmatrix} p^2 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}^{p^2-i} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{i}$$

Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ é central, utilizamos novamente o Binômio de Newton e com argumentos similares ao desenvolvidos com a matriz a, obtemos:

$$b^{p^2} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}^{p^2} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{p^2} = \begin{pmatrix} k^{p^2} & 0 \\ 0 & k^{p^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{p^2}$$

A primeira parcela da soma acima formada por $k^{p^2}I$ é central e assim, sendo $b' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ com $x, t \in G'_0$ e $y, z \in G'_1 = G_1$, basta mostramos que $(b')^{p^2}$ também o é. Com efeito, as entradas de $(b')^{p^2}$ serão formadas por combinações lineares de monômios em x, y, z, t e cada um destes monômios tem grau p^2. Usando o fato de x, t serem centrais em G' e y, z anticomutarem, podemos escrever cada um dos monômios, a menos de sinal, na forma $x^n y^m z^r t^s$, onde pelo menos uma das potências tem grau maior ou igual a p. Mas, de acordo com Exemplo 2.1.28 a álgebra G' satisfaz a identidade $x_1^p = 0$. Portanto, $(b')^{p^2} = 0$, como queríamos. ■

Teorema 5.1.2 *Seja $p > 2$ a característica de K. Então $T(M_{1,1}(G)) \subsetneq T(G \otimes G)$. Mais precisamente, a identidade $[x_1^{p^2}, x_2]$ é satisfeita por $G \otimes G$, mas não por $M_{1,1}(G)$.*

Demonstração: Sabendo que $T_2(G \otimes G) = T_2(A)$ este resultado segue imediatamente da Proposição 2.2.15 e do Lema 5.1.1. ■

5.2 Alguns resultados técnicos

Antes de iniciarmos as duas próximas seções apresentaremos alguns resultados técnicos úteis para o melhor entendimento das mesmas. Para maiores detalhes de todos os resultados apresentados, veja [28], [29].

Recordemos que o polinômio standard de grau n é definido por:

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}.$$

onde S_n é o grupo das permutações de $\{1,2,\ldots,n\}$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. Ainda, do Teorema 2.1.31, temos que a álgebra das matrizes $M_n(K)$ satisfaz as identidades $S_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}) = 0$ mas não satisfaz identidades sob a forma $S_{2n}^k(x_1,\ldots,x_{2n})=0$, para todo k, quando $m<2n$.

Em seu trabalho *"Grassmann Algebras Over Finite Fields"*, Regev apresenta um resultado (Teorema 2.1) que tem como consequência imediata as seguintes afirmações, aqui enunciadas como Lema.

Lema 5.2.1 *Seja $charK=p>2$ e S_n o polinômio standard de grau n.*

(1) Existe k dependendo de p e de n tal que $S_n^k\in T(G')$.

(2) Existe k dependendo de p e de n tal que $S_n^k\in T(M_n(G'))$.

Este resultado será bastante útil para o desenvolvimento do restante desta seção, a começar pelo próximo Lema.

Lema 5.2.2 *Seja S_n o polinômio standard de grau n. Então,*

(1) *A álgebra $M_n(G)$ satisfaz a identidade S_{2n}^k para algum $k>1$, mas não satisfaz S_{2n} nem identidades sob a forma S_m^k para todo k quando $m<2n$;*

(2) *Se $a\geq b$ então a álgebra $M_{a,b}(G)$ satisfaz a identidade S_{2a}^k para algum $k>1$, mas não satisfaz S_{2a} nem identidades sob a forma S_m^k para todo k quando $m<2a$.*

Demonstração:

(1) Para demonstrarmos que S_{2n}^k é identidade polinomial para $M_n(G)$, observe que podemos escrever $M_n(G) = M_n(K)\oplus M_n('G)$. Desta forma, dados $A_i\in M_n(G)$ temos que $A_i=B_i+C_i$ onde $B_i\in M_n(K)$ e $C_i\in M_n(G')$. A partir daí, para todos $A_1,A_2,\ldots,A_{2n}\in M_n(G)$ segue que:

$$S_{2n}(A_1,A_2,\ldots,A_{2n})=S_{2n}(B_1,B_2,\ldots,B_{2n})+S_{2n}(C_1,C_2,\ldots,C_{2n}).$$

Pelo Teorema 2.1.31 temos que S_{2n} é uma identidade para $M_n(K)$ e assim $S_{2n}(B_1, B_2, \dots, B_{2n}) = 0$. Logo,

$$S_{2n}(A_1, A_2, \dots, A_{2n}) = S_{2n}(C_1, C_2, \dots, C_{2n}).$$

Do Lema 5.2.1, segue que existe k dependendo de n e $\mathrm{char}K = p$, tal que:

$$S_{2n}(A_1, A_2, \dots, A_{2n})^k = S_{2n}(C_1, C_2, \dots, C_{2n})^k = 0$$

e assim $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})^k \in T(M_n(G))$. (Devido [24], Teorema 2.1, pode-se garantir que $k > 1$).

Para demonstrar que $M_n(G)$ não satisfaz a identidade $S_{2n} = 0$, considere as matrizes unitárias $E_{i,j}$ com 1 na entrada i, j e 0 nas demais. Calculando

$$S_{2n}(E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{(n-1)(n-1)}, E_{(n-1)n}, eE_{nn}, fE_{nn}) = 2efE_{1n} \neq 0$$

onde e e f são elementos de G tais que $ef = -fe \neq 0$.

Finalmente, para provarmos que $M_n(G)$ não satisfaz identidades sob a forma S_m^k para todo k quando $m < 2n$, observe que $M_n(G)$ contém uma cópia isomorfa da álgebra $M_n(K)$. Pelo Teorema 2.1.31 segue o resultado.

(2) Provaremos que $S_{2a}(x_1, \dots, x_{2a})^k \in T(M_{a,b}(G))$. Para isso, seja $\overline{M_a M_b}$ a subálgebra da álgebra das matrizes $M_{a+b}(K)$ como na Observação 2.1.11. Temos que $M_{a,b}(G) = \overline{M_a M_b} \oplus M_{a,b}(G')$. Deste modo, para toda $A_i \in M_{a,b}(G)$, podemos escrever $A_i = B_i + C_i$ onde $B_i \in \overline{M_a M_b}$ e $C_i \in M_{a,b}(G')$. Para todos $A_1, \dots, A_{2a} \in M_{a,b}(G)$ obtemos que

$$S_{2a}(A_1, \dots, A_{2a}) = S_{2a}(B_1, \dots, B_{2a}) + S_{2a}(C_1, \dots, C_{2a})$$

Pelo Teorema 2.1.31, sendo $a \geq b$, S_{2a} é identidade de $\overline{M_a M_b}$ e assim $S_{2a}(B_1, \dots, B_{2a}) = 0$, donde segue que $S_{2a}(A_1, \dots, A_{2a}) = S_{2a}(C_1, \dots, C_{2a})$. Do Lema 5.2.1 temos que

$$S_{2a}(x_1, \dots, x_{2a})^k \in T(M_{a,b}(G))$$

para algum k que depende somente de a, b e $\mathrm{char}K = p$.

Para provarmos que $M_{a,b}(G)$ não satisfaz S_{2a} calculamos

$$S_{2a}(E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{(a-1)a}, E_{aa}, eE_{a(a+1)}) = eE_{1(a+1)} \neq 0$$

onde $e \in E_1$. Para provarmos que $M_{a,b}(G)$ não satisfaz S_m^k para todo k quando $m < 2a$, é suficiente observar que a álgebra $M_{a,b}(G)$ contém uma cópia isomorfa da álgebra $M_a(K)$. Aplicando o Teorema 2.1.31 concluímos o resultado. ■

Lema 5.2.3 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras. Considere $u_i \in \mathcal{A}$ e $v_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então*

$$S_2(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2) = S_2(u_1, u_2) \otimes v_1 v_2 + u_2 u_1 \otimes S_2(v_1, v_2).$$

Mais geralmente,

$$S_n(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = S_n(u_1, \ldots, u_n) \otimes v_1 \ldots v_n + \sum_{\sigma \neq 1} u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma_n} \otimes f_\sigma$$

onde os $f'_\sigma s$ são polinômios multilineares e combinações lineares de elementos da forma $v'[v_i, v_j]v''$, aqui v' e v'' são monômios (possivelmente vazios) em $v_1, \ldots, v_n$.

Demonstração: Utilizando as propriedades do produto cartesiano, verificamos a primeira afirmação do lema:

$$\begin{aligned} S_2(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2) &= (u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) - (u_2 \otimes v_2)(u_1 \otimes v_1) \\ &= (u_1 u_2 \otimes v_1 v_2) - (u_2 u_1 \otimes v_2 v_1) \\ &= (u_1 u_2 \otimes v_1 v_2) - (u_2 u_1 \otimes v_1 v_2) + (u_2 u_1 \otimes v_1 v_2) - (u_2 u_1 \otimes v_2 v_1) \\ &= S_2(u_1, u_2) \otimes v_1 v_2 + u_2 u_1 \otimes S_2(v_1, v_2) \end{aligned}.$$

Para a segunda, escrevemos $S_n(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n)$ sob a forma

$$\begin{aligned} S_n(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(n)} \otimes v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} \\ &= u_1 \ldots u_n \otimes v_1 \ldots v_n + \textstyle\sum_{\sigma \neq 1} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(n)} \otimes v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

Sabendo que $ab = ba + [a, b]$, obtemos

$$v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} = v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(i+1)} v_{\sigma(i)} \ldots v_{\sigma(n)} - v_{\sigma(1)} \ldots \left[v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(i+1)}\right] \ldots v_{\sigma(n)}.$$

Aplicando então esta relação um determinado número de vezes, obtemos

$$S_n(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = S_n(u_1, \ldots, u_n) \otimes v_1 \ldots v_n + \sum_{\sigma \neq 1} u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma_n} \otimes f_\sigma$$

onde cada $f_\sigma = f_\sigma(v_1, \ldots, v_m)$ é um polinômio na forma requerida. ■

5.3 O TPT é falso para $M_{a+b}(G)$ e $M_{a,b}(G) \otimes G$

Nesta seção, apresentaremos uma identidade polinomial para a álgebra $M_{a,b}(G) \otimes G$ que não é identidade polinomial para a álgebra $M_{a+b}(G)$. Este fato, comprova a não validade da primeira afirmação do TPT em característica positiva. No que segue, S_m denotará o polinômio standard de grau m e assumiremos que $a \geq b$.

Lema 5.3.1 *Existe inteiro $k > 1$ tal que S_{2a}^k é identidade para a álgebra $M_{a,b}(G) \otimes G$.*

Demonstração: Considere $u_i \in M_{a,b}(G)$ e $v_i \in G$ onde $i = 1, \ldots, 2a$. A partir do Lema 5.2.2 podemos escrever

$$S_{2a}(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_{2a} \otimes v_{2a}) = S_{2a}(u_1, \ldots, u_{2a}) \otimes v_1 \ldots v_{2a} + \sum_{\sigma \neq 1} u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(2a)} \otimes f_\sigma$$

aqui todos $f_\sigma \in G'$ e $S_{2a}(u_1, \ldots, u_{2a}) \in M_{a,b}(G')$.

De acordo com o Lema 5.2.1 existirão $k_1, k_2 > 1$ dependendo apenas de a, b e $\mathrm{char}K = p$ tal que $S_{2a}^{k_1}$ é identidade para $M_{a,b}(G')$ e $f_\sigma^{k_2}$ é identidade para G'. Existirá então, um inteiro $k > 1$ dependendo apenas de a, b e $\mathrm{char}K = p$ para o qual S_{2a}^k pertence a $T(M_{a,b}(G) \otimes G)$. ■

Teorema 5.3.2 *Temos $T(M_{a+b}(G)) \subsetneq T(M_{a,b}(G) \otimes G)$.*

Demonstração: Segue imediatamente dos Lemas 5.3.1 e 5.2.3(1). ■

5.4 O TPT é falso para $M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)$ e $M_{ad+bc,ac+bd}(G)$

Vamos agoras exibir uma identidade polinomial para a álgebra $M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)$ que não é identidade polinomial para a álgebra $M_{ac+bd,ad+bc}(G)$. Para tanto, necessitaremos de alguns resultados que passamos a apresentar agora.

Teorema 5.4.1 (Propriedade Universal) *Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre o corpo K e $f : V \times W \longrightarrow U$ uma transformação bilinear. Então existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \longrightarrow U$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Demonstração: Veja [27], Capítulo II, §12. ■

Lema 5.4.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra unitária sobre K. Então, $M_n(\mathcal{A}) \simeq M_n(K) \otimes \mathcal{A}$.*

Demonstração: Considere a aplicação bilinear $g_{M_n(A)} : A \times M_n(K) \to M_n(A)$ definida por $g_{M_n(A)}(a, \Sigma\alpha_{ij}E_{ij}) = \Sigma a\alpha_{ij}E_{ij}$. Pelo Teorema 5.4.1 temos que existe uma trasformação linear

$$T_{g_{M_n(A)}} : A \otimes M_n(K) \to M_n(A)$$

onde, sendo $g : A \times M_n(K) \to A \otimes M_n(K)$ definida por $g(a, \Sigma\alpha_{ij}E_{ij}) = a \otimes \Sigma\alpha_{ij}E_{ij}$ teremos $T_{g_{M_n(A)}} \circ g = g_{M_n(A)}$, isto é,

$$T_{g_{M_n(A)}}(a \otimes \Sigma\alpha_{ij}E_{ij}) = \Sigma a\alpha_{ij}E_{ij}.$$

Note que $T_{g_{M_n(A)}} \circ g = g_{M_n(A)}$.

Por outro lado, a aplicação $T_g : M_n(A) \to A \otimes M_n(K)$ dada por $T_g(\Sigma a\alpha_{ij}E_{ij}) = a \otimes \alpha_{ij}E_{ij}$ nos fornece a igualdade $T_g \circ g_{M_n(A)} = g$. Assim, temos que

$$(T_{g_{M_n(A)}} \circ T_g) \circ g_{M_n(A)} = g_{M_n(A)} \quad e \quad (T_g \circ T_{g_{M_n(A)}}) \circ g = g.$$

Como $Id_{A\otimes M_n(K)} \circ g = g$ e $Id_{M_n(A)} \circ g_{M_n(A)} = g_{M_n(A)}$, por unicidade,

$$T_{g_{M_n(A)}} \circ T_g = Id_{M_n(A)} \quad e \quad T_g \circ T_{g_{M_n(A)}} = Id_{A\otimes M_n(K)}.$$

Logo, $T_{g_{M_n(A)}}$ e T_g são isomorfismos, isto é, $M_n(K) \otimes \mathcal{A} \simeq M_n(\mathcal{A})$ como álgebras. ∎

Observação 5.4.3 *Um caso particular do lema acima diz que $M_n(K) \otimes M_m(K) \simeq M_{nm}(K)$ uma vez que $M_n(M_m(K)) \simeq M_{nm}(K)$ são isomorfos.*

Lema 5.4.4 *$M_n(M_{1,1}(G)) \simeq M_{n,n}(G)$.*

Demonstração: Para $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, considere o isomorfismo $\phi_{p,q} : M_n(E) \to M_n(E)$ definido por

$$(\phi_{p,q}(a))_{ij} = \begin{cases} a_{pp} & \text{se} \quad i = q, j = q, \\ a_{pq} & \text{se} \quad i = q, j = p, \\ a_{pj} & \text{se} \quad i = q, p \neq j \neq q, \\ a_{qq} & \text{se} \quad i = p, j = p, \\ a_{qj} & \text{se} \quad i = p, j = q, \\ a_{qp} & \text{se} \quad i = p, p \neq j \neq q, \\ a_{iq} & \text{se} \quad j = p, p \neq i \neq q, \\ a_{ip} & \text{se} \quad j = q, p \neq i \neq q, \\ a_{ij} & \text{se} \quad p \neq i \neq q, p \neq j \neq q, \end{cases}$$

onde

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(G).$$

Observe que o isomorfismo $\phi_{p,q}$ troca as colunas p e q e as linhas p e q. A função $\phi : M_n(M_{1,1}(G)) \to M_{n,n}(G)$ definido como a restrição do isomorfismo

$$\phi_{2,n+1} \circ \phi_{4,n+3} \circ \dots \circ \phi_{i,n+i-1} \circ \dots \phi_{n,2n-1}$$

à $M_n(M_{1,1}(G))$ é também um isomorfismo. ∎

Fazendo uso dos Lemas e Observações acima, aliados ao Lema 5.2.3 pode-se mostrar que:

(i) $M_{a,a}(G) \otimes M_{c,c}(G) \simeq M_{ac,ac}(G) \otimes M_{1,1}(G)$

(ii) Existe um inteiro positivo $t > 1$ tal que S_{2ac}^t é uma identidade para a álegbra $M_{a,a}(G) \otimes M_{c,c}(G)$.

Para mais detalhes, indicamos [28]. E por fim,

Teorema 5.4.5 *Seja $charK = p > 2$ e assuma que $a \geq b$ e $c \geq d$. Então, as álgebras $M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)$ e $M_{ac+bd,ad+bc}(G)$ não são PI-equivalentes.*

Demonstração: Sendo $a \geq b$ e $c \geq d$, segue que :

(1) $T(M_{a,a}(G) \otimes M_{c,c}(G)) \subseteq T(M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G))$, e do ítem (ii) acima, temos que

$$S_{2ac}^t \in T(M_{a,b}(G) \otimes M_{c,d}(G)) \tag{5.1}$$

(2) Sendo $ac + bd \geq ad + bc$ e $2ac < 2(ac + bd)$, do Lema 5.2.3 (2), temos que

$$S_{2ac}^t \notin T(M_{ac+bd,ad+bc}(G)). \tag{5.2}$$

Usando 5.1 e 5.2 a prova do Teorema está completa.

∎

Referências Bibliográficas

[1] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. 46, $695-707$, (1945).

[2] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 54, $575-580$, (1948).

[3] J, Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. $52, 1033-1035$(1946).

[4] J. Dubnov, V. Ivanov, *Sun l'abaissement du degré des polynômes en affineurs*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR $41, 96-98$(1943).

[5] A. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. USSR, Ivz. $25, 359-374$(1985).

[6] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic. $26, 362-397$(1987).

[7] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, (1999).

[8] A. Regev, *Existence of identities in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*, Israel J. Math., 11, $131-152$, 1972.

[9] W. Specth, *Gesetze in ringen*, Math. Z., 52, $557-589$, (1950).

[10] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations Math. Monographs 87, Amer. Math. Soc.,Providence. RI, (1991).

[11] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*,Transactions of the American mathematical Society 181, $429-438$, (1973).

[12] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic p>0*, Israel J. Math. 122, 305 – 316, (2001).

[13] Yu. P. Rasmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic 12, 47 – 63, (1973).

[14] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic 20(3), 188 – 194, (1981).

[15] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra 241, 410 – 434, (2001).

[16] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. 377, 53 – 67, (2004).

[17] S. S. Azevedo, *Identidades Graduadas para Álgebras de Matrizes*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (UNICAMP), Campinas, (2003).

[18] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specth problem*, Mathematic of the USSR-Sbornik, 191, Nº3 – 4, 329 – 340, (2000).

[19] A. V. Grishin, *Examples of* T*-spaces and* T*-ideals in characteristic* 2 *without finite basis property (in Russian)*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, 5, Nº1, 101 – 118, (1999).

[20] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable* T*-spaces*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 191, Nº3 – 4, 459 – 476, (2000).

[21] P. Koshlukov, S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel Journal of Mathematics 128, 157 – 176, (2002).

[22] S. Azevedo, M. Fidélis, P. Koshlukov, *Tensor products theorems in positive characteristic*, Journal of Algebra 276, nº 2, 836 – 845, (2004).

[23] A. Regev, *Tensor Products of Matrix Algebras over the Grassmann Algebra*, Journal of Algebra 133, no.2, 512 – 526, (1990).

[24] A. Regev, *A Transposition Factorization of Walk-Permutations in Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 56, no. 160 – 165, (1991).

[25] A. Regev, *Grassmann algebras over finite fields*, Comum. Algebra, 19, 1829−1849, (1991).

[26] U. Leron, A. Vapne ,*Polinomial identities of related rings*, Israel Journal of Mathematics, 8,127 − 136, (1970).

[27] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, (1962).

[28] S. M. Alves, P. Koshlukov, *Polinomial Identities of Algebras in Positive Characteristic*, J. Algebra, 305, 1149 − 1165, (2006).

[29] S. M. Alves, *PI (non) equivalence e Gelfand-Kirillov dimension in Positive characteristic*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, trabalho aceito, (2008).