UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

A Importância da Análise Real na Formação do Professor de Matemática do Ensino Médio: O Caso das Sequências Numéricas

Camila Paulino Marques

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2019

M357i Marques, Camila Paulino.

A importância da análise real na formação do professor de matemática do ensino médio: o caso das sequências numéricas / Camila Paulino Marques. – Campina Grande, 2019.

166 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho”.

Referências.

1. Análise Real. 2. Matemática – Estudo e Ensino. 3. Ensino Médio – Matemática. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 517(07)(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

A IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE REAL NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: O CASO DAS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

por

Camila Paulino Marques

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

A IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE REAL NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: O CASO DAS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

por

Camila Paulino Marques

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Marcelo Carvalho Ferreira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG

Prof. Dr. Hugo Carneiro Alex Diniz - UFOPA

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2019

Dedicatória

A Deus, que me concede vida e sabedoria.
Aos meus pais, Albinon e Jeane, meu irmão, Anderson, e minha avó Geralda, que compartilham comigo momentos fáceis e difíceis e são meus maiores incentivadores.

Agradecimentos

A Deus, por me conceder vida e sabedoria.

Aos meus pais, Albinon e Jeane, meu irmão Anderson e minha avó Geralda, por me motivarem sempre que a rotina esgotava minhas energias e por compreenderem quando precisei ficar tanto tempo incomunicável, mesmo estando na mesma casa, para poder estudar.

Aos meus colegas de trabalho, pelas palavras de ânimo e por facilitarem os ajustes de horários e períodos de férias para que eu pudesse participar das atividades do curso.

Ao Thalles, meu namorado, que chegou na minha vida quando eu já estava escrevendo a dissertação, por ser tão compreensivo com minha rotina pesada e me motivar a continuar.

Ao meu querido mestre José Vieira Alves, por me acompanhar desde o final do Ensino Fundamental, quando comecei a me aventurar nas olimpíadas de matemática, e por me preparar para desafios cada vez mais difíceis.

Às amigas que me acompanham desde a graduação: Aniete, Anna Karla, Daniela, Kaline, Luciana, Márcia e Rubiane, por fazerem parte do meu processo de aprendizado, torcerem por mim e compreenderem quando eu não pude estar presente em alguns de nossos encontros nesse período.

Aos amigos Francimário e Matheus, que na graduação fizeram tantos trabalhos comigo. As memórias me inspiraram na escrita do diálogo feito para um dos capítulos deste trabalho. Agradeço ainda à amiga Juliérika Veras, que também trabalha comigo desde a graduação, por contribuir com suas habilidades artísticas para ilustrar o diálogo.

Ao coordenador do curso, professor Dr. Luiz Antônio, pela simpatia, pela disposição em contribuir ao máximo com o bom desempenho de cada aluno e especialmente por atender às minhas solicitações de realização dos Exames Nacionais de Acesso e de Qualificação, por precisar de horários diferenciados, sempre respeitando minhas convicções religiosas.

Ao meu orientador, professor Dr. Daniel Cordeiro, por me convidar a estudar esse tema tão interessante, me dando tantas ideias novas para abordar o conteúdo de forma clara, objetiva e adequada.

Aos colegas Ismael e Rodrigo, por dedicarem tempo para assistir meus ensaios e por contribuírem com minha apresentação.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

Os conteúdos estudados na disciplina de Análise Real costumam ser vistos como distantes da realidade do professor de Matemática do Ensino Médio. Existem discussões a respeito da necessidade do estudante de Licenciatura em Matemática estudar Análise Real. Porém, neste trabalho, tomamos como fato que o professor do Ensino Médio deve ter domínio dos conteúdos de Análise Real, tendo em vista que as disciplinas desta área são as únicas que aprofundam o estudo de sequências numéricas. Neste trabalho, observaremos conteúdos estudados no ensino médio que têm sua base teórica nos conteúdos estudados em Análise Real: definição de sequências, definição de potências com expoentes irracionais, definição da "soma" dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica infinita e cálculo da área do círculo. Para cada conteúdo, apresentaremos quais conhecimentos o professor de Matemática deve ter para ministrá-los. Também buscaremos contribuir com o professor de Análise Real, permitindo reflexões a respeito de como a disciplina pode ser apresentada de modo a contribuir com a formação de professores.

Palavras Chaves: Análise Real. Licenciatura em Matemática. Ensino Médio.

Abstract

The contents studied in the Real Analysis discipline are usually seen as distant from the reality of the high school mathematics teacher. There are discussions about the need for the Mathematics student to study Real Analysis. However, in this work, we take as fact that the high school teacher must have mastery of the contents of Real Analysis, considering that the disciplines of this area are the only ones that deepen the study of numerical sequences. In this paper, we will look at contents studied in high school that have their theoretical basis in the contents studied in Real Analysis: definition of sequences, definition of powers with irrational exponents, definition of the "sum"of the infinite terms of an infinite geometric progression and calculation of the circle area. For each content, we will present what knowledge the mathematics teacher must have to teach them. We will also seek to contribute to the Real Analysis teacher, allowing reflections on how the discipline can be presented in order to contribute to teacher education.

Keywords: Real Analysis. Mathematics Degree. High School.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Ensinar Matemática no ensino médio é uma atividade que demanda muito preparo do professor. Em qualquer disciplina, o professor precisa ter conhecimento do conteúdo e encontrar uma abordagem de ensino adequada às suas turmas. Porém, o professor de Matemática do ensino médio ainda se depara com o desafio de ensinar conteúdos cuja explicação formal é mais avançada que o nível de ensino dos alunos. Por um lado, o professor precisa tornar o conteúdo compreensível aos alunos desse nível de ensino; por outro, não pode perder o rigor matemático, distorcendo os fatos.

Durante a formação de um professor de matemática, ele se depara com definições, axiomas e teoremas de Análise Real, os quais fundamentam os conteúdos que são estudados no ensino médio. Porém, dificilmente os livros mostram qual a relação entre os conteúdos estudados em Análise Real e os ensinados no ensino médio. Com isso, o aluno de licenciatura tende a concluir que a disciplina não terá relação com sua prática profissional e não consegue perceber que as demonstrações dos conteúdos que lecionará nos próximos anos de vida já foram apresentados a ele.

Por sua vez, o professor de Análise Real que segue uma abordagem estritamente similar à dos livros-texto da disciplina provavelmente apresentará os conteúdos sem associá-los aos conteúdos que os licenciandos precisarão ensinar no ensino médio. Com isso, em sua própria formação, o aluno de licenciatura pode ter a impressão de que os conteúdos da disciplina de Análise Real não tenham relação com sua realidade de professor do ensino básico.

Para evitar que tais problemas aconteçam, ou mesmo para tentar diminuir a dificuldade de alguém que já vivencie essa situação, verificamos os conteúdos de Análise Real que são necessários para compreender os conteúdos apresentados no ensino médio. Para isso, realizamos pesquisa bibliográfica em livros didáticos e páginas eletrônicas indicadas para o ensino médio e em livros de Análise Real, para selecionar conteúdos estudados no ensino médio envolvem argumentos e raciocínios relacionados às sequências numéricas, as quais são estudadas em Análise Real. Após selecionarmos os conteúdos estudados no ensino médio que dependem do estudo de sequências numéricas, temos o propósito de apresentar a justificativa formal de cada passagem.

Além de analisar a relação entre os conteúdos estudados no ensino médio e em Análise Real, também apresentaremos propostas de abordagens de ensino que possam ser utilizadas pelo professor de ensino médio. Nessas propostas, nos preocupamos também com a metodologia a ser utilizada pelo professor de ensino médio, já que ela impactará diretamente na facilidade ou na dificuldade de compreensão do conteúdo por parte dos alunos do ensino médio. Nossa primeira referência teórica é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que apresenta as competências que devem ser desenvolvidas em todo o ensino básico, de forma geral, e na disciplina de Matemática para o ensino médio, de forma mais específica. A segunda referência principal é a teoria dos registros de representação semiótica, apresentada por Duval e comentada por Trindade et al. (2016). Essa teoria ressalta a importância de representar cada objeto matemático utilizando diferentes signos, tais como gráficos, tabelas, representações algébricas e numéricas, entre outros.

Em nosso trabalho, analisaremos as abordagens de ensino utilizadas pelos livros didáticos e páginas eletrônicas direcionadas ao ensino médio, com a atenção voltada ao aspecto formal matemático. Nossa expectativa não é a de encontrar conteúdos de Análise Real detalhadamente explicados nos livros de ensino médio; mas sim encontrar abordagens que adequem os conteúdos para o nível de ensino dos alunos sem prejuízo do rigor matemático. Em outro momento, apresentamos nossa sugestão de abordagem de ensino para o ensino médio, com a preocupação de: favorecer o desenvolvimento das competências indicadas na BNCC; de utilizar diversos registros de representação semiótica e realizar tratamento e conversões entre eles; manter o rigor matemático, mas de forma que se adeque ao nível médio.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é contribuir com os professores e alunos da disciplina de Análise Real, apresentando conteúdos e abordagens que propiciem uma boa formação dos estudantes de licenciatura, de modo que estejam aptos a compreender o embasamento teórico dos conteúdos do Ensino Médio e possam apresentá-los de forma adequada aos alunos desse nível de ensino.

Para alcançar o objetivo geral, temos como objetivos específicos:

1. Convencer um aluno da Licenciatura, futuro professor de Ensino Médio, da importância do conhecimento de sequências para entender algumas passagens dos livros do Ensino Médio, onde esse conhecimento é usado, veladamente ou não;

2. Contribuir no sentido de propor reflexões para um professor de Análise Real das universidades preparar suas aulas, a serem direcionadas aos futuros professores do Ensino Médio;

3. Discorrer e elencar motivos, conceitos e resultados sobre sequências numéricas a serem aprendidos em uma disciplina de Análise para Licenciatura, sem os quais um pro-

fessor do Ensino Médio não vai conseguir compreender plenamente certos assuntos que ensina.

1.2 Organização

Para atender aos objetivos apresentados na seção anterior, nosso primeiro capítulo apresenta as fundamentações teóricas relacionadas à metodologia de ensino, especialmente as competências que devem ser desenvolvidas no ensino básico, conforme indicadas na BNCC, e a teoria dos registros de representação semiótica, apresentada por Duval, segundo a qual os estudantes só tem acesso aos objetos matemáticos através de suas representações e, por isso, utilizar diferentes registros de representação e saber relacionar um registro a outro é fundamental. Em seguida, dedicamos um capítulo à análise da apresentação da definição de sequências em livros didáticos e em páginas eletrônicas, seguido de um capítulo com sugestões de abordagem do mesmo conteúdo e com observações a respeito de equívocos e ambiguidades encontrados nos livros e páginas eletrônicas já analisados.

Dando continuidade, apresentamos um capítulo com uma introdução ao limite de sequência de modo mais informal, através de um diálogo. O capítulo seguinte faz a apresentação formal dos limites de sequências, apresentando definições e teoremas relacionados ao conteúdo que serão necessários para fundamentar os demais conteúdos do ensino médio.

No capítulo seguinte, analisamos a definição de potências com expoentes irracionais, como apresentadas nos livros didáticos e nas páginas eletrônicas. Em seguida, dedicamos um capítulo para apresentar a definição formal de potências com expoentes irracionais, a qual depende de várias proposições relacionadas à convergência de sequências numéricas. No mesmo capítulo, apresentamos nossas sugestões de abordagem para o ensino da definição e de suas propriedade, adaptando o conteúdo ao nível do ensino médio.

Em seguida, dedicamos um capítulo ao estudo da denominada "soma" dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica (PG); nesse capítulo, esclarecemos por que a palavra "soma" não é formalmente adequada e mostramos como as séries numéricas são apresentadas ao se estudar esse conteúdo. No mesmo capítulo, apresentamos brevemente as séries numéricas e alguns resultados que precisam ser conhecidos para que o conteúdo do ensino médio seja compreendido. Em seguida, analisamos os conteúdos conforme apresentados nos livros didáticos e as páginas eletrônicas e sugerimos abordagens de ensino para adaptar o conteúdo ao ensino médio.

Por fim, temos um capítulo em que apresentamos formalmente o cálculo da área do círculo através do Método da Exaustão e analisamos a apresentação do conteúdo feita nos livros didáticos e em páginas eletrônicas voltadas para o ensino médio. Acrescentamos um apêndice com uma aplicação do Método da Exaustão para resolver o problema da quadratura da parábola.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos para o Ensino de Sequências Numéricas no Ensino Médio: a BNCC e a teoria dos registros de representação semiótica

Nosso trabalho está norteado nas recomendações vigentes a respeito da Educação Básica em nosso país, particularmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), documento que define as aprendizagens essenciais para a Educação Básica e que teve o texto referente à etapa do Ensino Médio homologado pelo Ministério de Educação e Cultura (MEC) no dia 18 de dezembro de 2018. Neste documento, são definidas as competências, habilidades e conhecimentos a serem desenvolvidos em toda a Educação Básica, sendo algumas comuns a todos os níveis de ensino e áreas de estudo, outras específicas para cada área no Ensino Médio, em particular na área de Matemática e suas tecnologias.

De acordo com a BNCC, "a competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018).

Dedicaremos este capítulo à apresentação das competências relacionadas ao ensino de sequências numéricas. Mostraremos também como as orientações desse documento concordam com as ideias de outros teóricos, as quais também nortearão nossa pesquisa.

2.1 Ensino de sequências numéricas à luz das competências gerais da BNCC e da teoria dos registros de representação semiótica

A BNCC apresenta dez competências gerais a serem desenvolvidas no âmbito pedagógico. Naturalmente, todas devem ser contempladas por todas as disciplinas da educação básica; porém, para este trabalho, destacamos apenas as competências que, segundo nosso entendimento, são diretamente relacionadas à apresentação das sequências numéricas. Essas serão contempladas nos Capítulos 4 e 9 e nas Seções 10.3 e 11.1, nos quais apresentamos nossas sugestões de abordagem dos conteúdos analisados:

> "COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA
>
> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos de diferente áreas.
>
>   [...]
> 4. Utilizar diferentes linguagens - verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
>
>   [...]
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta" (BRASIL, 2018, p. 9).
>
>   [...]

Notamos claramente a relevância dada ao fator histórico na competência 1. De fato, cada conteúdo a ser apresentado teve seu estudo originalmente motivado por algum problema, teórico ou prático. Conhecer os problemas que deram origem ao estudo de um conteúdo costuma deixar clara a aplicabilidade do mesmo e, consequentemente, motiva os estudantes a compreendê-lo. Em nossas sugestões de abordagem, buscaremos apresentar problemas com valor histórico relacionados ao conteúdo estudado e adequados ao nível de conhecimento dos estudantes do Ensino Médio. Ressaltamos que selecionamos apenas alguns exemplos históricos, mas existem várias outras situações em que o conceito de sequência foi necessário para desenvolver outros conteúdos. Por exemplo, ao estudar as dízimas periódicas e a definição de número irracional, os conhecimentos de sequências convergentes são necessários. Na Física, a definição de velocidade instantânea também utiliza limites de sequências. Em nossa opinião, na evolução da História da Matemática, em qualquer processo de descoberta, o conceito de sequência aparece de forma implícita ou explícita.

Dentre os vários exemplos com valor histórico, selecionamos alguns para motivar a definição de sequências: a sequência de números triangulares, estudada pelos membros da escola pitagórica, e a sequência de Fibonacci, como exemplos motivadores para a definição de sequências no Capítulo 3; o método da exaustão de Eudoxo, para determinar a área do círculo, no Capítulo 11, e para calcular a área sob o arco de uma parábola, no Apêndice C.

A competência 2 destaca a importância de estimular o estudante a utilizar sua criatividade para procurar soluções, percorrendo todo o processo de formulação e teste de hipóteses para solucionar problemas. Nós concordamos que tal abordagem deve ser priorizada; por isso, nossas propostas metodológicas em todos os capítulos buscarão contemplar essa competência. A abordagem formal matemática será utilizada sempre que for acessível ao nível de ensino e, quando não for acessível, procuraremos uma abordagem mais intuitiva através de conhecimentos adquiridos nos anos anteriores.

Entendemos que essa competência é contemplada nas ideias apresentadas pelo psicólogo romeno Efraim Fischbein, as quais foram a base para a análise do tratamento de sequências numéricas nos livros didáticos em um artigo escrito por Willian Vieira (2014). Ele destaca a teoria do referido psicólogo a respeito das interações entre **aspectos formais, algorítmicos e intuitivos** para atividades matemáticas.

Segundo Vieira (2014), o aspecto formal abrange axiomas, definições, teoremas, demonstrações, o pensamento proposicional e as construções hipotético-dedutivas. Já o aspecto algorítmico engloba as técnicas e procedimentos de resolução. Por fim, o aspecto intuitivo abrange a intuição cognitiva, o entendimento/solução intuitiva, os quais podem facilitar o aprendizado, exercendo um papel coercitivo que ajude o estudante a aceitar afirmações mais facilmente; porém, também podem dificultá-lo, por levar o estudante a seguir raciocínios contraditórios e equivocados. Tais aspectos se relacionam diretamente com a competência 2, que visa desenvolver a capacidade do estudante criar hipóteses (utilizando a intuição e os conhecimentos prévios, que envolvem aspectos formais e algorítmicos) e analisá-las criticamente, através da abordagem própria da ciência (que engloba aspectos formais e algorítmicos).

Nossas propostas de abordagem têm o objetivo de estimular os aspectos intuitivos, algorítmicos e formais. Para alcançar este objetivo, nos propomos a apresentar cada conteúdo a partir de exemplos, perguntas e representações gráficas, para induzir o leitor a construir os conceitos.

Por sua vez, a competência 4 ressalta a importância do conhecimento e uso de diferentes linguagens. No que se refere à linguagem matemática, existem diferentes registros que podem ser utilizados para representar um mesmo objeto. Conforme apresentaremos no Capítulo 4, as próprias sequências numéricas podem ser representadas através de diversos registros: forma algébrica, numérica, gráfica, em tabelas e no diagrama de flechas. Sendo assim, conhecer as relações entre diferentes registros é fundamental para o desenvolvimento desta competência.

Ainda discorrendo sobre as representações dos objetos matemáticos, Trindade et al. (2016) cita o trabalho de Duval, que elaborou a teoria denominada "Registros de Representação Semiótica", na qual destaca a importância das representações semióticas, quais sejam: língua materna, representação algébrica, representação numérica e representação gráfica; e suas transformações cognitivas. No campo das transformações, são apresentados o tratamento, que consiste na transformação dentro de um mesmo registro, e a conversão, que é a transformação entre registros. Ao lembrar que "o objeto matemático só é acessível por meio de representações" (*ibidem*), percebemos que o desenvolvimento da habilidade de realizar transformações entre estes registros é fundamental para que a compreensão dos conteúdos pelos estudantes seja completa. Vale ressaltar que, embora o texto da BNCC apresente a "linguagem matemática" escrita no singular, essa trata-se de uma linguagem plural, composta por essas várias formas de representação.

Por fim, a competência 7 destaca a importância da utilização de dados reais para que sejam analisados pelos estudantes. Acreditamos que essa abordagem estimula os alunos, por apresentar a aplicação dos conteúdos no cotidiano. Esta competência também norteará nossas propostas de abordagem de ensino, especialmente o Capítulo 4.

Para finalizar, observando todas as competências apresentadas, destacamos também a relação entre estas e as componentes básicas utilizadas por Lima et al. (2001) como base para as análises de livros: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Essas compõem a "abordagem própria das ciências" mencionada na competência 2 da BNCC. Além disso, a Conceituação precisa ser feita levando em consideração a competência 4, utilizando o máximo possível de registros e permitindo o entendimento de todos eles. A Manipulação, por sua vez, também faz parte do conhecimento da abordagem matemática: "A Manipulação, de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música" (*ibidem*). Por fim, a Aplicação está diretamente relacionada com a competência 2, por envolver a curiosidade, a investigação, a reflexão, a elaboração de hipóteses, o teste das hipóteses, a resolução de problemas e a criação de soluções.

2.2 Ensino de sequências numéricas à luz das competências específicas de Matemática no ensino médio propostas na BNCC

Nessa seção, voltaremos nossa atenção às competências específicas para a área de Matemática e suas tecnologias no ensino médio. Segundo o documento, os estudantes "devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p. 529). Detalhando cada competência, é dito que "para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática" (*ibidem*, p. 529). Claramente, essa competência exige o conhecimento da Conceituação, da Manipulação e da Aplicação, destacados por Lima et al. (2001).

As competências específicas de Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio são:

> 1. "Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas." (BRASIL, 2018, p. 531).

É interessante notar que todas essas competências serão desenvolvidas na resolução dos problemas matemáticos e podem ser relacionadas com as etapas propostas por Lima:

Conceituação, Manipulação e Aplicação (2001). A competência 1 destaca o primeiro passo na resolução de um problema matemático: compreender a situação apresentada de forma matemática. Este processo permitirá que o aluno perceba a Aplicação do conteúdo logo no início do seu estudo. Em relação ao estudo de sequências, o aluno precisa perceber como esse conteúdo se relaciona com cada problema proposto. Essa abordagem será utilizada nos Capítulos 4 e 9 e nas Seções 10.3 e 11.1, nas quais apresentamos propostas de abordagem de cada um dos conteúdos do ensino médio que estamos analisando: definição de sequências, definição de potências com expoentes irracionais, "soma" dos infinitos termos de uma PG e cálculo da área do círculo, respectivamente.

Em seguida, a competência 2 destaca a importância de considerar tanto questões éticas quanto conhecimentos matemáticos ao propor soluções para problemas sociais. Perceber a necessidade de utilizar conhecimentos matemáticos junto a questões éticas também é um forte aliado do processo de Aplicação do conteúdo e exige o conhecimento da Conceituação do mesmo.

As competências seguintes enfocam pontos específicos do processo de resolução do problema, por isso entendemos que estão associados à Manipulação: a competência 3 fala sobre a interpretação do problema (o que também foi comentado na competência 1), sobre construir modelos (o que também é conteúdo da competência 5) e sobre resolver problemas analisando a coerência do resultado obtido. Já a competência 4 destaca mais uma vez o uso dos diferentes registros de linguagem matemática, tanto para procurar a solução quanto para comunicar os resultados. Essa última competência está diretamente relacionada com o que comentamos na seção anterior a respeito do trabalho de Duval, citado por Trindade et al. (2016).

Após verificada a concordância entre a BNCC e os artigos citados, tomaremos as competências apresentadas na BNCC, as propostas de Conceituação, Manipulação e Aplicação do Lima et al. (2001) e a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (TRINDADE et al., 2016) como bases para a elaboração da proposta de apresentação dos conteúdos propostos. A motivação de cada conteúdo será realizada através de problemas contextualizados, utilizando informações reais. A proposta de solução será voltada à utilização da definição de sequência e das diferentes representações das sequências com o fim de obter as soluções propostas.

Capítulo 3

Análise da Apresentação de Sequências Numéricas em Livros Didáticos e Páginas Eletrônicas

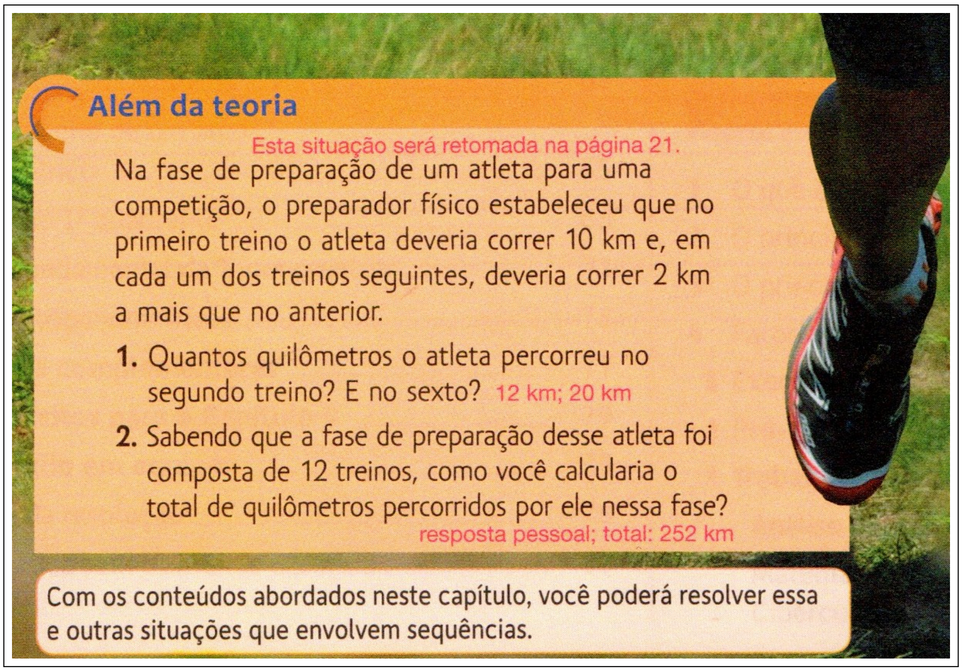
Nosso trabalho tem dois objetivos principais: o primeiro é apresentar relações entre os conteúdos que o professor ministrará no ensino médio e os conteúdos que foram estudados na disciplina de Análise Real, cursada em seu período de formação na licenciatura; o segundo, apresentar uma proposta de abordagem para alguns conteúdos do Ensino Médio, com o intuito de manter o rigor matemático e adequar a abordagem ao nível de ensino dos alunos. Por consequência, a proposta de abordagem poderá servir de referência para que os professores de Análise Real dos cursos de licenciatura possam apresentar a disciplina com as devidas aplicações aos conteúdos de matemática do ensino médio. Dessa forma, os alunos de licenciatura já cursarão Análise Real percebendo sua aplicação e relevância para um professor do ensino básico.

Tendo tais objetivos em vista, dedicaremos este capítulo à análise das apresentações da definição de sequências numéricas, encontradas em livros didáticos e em páginas eletrônicas. Também apresentaremos as definições e os resultados de Análise Real necessários para analisar cada ideia que os livros e as páginas eletrônicas apresentam apenas de forma intuitiva. No Capítulo 4, proporemos uma abordagem de apresentação desse conteúdo que o professor de ensino médio pode aplicar.

Para a análise desse conteúdo, selecionamos dois livros didáticos indicados pelo MEC através do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e as duas primeiras páginas eletrônicas indicadas na página de busca eletrônica *Google* ao pesquisarmos "sequências numéricas". Ressaltamos que nosso intuito é analisar a relação entre os conteúdos, não avaliar as páginas eletrônicas ou livros didáticos em si mesmos. Por isso, não divulgaremos os livros e páginas eletrônicas que consultamos.

3.1 Apresentação de sequências numéricas no livro A

O livro A inicia a apresentação de sequências por meio de exemplos contextualizados:



Além da teoria

Esta situação será retomada na página 21.

Na fase de preparação de um atleta para uma competição, o preparador físico estabeleceu que no primeiro treino o atleta deveria correr 10 km e, em cada um dos treinos seguintes, deveria correr 2 km a mais que no anterior.

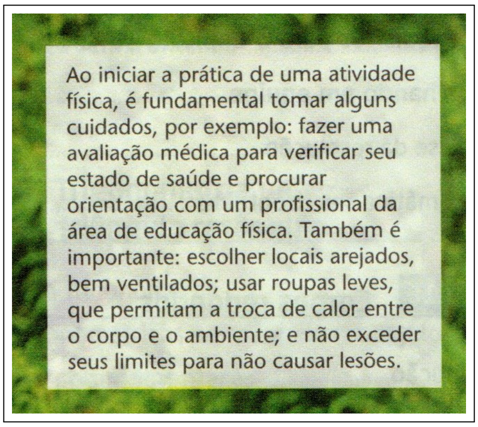
1. Quantos quilômetros o atleta percorreu no segundo treino? E no sexto? 12 km; 20 km
2. Sabendo que a fase de preparação desse atleta foi composta de 12 treinos, como você calcularia o total de quilômetros percorridos por ele nessa fase? resposta pessoal; total: 252 km

Com os conteúdos abordados neste capítulo, você poderá resolver essa e outras situações que envolvem sequências.

Figura 3.1: Motivação para o estudo de sequências no livro A

Destacamos a relevância de especificar o período de duração desse treino, pois o problema se tornaria utópico caso considerássemos que a distância percorrida continuasse aumentando indefinidamente.

Além de apresentar o problema matemático, foi inserido um quadro com recomendações sobre ter acompanhamento de profissionais e mais alguns cuidados relacionados à prática de atividades físicas, o que demonstra preocupação em trabalhar a interdisciplinaridade:



Ao iniciar a prática de uma atividade física, é fundamental tomar alguns cuidados, por exemplo: fazer uma avaliação médica para verificar seu estado de saúde e procurar orientação com um profissional da área de educação física. Também é importante: escolher locais arejados, bem ventilados; usar roupas leves, que permitam a troca de calor entre o corpo e o ambiente; e não exceder seus limites para não causar lesões.

Figura 3.2: Contextualização do exemplo motivacional do conteúdo no livro A

Tal cuidado é relevante, especialmente porque o exemplo apresentado sugere um aumento na intensidade do exercício durante uma quantidade relativamente pequena de dias, mas que não deve ser seguida pelos alunos sem que seja analisado seu condicionamento físico.

Voltando a atenção ao aspecto didático, o exemplo desenvolve as competências 1 e 3 específicas para o ensino de Matemática no ensino médio, propostas pela BNCC (ver seção 2.2). De fato, o exemplo induz à utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos: a competência 1 foi contemplada pela necessidade de interpretar a situação apresentada, e a 3, por ser necessário construir um modelo e resolver o problema. Para responder às perguntas, o aluno do ensino médio tem a possibilidade de fazer cálculos simples ou mesmo de utilizar os conhecimentos de função.

Após a motivação inicial, o livro A inicia a primeira seção apresentando mais um exemplo, para auxiliar na conceituação de sequências:

1 O conceito de sequência

Em 2013, o Brasil sediou a primeira edição da Copa do Mundo de vôlei de praia, o World Cup Final, que se realizou na cidade de Campinas, em São Paulo. O Brasil foi campeão nas duas competições, feminina e masculina, com as duplas Maria Elisa/Talita e Emanuel/Alison.

HELIO SUENAGA/ FIVB/GETTY IMAGES

Maria Elisa e Talita exibem a medalha de ouro.

Emanuel e Alison comemoram o título.

HÉLIO SUENAGA/LATINCONTENT/GETTY IMAGES

No vôlei masculino, a classificação final dos quatro primeiros colocados é descrita pela tabela a seguir.

Classificação da I Copa do Mundo de vôlei de praia masculino	
Posição	País
1	Brasil
2	Estados Unidos
3	Letônia
4	Alemanha

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <www.fivb.org>. Acesso em: 1º maio 2014.

Figura 3.3: Motivação para a conceituação de sequências no livro A

Mais uma vez, o aluno pode perceber o conteúdo como algo natural, como parte do cotidiano. Novamente, as competências 1 e 3, de interpretação da situação e de utilização de um modelo matemático, foram desenvolvidas. Por isso, entendemos que o exemplo apresentado seja uma boa escolha. Além disso, iniciar o exemplo com uma sequência não-numérica é importante, pois o aluno terá uma visão mais ampla a respeito da definição de sequência: ela pode abranger casos em que as sequências são compostas por termos que não sejam números.

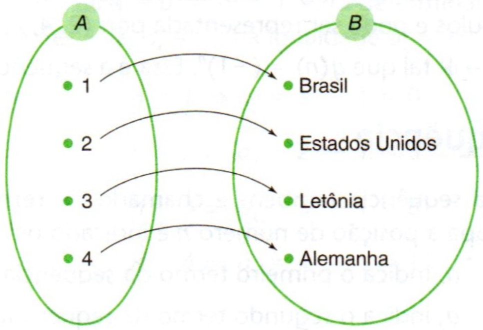
Notemos agora que inicialmente o exemplo utiliza a representação em uma tabela para uma sequência com 4 termos. Em seguida, o livro destaca a relação entre as duas colunas: os números naturais e a posição dos elementos na sequência. O exemplo apresentado parece muito pequeno em um primeiro momento, mas a sequência foi estrategicamente escolhida para que fosse possível fazer uma conversão de registros, passando-se a utilizar um diagrama de flechas:

Observe que a classificação é apresentada associando-se cada número natural de 1 a 4 ao nome de um país. Essa associação determina uma **sequência**, em que:

- o número 1 corresponde ao primeiro elemento da sequência;
- o número 2 corresponde ao segundo elemento da sequência;
- o número 3 corresponde ao terceiro elemento da sequência;
- o número 4 corresponde ao quarto elemento da sequência.

Vamos representar essa associação em um diagrama de flechas, indicando por A o conjunto de números naturais de 1 a 4 e por B o conjunto dos países classificados nas quatro primeiras posições:

FAUSTINO



Note que cada elemento de A está associado a um único elemento de B. Dessa forma, temos uma função de A em B. Essa situação é um exemplo de sequência finita, que definimos a seguir.

Figura 3.4: Representação de sequência por diagrama de flechas no livro A

O uso do diagrama de flechas pode ser considerado o ápice da conceituação, pois os alunos já foram apresentados às funções com a mesma representação, o que facilita a compreensão de que a sequência é uma função e segue a competência específica 4, que trata do uso de diferentes registros de representação matemática (ver seção 2.2).

Após esse exemplo, foi devidamente posicionada a definição de sequência:

Sequência finita é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, com $A \subset \mathbb{N}^*$, e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

Figura 3.5: Exemplo e definição de sequência finita no livro A

Sequência infinita é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

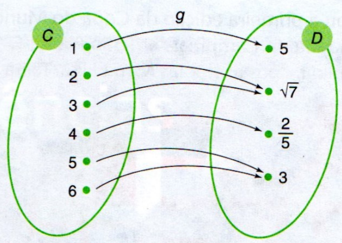
Figura 3.6: Definição de sequência infinita no livro A

Destacamos o fato de que ambas as definições de sequências são abrangente, contemplando sequências numéricas ou não, pois o contradomínio é qualquer conjunto não vazio, o que é coerente com os exemplos apresentados para motivar o conteúdo. Ressaltamos ainda que em Análise Real estudamos apenas sequências infinitas, tendo em vista que as sequências que nos interessam nos estudos mais avançados são apenas as infinitas.

O livro apresenta ainda outros exemplos. O exemplo a seguir merece atenção, pois apresenta uma sequência com elementos repetidos representada por diagrama de flechas e pela notação de sequências:

Exemplos

a) Consideremos a função g descrita pelo diagrama:



Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que se apresentam os elementos deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos distintos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Observe que uma sequência pode ser representada por um conjunto cujos elementos obedecem a determinada ordem.

Figura 3.7: Exemplo de sequência com elementos repetidos no livro A

Este exemplo destaca dois fatos importantes: primeiro, a possibilidade de existirem termos iguais na mesma sequência, o que evita o erro de confundir sequências e imagens de funções; segundo, a importância da posição de cada termo, pois a inversão de apenas dois termos de uma sequência é suficiente para gerar uma nova sequência. Porém, a observação encontrada no canto inferior esquerdo da Figura 3.7 contradiz essas informações, ao afirmar que "uma sequência pode ser representada por um conjunto cujos elementos obedecem a uma determinada ordem". Os alunos já estudaram conjuntos e sabem que eles não possuem elementos repetidos nem são alterados ao se inverter a posição de dois elementos. Concluímos, assim, que a observação apresentada está equivocada.

Destacamos aqui o uso da palavra "ordem", ainda na observação da Figura 3.7. No contexto em que foi colocado, claramente o aluno compreende que a expressão se refere à posição de cada termo. Porém, se o texto fosse apresentado sem a imagem, causaria uma ambiguidade, que detalharemos no Capítulo 5.

Dando continuidade, o exemplo seguinte apresenta a notação dos termos de uma sequência qualquer:

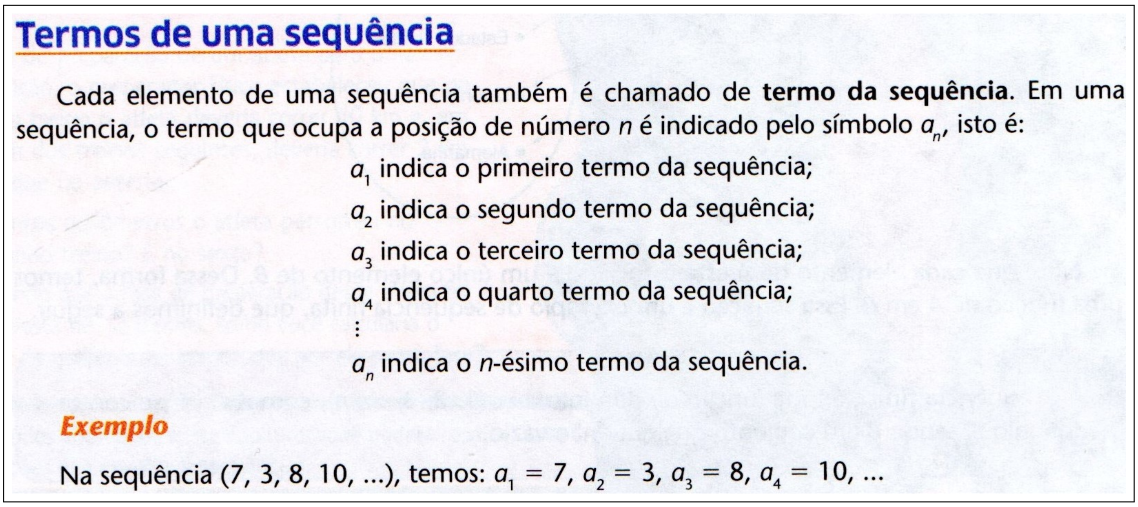
b) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 40\}$, a função $h: A \to \mathbb{R}$ tal que $h(n) = 3n^2 - 1$ representa a sequência finita $(h(1), h(2), h(3), ..., h(40))$, em que:

$$h(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$$
$$h(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$$
$$h(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$$
$$h(4) = 3 \cdot 4^2 - 1 = 47$$
$$\vdots$$
$$h(40) = 3 \cdot 40^2 - 1 = 4.799$$

Portanto, a sequência representada pela função h é: $(2, 11, 26, 47, ..., 4.799)$

Figura 3.8: Exemplo de sequência representada pelo termo geral no livro A

O fato de que a sequência é uma função foi destacado de forma acertada. Porém, seria possível simplificar ainda mais o raciocínio do estudante denotando a função por a e cada termo por $a(n) = a_n$. Por ter utilizado outra letra para denotar a função, a notação dos termos da sequência só foi apresentada depois do exemplo, em uma subseção separada:



Termos de uma sequência

Cada elemento de uma sequência também é chamado de **termo da sequência**. Em uma sequência, o termo que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo a_n, isto é:

a_1 indica o primeiro termo da sequência;

a_2 indica o segundo termo da sequência;

a_3 indica o terceiro termo da sequência;

a_4 indica o quarto termo da sequência;

⋮

a_n indica o n-ésimo termo da sequência.

Exemplo

Na sequência (7, 3, 8, 10, ...), temos: $a_1 = 7$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, ...

Figura 3.9: Apresentação da notação dos termos de uma sequência no livro A

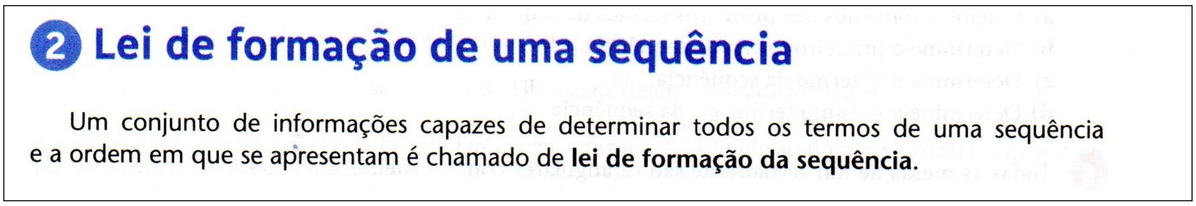
A associação entre o índice de cada termo e sua posição na sequência seria mais intuitiva e rápida para o estudante caso fosse feita a associação da sequência com a função

$$\begin{aligned} A:\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

Além disso, a associação entre cada elemento do domínio e o índice da notação já seria imediata.

É importante destacarmos a diversidade de registros utilizados nos exemplos: tabela, diagrama de flechas, representação numérica, representação algébrica. Essa multiplicidade de representações contempla a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, conforme comentada por Vieira (2014).

Finalizando a apresentação do conteúdo, o livro apresenta a lei de formação de uma sequência em uma seção separada:



2 Lei de formação de uma sequência

Um conjunto de informações capazes de determinar todos os termos de uma sequência e a ordem em que se apresentam é chamado de **lei de formação da sequência.**

Figura 3.10: Apresentação da lei de formação de uma sequência no livro A

Estranhamente, não foi feita qualquer referência ao fato de que toda função, por definição, deve ter uma lei de formação e que, por consequência, toda sequência também terá uma lei de formação. Apresentar a lei de formação em uma seção separada deixa a impressão de que sua existência seja um fato novo, independente da definição, o que não é verdade.

Por outro lado, a lei de formação foi definida de forma abrangente como "um conjunto de informações", o que é adequado, pois a lei de formação pode ser representada através de uma fórmula, de um texto, de um diagrama, entre outras possibilidades.

Agora, observemos os exemplos que o livro apresentou em seguida, conforme exibimos nas figuras seguintes:

Exemplos

a) Seja (a_n) a sequência tal que: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4 + a_n \end{cases}$

As informações $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 4 + a_n$, para todo número natural n não nulo, determinam todos os elementos da sequência e a ordem em que se apresentam. Observe:

- o primeiro termo da sequência é 3, isto é, $a_1 = 3$;
- na igualdade $a_{n+1} = 4 + a_n$, atribuindo a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da sequência, isto é:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 4 + a_1 = 4 + 3 = 7$$
$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 4 + a_2 = 4 + 7 = 11$$
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 4 + a_3 = 4 + 11 = 15$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 4 + a_4 = 4 + 15 = 19$$
$$\vdots$$

Portanto, a sequência é (3, 7, 11, 15, 19, ...).

Figura 3.11: Primeiro exemplo de lei de formação de uma sequência, extraído do livro A

Esse primeiro exemplo mostra lei de formação representada por uma fórmula de recorrência. A inclusão de tal exemplo é importante para que o aluno possa ter acesso a uma diversidade de exemplos de sequências e de leis de formação.

b) Considere a sequência (a_n) tal que $a_n = n^2 - 1$. Para determinar os termos dessa sequência, basta atribuir a n os valores 1, 2, 3, 4, ... na igualdade $a_n = n^2 - 1$. Observe:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 - 1 = 15$$
$$\vdots$$

Portanto, a sequência é (0, 3, 8, 15, ...).

Figura 3.12: Segundo exemplo de lei de formação de uma sequência, extraído do livro A

O exemplo b) contempla uma situação mais simples, em que uma única expressão matemática representa todos os termos da sequência.

c) A sequência dos números primos positivos, em ordem crescente, é (2, 3, 5, 7, 11, ...). Observe que a lei de formação dessa sequência não foi expressa por uma equação, mas pela propriedade de que os números sejam primos positivos e estejam em ordem crescente. Esse exemplo mostra que a lei de formação de uma sequência pode não ser uma equação.

Figura 3.13: Terceiro exemplo de lei de formação de uma sequência, extraído do livro A

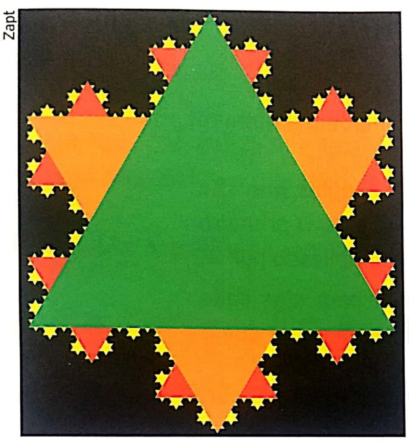
Já no último exemplo, foi utilizada a representação através da língua materna. Ressaltamos aqui um fato matemático: não existiria uma função polinomial de uma variável que representasse apenas números primos. A demonstração desse fato está apresentada no Apêndice A.

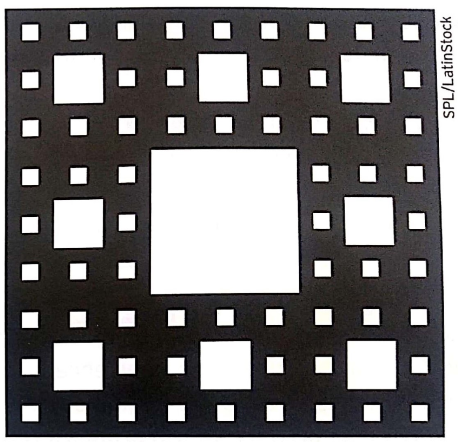
Destacamos que a diversidade de exemplos é importante para que o aluno tenha uma visão tão geral quanto possível do conceito de lei de formação, mesmo que ele já tenha sido apresentado anteriormente à lei de formação de uma sequência. O livro acertadamente utiliza vários registros de representação diferentes.

3.2 Apresentação de sequências numéricas no livro B

O livro B motiva o estudo do conteúdo através de sequências cujos termos possuem representação geométrica: a curva do floco de neve de Koch e o tapete de Sierpinski:

1. Sequências



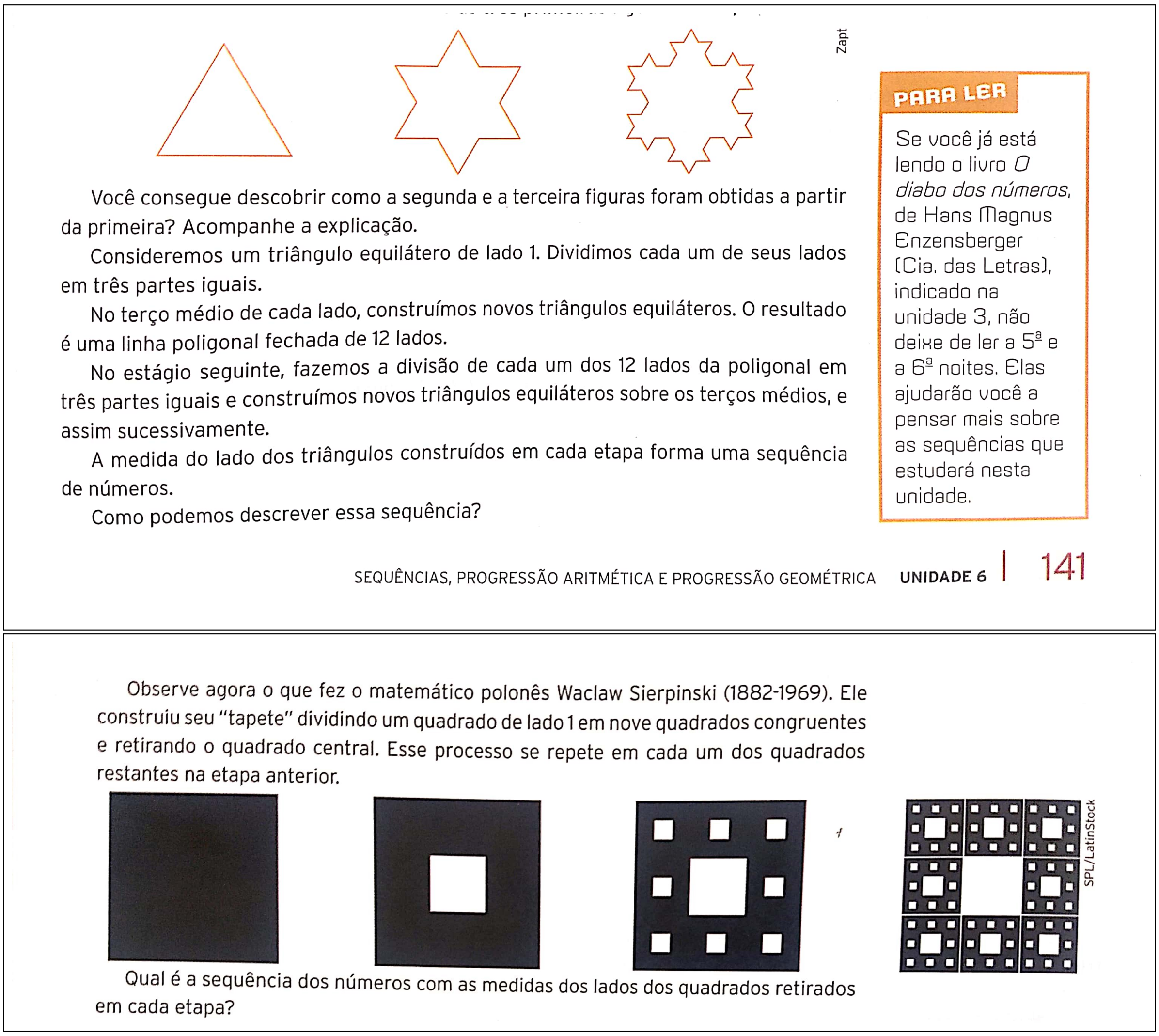


As figuras acima são conhecidas como **curva do floco de neve de Koch** e **tapete de Sierpinski**, respectivamente. A primeira é feita a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero e a segunda, no interior de um quadrado.

O matemático Helge von Koch, em 1904, obteve a primeira dessas figuras a partir de um triângulo equilátero de lado 1. Observe as três primeiras figuras da sequência.

Figura 3.14: Motivação do estudo de sequências, extraída do livro B

Depois, o livro detalha a construção de cada uma:



Zapt

Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira? Acompanhe a explicação.

Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números.

Como podemos descrever essa sequência?

PARA LER

Se você já está lendo o livro *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger (Cia. das Letras), indicado na unidade 3, não deixe de ler a 5ª e a 6ª noites. Elas ajudarão você a pensar mais sobre as sequências que estudará nesta unidade.

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA UNIDADE 6 | 141

Observe agora o que fez o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Ele construiu seu "tapete" dividindo um quadrado de lado 1 em nove quadrados congruentes e retirando o quadrado central. Esse processo se repete em cada um dos quadrados restantes na etapa anterior.

SPL/LatinStock

Qual é a sequência dos números com as medidas dos lados dos quadrados retirados em cada etapa?

Figura 3.15: Apresentação da construção da curva do floco de neve de Koch e do tapete de Sierpinski, extraída do livro B

Conforme vemos nas figuras, os alunos são desafiados a descrever o padrão de formação da curva do floco de neve de Koch. Destacamos dois pontos positivos nesse exemplo: primeiro, o livro apresenta uma sequência composta por figuras geométricas, ou seja, essa é uma sequência cujos termos são elementos da matemática, mas a sequência não é numérica; em segundo lugar, o livro estimula a elaboração de conjecturas e teste de hipóteses, conforme orientado na BNCC, na competência específica 5 (vide Seção 2.2).

Uma abordagem semelhante é feita em relação ao tapete de Sierpinski: o livro mostra os quatro primeiros passos da construção da mesma e os alunos são desafiados a calcular as medidas dos lados dos quadrados retirados. Mais uma vez, o livro não apresenta a resposta; agora, o aluno deverá procurar os termos de uma sequência numérica. Assim como na primeira figura, o estímulo é voltado à elaboração de conjecturas e ao teste de hipóteses.

A novidade desse exemplo é que o aluno formará uma sequência numérica associada a uma sequência, a princípio, não numérica.

Após esses exemplos motivadores, o livro apresenta a conceituação de sequências da seguinte forma:

> Para discutir problemas como esse é que vamos estudar, nesta unidade, sequências e progressões.
>
> Uma **sequência numérica** é uma organização de números. As sequências podem ter ou não uma lei de formação e podem ser finitas ou infinitas.
>
> Exemplos:
>
> a) (5, 5, 4, 8, 6, 9, 1, 2) é uma sequência finita dos algarismos que compõem o número de um telefone e não possui uma lei de formação.
>
> b) (4, 16, 64, ...) é uma sequência infinita de números naturais não nulos que são potências de 4. Essa sequência tem uma lei de formação bem simples: o primeiro termo é 4 e cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 4.
>
> As sequências que vamos estudar nesta unidade são infinitas e para elas cada número sucede o anterior de acordo com uma determinada regra, de tal modo que é sempre possível saber se um número pertence ou não à sequência.

Figura 3.16: Conceituação de sequências, feita no livro B

As sequências numéricas são apresentadas como uma "organização de números", mas a noção de "organização" é muito vaga, não sendo suficiente para que o aluno compreenda como são "organizados" os termos de uma sequência. O aluno pode imaginar, por exemplo, que números dispostos em uma matriz estão "organizados", sem necessariamente formarem uma sequência. O uso de uma expressão mais específica, a exemplo de "lista", seria mais adequado.

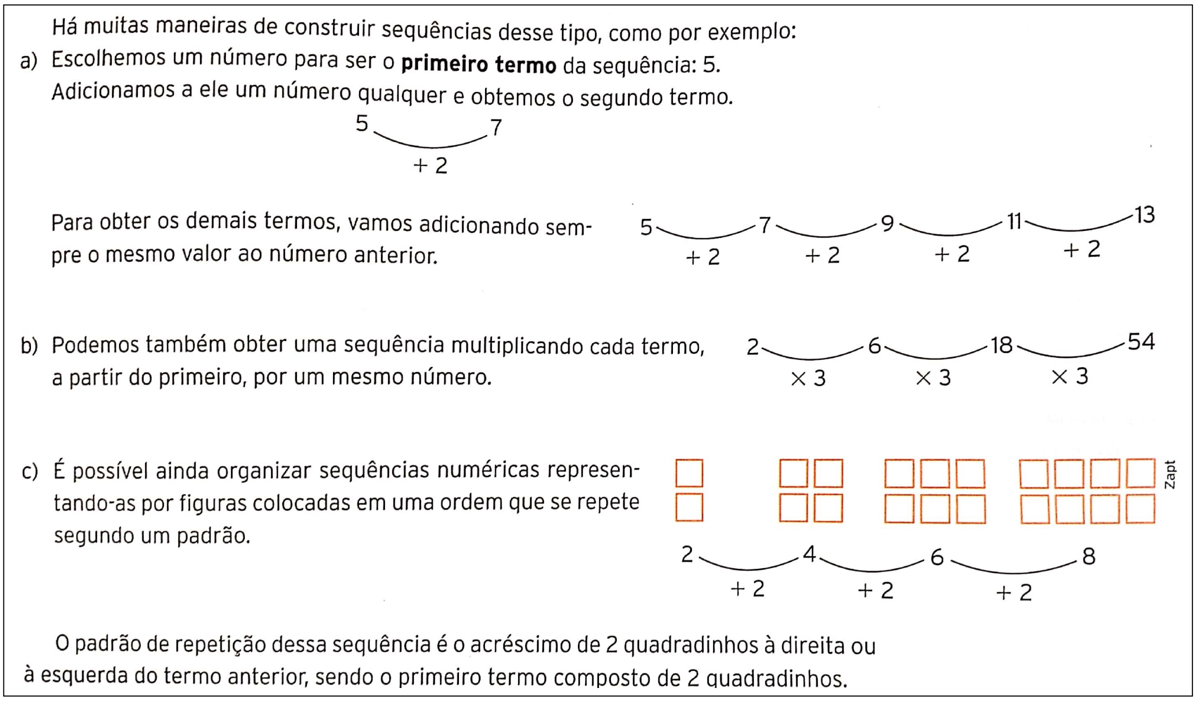
Ainda observando a conceituação, é dito que "as sequências podem ter ou não uma lei de formação", afirmação completamente falsa. As sequências são funções e, portanto, são formadas por dois conjuntos (domínio e contradomínio) e uma lei de formação, a qual mostra como cada elemento do primeiro conjunto se relaciona com um elemento do segundo. Logo, toda sequência terá uma lei de formação. O livro parece confundir lei de formação com expressão matemática, o que se confirmará na continuidade da análise do livro. Quando a lei de formação não é representada por uma expressão matemática, o livro trata as sequências correspondentes como se elas não possuíssem tal lei.

Por fim, é dito que as sequências podem ser finitas ou infinitas, sem apresentar cada uma separadamente. Porém, provavelmente essa foi a consequência de não apresentar a definição de sequência; o livro se restringiu a apresentar uma conceituação imprecisa.

Os exemplos apresentados na Figura 3.16 contemplam uma sequência finita e uma infinita, mas ambas são compostas apenas por números naturais, o que pode passar ao leitor a impressão de que os termos das sequências numéricas sempre serão números naturais. Outro erro é que no primeiro exemplo é dito que a sequência não tem uma lei de formação, quando na realidade existe uma lei de associação, que relaciona a primeira posição ao número 5, a segunda ao número 5, a terceira ao número 4 e assim sucessivamente.

O livro esclarece que apenas um tipo específico de funções será objeto de estudos posteriores: sequências infinitas com lei de formação fácil de ser identificada. Esse esclarecimento do livro é importante para os alunos saberem que a definição não se restringe aos tipos de sequências que serão estudadas a seguir. Porém, os alunos provavelmente já assimilaram a ideia restritiva de que toda sequência numérica é formada por números naturais, o que é claramente equivocado.

Dando continuidade, o livro mostra algumas formas de construir sequências:


Há muitas maneiras de construir sequências desse tipo, como por exemplo:

a) Escolhemos um número para ser o **primeiro termo** da sequência: 5.
Adicionamos a ele um número qualquer e obtemos o segundo termo.

$\underbrace{5 \quad 7}_{+2}$

Para obter os demais termos, vamos adicionando sempre o mesmo valor ao número anterior.

$\underbrace{5 \quad 7}_{+2}\underbrace{\quad 9}_{+2}\underbrace{\quad 11}_{+2}\underbrace{\quad 13}_{+2}$

b) Podemos também obter uma sequência multiplicando cada termo, a partir do primeiro, por um mesmo número.

$\underbrace{2 \quad 6}_{\times 3}\underbrace{\quad 18}_{\times 3}\underbrace{\quad 54}_{\times 3}$

c) É possível ainda organizar sequências numéricas representando-as por figuras colocadas em uma ordem que se repete segundo um padrão.

$\underbrace{2 \quad 4}_{+2}\underbrace{\quad 6}_{+2}\underbrace{\quad 8}_{+2}$

O padrão de repetição dessa sequência é o acréscimo de 2 quadradinhos à direita ou à esquerda do termo anterior, sendo o primeiro termo composto de 2 quadradinhos.

Figura 3.17: Sugestões de construção de sequências, extraída do livro B

Notamos claramente que as formas sugeridas têm a intenção de induzir os alunos a construir Progressões Aritméticas e Geométricas. Porém, imaginar que a construção de uma sequência se restringe a casos simples como esses induzirá o leitor a limitar sua compreensão do conceito de sequência. Além disso, a construção de uma sequência parece ser algo puramente abstrato e aleatório, sem relação com a realidade, o que se opõe à contextualização apontada pela BNCC, como mostramos no Capítulo 2.

Em seguida, sem qualquer ligação direto com o que foi dito antes, é apresentada a definição de sequências numéricas infinitas:

Podemos afirmar que:

Uma **sequência numérica infinita** é uma **função** cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Figura 3.18: Definição de sequências numéricas infinitas, no livro B

A sequência é definida como uma função com domínio sendo $\mathbb{N}$; nada foi dito a respeito do contradomínio ou da lei de formação da função. A lei de formação só foi apresentada em uma seção separada, o que não seria necessário. Além disso, a definição se restringe às sequências infinitas, sem dar margem para a existência de sequências finitas. Dessa forma, o exemplo de sequência finita apresentado anteriormente no próprio livro não foi contemplado nessa definição.

Após a definição, o livro apresenta a notação e o termo geral da sequência, na Figura 3.19:

Considere a sequência $f(n) = 2n$, onde $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Temos:

$f(1) = 2$ $\quad$ $f(2) = 4$ $\quad$ $f(3) = 6$ $\quad$ $f(4) = 8$ $\quad$ ...

Essa função nos dá a sequência dos números pares positivos que representamos por (2, 4, 6, 8, ...).

Geralmente indicamos por a_n a imagem de n pela função $f : f(n) = a_n$. Note que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ..., ou seja:

O índice n denota a posição do elemento ou termo a_n na sequência. a_n é chamado de **termo geral** da sequência.

Assim:
- a_1 é o primeiro termo da sequência;
- a_2 é o segundo termo da sequência;

⋮
- a_n é o n-ésimo termo, ou termo geral, da sequência;
- a_{n-1} é o antecessor de a_n;
- a_{n+1} é o sucessor de a_n.

Observe que $f(n) = 2n$ é uma função afim. Os pontos de seu gráfico estão sobre uma reta, embora o gráfico em si não seja uma reta, pois $D(f) = \mathbb{N}^*$.

Veja como ficaria o gráfico da sequência dada por $f(n) = 2n$:

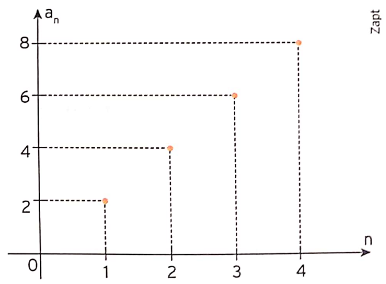


Figura 3.19: Notação e termo geral de uma sequência, no livro B

Um ponto positivo é que foi destacada a relação entre cada número natural do domínio, representado no índice da notação, e a posição de cada termo na sequência. Em seguida, vemos a representação gráfica da sequência. A variedade de representações atende às orientações da BNCC, em particular a competência específica 4 (vide Seção 2.2).

A seção seguinte apresenta a lei de formação da sequência e o respectivo termo geral, conforme exibido na Figura 3.20:

Analise o gráfico com os alunos e vejam o que mudaria nele se a função $f(n) = 2n$ fosse definida em $\mathbb{R}$. Aproveite para reforçar a compreensão de que em $\mathbb{N}^*$ o gráfico é de pontos e que o significado de *n*, na sequência (índice do termo), não permite que $n \in \mathbb{R}$.

2. Lei de formação ou expressão geral

Na sequência 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... temos:

1º termo	0	ou	$3 \cdot 0$
2º termo	3	ou	$3 \cdot 1$
3º termo	6	ou	$3 \cdot 2$
4º termo	9	ou	$3 \cdot 3$
5º termo	12	ou	$3 \cdot 4$
6º termo	15	ou	$3 \cdot 5$
⋮			
10º termo	27	ou	$3 \cdot 9$
⋮			
20º termo	57	ou	$3 \cdot 19$

Lembrando que para cada número *a* em $\mathbb{N}$ definimos seus múltiplos como sendo os números obtidos pelo produto de *a* por um número natural, observamos que a sequência acima é formada pelos múltiplos de 3 em $\mathbb{N}$.

Se chamarmos de *n* a posição de um termo da sequência, o n-ésimo termo pode ser representado por $3(n - 1)$ ou $3n - 3$.

A expressão $3(n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, permite calcular qualquer termo da sequência dos múltiplos de 3.

Dizemos que $3(n - 1)$ é a **expressão geral** ou **lei de formação** dessa sequência e que *n* é a **variável** da expressão geral.

$a_n = 3(n - 1)$ é o **termo geral** dessa sequência para $n \in \mathbb{N}^*$.

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA UNIDADE 6 | 143

Figura 3.20: Lei de formação e termo geral de uma sequência, no livro B

Mais uma vez, a lei de formação é apresentada em uma seção separada, aparentando que essa seja uma novidade, sem relação direta com o conceito de sequência. Seria adequado destacar a existência da lei de formação logo após a definição, tendo em vista que os alunos já estudaram funções e têm o conhecimento de que toda função tem uma lei de formação.

Além disso, confirmamos a hipótese levantada anteriormente: a lei de formação é apresentada como se fosse restrita às fórmulas matemáticas. A tabela apresenta os termos de uma sequência e a expressão algébrica correspondente a cada um; logo após a tabela, é feita a conclusão da fórmula matemática que pode ser utilizada para descrever qualquer termo. Não foram feitos comentários sobre a possibilidade da lei de formação ser expressa graficamente, como já havia sido exibido na Figura 3.19.

O livro continua sua apresentação do conteúdo, mostrando três formas de obter as leis de formação de uma sequência numérica, como vemos na Figura 3.21:

n	n^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
...	...
25	625

Um outro exemplo pode ser dado por:

Se $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 é a expressão geral ou lei de formação da sequência 1, 4, 9, 16, ... de quadrados perfeitos.

$a_n = n^2$ é o termo geral dessa sequência, sendo $n \in \mathbb{N}^*$.

De modo geral, as sequências numéricas obedecem a uma lei de formação, que pode aparecer de três maneiras.

1. Lei de formação pelo termo geral a_n

Nesse caso, cada termo é expresso em função de sua posição, ou seja, é dada uma fórmula que exprime a_n em função n.

Exemplo:

Seja a sequência cujos termos são dados por $x_n = 1 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Temos:

- $n = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$;
- $n = 2 \Rightarrow x_2 = 1 + 4 \cdot 2 = 9$;
- $n = 3 \Rightarrow x_3 = 1 + 4 \cdot 3 = 13$;
- $n = 4 \Rightarrow x_4 = 1 + 4 \cdot 4 = 17$;
- $n = 100 \Rightarrow x_{100} = 1 + 4 \cdot 100 = 401$.

Assim, a sequência é (5, 9, 13, 17, ..., 401, ...).

2. Fórmula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo a_1 e outra para calcular cada termo a_n a partir dos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots$

Exemplo:

Seja a sequência cujos termos obedecem às condições:

$$\begin{cases} a_1 = 3 & \text{(o primeiro termo é 3)} \\ a_n = a_{n-1} + 4,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 & \text{(lei de formação dos demais termos)} \end{cases}$$

Vamos calcular o 2º, o 3º e o 4º termos:

- $n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 4 \Rightarrow a_2 = 7$;
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 4 \Rightarrow a_3 = 11$;
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 4 \Rightarrow a_4 = 15$.

Logo, a sequência é (3, 7, 11, 15, ...).

3. Propriedade exclusiva dos termos

É dada uma propriedade que caracteriza os termos da sequência.

Exemplo:

Vamos escrever os 6 primeiros termos da sequência em que cada um é a soma dos divisores do respectivo índice.

Em $\mathbb{N}$, um número natural a é divisor de $b \in \mathbb{N}$ se b é da forma $b = a \cdot n$ para algum valor $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, dizemos também que b é divisível por a em $\mathbb{N}$.

Assim:

- o divisor de 1 é 1 $\Rightarrow a_1 = 1$;
- os divisores de 2 são 1 e 2 $\Rightarrow a_2 = 1 + 2 = 3$;
- os divisores de 3 são 1 e 3 $\Rightarrow a_3 = 1 + 3 = 4$;
- os divisores de 4 são 1, 2 e 4 $\Rightarrow a_4 = 1 + 2 + 4 = 7$;
- os divisores de 5 são 1 e 5 $\Rightarrow a_5 = 1 + 5 = 6$;
- os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6 $\Rightarrow a_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Portanto, a sequência é (1, 3, 4, 7, 6, 12, ...).

144 | PARTE 1 NÚMEROS, ESTATÍSTICA E FUNÇÕES

Figura 3.21: Formas de obter a lei de formação de uma sequência apresentadas no livro B

Foram contempladas diversas formas para obter o termo geral, o que deve ajudar os alunos a resolverem os exercícios propostos no livro, mas permanece a ideia restrita de lei de formação como sendo uma fórmula matemática. Notamos uma tentativa desnecessária de classificar todas as leis de formação. Destacamos que a fórmula de recorrência foi apresentada de tal modo que nem a sequência de Fibonacci se enquadraria em tal descrição: o livro diz que existe uma regra para o primeiro termo e outra para que cada termo seguinte seja calculado com base no antecessor; porém, na sequência de Fibonacci precisamos de mais que um termo anterior para encontrarmos os demais. Em geral, para que uma sequência seja definida por uma fórmula de recorrência, devem ser definidos os n primeiros termos e, em seguida, uma regra de associação para encontrar os termos seguintes com base nos anteriores.

Além dessa restrição, notamos um problema ainda mais amplo: a abordagem induz o aluno a pensar que primeiro conheceremos a função que descreve a sequência para depois encontrarmos a sequência, quando na verdade o caminho é o inverso.

3.3 Apresentação de sequências numéricas na página eletrônica 1

Na primeira página eletrônica analisada, a abordagem também começa com exemplos de sequências numéricas e não numéricas, conforme exibido na Figura 3.22.

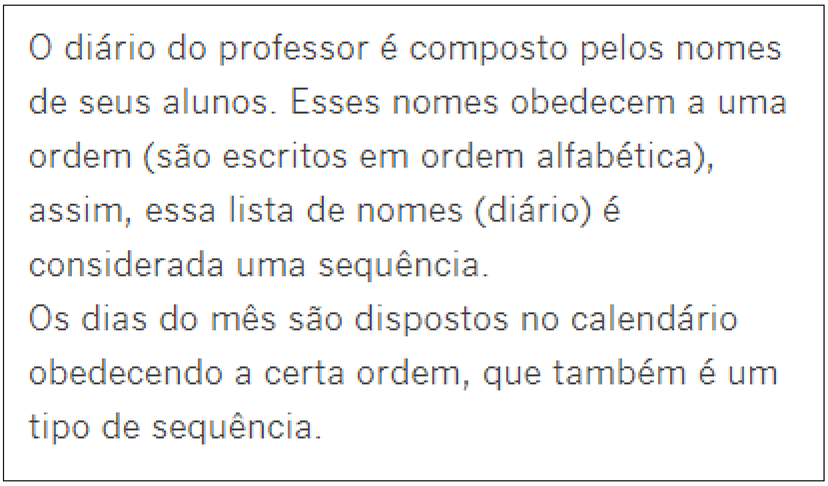

O diário do professor é composto pelos nomes de seus alunos. Esses nomes obedecem a uma ordem (são escritos em ordem alfabética), assim, essa lista de nomes (diário) é considerada uma sequência.
Os dias do mês são dispostos no calendário obedecendo a certa ordem, que também é um tipo de sequência.

Figura 3.22: Exemplos de sequências na página eletrônica 1

Percebemos que a expressão “ordem” é utilizada para se referir à posição de cada termo na sequência. No Capítulo 5, mostraremos a ambiguidade existente no uso da palavra “ordem”, devido ao seu uso em diferentes contextos na matemática.

Destacamos que a página eletrônica associa o conceito de sequência à ideia de lista. Conforme veremos na subseção 4.1, tal associação é apropriada.

Após apresentar os exemplos de sequências, a página eletrônica 1 se propõe a apresentar a definição como mostrado na Figura 3.23.

> Esses e vários outros exemplos de sequência estão presentes em nosso cotidiano. Observando-os, podemos definir sequência como:
>
> Sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem.

Figura 3.23: Definição de sequências na página eletrônica 1

Inicialmente, destacamos que o texto apresentado não é a definição de sequência, pois não foi apresentada como sendo uma função. Além disso, o texto utiliza as expressões “conjunto” e “grupo” fora de seu sentido formal. Entendemos que o texto destacado em azul na Figura 3.23 pode ser considerado como uma tentativa de conceituação de sequências, mas não como a definição formal de sequências. Ainda assim, a tentativa de conceituação confunde a definição de sequência, a definição de conjunto e a definição de grupo, dificultando a compreensão do conceito de sequência. Existe uma definição matemática para “‘grupos”, conforme apresentado por Domingues e Iezzi (2003):

Definição 3.1 *Um **grupo** é um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G, munido de uma operação* $(a,b) \mapsto a*b$ *sobre G com as propriedades de associatividade, existência do elemento neutro e da existência de elementos inversos.*

Exemplo 3.1 *Exemplo e contraexemplo de grupo:*

1. *O conjunto* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *munido da operação de adição possui as propriedades de associatividade e da existência de elemento neutro, mas não existem os elementos inversos. Logo,* $\mathbb{N}$ *munido da adição não é um grupo;*

2. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *munido da operação de adição possui as propriedades de associatividade, existência do elemento neutro e existência dos elementos inversos. Logo,* $\mathbb{Z}$ *munido da operação de adição é um grupo.*

No ensino básico os alunos não terão estudado grupos, por isso utilizar essa palavra não chega a prejudicar a compreensão dos alunos, apesar de não estar formalmente correto. A expressão “grupo” foi apresentada como sinônimo de conjunto, o que levará os alunos a pensarem em uma coleção de elementos. Porém, a ideia de conjuntos não é associável à de sequência, pelos motivos que detalharemos agora:

- Em um conjunto, não existem elementos repetidos. Por outro lado, em uma sequência podem existir termos iguais. Por exemplo, o conjunto $A = \{1,3,5,7\}$ não pode ter elementos que se repetem. Já $(1,3,3,5,5,5,7,7,7,7)$ é uma sequência, na qual termos diferentes apresentam o mesmo número;

- A posição dos elementos em um conjunto não interfere sua formação. Já em uma sequência, se invertermos a posição de seus termos, criamos uma nova sequência. Por exemplo, os conjuntos $\{1,3,5,7\}$ e $\{3,7,5,1\}$ são iguais; já as sequências $(1,3,5,7)$ e $(3,7,5,1)$ são diferentes;

- Tendo em vista que uma sequência é uma função, sabemos que ela é composta por dois conjuntos (o domínio, que será $\mathbb{N}$ ou um subconjunto finito com os primeiros números naturais, e o contradomínio) e uma lei de formação. No livro, quando a sequência foi "definida" como um conjunto, o domínio, o contradomínio e a lei de formação sequer foram mencionados.

Por fim, a página eletrônica afirma que os elementos estarão escritos em uma "determinada ordem", usando a expressão "ordem" no mesmo contexto usado na motivação do conteúdo, como apresentado na Figura 3.22, referindo-se à posição de cada elemento. Mais uma vez, ressaltamos que o uso da palavra "ordem" em diferentes contextos matemáticos será detalhado no Capítulo 5.

A página eletrônica 1 apresenta uma noção abrangente de sequências, mostrando a possibilidade delas serem numéricas ou não. Para dar continuidade ao conteúdo, a página 1 apresenta uma conceituação mais específica de sequências numéricas, junto com alguns exemplos, utilizando a representação numérica:

No estudo da matemática estudamos um tipo de sequência: a sequência numérica. Essa sequência que estudamos em matemática é composta por números que estão dispostos em uma determinada ordem preestabelecida.

Ao representarmos uma sequência numérica, devemos colocar seus elementos entre parênteses. Veja alguns exemplos de sequências numéricas:

• (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...) é uma sequência de números pares positivos.
• (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...) é uma sequência de números naturais.
• (10, 20, 30, 40, 50...) é uma sequência de números múltiplos de 10.
• (10, 15, 20, 30) é uma sequência de números múltiplos de 5, maiores que cinco e menores que 35.

Figura 3.24: Conceituação de sequências numéricas na página eletrônica 1

Mais uma vez, é dito que os números estão dispostos em uma "ordem" pré-estabelecida, sem esclarecer que tipo de "ordem" está sendo considerada. Logo em seguida, são apresentados exemplos com características comuns a todos: as sequências apresentadas são crescentes e seus termos são números naturais. A falta de variedade nos exemplos apresentados, junto com a falta de clareza da expressão "ordem'", induz o aluno a pensar que as sequências numéricas sempre serão crescentes, com todos os termos sendo números naturais. No capítulo 5, mostraremos formalmente como a palavra "ordem" tem diferentes significados em contextos distintos e como evitar essa ambiguidade.

Além dessas falhas, no último exemplo da Figura 3.24, o termo 25 deveria ser encontrado entre os termos 20 e 30, pois esta é a sequência dos múltiplos de 5 maiores que 5 e menores que 35.

Por fim, o fato de que as sequências são funções continua sem ser apresentado. A página já passa a apresentar a conceituação e a representação das sequências numéricas, classificando as sequências numéricas como finitas ou infinitas:

Essas sequências são separadas em dois tipos:
• Sequência finita é uma sequência numérica na qual os elementos têm fim, como, por exemplo, a sequência dos números múltiplos de 5 maiores que 5 e menores que 35.

• Sequência infinita é uma sequência que não possui fim, ou seja, seus elementos seguem ao infinito, por exemplo: a sequência dos números naturais.

Figura 3.25: Classificação das Sequências Numéricas na página eletrônica 1

A classificação foi feita para distinguir sequências finitas e infinitas. Pela falta de definição formal, a página eletrônica 1 passa a utilizar expressões sem sentido matemático: "os elementos têm fim", "sequência que não tem fim", "seus elementos seguem ao infinito". Com o uso da definição, bastaria esclarecer que para a sequência finita o domínio será um conjunto finito com os primeiros números naturais, enquanto que para a sequência infinita o domínio será todo o conjunto $\mathbb{N}$.

Somente após classificar as sequências, a página eletrônica 1 apresenta a lei de formação de apenas uma sequência:

Para obtermos os elementos de uma sequência é preciso ter uma lei de formação da sequência. Por exemplo:

Determine os cinco primeiros elementos de uma sequência tal que an = 10^n + 1, n N*

a1 = 10^1 + 1 = 10 + 1 = 11

a2 = 10^2 + 1 = 100 + 1 = 101

a3 = 10^3 + 1 = 1000 + 1 = 1001

a4 = 10^4 + 1 = 10000 + 1 = 10001

a5 = 10^5 + 1 = 100000 + 1 = 100001

Portanto, a sequência será (11, 101, 1001, 10001, 100001).

Figura 3.26: Lei de formação de sequências numéricas na página eletrônica 1

A apresentação da lei de formação também foi feita de forma estranha: é dito que através da lei de formação os alunos irão obter os elementos da sequência. Passa-se a ideia de que o processo inverso não aconteça; porém, em situações práticas, é comum conhecermos primeiro os elementos e só depois procurarmos a lei de formação da sequência.

A lei de formação foi apresentada como se fosse uma novidade, sem se fazer menção ao fato de que as sequências numéricas são funções e que, por definição, devem ter uma lei de formação.

Notamos ainda uma falha tipográfica na notação utilizada, que deixou os índices aparecerem como números à frente do caractere (an), em vez de estar na posição usual de um índice (a_n). Além disso, o caractere $\in$ não aparece na tela; dessa forma, provavelmente o aluno não compreenderá os símbolos n $\mathbb{N}^*$, no final da lei de formação.

No único exemplo apresentado, a lei de formação é expressa por uma fórmula, o que tendencia os alunos a pensar erroneamente que toda sequência tem uma lei de formação que seja representada por uma expressão matemática.

Após a apresentação da lei de formação, a página eletrônica 1 apresenta a notação utilizada para representar sequências, como vemos na Figura 3.27:

Em uma sequência numérica qualquer, o primeiro termo é representado por a_1, o segundo termo é a_2, o terceiro a_3 e assim por diante. Em uma sequência numérica desconhecida, o último elemento é representado por an. A letra n determina o número de elementos da sequência.

(a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n, ...) sequência infinita.

(a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n) sequência finita.

Figura 3.27: Apresentação da notação para as sequências numéricas na página eletrônica 1

Tipograficamente, o índice agora é corretamente posicionado em quase todos os termos, exceto o *an* que aparece no texto. Matematicamente, o índice é devidamente associado à posição do termo na sequência. Porém, a relação com a definição de função continua sem ser apresentada. Na Seção 4.3, apresentamos essa relação e uma sugestão de como apresentá-la para os alunos do ensino médio.

Além disso, comete-se o equívoco de dizer que o último termo de uma sequência finita é representado por a_n. Nos exemplos apresentados, notamos a inconsistência do que foi falado a respeito do termo a_n: na sequência infinita também foi representado um termo a_n. Se a notação a_n fosse específica para o último termo da sequência, então qual seria o último termo dessa sequência infinita? Na realidade essa é a representação do n-ésimo termo da sequência, independente de ser o último ou não.

Para finalizar, destacamos que a definição formal não foi apresentada em nenhum momento, enquanto os conceitos apresentados induzem o aluno a ter uma noção restrita e equivocada de sequência. Além disso, os registros utilizados para representar as sequências foram apenas o numérico e o algébrico, limitando o contato do aluno com as sequências numéricas, conforme apresentado por Trindade et al. (2016) a respeito da teoria de Duval. Finalmente, não foi proposto nenhum exemplo contextualizado, para que o aluno visse alguma aplicação do conteúdo ou fosse estimulado a raciocinar e desenvolver estratégias de resolução de problemas, conforme as orientações da BNCC que apresentamos no Capítulo 2.

3.4 Apresentação de sequências numéricas na página eletrônica 2

Observemos agora a segunda página virtual selecionada. Ela apresenta uma proposta de definição de sequência conforme vemos na Figura 3.28:

Sequência Numérica

Compartilhar Enviar Email

Na matemática, a **sequência numérica ou sucessão numérica** corresponde a uma função dentro de um agrupamento de números. De tal modo, os elementos agrupados numa sequência numérica seguem uma sucessão, ou seja, uma ordem no conjunto.

Figura 3.28: Definição de sequências na página eletrônica 2

A associação de uma sequência com uma função foi acertada, mas não há clareza em várias expressões utilizadas: não existe uma "função dentro de um agrupamento de números", mas sim uma função que associa elementos de dois conjuntos por meio de uma lei de formação; também não fica claro o que seriam "elementos agrupados numa sequência numérica". Por fim, a definição apresenta corretamente sequências e sucessões como sinônimos, mas depois também apresenta sucessão e ordem como sinônimos. Assim, o aluno concluíra que "a sucessão tem elementos que seguem uma sucessão", o que não tem qualquer sentido lógico. Essa proposta de definição causa confusões na compreensão do leitor e impede o entendimento da definição.

Outro ponto a ser destacado é a apresentação de sucessão e ordem como sinônimos: "seguem uma sucessão, ou seja, uma ordem". Na realidade, sucessão e ordem tratam-se de conceitos distintos na matemática. Sucessão e sequência são sinônimos; já a expressão "ordem" pode ser usada para se referir à posição de um elemento em uma lista ou para comparar dois elementos de um conjunto, conforme detalharemos no Capítulo 5. A palavra "sucessão" não deveria ser utilizada como sinônimo de ordem.

Após a definição, a página eletrônica 2 classifica as sequências em dois tipos: finitas e infinitas:

Classificação

As sequências numéricas podem ser finitas ou infinitas, por exemplo:

$S_F = (2, 4, 6, ..., 8)$

$S_I = (2,4,6,8...)$

Note que quando as sequências são infinitas, elas são indicadas pelas reticências no final.

Figura 3.29: Classificação de sequências finitas e infinitas na página eletrônica 2

É interessante observar que a diferença entre sequências finitas e infinitas não foi apresentada na conceituação de sequências, diferente dos livros que apresentavam as duas definições separadas. Porém, a ausência dessa diferenciação se deve em parte ao fato de que a definição formal de sequências como funções não foi corretamente apresentada; quando detalhamos essa definição, naturalmente é preciso mencionar se o domínio é todo o conjunto $\mathbb{N}$ ou apenas um número finito dos primeiros números naturais.

Destacamos ainda que as representações das sequências foram exibidas sem nenhum esclarecimento: não foi recomendado o uso de parênteses; não foi dito que a posição de cada termo indica o número natural ao qual ele está associado; também não foi feita uma relação entre a definição apresentada inicialmente e a representação numérica. O leitor que enxerga essa representação não consegue associá-la a uma função.

Outro ponto que destacamos é a falta de variedade nos exemplos: ambos apresentam exatamente os mesmos números como termos das sequências. Como nada foi falado a respeito da lei de formação, é muito provável que o leitor subentenda que as sequências são compostas pelos números pares. Mas, se fosse esse o caso, o que significariam as reticências entre os números 6 e 8, na sequência S_F? A página eletrônica 2 dedica uma seção específica para tratar sobre a lei de formação, então voltaremos a comentar sobre esse ponto quando comentarmos sobre essa seção, nos comentários sobre a figura 3.31.

Logo após a classificação, ainda na mesma seção, é apresentada a notação utilizada para representar as sequências, conforme vemos na figura a seguir:

Além disso, vale lembrar que os elementos da sequência são indicados pela letra a. Por exemplo:

1° elemento: $a_1 = 2$

4° elemento: $a_4 = 8$

O último termo da sequência é chamado de enésimo, sendo representado por a_n. Nesse caso, o a_n da sequência finita acima seria o elemento 8.

Assim, podemos representá-la da seguinte maneira:

$S_F = (a_1, a_2, a_3,...,a_n)$

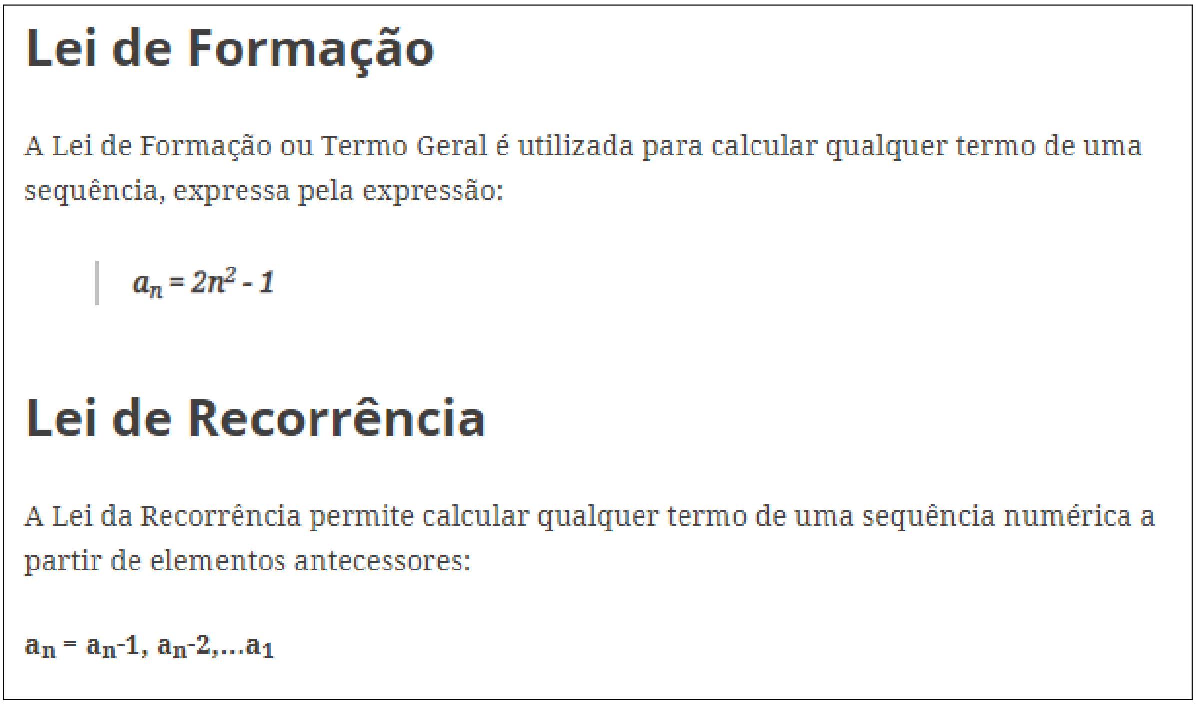
$S_I = (a_1, a_2, a_3, a_n...)$

Figura 3.30: Notação de sequências na página eletrônica 2

Inicialmente, a expressão “vale lembrar” passa a impressão de que a notação já havia sido apresentada anteriormente, o que não acontece nessa página. Outro problema é não associar a notação à definição. Uma opção seria retomar a definição apresentada na Figura 3.28, onde é dito que a sequência é uma função; então, seria possível denotar a função por a. Como consequência, a imagem de cada elemento n do domínio seria $a(n)$, sendo possível denotar $a(n) = a_n$. A abordagem que sugerimos esclareceria a relação entre a definição e a notação. No Capítulo 4 seguiremos essa abordagem e apresentaremos mais detalhes sobre a notação utilizada para representar sequências na Seção 4.3.

Ainda a respeito da notação, destacamos o aspecto positivo de associar o índice e a posição de cada termo, o que é realmente importante. Porém, assim como na página analisada anteriormente, é dito que o último termo de uma sequência é denotado por a_n. Em seguida, quando são apresentadas uma sequência finita e uma infinita, o aluno pode se perguntar qual seria o significado do termo a_n, já que a sequência infinita não possui um último termo. Além disso, no exemplo apresentado não há dúvidas de que esse termo seria o a_4, por se tratar do quarto elemento da sequência.

Após apresentar a notação, a página eletrônica 2 apresenta a lei de formação de uma sequência:



Lei de Formação

A Lei de Formação ou Termo Geral é utilizada para calcular qualquer termo de uma sequência, expressa pela expressão:

$a_n = 2n^2 - 1$

Lei de Recorrência

A Lei da Recorrência permite calcular qualquer termo de uma sequência numérica a partir de elementos antecessores:

$a_n = a_n\text{-}1, a_n\text{-}2, \ldots a_1$

Figura 3.31: Lei de formação de uma sequência na página eletrônica 2

De forma imediata, notamos que lei de formação e a lei de recorrência são apresentadas em seções distintas, como se fossem independentes, quando na verdade a lei de recorrência é uma das possibilidades de lei de formação de uma sequência. Além disso, a lei de formação é um dos elementos necessários para definir uma função; logo, já deveria ser mencionada desde que a definição foi apresentada.

Agora, notamos que a lei de formação e o termo geral são apresentados como sinônimos. Em seguida, é dito que essa lei é utilizada para "calcular" qualquer termo de uma sequência. Tal explicação torna-se bastante restrita, por não abranger as possibilidades em que a sequência seja expressa através da língua materna ou não exista uma fórmula que expresse a lei de formação.

Em seguida, o único exemplo dado apresenta uma lei de formação expressa por uma fórmula. Vale salientar que a página eletrônica 2 não esclarece que a fórmula mostrada trata-se apenas de um exemplo; é possível que um leitor entenda que essa fórmula seja utilizada para qualquer sequência.

Na seção "Lei de Recorrência", é dito que essa lei permite calcular qualquer termo da sequência com base nos termos anteriores, o que é adequado para uma noção geral do conceito. Porém, como vemos na Figura 3.31, foi apresentada uma notação que não tem sentido matemático. No Capítulo 4, faremos uma proposta de abordagem diferente, para resolver este problema.

A página eletrônica 2 encerra a apresentação sobre o conteúdo propondo um exercício resolvido:

Exercício Resolvido

Para compreender melhor o conceito de sequência numérica, segue abaixo um exercício resolvido:

1) Seguindo o padrão da sequência numérica, qual o próximo número correspondente nas sequências abaixo:

a) (1, 3, 5, 7, 9, 11,...)
b) (0, 2, 4, 6, 8, 10,...)
c) (3, 6, 9, 12,...)
d) (1, 4, 9, 16,...)
e) (37, 31, 29, 23, 19, 17,...)

Figura 3.32: Exercício resolvido sobre sequências na página eletrônica 2

O enunciado afirma que o exercício foi proposto para ajudar na compreensão do conceito de sequência. Porém, o exercício se limita a propor uma busca intuitiva pelo padrão (a lei de formação) de cada sequência, para que seja determinado o termo seguinte.

Notamos que todos os exercícios propostos são extremamente simples e todas as sequências apresentadas são formadas por números naturais. O aluno pode ter a impressão de que o contradomínio das sequências se restringe a $\mathbb{N}$. Além disso, é possível que o leitor tenha a impressão de que a lei de formação sempre segue um padrão identificável de forma intuitiva ou que toda lei de formação seja expressa por uma fórmula matemática. Logo, seria importante diversificar os exemplos e deixar os conceitos e definições mais abrangentes, a fim de contemplar todos os casos possíveis de sequências numéricas.

Capítulo 4

Sugestões para Apresentação de Sequências Numéricas o Ensino Médio

Conforme vimos no Capítulo 3, as páginas eletrônicas e livros didáticos analisados apresentaram dificuldades para conceituar sequências ao introduzir o conteúdo. As explicações de que sequências seriam conjuntos ou grupos estão claramente equivocadas (ver Figura 3.23), a explicação de que a sequência é uma "função dentro de um agrupamento de números" (ver Figura 3.28) ou de que uma sequência numérica é uma "organização de números" (ver Figura 3.16) não tem sentido matemático. Apenas o livro A evitou tais confusões, optando pela apresentação das sequências como funções logo no início do capítulo (ver Figuras 3.3 e 3.4).

Por entendermos a necessidade didática de contextualizar o conceito antes de apresentar a definição formal, percebemos a necessidade de encontrar uma forma adequada de apresentar o conceito de sequências. Para isso, apresentaremos exemplos variados, os quais serão representados por meio de diferentes registros de representação semiótica, incluindo o uso de "listas", por se tratar de uma noção conhecida pelos alunos e que pressupõe o posicionamento de cada elemento como parte da sua formação. Tal ideia é compatível com a definição de sequência, conforme apresentaremos na Seção 4.2 e a noção de ordem posicional, conforme apresentaremos no Capítulo 5.

4.1 Propostas de exemplos de sequências numéricas e abordagens de ensino

Inicialmente, iremos nos referir às sequências como "listas", para utilizar uma palavra informal que facilite a compreensão dos alunos. Para termos certeza de que a noção de lista é adequada, verificamos sua correspondência com a definição de sequência, conforme apresentaremos na Seção 4.2.

É importante ressaltar que as sequências são definidas como funções, as quais foram estudadas anteriormente. Logo, ao apresentar esse conteúdo, o professor do ensino médio terá a oportunidade de mostrar a importância das funções, através de suas aplicações em vários conteúdos matemáticos.

A apresentação do conteúdo será feita a partir de exemplos contextualizados, com os propósitos de: motivar o estudo do conteúdo, mostrar ao aluno que o conteúdo faz parte de seu cotidiano e tornar o conceito o mais natural possível. Essa forma de apresentação segue o que é orientado nas competências 2 e 7 da BNCC (ver seção 2.1), segundo as quais os alunos devem ser capazes de utilizar a criatividade intelectual para resolver problemas, utilizando situações reais.

Destacamos que a diversidade de exemplos é fundamental na construção de novos conceitos. Os exemplos devem apresentar os mais variados casos, a fim de que o aluno não construa uma noção restrita do conteúdo, sem contemplar todos os casos. Nos exemplos selecionados, apresentaremos sequências finitas e infinitas, algumas monótonas e outras não, algumas com lei de formação possível de expressar por meio de fórmulas, outras não. Dentre as sequências numéricas, apresentaremos exemplos cujos contradomínios das funções correspondentes variavam, entre naturais, inteiros e racionais.

Também destacamos a importância de utilizar diferentes registros de representação semiótica durante a apresentação do conteúdo, bem como realizar tratamentos e conversões entre eles, para que a compreensão do aluno seja facilitada, conforme defendido por Trindade et al. (2016), ao apresentar a teoria de Duval. Em nossas propostas, temos o cuidado de variar os registros de representação utilizados.

Para motivar o estudo de sequências, sugerimos a utilização de problemas com valor histórico, conforme recomenda a BNCC (ver Capítulo 2, na página 14). O primeiro problema que apresentaremos aqui foi proposto pelos membros da escola de Pitágoras [1]:

Exemplo 4.1 *Na figura 4.1, o número de pontos em cada triângulo é chamado de* ***número triangular****:*

[1] A escola de Pitágoras era um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais existente na Grécia Antiga (EVES, 2004)

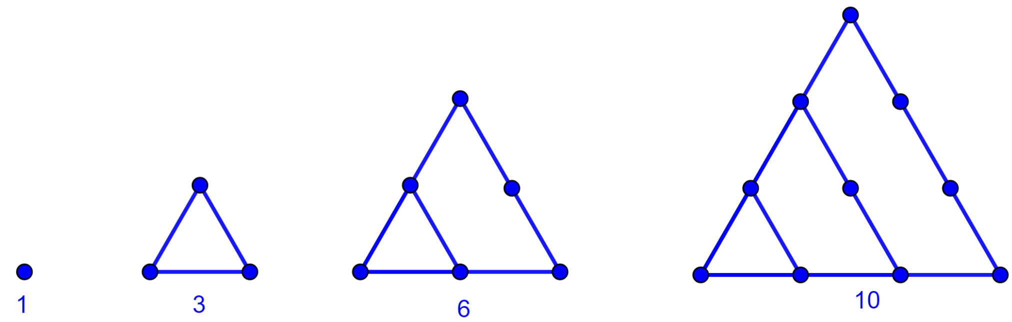


Figura 4.1: Representação gráfica dos números triangulares

Continuando a construção dos triângulos e contando os pontos em cada um, formamos uma lista de números triangulares:

$$(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 \cdots)$$

Uma proposta de exercício interessante é desafiar os alunos a determinar os próximos números triangulares. Esse desafio estimula o aspecto intuitivo e a formulação de conjecturas, conforme recomendado na competência específica 5 da BNCC (ver Seção 2.2, na página 17). O aluno pode perceber, por exemplo, que o número de pontos que será acrescentado em cada passo é igual à posição da figura na lista:

1º número triangular: 1 ponto

2º número triangular: acrescento 2 pontos: 3

3º número triangular: acrescento 3 pontos: 6

4º número triangular: acrescento 4 pontos: 10

$\vdots$

Outra proposta é que, após encontrar um padrão, os alunos tentem expressar algebricamente este valor. O desenvolvimento da capacidade de representar os objetos matemáticos com diferentes registros de representação está previsto na competência específica 4 da BNCC (ver Seção 2.2) e segue às orientações de Duval, conforme apresentadas por Trindade et al. (2016). Pode ser proposto que eles utilizem a notação de função. Uma representação para a conjectura que apresentamos seria:

$$f(n) = f(n-1) + n.$$

Exemplo 4.2 *Um casal de coelhos recém-nascidos foi colocado num campo. Sabe-se que um casal de coelhos dá à luz um novo casal a cada mês, a partir do segundo mês de vida deles. Considerando que este casal e seus filhotes não tenham problemas que impossibilitem a fertilidade, quantos pares (casais) de coelhos haverá ao final de um ano?*

Este exemplo é o famoso problema dos coelhos, proposto por Fibonacci em seu livro *Liber Abaci* [2]. Esse problema leva à construção da conhecida **Sequência de Fibonacci**. Nós propomos o uso desse exemplo por ser bastante claro para os alunos e por ter valor histórico, pois motivou o estudo de uma sequência que tem diversas aplicações relacionadas à arte, à biologia, à arquitetura, entre outros. Tal preocupação com o fator histórico segue o que está previsto na competência 1 da BNCC (ver Seção 2.1). Mais ainda, esse problema caiu no gosto popular e essa sequência é bastante conhecida, mesmo por pessoas que não são pesquisadoras da matemática.

Podemos colocar em uma tabela o número de casais de coelhos:

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Também podemos representar o número de casais de coelhos em cada mês na forma de uma lista ordenada:

$$(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144)$$

Observe que a soma de dois termos consecutivos corresponde ao termo seguinte. Tal fato pode ser compreendido da seguinte forma: o número de casais de coelhos no mês i, denotado por a_i, será igual ao número de casais de coelhos que já tínhamos no mês anterior, denotado por a_{i-1}, mais o número de casais de coelhos recém-nascidos. Mas quantos casais de coelhos recém-nascidos temos em cada mês?

Cada casal maduro para procriar no mês i gera exatamente um casal de filhotes, então o número de casais recém-nascidos é igual ao número de casais maduros para procriar no mês i. Quais casais estão maduros para procriar em cada mês? Os que nasceram pelo menos dois meses antes, que denotamos por a_{i-2}.

Dessa forma, a_{i-2} corresponde ao numero de casais maduros para procriar, que irão reproduzir e gerar um novo casal neste mês. Já a_{i-1} representa o número de coelhos que já tínhamos no mês anterior. Logo,

$$a_{i-2}+a_{i-1}=a_i,$$

ou seja, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.

Exemplo 4.3 *A cidade de Campina Grande, Paraíba, e suas cidades circunvizinhas, são abastecidas pelo açude Epitácio Pessoa, localizado no município de Boqueirão, PB. O gráfico na Figura 4.2 informa os volumes de água do reservatório em um período de 12 meses consecutivos:*

Destacamos que esse exemplo é de nossa autoria, os quais têm os objetivos de abranger casos mais diversificados, de atender às recomendações da BNCC e de explorar diversos registros de representação semiótica.

[2] Os leitores da língua inglesa podem ter acesso a uma tradução da obra, feita por Sigler (2002)

Açude	Data do registro	Volume (%)	Volume (m³)	Aporte (m²)
Epitácio Pessoa	31/08/2017	8,40	34.590.327,44	65.971,32
Epitácio Pessoa	30/09/2017	8,63	35.513.925,92	0
Epitácio Pessoa	31/10/2017	9,24	38.020.836,08	0
Epitácio Pessoa	30/11/2017	9,30	38.284.721,36	0
Epitácio Pessoa	31/12/2017	9,66	39.769.906,88	0
Epitácio Pessoa	31/01/2018	10,26	42.250.852,16	75.180,16
Epitácio Pessoa	28/02/2018	12,07	49.682.996	255.567
Epitácio Pessoa	30/03/2018	16,89	69.543.644,80	315.748,80
Epitácio Pessoa	30/04/2018	35,13	144.639.522,16	0
Epitácio Pessoa	31/05/2018	34,95	143.903.294	-184.057,04
Epitácio Pessoa	30/06/2018	33,35	137.277.240,56	-184.057,04
Epitácio Pessoa	31/07/2018	31,60	130.099.016	-184.057,04

Figura 4.2: Volume de água do açude Epitácio Pessoa
Fonte: PARAÍBA (2018)

Nesse exemplo, exploramos a interdisciplinaridade e apresentamos uma situação de relevância regional. Esse exemplo refere-se a um problema recorrente no Nordeste: o abastecimento de água. Destacamos ainda que tal exemplo é facilmente adaptável às diversas localidades de nosso país, buscando-se dados oficiais a respeito dos reservatórios locais de abastecimento de água:

Podemos listar os percentuais do volume de água a cada mês, no intervalo de um ano, da seguinte forma:

$$(8{,}40;\ 8{,}63;\ 9{,}24;\ 9{,}30;\ 9{,}66;\ 10{,}26;\ 12{,}07;\ 16{,}89;\ 35{,}13;\ 34{,}95;\ 33{,}35;\ 31{,}60;\ \cdots)$$

A escolha de tal exemplo permite a regionalização dos conteúdos apresentados, conforme preconizado pela BNCC (BRASIL, 2018), ao tratar do tema “Base Nacional Comum Curricular e currículos”, mostrando a relação entre as decisões que adequam a BNCC à realidade local:

- “contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;

- decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

  (...)” (p. 16).

Além disso, tal exemplo possibilita uma discussão interdisciplinar a respeito do uso dos recursos naturais, a partir de dados matemáticos, o que também é previsto na BNCC na competência 7 (ver Seção 2.1, na página 14).

Outro ponto a ser destacado é que, nos exemplos de sequências numéricas anteriores, era possível prever os próximos termos com base nos anteriores. Já nesse último exemplo, não é possível fazer o mesmo. Vale salientar que, apesar de não ser possível representar a lei de formação através de uma fórmula matemática, a sequência continua tendo uma lei de formação, que associa cada mês a um volume de água do açude.

Vejamos agora mais um exemplo. Desta vez, apresentamos dados internacionais, contemplando a competência 7 da BNCC.

Exemplo 4.4 *No ano de 2019, uma onda de frio intenso atingiu os Estados Unidos, sendo a mais forte das últimas décadas, de acordo com informações divulgadas por meteorologistas na página eletrônica da BBC (BBC NEWS BRASIL, 2019). A Figura 4.3 apresenta as temperaturas de Chicago, durante duas semanas:*

A partir desse exemplo, podemos considerar uma sequência de temperaturas, considerando a temperatura a cada dia. Porém, assim como no problema anterior, não é possível ter certeza dos valores que serão atingidos em dias futuros. No máximo, seria possível fazer previsões os dias seguintes, mas não é possível ter um valor exato para a temperatura mínima de cada dia. Apesar de tal limitação, ainda é possível continuar associando uma temperatura para cada dia. Funções como essa, em que não podemos prever os próximos termos, podem surgir espontaneamente em situações do dia-a-dia.

Data	Mx/Mn	Precip	Neve	Previsão	Média ALTO / BAIXO
sex 25/01	-14°/-21°	0 MM	2.0 CM		0°/-8°
sáb 26/01	-11°/-21°	1 MM	1.8 CM		0°/-8°
dom 27/01	-11°/-19°	0 MM	0 CM		0°/-8°
seg 28/01	2°/-13°	6 MM	15.2 CM		0°/-8°
ter 29/01	-12°/-23°	0 MM	0 CM		0°/-8°
qua 30/01	-23°/-30°	0 MM	0 CM		0°/-8°
qui 31/01	-17°/-29°	1 MM	3.3 CM		0°/-8°

Figura 4.3: Temperaturas registradas em Chicago, Estados Unidos, em 2019
Fonte: accuweather (2018)

Podemos representar a sequência de temperaturas mínimas, em graus, de cada dia da semana da seguinte forma:

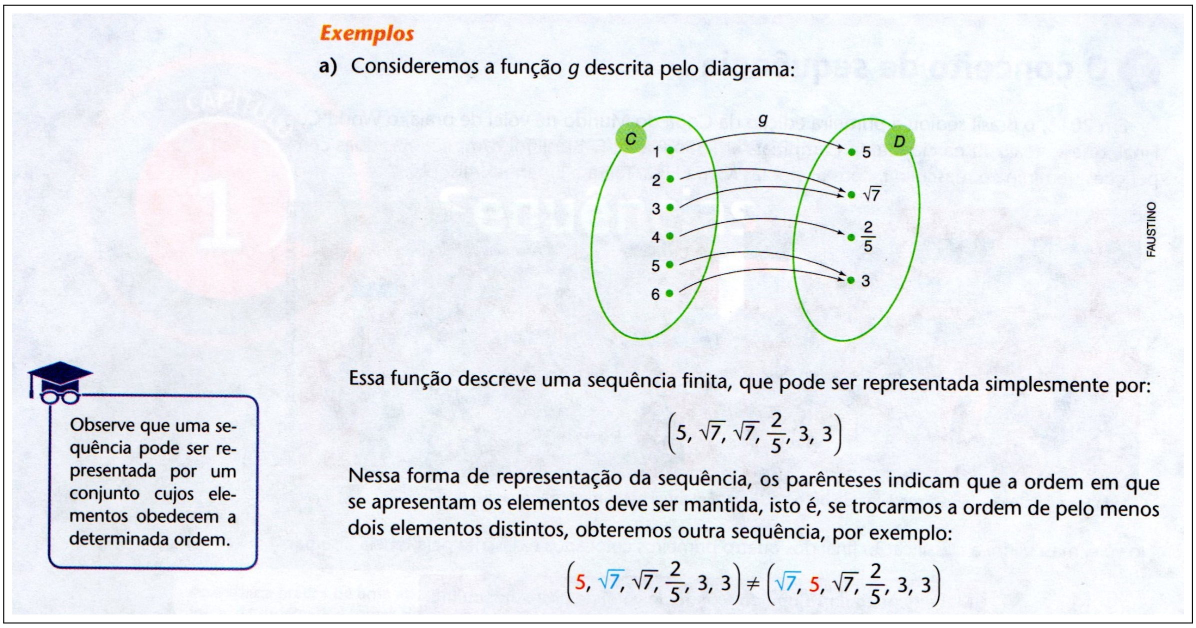
$$(-21, -21, -19, -13, -23, -30, -29, \cdots)$$

Segundo Trindade et al. (2016), Duval defende a importância de relacionar diversos registros de representação a um objeto matemático, sendo a língua materna um desses registros. Através da língua materna, temos a possibilidade de expressar uma definição formalmente ou de apresentar apenas seu conceito de modo mais informal e intuitivo. Nessa seção, nossa proposta é apresentar uma conceituação intuitiva para sequências numéricas, por meio do uso da palavra “lista”, a qual faz referência a um objeto conhecido pelos alunos. Para justificar o uso dessa palavra, dedicaremos a seção 4.2 para comprovar a correspondência entre a noção de lista e a definição de sequência.

4.2 Do informal ao formal: correspondência entre listas e sequências

Conforme mencionamos na seção anterior, é importante iniciar a apresentação dos conteúdos por meio de exemplos contextualizados e conceituações mais informais. Dos livros e páginas eletrônicas que analisamos, nenhuma conceituação informal manteve o rigor matemático; o livro A não apresentou um conceito inicial, exibindo diretamente a definição, enquanto o livro B e as duas páginas eletrônicas apresentaram conceitos equivocados.

Apesar dessas falhas, destacamos que a ideia de lista apareceu nas entrelinhas de alguns desses materiais analisados no Capítulo 3, especialmente ao apresentar a representação numérica. O livro A destaca inclusive que a posição de cada elemento nessa representação é importante, fato que já apresentamos no capítulo anterior e voltamos a destacar aqui:


Exemplos

a) Consideremos a função g descrita pelo diagrama:

Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que se apresentam os elementos deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos distintos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Observe que uma sequência pode ser representada por um conjunto cujos elementos obedecem a determinada ordem.

Figura 4.4: Representação de sequência através de listas, extraída do livro A

Por sua vez, a página eletrônica 1 apresenta diretamente uma lista como exemplo de sequência, como relembramos a seguir:

O diário do professor é composto pelos nomes de seus alunos. Esses nomes obedecem a uma ordem (são escritos em ordem alfabética), assim, essa lista de nomes (diário) é considerada uma sequência.
Os dias do mês são dispostos no calendário obedecendo a certa ordem, que também é um tipo de sequência.

Figura 4.5: Exemplos de sequências na página eletrônica 1

Tanto o livro quanto a página eletrônica relacionaram as listas com as sequências. Agora, precisamos verificar a correspondência entre a noção de lista e a definição de sequências:

Definição 4.1 *Uma **sequência numérica** é uma função com domínio $\mathbb{N}$, se a sequência for infinita, ou $\{1,2,\cdots,n\}$, se a sequência for infinita e tiver n elementos e contradomínio $\mathbb{R}$.*

Julgamos importante esclarecer que na Matemática, naturalmente, só estudamos sequências numéricas, pois a definição de sequências não-numéricas não é de interesse do estudo da Análise Real. Porém, é interessante que o aluno tenha ciência de que a definição de sequências pode contemplar as sequências cujos termos não sejam números. Podemos exemplificar essa situação com o exemplo apresentado no Capítulo 3, no livro B: foram apresentadas sequências cujos termos eram figuras geométricas:

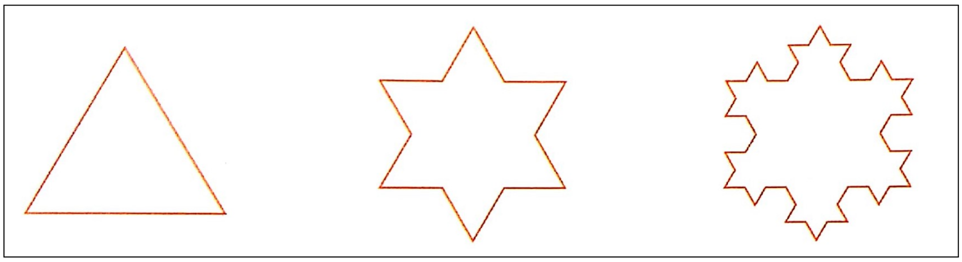


Figura 4.6: Primeiros elementos da curva do floco de neve de Koch, apresentada no livro B

Além do contradomínio, o outro elemento necessário para definir uma função é a lei de formação, mas não apresentamos nenhuma informação a respeito dela porque não existem restrições para ela na definição de sequência.

Destacamos que esses esclarecimentos a respeito do contradomínio e da lei de formação são essenciais para que a associação entre a definição de função e a definição de sequência seja bem compreendida. Nos livros e páginas eletrônicas analisados no Capítulo 3, notamos que não é feito nenhum comentário sobre o contradomínio; já a lei de formação é apresentada em uma seção separada, como se fosse uma novidade. Nós entendemos que seria mais coerente relembrar ao aluno os elementos necessários para definir uma função e esclarecer que a definição de sequências só apresenta uma restrição em relação ao domínio.

Agora, precisamos compreender por que as listas podem ser consideradas como sequências, isto é, como funções com domínio $\mathbb{N}$ ou $\{1,2,3,\cdots,n\}$:

- O domínio é um conjunto de números naturais, os quais determinam a posição do termo (o 1 é relacionado ao primeiro elemento, o 2 ao segundo elemento e assim sucessivamente). Se a lista for finita com n elementos, esse domínio será $\{1,2,3,\cdots,n\}$; se for infinita, o domínio será $\mathbb{N}$;

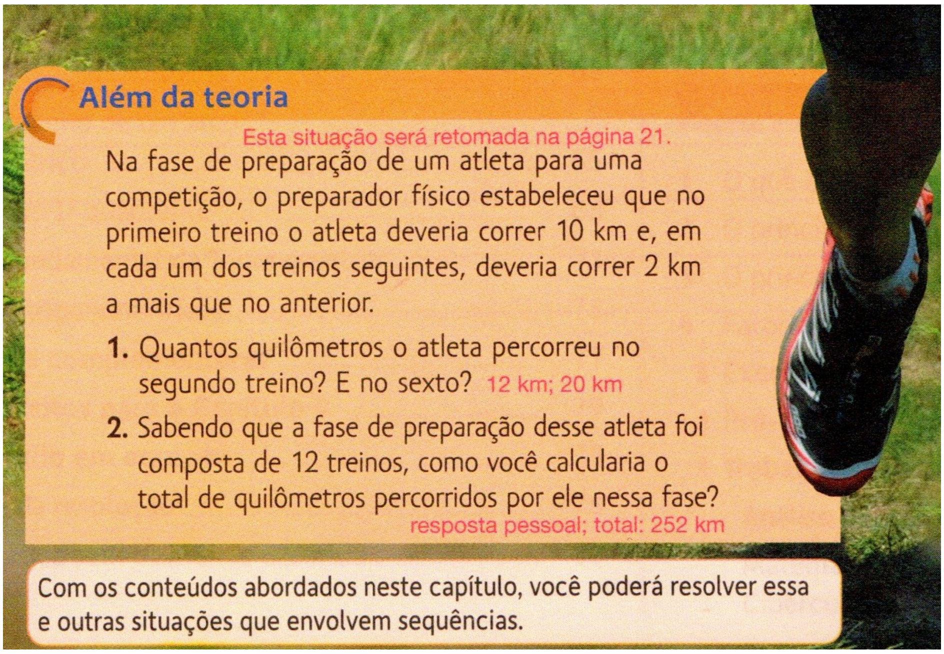
- Para apresentar uma situação mais abrangente, consideramos sempre como contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$, que inclui todos os elementos que podem ser colocados na lista;

- A lei de formação da função é a regra que determina qual elemento do contradomínio está sendo associado a cada elemento do domínio. Ressaltamos que essa lei pode ser expressa por uma fórmula matemática ou não.

Após entendermos a correspondência entre a noção de listas e a definição de sequências, dedicaremos as duas subseções seguintes para retomar os exemplos apresentados no Capítulo 3 e os que foram propostos por nós no início desse capítulo. Em cada exemplo, vamos procurar funções com domínio $\mathbb{N}$ ou $\{1, 2, \cdots, n\}$ para relacionar às listas apresentadas em cada um. Essa busca por funções desse tipo é um exercício que recomendamos que seja utilizado nas turmas de ensino médio, por facilitar a compreensão da equivalência entre listas e sequências.

4.2.1 Listas associadas a sequências: explorando os exemplos apresentados nos livros didáticos e nas páginas eletrônicas

Vamos rever o exemplo utilizado para motivar o estudo de sequências no livro A:


Além da teoria

Esta situação será retomada na página 21.

Na fase de preparação de um atleta para uma competição, o preparador físico estabeleceu que no primeiro treino o atleta deveria correr 10 km e, em cada um dos treinos seguintes, deveria correr 2 km a mais que no anterior.

1. Quantos quilômetros o atleta percorreu no segundo treino? E no sexto? 12 km; 20 km

2. Sabendo que a fase de preparação desse atleta foi composta de 12 treinos, como você calcularia o total de quilômetros percorridos por ele nessa fase? resposta pessoal; total: 252 km

Com os conteúdos abordados neste capítulo, você poderá resolver essa e outras situações que envolvem sequências.

Figura 4.7: Motivação para o estudo de sequências no livro A

A lista de números obtidos nesse exemplo é:

$$(10, 12, 14, 16, 18, \cdots, 32).$$

Como poderíamos encontrar uma função associada a essa lista? Quais seriam seu domínio, seu contradomínio e sua lei de formação?

Inicialmente, o problema propõe um treino de doze dias; logo, o domínio será o conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. O conjunto $\mathbb{R}$ continua sendo nosso contradomínio. Por fim, a lei de formação pode ser representada através de uma fórmula de recorrência:

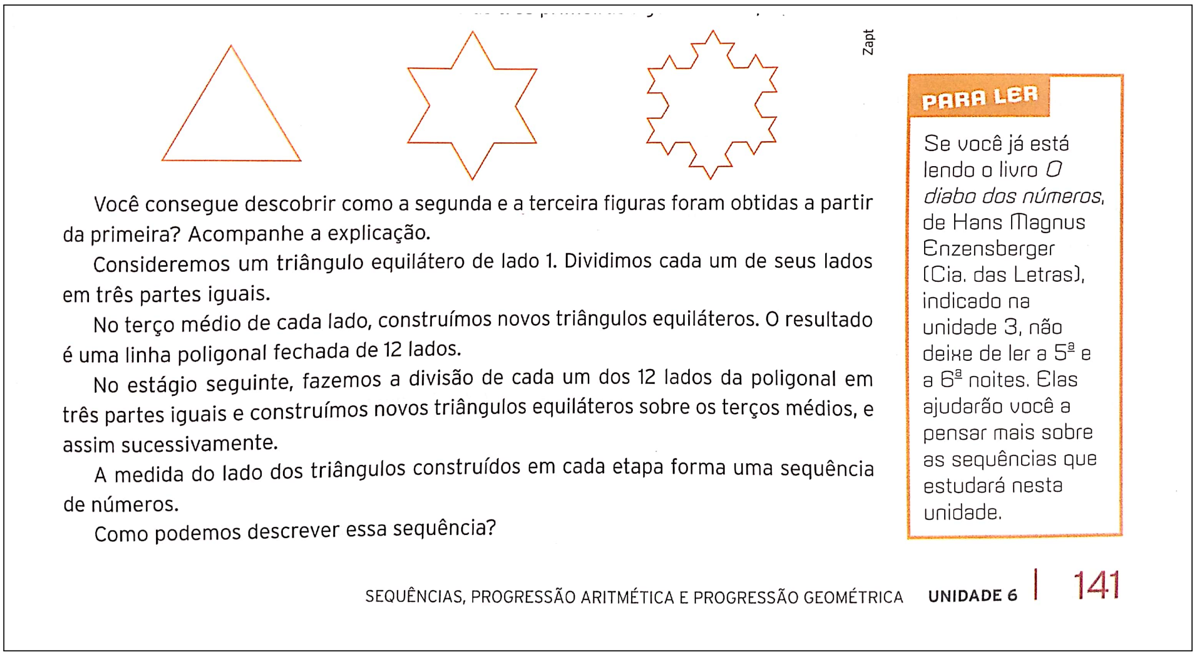
$$\begin{cases} a_1 & = & 10 \\ a_n & = & a(n-1)+2, \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

A fim de trabalharmos a transformação entre registros, temos outra possibilidade para expressar a lei de formação através de uma expressão matemática mais simples:

$$a_n = 10 + 2(n-1).$$

Os exemplos seguintes do livro A foram representados por diagrama de flechas, logo o domínio, o contradomínio e a lei de formação já são vistos de forma clara, como podemos ver nas Figuras 3.4 e 3.7.

No livro B, as sequências apresentadas para motivar o estudo do conteúdo são obtidas a partir de figuras geométricas:



Zapt

Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira? Acompanhe a explicação.

Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números.

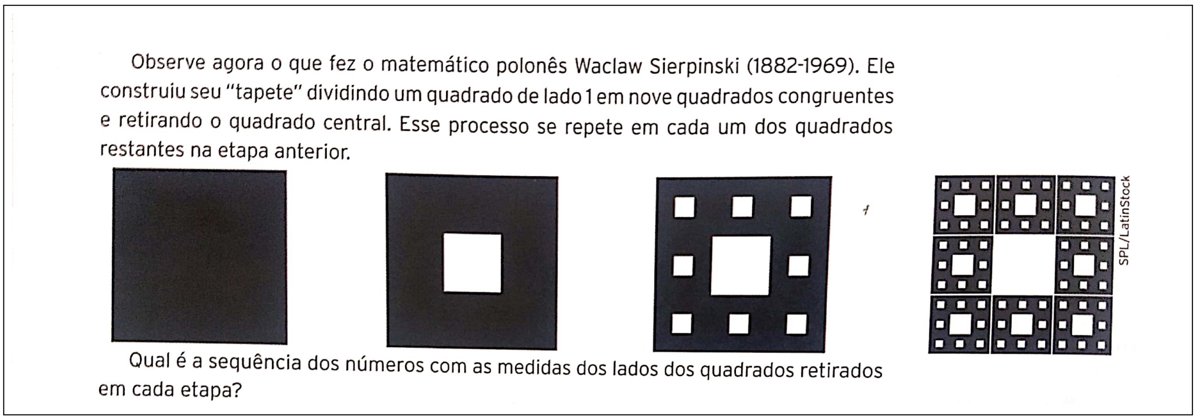
Como podemos descrever essa sequência?

PARA LER

Se você já está lendo o livro *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger (Cia. das Letras), indicado na unidade 3, não deixe de ler a 5ª e a 6ª noites. Elas ajudarão você a pensar mais sobre as sequências que estudará nesta unidade.

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA UNIDADE 6 | 141

Figura 4.8: Sequência da curva do floco de neve de Koch, extraída do livro B


Observe agora o que fez o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Ele construiu seu "tapete" dividindo um quadrado de lado 1 em nove quadrados congruentes e retirando o quadrado central. Esse processo se repete em cada um dos quadrados restantes na etapa anterior.

Qual é a sequência dos números com as medidas dos lados dos quadrados retirados em cada etapa?

Figura 4.9: Sequência do tapete de Sierpinski, extraída do livro B

Quais seriam as listas associadas a tais exemplos? Nos dois casos, o primeiro termo das duas sequências é 1 e os termos seguintes correspondem a $\frac{1}{3}$ do termo anterior. Logo, os dois exemplos nos levam às listas

$$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots\right).$$

Agora, vamos associar uma função a essa lista. Inicialmente, por ser uma lista infinita, podemos dizer que o domínio será $\mathbb{N}$. Já o contradomínio pode ser considerado como $\mathbb{R}$, por se tratar de uma lista numérica.

Por fim, podemos expressar a lei de formação por meio da fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{3}a(n-1), \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

Podemos ainda simplificar essa lei de formação, representando por meio da equação

$$a_n = \frac{1}{3^n}, \forall n \geq 1.$$

Vamos agora analisar os exemplos propostos na página eletrônica 1:

O exemplo do diário do professor não está tão detalhado, por isso não é possível associá-lo a uma lista específica, sabemos apenas que seria uma listagem de nomes por ordem alfabética. Sendo n o número de alunos da turma, a sequência associada a essa lista, teria como domínio o conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. O contradomínio seria o conjunto que contém os nomes de todos os alunos. A lei de formação seria a ordem alfabética.

Já no exemplo dos dias do mês, não fica claro se está sendo considerado apenas o período de um mês, um ano, ou se a ideia seria considerar uma sucessão infinita de dias. Sendo assim, não conseguimos identificar exatamente a lista apresentada e, consequentemente, a sequência associada a ela. Caso a ideia seja se referir a um mês apenas, a lista será

O diário do professor é composto pelos nomes de seus alunos. Esses nomes obedecem a uma ordem (são escritos em ordem alfabética), assim, essa lista de nomes (diário) é considerada uma sequência.
Os dias do mês são dispostos no calendário obedecendo a certa ordem, que também é um tipo de sequência.

Figura 4.10: Exemplos de sequências na página eletrônica 1

formada pelos primeiros 28, 29, 30 ou 31 números naturais. A sequência associada à lista também terá como domínio os primeiros 28, 29, 30 ou 31 números naturais. O contradomínio continua sendo $\mathbb{R}$ e a lei de formação será $a(n) = n$.

A página eletrônica 1 apresenta mais exemplos para conceituar sequências:

No estudo da matemática estudamos um tipo de sequência: a sequência numérica. Essa sequência que estudamos em matemática é composta por números que estão dispostos em uma determinada ordem preestabelecida.

Ao representarmos uma sequência numérica, devemos colocar seus elementos entre parênteses. Veja alguns exemplos de sequências numéricas:

- (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...) é uma sequência de números pares positivos.
- (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...) é uma sequência de números naturais.
- (10, 20, 30, 40, 50...) é uma sequência de números múltiplos de 10.
- (10, 15, 20, 30) é uma sequência de números múltiplos de 5, maiores que cinco e menores que 35.

Figura 4.11: Conceituação de sequências numéricas na página eletrônica 1

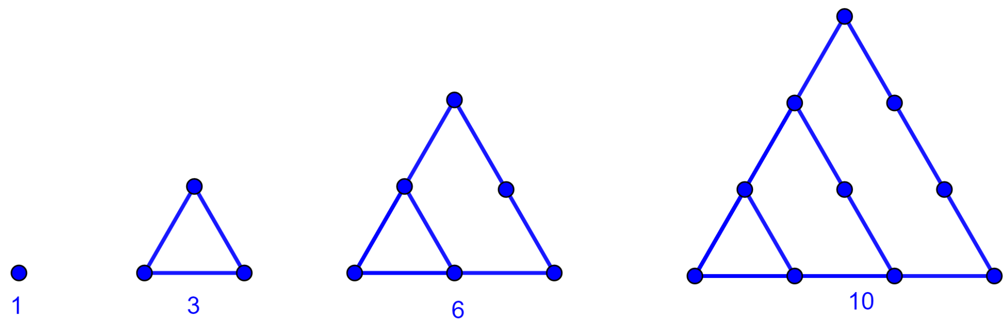
Nesses casos, quais seriam as funções relacionadas a cada lista? As três primeiras listas são infinitas, logo os domínios das funções associadas a elas serão $\mathbb{N}$, enquanto o domínio da última será $\{1,2,3,4,5\}$, por se tratar de uma sequência finita com cinco termos (lembramos que, pela lei de formação apresentada, o termo 25 deveria ser inserido nessa sequência). Todas têm contradomínio $\mathbb{N}$. Por fim, a lei de formação de cada uma foi expressa através da língua materna na própria apresentação dos exemplos.

Esclarecemos que a página eletrônica 2 não apresenta exemplos contextualizados ou com enunciados que permitam identificar os elementos das funções, por isso não apresentaremos seus exemplos nessa análise.

4.2.2 Listas associadas a sequências: explorando os exemplos propostos na Seção 4.1

O primeiro exemplo apresentado foi a sequência de números triangulares:

Exemplo 4.1 (números triangulares):



Já havíamos representado esses números no formato de lista: $(1,3,6,10,15,21,28,\cdots)$. Como associaremos essa lista a uma função?

O primeiro passo é relacionar cada número à sua posição na lista. É importante destacar que, caso a posição de um número seja alterada, já teremos uma nova lista e uma nova função correspondente. Vamos apresentar essa relação através de uma tabela:

Posição	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
Termos	1	3	6	10	15	21	28	$\cdots$

Observando a tabela, já sabemos que a função terá domínio $\mathbb{N}$. O contradomínio continua sendo $\mathbb{R}$. Conforme já havíamos abordado na primeira apresentação do exemplo, podemos inclusive encontrar um sistema que representa a lei de formação:

$$\begin{cases} a(1) &= 1 \\ a(n) &= a(n-1)+n, \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

Após determinarmos esses três elementos, já temos uma sequência bem definida que corresponde à lista apresentada anteriormente.

Passemos ao exemplo 4.2, que envolve a sequência de Fibonacci:

$$(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144)$$

Além da lista, os números já foram organizados em uma tabela quando apresentamos o exemplo:

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Termos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Na forma como está representada, como associar essa lista a uma função? Nesse caso, o domínio será $\{1,2,3,4,\cdots,12\}$, pois estamos tratando apenas dos doze primeiros termos da sequência de Fibonacci. O contradomínio da função será $\mathbb{R}$ mais uma vez. Por fim, precisamos mais uma vez de um sistema para representar a função através de uma expressão matemática:

$$\begin{cases} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(n) &= f(n-2)+f(n-1), \quad \forall n>2 \end{cases}$$

Passemos agora ao exemplo 4.3 (volume de água do açude Epitácio Pessoa):

Açude	Data do registro	Volume (%)	Volume (m^3)	Aporte (m^2)
Epitácio Pessoa	31/08/2017	8,40	34.590.327,44	65.971,32
Epitácio Pessoa	30/09/2017	8,63	35.513.925,92	0
Epitácio Pessoa	31/10/2017	9,24	38.020.836,08	0
Epitácio Pessoa	30/11/2017	9,30	38.284.721,36	0
Epitácio Pessoa	31/12/2017	9,66	39.769.906,88	0
Epitácio Pessoa	31/01/2018	10,26	42.250.852,16	75.180,16
Epitácio Pessoa	28/02/2018	12,07	49.682.996	255.567
Epitácio Pessoa	30/03/2018	16,89	69.543.644,80	315.748,80
Epitácio Pessoa	30/04/2018	35,13	144.639.522,16	0
Epitácio Pessoa	31/05/2018	34,95	143.903.294	-184.057,04
Epitácio Pessoa	30/06/2018	33,35	137.277.240,56	-184.057,04
Epitácio Pessoa	31/07/2018	31,60	130.099.016	-184.057,04

Figura 4.12: Volume de água do açude Epitácio Pessoa
Fonte: PARAÍBA (2018)

Como associar uma função à lista dos percentuais do volume de água atingidos pelo açude?

$$(8,40;8,63;9,24;9,30;9,66;10,26;12,07;16,89;35,13;34,95;33,35;31,60;\cdots)$$

Como a sequência está sendo tratada como infinita, o domínio será $\mathbb{N}$ e o contradomínio, $\mathbb{R}$. Vale destacar que, nesse exemplo, não é possível encontrar uma expressão matemática que represente a lei de formação da função. Por isso, precisaremos expressar a lei de outra maneira. Optamos pela representação da lei de formação por meio da língua materna: "sequência dos volumes do açude Epitácio Pessoa, em valores percentuais, conforme dados oficiais da AESA".

Passemos agora a estudar o exemplo 4.4 (temperaturas baixas em Chicago):

Data	Mx/Mn	Precip	Neve	Previsão	Média ALTO / BAIXO
sex 25/01	-14°/-21°	0 MM	2.0 CM		0°/-8°
sáb 26/01	-11°/-21°	1 MM	1.8 CM		0°/-8°
dom 27/01	-11°/-19°	0 MM	0 CM		0°/-8°
seg 28/01	2°/-13°	6 MM	15.2 CM		0°/-8°
ter 29/01	-12°/-23°	0 MM	0 CM		0°/-8°
qua 30/01	-23°/-30°	0 MM	0 CM		0°/-8°
qui 31/01	-17°/-29°	1 MM	3.3 CM		0°/-8°

Figura 4.13: Temperaturas registradas em Chicago, Estados Unidos, em 2019
Fonte: accuweather (2018)

Ao apresentarmos o exemplo pela primeira vez, já havíamos representado as temperaturas mínimas através de uma lista:

$$(-21, -21, -19, -13, -23, -30, -29, \cdots).$$

Para associarmos essa lista a uma função, vamos mais uma vez associar cada número à sua posição na lista. Dessa forma, o domínio será o conjunto $\mathbb{N}$, pois a sequência é infinita. O contradomínio será o conjunto $\mathbb{R}$. Por fim, não é possível representar a lei de formação através de uma expressão matemática. Por isso, podemos utilizar a língua materna: "sequência das temperaturas mínimas em Chicago".

Ao ser apresentado aos exemplos, o aluno de ensino médio precisa notar que cada lista foi organizada de forma que são conhecidos os elementos a serem listados e onde cada elemento deve aparecer, por conhecermos a relação entre cada posição e seu termo correspondente. Por outro lado, antes de usar a ideia de listas, o professor precisa ter clareza do motivo por que elas se enquadram corretamente na definição de função.

4.3 Notação utilizada para representar sequências

Após definir sequências como funções, é preciso associar cada característica das sequências ao conteúdo de funções. Nesse momento, vamos destacar a relação entre a notação utilizada para representar sequências e a definição de função. Nos livros e páginas eletrônicas analisados, as sequências são apresentadas como listas $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, mas nem sempre é destacada a relação entre essa representação e a definição de funções.

O livro A explica apenas que o índice representa a posição do termo, mas não esclarece como essa posição e esse índice se relacionam com a definição de sequência ou de função:

Termos de uma sequência

Cada elemento de uma sequência também é chamado de **termo da sequência**. Em uma sequência, o termo que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo a_n, isto é:

a_1 indica o primeiro termo da sequência;
a_2 indica o segundo termo da sequência;
a_3 indica o terceiro termo da sequência;
a_4 indica o quarto termo da sequência;
$\vdots$
a_n indica o n-ésimo termo da sequência.

Exemplo

Na sequência (7, 3, 8, 10, ...), temos: $a_1 = 7$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, ...

Figura 4.14: Notação de sequência apresentada no livro A

As páginas eletrônicas apresentam a notação de forma similar:

Além disso, vale lembrar que os elementos da sequência são indicados pela letra a. Por exemplo:

1° elemento: $a_1 = 2$

4° elemento: $a_4 = 8$

O último termo da sequência é chamado de enésimo, sendo representado por a_n. Nesse caso, o a_n da sequência finita acima seria o elemento 8.

Assim, podemos representá-la da seguinte maneira:

$S_F = (a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n)$

$S_I = (a_1, a_2, a_3, a_n\ldots)$

Figura 4.15: Notação de sequência apresentada na página eletrônica 2

Em uma sequência numérica qualquer, o primeiro termo é representado por a_1, o segundo termo é a_2, o terceiro a_3 e assim por diante. Em uma sequência numérica desconhecida, o último elemento é representado por an. A letra n determina o número de elementos da sequência.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ sequência infinita.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ sequência finita.

Figura 4.16: Notação de sequência apresentada na página eletrônica 1

Já o livro B explica a notação relacionada com a definição de função:

Considere a sequência f(n) = 2n, onde n ∈ {1, 2, 3, 4, ...}. Temos:

f(1) = 2 f(2) = 4 f(3) = 6 f(4) = 8 ...

Essa função nos dá a sequência dos números pares positivos que representamos por (2, 4, 6, 8, ...).

Geralmente indicamos por a_n a imagem de n pela função f : f(n) = a_n. Note que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ..., ou seja:

O índice n denota a posição do elemento ou termo a_n na sequência. a_n é chamado de **termo geral** da sequência.

Assim:

- a_1 é o primeiro termo da sequência;
- a_2 é o segundo termo da sequência;

⋮

- a_n é o n-ésimo termo, ou termo geral, da sequência;
- a_{n-1} é o antecessor de a_n;
- a_{n+1} é o sucessor de a_n.

Observe que f(n) = 2n é uma função afim. Os pontos de seu gráfico estão sobre uma reta, embora o gráfico em si não seja uma reta, pois D(f) = ℕ*.

Veja como ficaria o gráfico da sequência dada por f(n) = 2n:

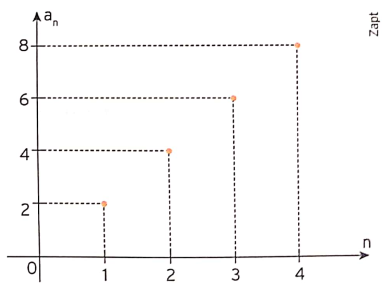


Figura 4.17: Notação de sequência apresentada no livro B

Em relação à apresentação no livro B, apenas verificamos que não seria necessário denotar a função por f, o que apenas aumenta o uso de uma letra na representação; seria possível representá-la por a, e assim, associar o termo n com o elemento $a(n) = a_n$.

A seguir, apresentamos uma proposta que consideramos mais adequada que a apresentada nos livros e páginas eletrônicas que analisamos anteriormente. Optamos pelo uso simultâneo de mais de um registro de representação, com o objetivo de estimular a associação entre os objetos mais rapidamente: representamos a associação entre os elementos do domínio e do contradomínio por meio de um diagrama de flechas e representamos os elementos do contradomínio já utilizando a notação algébrica a_n:

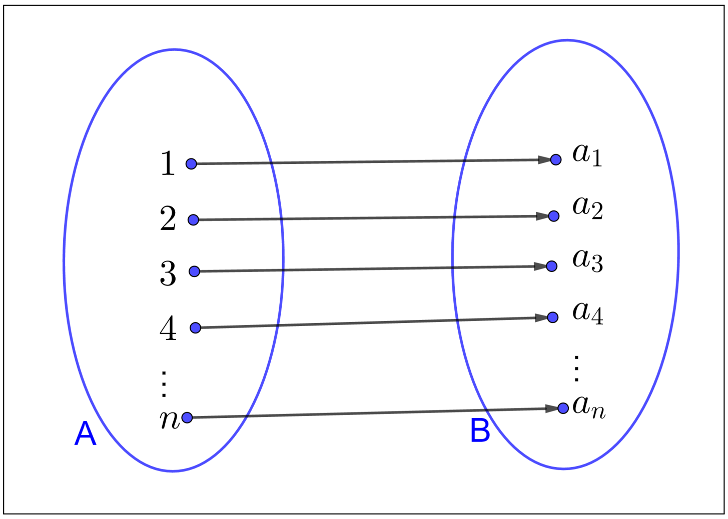


Figura 4.18: Notação de sequência representada em diagrama de flechas

Feita tal representação, basta denotarmos por a a função representada na Figura 4.18. Logo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $a(n) = a_n$.

É importante mostrar aos alunos que a notação é utilizada para simplificar a representação dos termos da sequência. Um exemplo que pode ser mostrado de forma imediata é a definição de sequência monótona, que é apresentada e compreendida de forma mais simples através do uso da notação:

Definição 4.2 *Uma sequência é* ***monótona*** *quando corresponde a uma dessas classificações:*

Crescente: *Sequência em que* $a_n < a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

Não-decrescente: *Sequência em que* $a_n \leq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

Decrescente *Sequência em que* $a_n > a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

Não-crescente: *Sequência em que* $a_n \geq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 5

Conceitos de ordem na matemática

No capítulo 3, foram apresentadas as abordagens de livros e páginas eletrônicas para apresentar as sequências numéricas. Em particular, as páginas eletrônicas e o livro A apresentaram as definições que relembramos aqui:

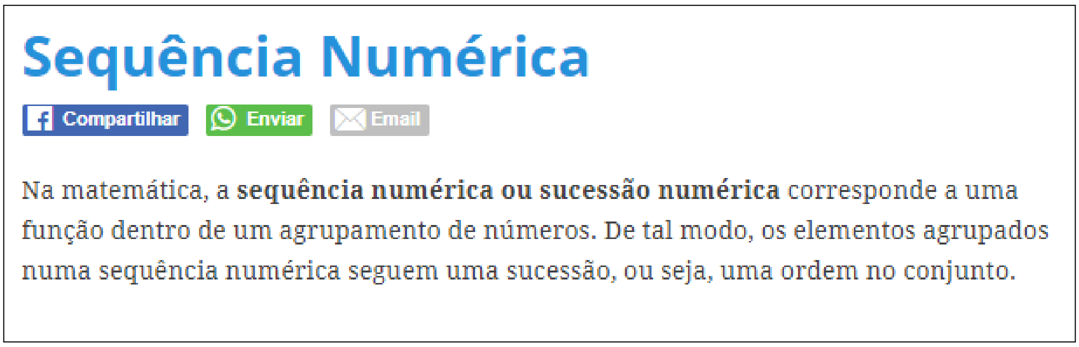
O diário do professor é composto pelos nomes de seus alunos. Esses nomes obedecem a uma ordem (são escritos em ordem alfabética), assim, essa lista de nomes (diário) é considerada uma sequência.
Os dias do mês são dispostos no calendário obedecendo a certa ordem, que também é um tipo de sequência.

Figura 5.1: Exemplos de sequências na página eletrônica 1

Esses e vários outros exemplos de sequência estão presentes em nosso cotidiano. Observando-os, podemos definir sequência como:

Sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem.

Figura 5.2: Definição de sequências na página eletrônica 1

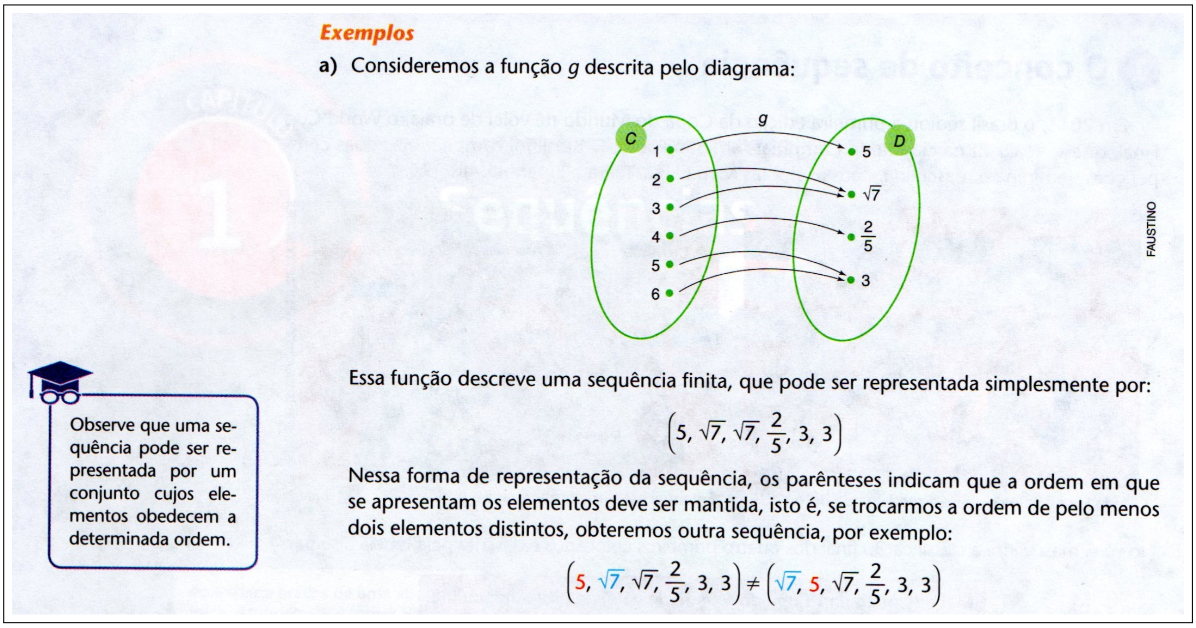


Sequência Numérica

Compartilhar Enviar Email

Na matemática, a **sequência numérica ou sucessão numérica** corresponde a uma função dentro de um agrupamento de números. De tal modo, os elementos agrupados numa sequência numérica seguem uma sucessão, ou seja, uma ordem no conjunto.

Figura 5.3: Definição de sequências na página eletrônica 2



Exemplos

a) Consideremos a função g descrita pelo diagrama:

Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que se apresentam os elementos deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos distintos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Observe que uma sequência pode ser representada por um conjunto cujos elementos obedecem a determinada ordem.

Figura 5.4: Apresentação de sequências com termos repetidos, extraída do livro A

Tendo em vista que as páginas eletrônicas e o livro A apresentam a posição de um elemento em uma lista como sendo uma "ordem", julgamos importante esclarecer os significados que a expressão ordem pode ter em diferentes contextos na Matemática, a fim de evitar dúvidas.

Vamos fazer um exercício simples:

Exemplo 5.1 *Observe os números a seguir, posicionados em cada quadradinho. Em algum desses exemplos podemos dizer que existe ordem?*

1	*3*	*5*	*7*	*9*

$-\pi$	*100*	*1*	*-20*	*80*

É possível que diferentes leitores interpretem a pergunta de maneiras distintas: a primeira possibilidade seria relacionar a palavra "ordem" a uma organização dos números através da comparação entre eles. Nesse caso, o leitor dirá que no primeiro exemplo existe ordem, pois os números estão organizados em ordem crescente, enquanto no segundo exemplo os números não estão em ordem crescente nem decrescente.

A segunda possibilidade, menos intuitiva e mais formal, seria relacionada à posição de cada número, ou seja, em qual quadradinho cada elemento foi colocado. Nesse caso, o leitor dirá que em ambos os exemplos pode haver ordem, caso seja considerada a posição de cada número.

Nas subseções a seguir, apresentaremos mais detalhes sobre cada significado da expressão "ordem":

5.1 Definição de ordem comparativa

O estudo de relações algébricas é o primeiro contexto em que a palavra "ordem" é utilizada. Nesse contexto, uma **relação de ordem** compara dois elementos em um mesmo conjunto, ou seja, mostra qual é o maior entre dois elementos. Por essa razão, iremos nos referir a essa relação como uma **ordem comparativa**:

Definição 5.1 *Uma **relação de ordem**, denotada por $\leq$ (lê-se menor que ou igual a), possui as seguintes propriedades:*

1. *Reflexividade*: $a \leq a$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
2. *Antissimetria*: se $a,\ b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;
3. *Transitividade*: se $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$;
4. *Dicotomia*: para todos $a,\ b \in \mathbb{R}$, tem-se $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Exemplo 5.2 *A relação de ordem usualmente utilizada para comparar os números reais possui as propriedades acima.*

Ressaltamos que existem outras operações que podem ser consideradas como relações de ordem, além da comparação usual. Porém, não nos ateremos a outros casos, por fugirem do escopo do nosso trabalho. Aos interessados em conhecer mais sobre esse conteúdo, indicamos a seção III-1 do livro "Álgebra Moderna" (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

Definição 5.2 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **comparativamente ordenado** se seus elementos podem ser comparados através de uma relação de ordem $\leq$.*

Exemplo 5.3 *O conjunto* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *é comparativamente ordenado, pois para quaisquer* $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$*, temos:*

- *Reflexividade, pois* $\frac{m}{n} \leq \frac{m}{n}$*;*
- *Dicotomia, já que sempre teremos* $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ *ou* $\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n}$*;*
- *Antissimetria, pois se* $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ *e* $\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n}$*, então* $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$*;*
- *Transitividade, pois se* $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ *e* $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$*, então,* $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$.

Exemplo 5.4 *O conjunto* $\mathbb{R}$ *é comparativamente ordenado, pois para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, temos:*

$x \leq x$*;*

$x \leq y$ *ou* $y \leq x$*;*

se $x \leq y$ *e* $y \leq x$*, então* $x = y$*;*

se $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, então* $x \leq z$.

Para finalizar esta seção, apresentaremos um resultado muito importante que envolve a ordem comparativa:

Teorema 5.1 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não-vazio contido em* $\mathbb{N}$ *possui um elemento mínimo.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{N}$. Pelos Axiomas de Peano (Axioma 7.2), se $1 \in X$, então 1 será o menor elemento de X, não havendo mais nada a demonstrar.

Se $1 \notin X$, então consideremos o conjunto $Y = \mathbb{N} - X$. Temos $1 \in Y$, logo $Y \neq \emptyset$.

Se $1 \notin X$, mas $2 \in X$, então 2 será o menor elemento. Porém, se ambos não pertencerem a X, então $\{1, 2\} \subset Y$.

Suponhamos que $\{1, 2, \cdots, n\} \subset Y$. Queremos mostrar que existe um n_0 tal que

$$\{1, 2, \cdots, n_0\} \in Y, \text{ mas } n_0 + 1 \in X.$$

Se para todo $n \in Y$, tivéssemos $n+1 \in Y$, então pelo Axioma 4 teríamos $Y = \mathbb{N}$ e $X = \emptyset$, o que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto, deve haver um $n_0 \in Y$ tal que $n_0 + 1 \in X$, o qual será o menor elemento de X. ■

5.2 Definição de ordem posicional

Nas definições analisadas no início deste capítulo, notamos o uso da palavra “ordem” para se referir à posição de um termo na sequência. Para expressar essa ideia de ordem, utilizaremos a expressão **ordem posicional**.

Seguindo essa ideia, a condição para que os elementos de um conjunto possam ser posicionalmente ordenados é: ser possível formar uma lista com todos os seus elementos. Pelo que vimos na seção 4.1, toda lista pode ser associada a uma função com domínio $\mathbb{N}$ ou $\{1,2,\cdots,n\}$ e, consequentemente, a uma sequência. Para melhor definirmos a ordem posicional em elementos de um conjunto X, vamos considerar uma nova função com contra-domínio X. Assim, todo conjunto posicionalmente ordenado estará associado a uma função sobrejetiva. Propomos, então, a seguinte definição formal para um conjunto posicionalmente ordenado:

Definição 5.3 *Diremos que os elementos de um conjunto X podem ser **posicionalmente ordenados** quando for possível encontrar uma função sobrejetiva $f:\mathbb{N}\to X$, se X for infinito, ou $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to X$, se X for finito. Quando ocorrer um desses casos, diremos que o conjunto apresenta uma **ordem posicional**.*

Nesse caso, $f(1)$ é o primeiro elemento de X, $f(2)$ será seu segundo elemento e assim sucessivamente, ou seja, para cada n natural, $f(n)$ será o n-ésimo termo de X.

Observação 5.1 *Ressaltamos aqui que essa definição não permite que seja dito que um conjunto possua ordem posicional, já que uma mudança na posição em que são representados os elementos de um conjunto não altera o conjunto em si. O erro de atribuir ordem posicional a um conjunto foi cometido pelo livro A (ver Figura 3.7), mas nossa definição não repete esse erro.*

Se os elementos de um conjunto podem ser posicionalmente ordenados, isso significa que é possível formar uma sequência com todos os seus elementos, mas não atribui uma ordem para o conjunto em si.

Vejamos agora alguns conjuntos cujos elementos podem ser posicionalmente ordenados. Seguindo a ideia da seção 4.1, na qual associamos listas a funções, associaremos agora cada conjunto a uma função que determine a posição de cada elemento:

Exemplo 5.5 *Os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ podem ser posicionalmente ordenados, pois é possível definir a função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(n)=n$.*

Exemplo 5.6 *Os elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ pode ser posicionalmente ordenados, pois é possível definir a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n-1}{-2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observação 5.2 *Note que, no Exemplo 5.6, não diríamos intuitivamente que um número a_n seja o primeiro ou o quinto inteiro, por exemplo. Porém, é possível associar cada número natural n a um número inteiro a_n; logo, é possível ordenar seus elementos em uma lista.*

Exemplo 5.7 *Os elementos do conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ podem ser posicionalmente ordenados. Para demonstrar esse fato, vamos seguir um raciocínio análogo ao utilizado por Cantor para provar a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$.*

Demonstração: Para representar os números racionais do intervalo $[0,1]$, vamos organizá-los em linhas e colunas, de acordo com seus numeradores e denominadores:

0					
	1				
	$\frac{1}{2}$				
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$			
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$		
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$

Para qualquer número racional no intervalo [0,1], podemos identificar a coluna e a linha às quais ele pertence, basta verificar o seu numerador e o seu denominador. Destacamos que o 0 só foi representado uma vez na coluna correspondente ao numerador 0, para evitar essas repetições. Pela mesma razão, em cada linha só representamos os racionais até o elemento $\dfrac{n-1}{n}$, pois o termo seguinte seria igual a 1. Várias outras frações se repetem, a exemplo de $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6}$, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$ e $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$. Listando os primeiros termos dessa sequência, temos:

$$\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \cdots\right).$$

■

Notamos, assim, que é possível listar todos os elementos do conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$; logo, é possível associar a ela uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$, ou seja, seus elementos são posicionalmente ordenados.

Exemplo 5.8 *Os elementos do conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cap[0,1]$ não podem ser posicionalmente ordenados, pois não é possível definir uma função sobrejetiva $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.*

Demonstração: Suponha que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cap[0,1]$ seja posicionalmente ordenado. Logo, seus elementos podem ser colocados em uma lista. Lembramos que todos os elementos desse conjunto podem ser escritos na forma $0,a_1a_2a_3a_4\cdots$, em que a_i é um algarismo para todo i. Destacamos que o número 1 pode ser representado por $0,9999\cdots$, pois essa representação decimal representa uma sequência que converge para 1. Além disso, para qualquer número com expressão decimal finita, é possível associar um com expressão decimal infinita; por exemplo, podemos escrever $0,3$ como $0,29999\cdots$, $0,185$ como $0,18499999\cdots$. Agora, vamos representar a lista com todos os elementos de $\mathbb{R}\cap[0,1]$:

$$\begin{array}{ccccc} 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{array}$$

Porém, podemos encontrar um número $0,b_1b_2b_3\cdots$ tal que $b_1\neq a_{11}$, $b_2\neq a_{22}$, $b_3\neq a_{33}$, $\cdots$, $b_n\neq a_{nn}$. Destacamos que esse número faz parte do conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cap[0,1]$, mas não está na lista que escrevemos.

Portanto, nunca conseguiremos listar todos os elementos de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cap[0,1]$, ou seja, esse conjunto não é posicionalmente ordenado. ■

Observação 5.3 *Os leitores que já estão familiarizados com o conceito de enumerabilidade podem ter notado que o processo para mostrar se os elementos de um conjunto são posicionalmente ordenados é o mesmo que realizamos para mostrar que um conjunto é enumerável. De fato, para que um conjunto X seja enumerável, é preciso que exista uma bijeção $f:\mathbb{N}\to X$. Para mostrarmos que os elementos de um conjunto podem ser posicionalmente ordenados, precisamos encontrar uma função sobrejetiva $f:\mathbb{N}\to X$. A única diferença é que para que haja ordem posicional, não é necessário exigir que a função seja injetiva, tendo em vista que nossa definição permite repetir o mesmo elemento de X na lista a ser formada.*

Um resultado interessante envolvendo conjuntos posicionalmente ordenados é o teorema a seguir:

Teorema 5.2 *Todo subconjunto de um conjunto posicionalmente ordenado também é posicionalmente ordenado.*

Demonstração: Seja X um conjunto posicionalmente ordenado. Como consequência direta da definição, seus elementos podem ser representados na forma de uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$, onde cada índice n indica a posição do elemento x_n.

Consideremos agora um subconjunto $Y \subset X$. Precisamos mostrar que Y também é posicionalmente ordenado. Inicialmente, sabemos que os elementos de Y serão x_a, x_b, $\cdots$, x_m, $\cdots$ Pelo Princípio da Boa Ordenação (Teorema 5.1), sabemos que existe um menor elemento do conjunto $\{a, b, \cdots, \}$, o qual denotaremos por m. Logo, o elemento x_m será o primeiro elemento de Y, o qual passaremos a denotar por y_1. Em seguida, aplicando o princípio da boa ordenação ao conjunto $\{a, b, \cdots\} - \{m\}$ também afirmamos que existe um menor elemento desse conjunto, o qual denotaremos por n. Logo, x_n será o segundo elemento de Y, o qual passaremos a denotar por y_2.

Aplicando o princípio da boa ordenação sucessivas vezes aos índices dos elementos do conjunto Y, determinaremos uma ordem posicional para todos os elementos de Y. Note que esse procedimento será repetido um número finito de vezes se Y for finito e infinitas vezes caso X e Y sejam infinitos, fazendo com que o teorema seja verdadeiro para quaisquer conjuntos X e Y. ■

5.3 Ordem posicional e ordem comparativa: são equivalentes?

Diante dos diferentes conceitos apresentados, podemos voltar à pergunta inicial: em quais dos conjuntos a seguir existe ordem?

1	3	5	7	9

$-\pi$	100	1	-20	80

Caso seja utilizado o conceito de ordem posicional, é possível que ambos sejam ordenados, basta que cada quadradinho seja considerado como sendo a posição de cada elemento. Se for considerada a ordem comparativa, os dois conjuntos são ordenados, pois é possível comparar cada par de elementos através da relação $\leq$. Note que apenas o primeiro está em ordem crescente, mas em ambos podemos comparar os elementos através da relação de ordem $\leq$.

Agora, pode surgir uma nova dúvida: não é possível conciliar as duas definições? Nos conjuntos A e B acima, notamos claramente que os elementos do conjunto A já estão posicionados de forma que cada elemento é menor que o elemento seguinte, ou seja, estão organizados em **ordem crescente**; por outro lado, os elementos do conjunto B foram reposicionados para que fossem comparados através da relação $\leq$. Vamos verificar essa situação em outros conjuntos:

Exemplo 5.9 *O conjunto $\mathbb{N}$ tem a ordem comparativa e seus elementos também podem ser posicionalmente ordenados mantendo a ordem comparativa, pois na forma como estão dispostos seus elementos, é possível afirmar que $n \leq n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 5.10 *Será que o conjunto $\mathbb{Z}$ pode ter as duas ordens simultaneamente? Já sabemos que esse conjunto é comparativamente ordenado, pois dados dois $m,n \in \mathbb{Z}$ sempre sabemos se $m \leq n$ ou $n \leq m$. Além disso, no Exemplo 5.6, vimos que seus elementos são posicionalmente ordenado, mas será que as duas ordens podem acontecer "ao mesmo tempo"?*

Para listarmos seus elementos mantendo as duas ordens, vamos iniciar escolhendo elemento para ser associado ao elemento 1 do domínio. Como $\mathbb{Z}$ não possui um menor elemento, precisaremos escolher um número n para ser o primeiro elemento. Porém, sempre teremos o número $n-1$ que não estará posicionalmente ordenado depois do número n. Logo, a relação $\leq$ não será mantida junto da ordem posicional.

Exemplo 5.11 *O conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ não pode ter as ordens posicional e comparativa simultaneamente.*

Demonstração: Suponha que o conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ possa ter as ordens posicional e comparativa simultaneamente, formando a lista $(q_1, q_2, q_3, \cdots)$ de modo que $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \cdots$. Porém, para quaisquer q_1 e q_2, temos $q_1 \leq \frac{q_1+q_2}{2} \leq q_2$, com $\frac{q_1+q_2}{2}$ pertencente a $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, mas não constando na lista nessa ordem. Logo, quando tentamos organizar os termos mantendo as ordens posicional e comparativa ao mesmo tempo, não conseguiremos incluir todos os elementos do conjunto. ■

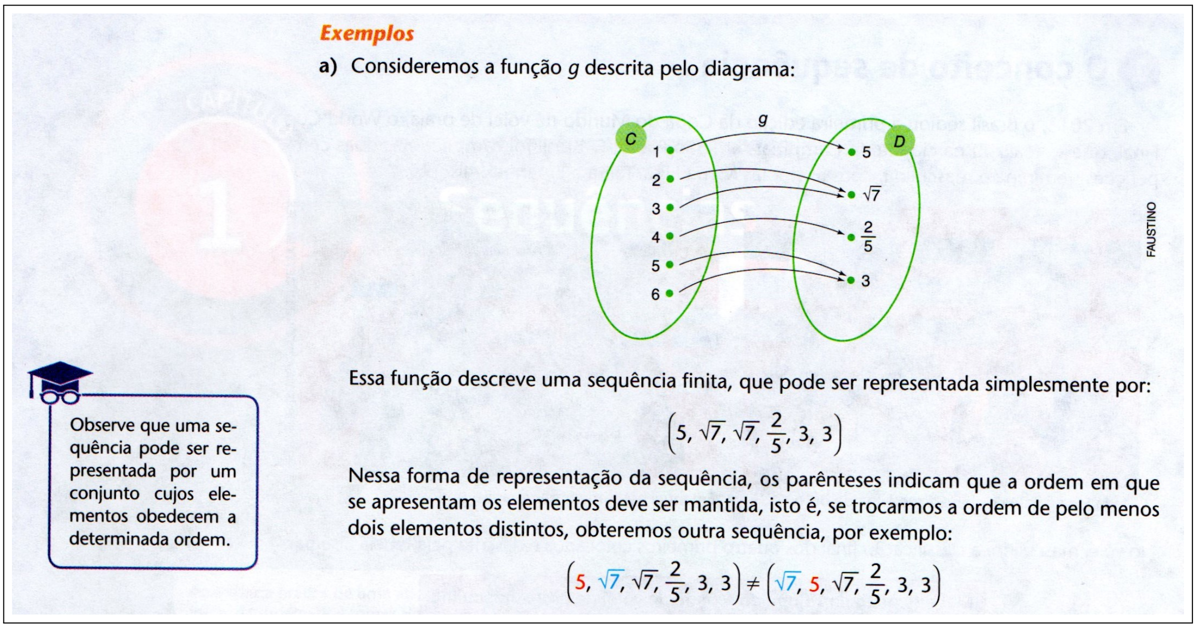
Essas últimas considerações podem causar alguma estranheza para o leitor, mas isso significa apenas que as duas definições de ordem não são equivalentes. Em nossa opinião, o fato de que as duas definições não são equivalentes ressalta a necessidade de formalizar os conceitos que envolvem "ordem" de forma distinta.

Finalmente, concluímos que existem dois conceitos distintos envolvendo ordem. A ordem posicional, que define listas, é equivalente à definição de sequências e, por isso, pode ser utilizada para facilitar a compreensão do conceito de sequências, desde que devidamente diferenciada da ordem comparativa.

5.4 Conceito de ordem e as definições de sequências

Dedicaremos essa seção para analisar as definições formais ou conceituações mais intuitivas de sequências dos livros e páginas eletrônicas analisados, para verificar o uso da palavra ordem" e a coerência de seu emprego.

O livro A emprega a palavra “ordem” pela primeira vez após conceituar sequências e apresentar a notação dos seus termos:


Exemplos

a) Consideremos a função g descrita pelo diagrama:

Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que se apresentam os elementos deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos distintos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Observe que uma sequência pode ser representada por um conjunto cujos elementos obedecem a determinada ordem.

Figura 5.5: Uso da expressão “ordem” no livro A

O texto esclarece que os termos são representados entre parênteses e que a “ordem” em que se apresentam os termos deve ser mantida. Em seguida, é apresentado uma situação em que a posição de dois elementos foi invertida, para mostrar que foi criada uma nova sequência. Claramente, o texto faz referência ao que denominamos ordem posicional na Seção 5.2.

Porém, ao lado do texto é acrescentada uma nota em destaque, onde é dito que “uma sequência pode ser representada por um conjunto cujos elementos obedecem a uma determinada ordem”. Aqui identificamos o problema de associar ordem a um conjunto. Claramente, a representação que foi apresentada no texto não era de um conjunto, pois um conjunto não possui ordem posicional nem elementos repetidos; além disso, a representação de um conjunto é feita entre chaves, enquanto que no texto foram utilizados parênteses. Notamos aqui um claro erro do autor, que poderia ser corrigido caso fosse utilizada a expressão “lista” em vez de “conjunto”.

O livro B não utiliza a palavra “ordem” na apresentação desse conteúdo, por isso não teremos comentários para fazer sobre esse livro nesta seção.

A página eletrônica 1 já utiliza a expressão “ordem” desde a conceituação mais informal do conteúdo:

> No estudo da matemática estudamos um tipo de sequência: a sequência numérica. Essa sequência que estudamos em matemática é composta por números que estão dispostos em uma determinada ordem preestabelecida.
>
> Ao representarmos uma sequência numérica, devemos colocar seus elementos entre parênteses. Veja alguns exemplos de sequências numéricas:
>
> • (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...) é uma sequência de números pares positivos.
> • (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...) é uma sequência de números naturais.
> • (10, 20, 30, 40, 50...) é uma sequência de números múltiplos de 10.
> • (10, 15, 20, 30) é uma sequência de números múltiplos de 5, maiores que cinco e menores que 35.

Figura 5.6: Uso da expressão "ordem" na página eletrônica 1

A página apresenta a sequência como sendo composta por números que estão dispostos em uma "determinada ordem". Em seguida, os exemplos apresentados mostram sequências com números dispostos em ordem crescente. Dessa forma, o aluno pode interpretar que em toda sequência os números sigam a ordem comparativa; logo, ele só considerará como sequência uma lista de números em ordem crescente. Por isso, afirmamos que a conceituação inicial é incompleta e incorreta.

O problema de falta de clareza continua ao ser apresentada a definição formal de sequência:

> Esses e vários outros exemplos de sequência estão presentes em nosso cotidiano. Observando-os, podemos definir sequência como:
>
> **Sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem.**

Figura 5.7: Uso da expressão "ordem" na página eletrônica 1

A definição continua mencionando a existência de uma "ordem", sem que haja identificação de que esta ordem se refere à posição dos elementos e não à ordem comparativa. Além disso, comete-se dois erros: o primeiro, ao dizer que a sequência é um conjunto ou grupo, em vez de uma função; o segundo, ao considerar que um conjunto poderia ter uma ordem, já que estamos nos referindo à ordem posicional.

A página eletrônica 2 também emprega a expressão "ordem" para definir sequência:

Sequência Numérica

Compartilhar Enviar Email

Na matemática, a **sequência numérica ou sucessão numérica** corresponde a uma função dentro de um agrupamento de números. De tal modo, os elementos agrupados numa sequência numérica seguem uma sucessão, ou seja, uma ordem no conjunto.

Figura 5.8: Definição de sequência na página eletrônica 2

Vamos concentrar nossa atenção apenas ao uso da palavra "ordem" nessa definição, tendo em vista que os demais problemas encontrados nessa definição já foram apresentados na seção 3.4.

Essa página afirma que os elementos "agrupados" (sic) numa sequência numérica seguem "uma sucessão, ou seja, uma ordem no conjunto". Claramente, a palavra "ordem" é utilizado como sinônimo de "sucessão". Esse uso é problemático, pois "sucessão" é um sinônimo para a própria expressão "sequência". Mesmo que tentemos ignorar esse fato, precisamos entender qual seria o sentido da sucessão ou ordem na definição.

O exercício resolvido proposto a seguir repetem o problema encontrado nos exemplos da página eletrônica 1, pois todos os conjuntos possuem todos os elementos dispostos em ordem crescente:

Exercício Resolvido

Para compreender melhor o conceito de sequência numérica, segue abaixo um exercício resolvido:

1) Seguindo o padrão da sequência numérica, qual o próximo número correspondente nas sequências abaixo:

a) (1, 3, 5, 7, 9, 11,...)
b) (0, 2, 4, 6, 8, 10,...)
c) (3, 6, 9, 12,...)
d) (1, 4, 9, 16,...)
e) (37, 31, 29, 23, 19, 17,...)

Figura 5.9: Exercício resolvido sobre sequência, extraído da página eletrônica 2

Mais uma vez, é deixada a ambiguidade ao tentar definir e exemplificar as sequências. A apresentação dessa página também pode induzir o aluno a pensar que os termos das sequências sempre aparecerão em ordem crescente. Por falta de clareza, podemos considerar que essa definição também é incompleta e incorreta.

Após revermos as páginas eletrônicas e livros didáticos, concluímos que o uso da palavra "ordem" na apresentação do conteúdo torna-se ambíguo, nos casos em que não é possível para o aluno diferenciar se seu sentido refere-se à ordem posicional ou à ordem comparativa; em outros casos, o uso da expressão "ordem" está completamente errado, quando é dito que um conjunto possui ordem, já que a definição de sequência envolve ordem posicional. Destacamos que um conjunto só pode ter ordem comparativa, caso seja possível comparar quaisquer dois elementos seus através de uma relação de ordem. Porém, não é possível que um conjunto possua ordem posicional, conforme destacado na Observação 5.1.

Para evitar esses problemas ao abordar o conteúdo, recomendamos o uso de expressões como "listas", "posição" ou "ordem posicional", pois removem as ambiguidades do texto. Além disso, destacamos que um conjunto não tem ordem; logo, é importante se referir às sequências como listas, não como conjuntos, para falar sobre a importância da posição de cada elemento.

Capítulo 6

Uma Introdução Informal aos Limites de Sequências Numéricas

Neste capítulo, propomos uma apresentação mais informal do conceito de limite de sequências numéricas. Para isso, construímos um diálogo entre Sofia, uma estudante de matemática, e seu primo Genésio, um leigo na área. Na conversa, Sofia apresentará as noções básicas de limites de sequências para alguém que está iniciando seus conhecimentos de Análise Real. Nosso objetivo é que esse diálogo seja utilizado como uma introdução leve e motivadora para alunos de Análise Real, que estudarão esses conceitos de modo formal posteriormente, ou mesmo para alunos do ensino médio, que precisam apenas de uma noção intuitiva mais básica desses resultados.

No Capítulo 7, apresentaremos formalmente esses conceitos, junto com resultados importantes que envolvem esses conceitos, para a compreensão formal dos conteúdos do ensino médio que analisaremos nos capítulos posteriores: definição de potências com expoentes irracionais, "soma" dos infinitos termos de uma PG e cálculo da área do círculo.

6.1 Conversa com limites

Férias de verão. A família Siqueira irá se reunir mais uma vez na casa do Genésio. A única novidade é que, dessa vez, sua prima Sofia foi a primeira a chegar. No ano anterior, ela nem pode comparecer. Ao atender à porta, Genésio comemora:

- Sofia! Você veio! Senti sua falta na último ano!

- Genésio! Também senti falta, moço! Mas estava estudando nesse período...

A conversa continua enquanto eles se dirigem ao sofá:

- Nossa, o que você estudava em pleno período de férias?

- Cursei uma disciplina chamada "Análise na Reta". Ela faz parte do meu...

- Mas o que uma pessoa poderia estudar em um traço reto?

- Lembra que na matemática podemos representar os números de diferentes formas, inclusive com gráficos?

- Sim, lembro de ter visto gráficos em Matemática quando cursava o ensino básico...

- Pois é. Com uma reta, nós representamos todo o conjunto dos números reais. E no curso de Análise na Reta nós estudamos várias características muito interessantes dos números reais!

- Faz algum sentido... Mas ainda não consigo imaginar algo interessante que possa sair de uma linha reta ou da representação de um monte de números...

- Posso tentar te mostrar um exemplo? Vou desenhar uma reta aqui e marcar o zero. Você marca um ponto com a caneta preta que eu marco outro mais próximo do zero com caneta vermelha.

Os primos começaram a marcar pontos na reta:

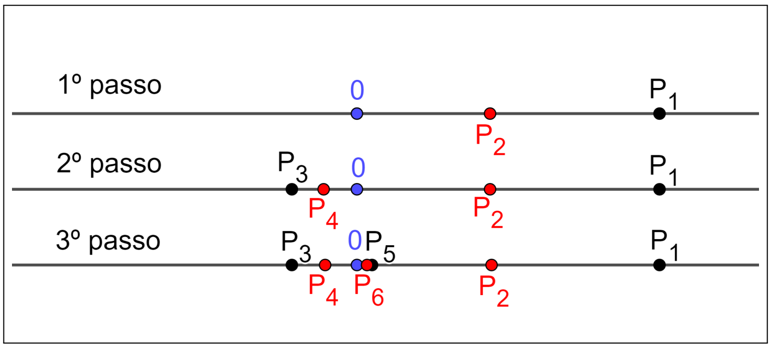


Figura 6.1: Marcação de pontos cada vez mais próximos de zero
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*
Nota: O ponto zero, marcado inicialmente, foi destacado em azul. Os pontos marcados por Genésio estão em preto, enquanto os pontos marcados por Sofia estão em vermelho. O índice de cada ponto indica a sequência de marcação.

No 3º passo Genésio decidiu dificultar, marcando um ponto tão perto do zero que a caneta de Sofia não era mais capaz de diferenciar a localização dos pontos. Genésio fica desconfiado:

- Quem garante que esse seu ponto realmente está mais perto que o meu? Eu acho que está em cima do meu!

- Sim, visualmente temos essa impressão. Mas imagine que vamos dar um *zoom* nessa reta. Quando nossa visualização é mais próxima dos pontos, é possível perceber a distância entre eles.

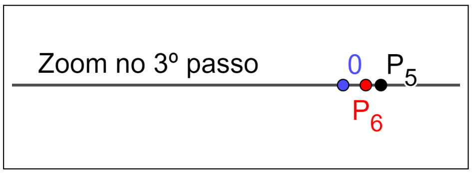


Figura 6.2: *Zoom* no 3º passo da marcação de pontos próximos de zero
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

- Mas sempre será possível dar esse *zoom*?

- Sim! Mas se tiver dificuldade para imaginar dessa forma, ainda podemos mudar a forma de representação[1]... Vamos pensar na forma decimal. Me diga um número próximo de zero e eu te garanto que ainda encontro um número mais próximo de zero que o seu.

- 0,1

- 0,01

-0,0000001

- Quantos zeros você falou mesmo? Ah, não importa. Eu escolho a metade desse número.

- -0,03

- -0,003

- Espera... Você sempre divide o número que falei e encontra um menor.

- Não, o -0,003 é maior que o -0,03. O objetivo é encontrar um número mais próximo do zero.

- Tudo bem. Mas nenhum matemático consegue pensar em um número tão pequeno que não dê mais para dividir? Se eu fosse matemático, eu procuraria...

- Na verdade, sempre é possível dividir um número para obter outro menor[2]. Por exemplo, sempre que você escolher um número, eu posso dividi-lo por dois e encontrar outro número real, mais próximo de zero.

- A impressão é que são tantos números que não acabam mais...

- Exatamente!

- É muita paciência passar as férias procurando números pequenininhos, próximo de zero.

- Na verdade, não só do zero. Isso vai acontecer com qualquer número[3]. Vou te mostrar uma ilustração disso. Imagine que minhas bonequinhas estão empurrando o intervalo, para ele diminuir cada vez mais. Apesar do intervalo estar cada vez menor, sempre teremos

[1]De acordo com Duval, o uso de diferentes registros de representação semiótica para representar o mesmo objeto matemático favorece a compreensão do aluno (TRINDADE et al., 2016). Esse uso de diversos registros é constantemente proposto em nosso trabalho e ilustrado em nosso diálogo.

[2]Isso acontece porque a divisão está bem definida para quaisquer números reais.

[3]No Teorema 9.2, provaremos que em qualquer intervalo existe pelo menos um número racional e um número irracional. Logo, para qualquer número x real, basta considerar um intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, com ε tão pequeno quanto eu queira, que esse resultado me garante que obterei números próximos de x.

números reais dentro do intervalo!

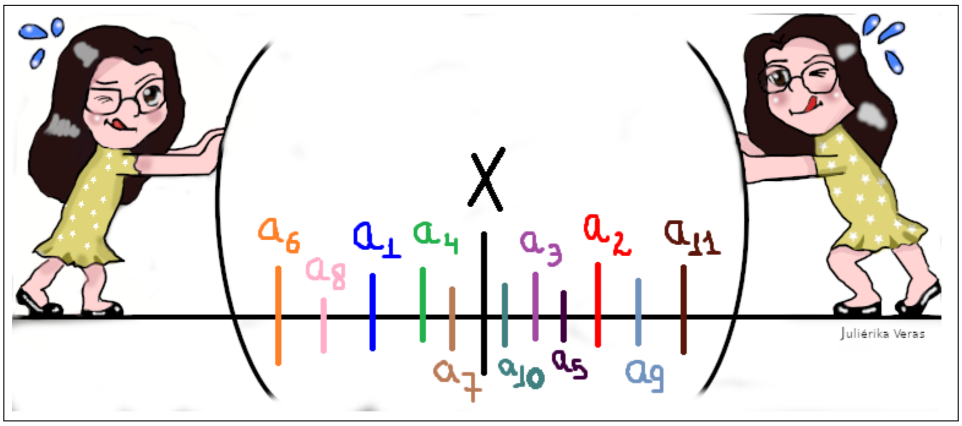


Figura 6.3: Ilustração da escolha de intervalos cada vez menores centrados em um número real x qualquer

FONTE: Acervo da autora da imagem. Reproduzido com permissão.

- Quer dizer que posso continuar diminuindo esse intervalo e sempre vou ter números dentro dele?

- Exatamente! E quando parecer que o intervalo está muito pequeno, imagine que vai dar um *zoom* na imagem e que as bonequinhas continuarão empurrando. Mesmo depois de tanto empurrar, você ainda terá infinitos números reais dentro desse intervalo! Nós usamos esse fato com muita frequência na matemática.

- Tem alguma situação que vocês usem esse fato que eu consiga compreender?

- Sim! Escolha um número real e eu te mostro uma lista infinita de números reais que se aproximem cada vez mais dele.

- 3.

- Certo. Vou fazer um esboço em um gráfico para você observar. É um exemplo de uma sequência que se aproxima cada vez mais do 3:

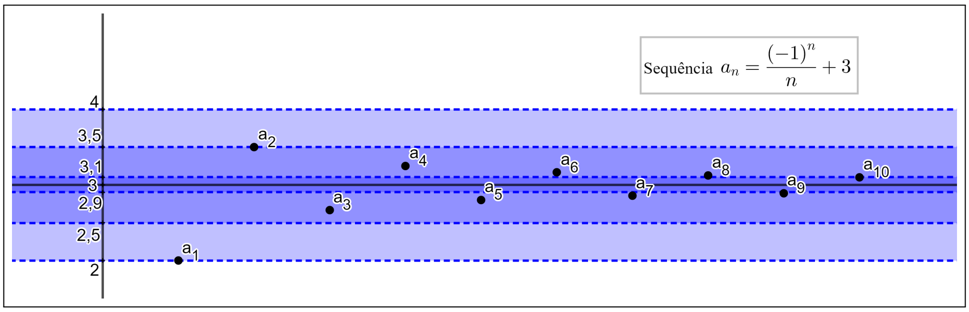


Figura 6.4: Gráfico da lista de números da forma $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 3$

FONTE: Elaborado pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Sofia continua explicando:

- Você pode pensar em um intervalo cada vez menor, centrado no 3; a partir de algum termo da sequência, todos os termos seguintes estarão no intervalo! Eu representei os dez primeiros, mas seria possível continuar para sempre marcando pontos cada vez mais próximos do três!

- É, parece que vocês não têm limites mesmo...

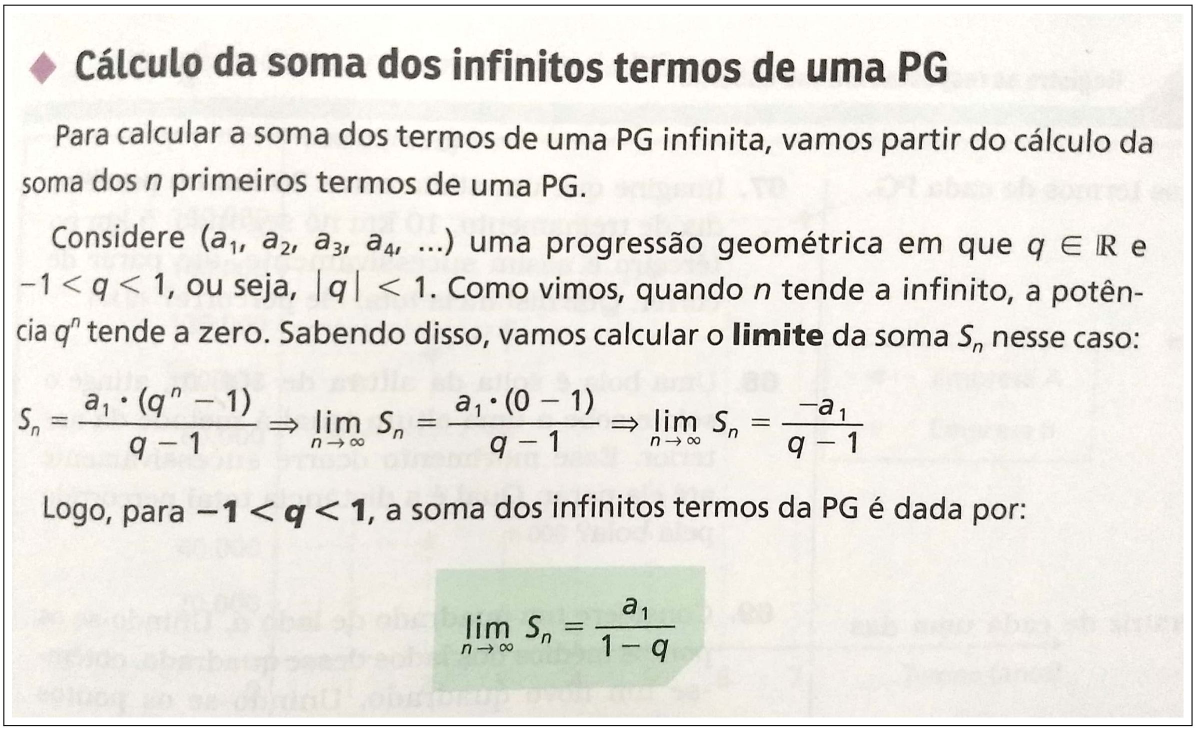
- Na verdade, temos sim. Eu acabei de representar um limite! A lista que nós acabamos de representar na verdade é uma sequência numérica[4]. Como ela se aproxima cada vez mais do número 3, dizemos que ela tem limite 3.

[4]Na seção 4.2, mostramos por que as listas são exemplos de sequências.

Capítulo 7

Convergência de Sequências Numéricas

Sabemos que os alunos do ensino médio não estudarão profundamente os conteúdos de Análise Real. Porém, como podemos ver na figura 7.1, nesse nível de ensino os alunos têm o primeiro contato com fatos que envolvem esses conteúdos. O recorte apresentado faz parte da apresentação da "soma" dos infinitos termos de uma PG em um dos livros didáticos que analisamos:



◆ Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ uma progressão geométrica em que $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$. Como vimos, quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma S_n nesse caso:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $\mathbf{-1 < q < 1}$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Figura 7.1: Apresentação de limites extraída do livro C

Como podemos notar, o livro apresenta o conceito de limite de forma mais intuitiva, o que consideramos adequado para esse nível de ensino. No Capítulo 10, mostraremos a abordagem utilizada em outros livros e páginas eletrônicas: todos seguem o mesmo caminho de apresentar limites de forma intuitiva. Porém, o uso da intuição não pode impedir que essa conceituação seja clara; é preciso evitar dúvidas que prejudiquem a compreensão do conteúdo ou que aparentem imprecisão ou falta de formalidade na apresentação do conteúdo.

Por essa razão, o professor do ensino médio precisa estar ciente da definição formal de limite e dos principais resultados. Tendo essa necessidade em mente, dedicamos esse capítulo para relembrar o conceito e a definição formal de limite de uma sequência, além de apresentar e demonstrar vários resultados que serão necessários nos capítulos seguintes. Destacamos que no ensino médio os alunos são apresentados a sequências numéricas e não-numéricas, finitas e infinitas; porém, ao estudarmos sobre convergência de sequências, só faz sentido nos referirmos às sequências numéricas infinitas.

Vamos iniciar nossas contribuições com um exemplo que pode ser utilizado por professores de Análise Real ou mesmo pelos professores de ensino médio para introduzir o conceito de limite:

Exemplo 7.1 *Na Figura 7.2, a partir do triângulo maior foi construído um segundo triângulo, ligando os pontos médios de cada lado. Os demais triângulos foram construídos repetindo-se o mesmo procedimento. Considere que o lado do maior triângulo mede 1 unidade de comprimento. Se continuarmos construindo triângulos da mesma forma, qual será a sequência das medidas dos lados dos triângulos?*

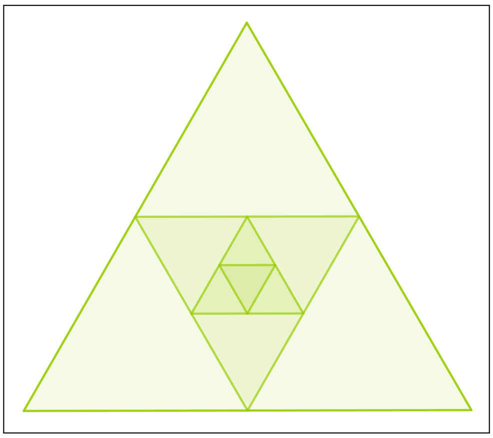


Figura 7.2: Sequência de medidas de triângulos equiláteros formados pelas bases médias
Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o *software Geogebra*

Seja l_n a medida do lado do n-ésimo triângulo. Para o maior triângulo, a medida do lado é $l_1 = 1$ e, a partir dele, podemos calcular as medidas dos lados dos triângulos: $l_2 = \frac{1}{2}$, $l_3 = \frac{1}{4}$, $l_4 = \frac{1}{8}$, $\cdots$. Generalizando, $l_n = \frac{1}{2^n}$.

Note que, quanto maior for n, menores serão os valores de l_n. Tais valores serão sempre maiores que zero, por serem medidas de objetos geométricos (comprimento de um segmento de reta). Porém, os valores estarão cada vez mais próximos do zero:

n	l_n
1	1
2	0,5
3	0,125
4	0,0625
5	0,03123

Essa sequência ilustra o conceito de limite de sequências: os valores de l_n se tornam cada vez mais próximos de um número real; nesse caso, o zero.

Após introduzir o conceito de forma mais intuitiva, propomos que seja apresentada a definição formal de limite e convergência:

Definição 7.1 *Dizemos que a sequência (a_n)* **converge** *para um número real L quando, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um índice $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0(\varepsilon)$, $|a_n - L| < \varepsilon$. O número L é chamado de* **limite** *da sequência.*

Notação 7.1 *Denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ o limite de uma sequência.*

Exemplo 7.2 *Vamos representar a sequência $a_n = 2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^n$ e observar seu comportamento:*

Inicialmente, vamos representar os primeiros termos da sequência de forma numérica:

n	$a_n = 2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^n$
1	1,25
2	2,5625
3	1,578125
4	2,31640625
5	1,7626953125
6	2,177978515625
7	1,86651611328125
8	2,1001129150390625
9	1,924915313720703125
10	2,05631351470947265625

De acordo com os números apresentados na tabela, percebemos que os valores de (a_n) se aproximam cada vez mais de 2. A seguir, vamos converter essa representação numérica para uma representação gráfica e observar visualmente essa aproximação:

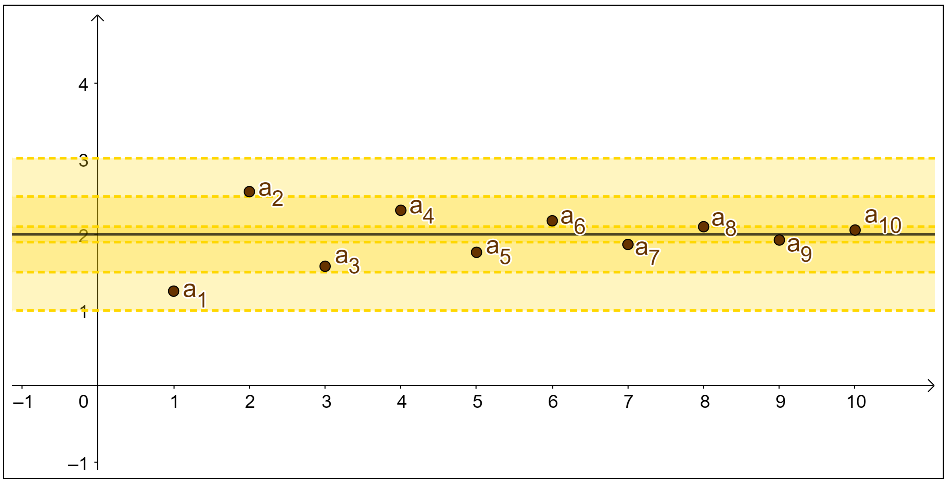


Figura 7.3: Representação de uma sequência com limite 2 em gráfico bidimensional
FONTE: Elaborada pela autora com recursos do *software Geogebra*

Note que, para qualquer ε, a partir de algum $n \in \mathbb{N}$ os termos da sequência estão todos na faixa $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Na figura, as faixas amarelas representam os intervalos $(2-\varepsilon_i, 2+\varepsilon_i)$ para $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$ e $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{10}$. Observe também que, para cada ε_i, teremos um índice n_i a partir do qual os elementos seguintes estarão todos na faixa $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Lembramos ainda que, de acordo com Trindade et al. (2016), Duval defende que a utilização de vários registros de representação semiótica é fundamental para garantir a boa compreensão dos alunos. Por isso, propomos o uso da representação algébrica, gráfica e ainda o uso de tabela. Ressaltamos ainda a importância de realizar o tratamento, ou seja, a transformação de uma representação em um mesmo registro, e a conversão, isto é, a transformação de uma representação em outra, de outro registro.

A seguir, apresentamos o tratamento da representação gráfica da sequência apresentada na Figura 7.3: a sequência que havíamos representado em um gráfico de duas dimensões agora será representada em um gráfico de apenas uma dimensão. Observe a diferença na percepção causada por essa mudança, apesar de estarmos utilizando o mesmo registro de representação semiótica:

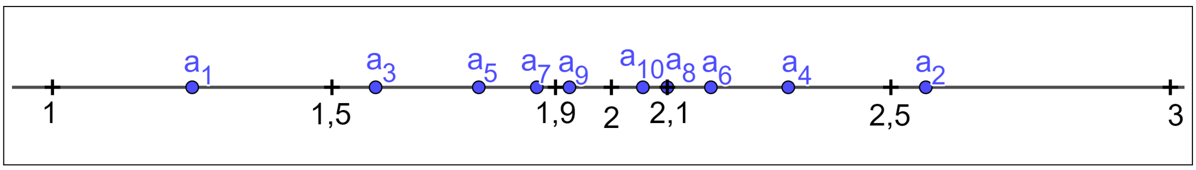


Figura 7.4: Representação de uma sequência com limite 2 em gráfico unidimensional
FONTE: Elaborada pela autora com recursos do *software Geogebra*

A representação unidimensional pode facilitar a compreensão de que a sequência se aproxima de um determinado número, já que tal fato se torna visível (no gráfico anterior, os pontos se aproximavam da reta $y = 2$; nesse último, aproximam-se do ponto 2). Por outro lado, em relação à Figura 7.4, destacamos a importância dos índices na identificação de cada ponto marcado na reta, para que seja possível sabermos quais pontos foram marcados primeiro e quais foram marcados depois. No gráfico com duas dimensões, a identificação com o índice era opcional.

Para finalizar nossa definição, pensemos na seguinte situação: uma sequência (a_n) pode ter dois limites L e M distintos? Pela definição de limite, caso tal situação aconteça, então para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado, existe um n_0 tal que, se $n > n_0$, então $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Igualmente para o limite M, tomado qualquer $\delta > 0$, existe n_1 tal que, se $n > n_1$, então $a_n \in (M-\delta, M+\delta)$.

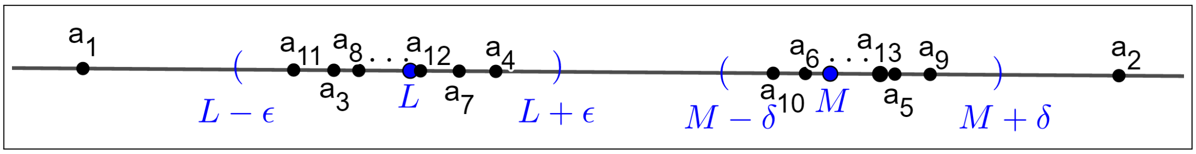


Figura 7.5: Ilustração de uma sequência com termos se aproximando de dois valores distintos
FONTE: Elaborada pela autora, por meio dos recursos do *software Geogebra*

Tendo em vista que as informações acima são válidas para quaisquer ε e δ, podemos tomar um ε e um δ menores que $\dfrac{|L-M|}{2}$. Nessas condições, teremos a situação mostrada na Figura 7.5: a interseção entre $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(M-\delta, M+\delta)$ é vazia. Logo, se a partir de n_0 todos os elementos pertencem a $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, então nenhum elemento pertencerá a $(M-\delta, M+\delta)$, o que significa que M não será limite da sequência.

Após apresentarmos as noções gerais do raciocínio, vamos demonstrar formalmente a unicidade do limite:

Proposição 7.1 *Se a sequência (a_n) convergir, então seu limite é único.*

Demonstração: Suponha que a sequência possua dois limites L e M distintos, com $L > M$ Fixemos $\varepsilon = \dfrac{L-M}{2} > 0$. Pela definição de limites, existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon = \frac{L-M}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon = \frac{L-M}{2}.$$

Logo, para $n > max\{n_1, n_2\}$, temos $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, isto é:

$$L - \frac{L-M}{2} < a_n < L + \frac{L-M}{2} \Leftrightarrow \frac{L+M}{2} < a_n < \frac{3L-M}{2}$$

e $M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon$, ou seja,

$$M - \frac{L-M}{2} < a_n < M + \frac{L-M}{2} \Leftrightarrow \frac{3M-L}{2} < a_n < \frac{L+M}{2},$$

de onde concluiríamos que

$$a_n < \frac{L+M}{2} < a_n,$$

o que é um absurdo!

Portanto, a sequência deve ter um único limite. ■

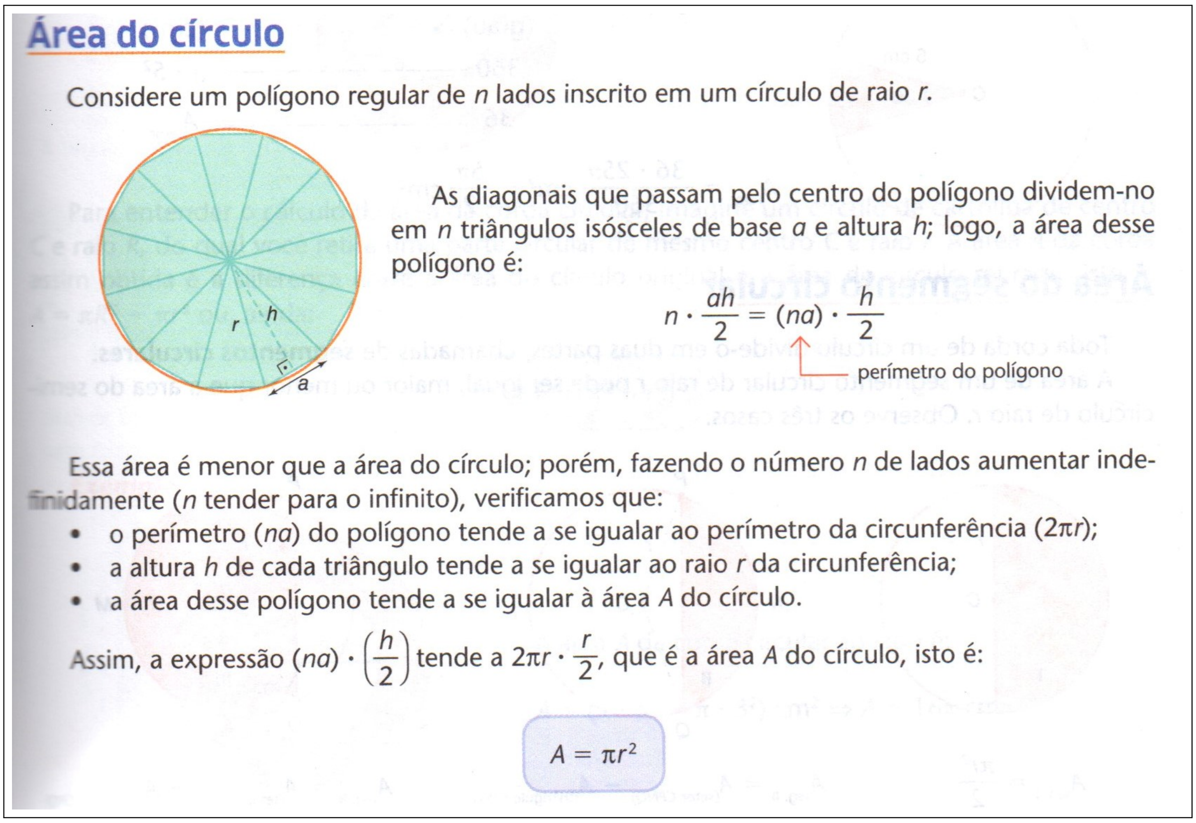
Essa proposta de abordagem de ensino contempla os fatores que consideramos essenciais: introdução da conceituação de forma mais intuitiva, apresentação da definição, exemplos incluindo representações com diversos registros de representação semiótica. Acreditamos que mesmo o aluno conseguirá apreender o conceito de limites, ainda que não estude de forma tão detalhada como fazemos no ensino superior.

Agora deixamos um questionamento: quando vemos uma sequência sempre é possível concluirmos rapidamente se elas convergem? Enquanto a convergência de algumas sequências é bastante simples de ser observada e demonstrada, outras não são. Por isso, dedicamos as seções seguintes à apresentação de definições e proposições que garantem a convergência das sequências que atendem a algumas condições. Ressaltamos a importância de que o professor tenha conhecimento desses conteúdos, pois eles fundamentam afirmações feitas em livros e páginas eletrônicas do ensino médio, como veremos a seguir:

7.1 Sequências monótonas e limitadas: mais conceitos e resultados importantes

No estudo das potências com expoentes irracionais, da "soma" dos infinitos termos de uma PG e do cálculo da área do círculo, o raciocínio para justificar a existência desses valores é construído basicamente através da construção de sequências monótonas e limitadas, como veremos nos capítulos seguintes. Nessa seção, entenderemos por que essas sequências são as mais escolhidas pelos autores; de fato, intuitivamente é fácil levantar a hipótese de que essas sequências se aproximem cada vez mais de um número e formalmente conseguimos demonstrar a veracidade dessa hipótese.

Para iniciar nossa seção, vamos observar como um livro apresenta a estimativa da área de um círculo por falta ou por excesso:



Área do círculo

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r.

As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em n triângulos isósceles de base a e altura h; logo, a área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = \underbrace{(na)}_{\text{perímetro do polígono}} \cdot \frac{h}{2}$$

Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), verificamos que:

- o perímetro (na) do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tende a se igualar à área A do círculo.

Assim, a expressão $(na) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo, isto é:

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

Figura 7.6: Cálculo da área do círculo, extraído do livro A

O que garante que o perímetro e a altura se aproximam de um valor específico? Para um aluno do ensino médio, o que significa a expressão “tender ao infinito”? Para responder à primeira pergunta, precisaremos de alguns conceitos e resultados, os quais apresentamos a seguir. A segunda pergunta será respondida na seção 7.3.

Definição 7.2 *Um **conjunto** $A \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** se existir um número $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$A \subset (-\infty, M],$$

*o que equivale a $M \geq a, \forall a \in A$. Neste caso, dizemos que M é uma **cota superior** para A. Analogamente, um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é **limitado inferiormente** se existir um número $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$B \subset [m, \infty),$$

*o que equivale a $m \leq a, \forall a \in A$. Neste caso, dizemos que m é uma **cota inferior** para B. Por fim, se um conjunto é limitado inferiormente e superiormente, dizemos simplesmente que ele é **limitado**.*

Observação 7.1 *Dizemos que o conjunto vazio, $\emptyset$, é limitado e a demonstração é feita por vacuidade. Todo $x \in \mathbb{R}$ é cota superior de $\emptyset$, pois não existe um elemento de $\emptyset$ que seja maior* *que x. Analogamente, todo x também será cota inferior de $\emptyset$, pois não existe um elemento de $\emptyset$ que seja menor que x. Logo, $\emptyset$ será limitado.*

Exemplo 7.3 *Consideremos os conjuntos $A = (-\infty, 3)$, $B = [-5, \infty)$, $C = \left(\frac{3}{8}, 10\right]$, $D = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$, $E = \{4m | m \in \mathbb{N}\}$. Quais desses conjuntos possuem cotas superiores? E cotas inferiores?*

Notamos que os conjuntos A e C possuem cotas superiores. Por exemplo, $3, 5, 1000$, são cotas superiores para A e $10, 30, 50$ são cotas superiores para C.

Já o conjunto B não possui cotas superiores. Sabemos que todo número maior que -5 pertence ao conjunto B. Se existisse um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq b$, para todo $b \in B$, então $B \subseteq [-5, x]$, o que contradiria o fato de que $B = [-5, \infty)$. Portanto, nenhum $x \in \mathbb{R}$ será cota superior de B.

Também não será possível encontrar um número d que seja maior que ou igual aos demais elementos de D. Para qualquer $d = 2k_0 > 0$, com $k_0 \in \mathbb{Z}$, temos $k_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ e $2(k_0 + 1) \in D$, sendo $2(k_0 + 1) > 2k_0$. Logo, não há uma cota superior para D.

O mesmo raciocínio mostra que não é possível encontrarmos cotas superiores para E: para qualquer $4m \in E$, existirá $m + 1 \in \mathbb{N}$ tal que $4(m + 1) > 4m$, sendo que $4(m + 1) \in E$. Logo, não existirá cota superior.

Agora, verificaremos se existem cotas inferiores para cada conjunto dado:

Observamos que B, C e E têm cotas inferiores. Por exemplo, $-10 \leq b$, para todo $b \in B$, $0 \leq c$, para todo $c \in C$ e $0 \leq 4m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Agora, resta analisar se os conjuntos A e D também possuem cotas inferiores. Sabemos que todo número menor que 3 pertence a A. Caso existisse um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$, para todo $a \in A$, teríamos $A \subseteq [x, 3)$, o que contradiria o fato de que $A = (-\infty, 3)$. Logo, concluímos que não existem cotas inferiores para A.

Já no conjunto D, para qualquer $w \in D$ tal que $w < 0$, temos $2w < w$, com $2w \in D$. Logo, não existem cotas inferiores para D.

Nos casos acima, dizemos que os conjuntos B, D e E são **ilimitados superiormente** e os conjuntos A e D são **ilimitados inferiormente**.

Até o momento, apresentamos uma definição e resultados que se referem a conjuntos. Temos ainda uma definição similar para sequências:

Definição 7.3 *Uma **sequência** (x_n) é **limitada superiormente** quando existe um $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Analogamente, uma sequência (y_n) é **limitada inferiormente** quando existe um $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Quando uma sequência é limitada superiormente e inferiormente, dizemos apenas que ela é uma **sequência limitada**.*

Da forma análoga aos conjuntos limitados, M é considerada ***cota superior*** *e m,* ***cota inferior*** *da sequência.*

Exemplo 7.4 *A sequência $a_n = sen(n)$ é limitada.*

De fato, temos $-1 \leq sen(x) \leq 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo, teremos $-1 \leq a_n \leq 1$, ou seja, -1 é cota inferior e 1, cota superior de (a_n).

Os primeiros termos da sequência estão representados na figura a seguir:

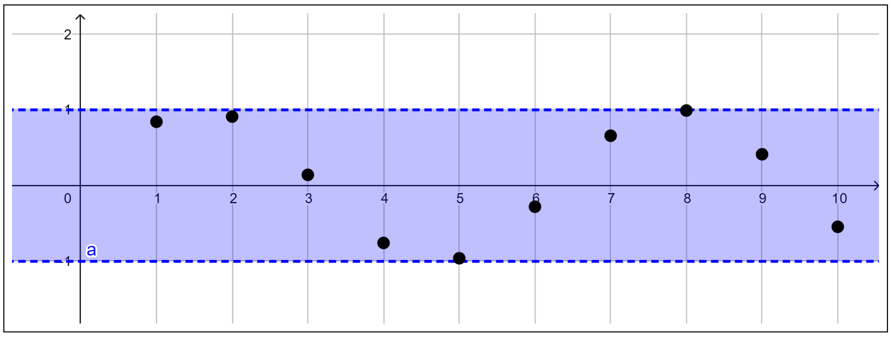


Figura 7.7: Exemplo de sequência limitada
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Agora, vamos iniciar a apresentação dos resultados que respondem à nossa pergunta: uma sequência monótona e limitada sempre será convergente?

Lema 7.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Por definição, se (a_n) é uma sequência convergente, com limite l, então fixado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, ou seja, para $n > n_0$, todos os termos a_n estão limitados por $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$.

Consideremos agora o conjunto dos primeiros n_0 elementos: $\{a_1, a_2, ..., a_{n_0}\}$. Seja $A = max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|, l - \varepsilon, l + \varepsilon\}$. Podemos garantir que $-A < a_n < A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que o resultado é válido para qualquer sequência tomada.

Portanto, qualquer sequência convergente será limitada. ■

Nos exemplos 7.1 e 7.2, apresentados anteriormente, vemos sequências convergentes, que ilustram esse fato.

A partir da definição de cotas superiores e inferiores, compreendemos outro conceito fundamental para o resultado principal desta seção. Destacamos que esses resultados são válidos para os conjuntos formados pelos termos de uma sequência qualquer:

Axioma 7.1 (Axioma de Dedekind) *Se $A \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então A possui uma* **menor cota superior**, *denominada* **supremo** *e denotada por* ***supA***. *Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente, então A possui uma maior cota inferior, denominada* **ínfimo** *e denotada por* ***infA***.

Observação 7.2 *Apesar do conjunto vazio $\emptyset$ ser limitado superiormente e inferiormente, ele não possui supremo nem ínfimo, pois não existe uma menor cota superior ou uma maior cota inferior para esse conjunto.*

Nos conjuntos apresentados no Exemplo 7.3, o conjunto $A = (-\infty, 3)$ tem um supremo: o número 3. Para demonstrar, suponha que exista uma cota superior $x_0 < 3$. Nesse caso, podemos obter o número $\dfrac{x_0+3}{2} > x$, com $\dfrac{x_0+3}{2} \in X$, ou seja, x não será cota superior de A. Portanto, 3 é a menor cota superior de A. Porém, A não possui cotas inferiores, por isso não tem ínfimo.

O conjunto $B = [-5, \infty)$ tem um ínfimo: o número -5. Para verificar, observemos primeiramente que -5 é cota inferior, pois $-5 \leq b$ para todo $b \in B$. Além disso, se existe uma cota inferior $x_1 > -5$, então x_1 será maior que pelo menos um elemento de B, o -5. Portanto, -5 é a maior cota inferior de B. Todavia, B não tem supremo, pois não tem cotas superiores.

Por sua vez, o conjunto $C = \left(\dfrac{3}{8}, 10\right]$ tem o ínfimo $\dfrac{3}{8}$ e o supremo 10. Para demonstrar, basta seguir raciocínios análogos aos apresentados para A e B.

Já o conjunto $D = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$ não possui cotas superiores nem inferiores, por isso não tem supremo ou ínfimo.

Finalmente, 0 é o ínfimo de $E = \{4m | m \in \mathbb{N}\}$, pois $0 \leq 4m$, para todo $4m \in E$ e $0 \in E$. Por outro lado, esse conjunto não possui supremo, por ser ilimitado superiormente.

Para verificar se os números apresentados eram supremos ou ínfimos dos conjuntos dados, utilizamos um raciocínio que será formalizado agora por ser importante em outras situações que serão estudadas posteriormente:

Lema 7.3 *Para todo $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente, cujo supremo seja $M = supX$, podemos tomar um $\varepsilon > 0$ qualquer e garantir que existe $x \in X$ tal que*

$$M - \varepsilon < x \leq M.$$

Analogamente, para todo $Y \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente, cujo ínfimo seja $m = infY$, podemos tomar um $\varepsilon > 0$ qualquer e garantir que existe $y \in Y$ tal que $m < y < m + \varepsilon$.

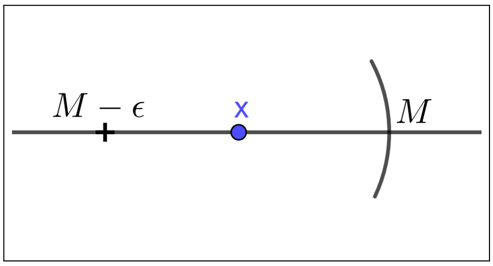


Figura 7.8: Representação gráfica do Lema 7.3
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Demonstração: Já sabemos, pela definição de supremo, que não pode existir $x \in X$ tal que $x > M$, pois M é uma cota superior de X. Suponhamos que não exista $x \in X$ tal que $M - \varepsilon < x \leq M$. Logo, teremos $x \leq M - \varepsilon$, para todo $x \in X$, ou seja, $M - \varepsilon$ será uma cota superior para X menor que M, o que contradiz a hipótese de que $M = supX$.
Portanto, deve existir $x \in X$ tal que $M - \varepsilon < x \leq M$.
A demonstração é análoga para o ínfimo do conjunto. ■

É importante destacar que nem toda sequência limitada será convergente. Por exemplo, a sequência $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots)$ é limitada, mas não é convergente. No resultado a seguir, acrescentamos uma condição para determinar um caso em que a sequência sempre será convergente. Com esse resultado, finalmente conseguiremos mostrar por que é possível definir a área do círculo através das aproximações apresentadas no livro A (ver Figura 7.6).

Teorema 7.4 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Suponhamos que a sequência (a_n) seja não decrescente, isto é, $a_n \leq a_{n+1}$. Consideremos o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$. Como a sequência é limitada, A também será limitado e, conforme enunciado no Axioma de Dedekind (Axioma 7.1), concluímos que existe $supA$.

Mostraremos agora que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = supA$, isto é, que fixado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - supA| < \varepsilon$.

Sendo (a_n) não decrescente, pelo Lema 7.3, afirmamos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $a_j \in A$ tal que $supA - \varepsilon < a_j < supA$. Além disso, como (a_n) é não decrescente, para todo $n \geq j$, temos $supA - \varepsilon < a_n < supA \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - supA < 0$, o que implica que

$$|a_n - supA| < \varepsilon.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, provamos o mesmo resultado para sequências crescentes.

Caso a sequência seja não crescente ou decrescente, o raciocínio será similar, mas com a sequência convergindo para o $infA$. ■

Em relação à pergunta inicial, vemos que a sequência apresentada na Figura 7.5 é monótona, pois a área de cada polígono é maior que a anterior. Veremos agora que a sequência também é limitada: se considerarmos um quadrado circunscrito ao círculo[1] (ver Figura 7.9), podemos garantir que a área dos polígonos construídos serão menores que a área do quadrado circunscrito; logo, a sequência é limitada. Portanto, pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4), podemos garantir que a sequência das áreas dos polígonos inscritos na circunferência é convergente.

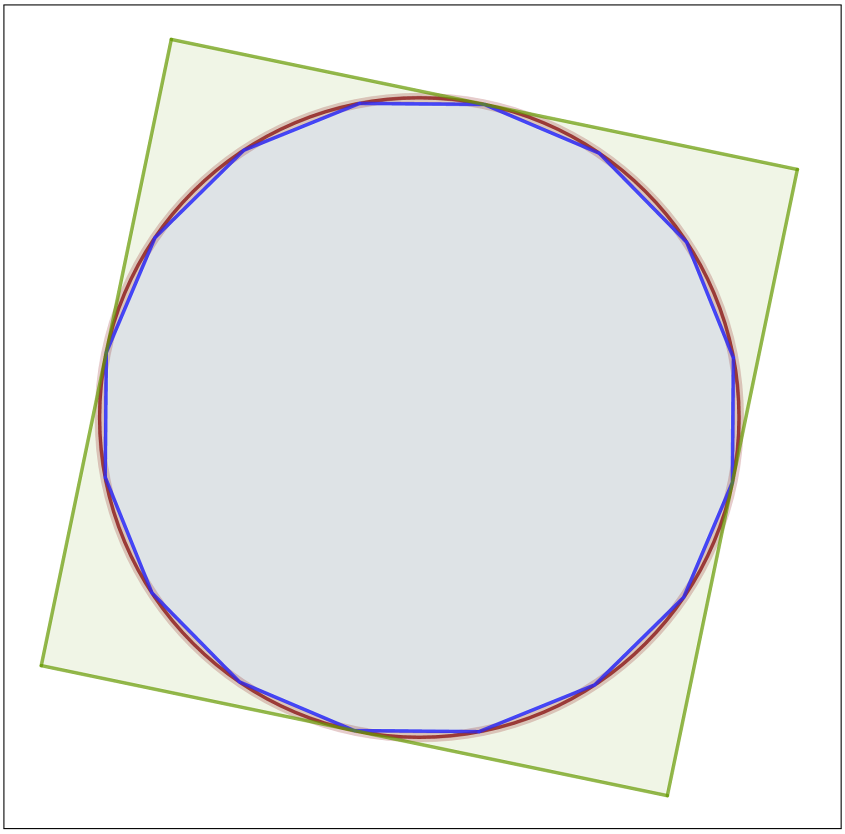


Figura 7.9: Quadrado circunscrito e polígonos inscritos ao círculo
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Para finalizar esta seção, vamos apresentar um resultado importante que envolve um conjunto ilimitado: a Propriedade Arquimediana dos Números Reais. Primeiro, relembraremos os Axiomas de Peano, que serão necessários para demonstrar a propriedade. Depois apresentaremos a propriedade com sua respectiva demonstração e, por fim, mostraremos um exemplo de aplicação da mesma. Salientamos que tanto a Propriedade Arquimediana quanto o exemplo de aplicação serão mencionados no restante do nosso trabalho, por sua relevância.

Axioma 7.2 (Axiomas de Peano) *1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um sucessor de n que pertence a $\mathbb{N}$, denotado por $n+1$;*

[1]Não apresentamos a demonstração desse fato por fugir do escopo de nossa pesquisa. Porém, caso o leitor não conheça essa demonstração, recomendamos a leitura do Capítulo 8 do livro "Geometria Euclidiana Plana" (BARBOSA, 2012).

2. *Se* $m+1=n+1$, *então* $m=n$;

3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \neq 1$. *Isto é,* 1 *é o único elemento de* $\mathbb{N}$ *que não é sucessor de nenhum número.*

4. *Se* $X \subset \mathbb{N}$, *tal que:*

   $1 \in X$;

   Se $n \in X$, *então* $n+1 \in X$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

   Então $X = \mathbb{N}$.

Após relembrarmos os Axiomas de Peano, passemos à apresentação da Propriedade Arquimediana:

Teorema 7.5 (Propriedade Arquimediana dos Números Reais) *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *é ilimitado superiormente;*

2. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$;

3. *Seja* $a \in \mathbb{R}$, *com* $a > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Demonstração: Para provar a proposição 1, vamos supor por absurdo que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Pelo Axioma de Dedekind (Axioma 7.1), deve existir $b = sup\mathbb{N}$.

Temos $b-1 < b$. Pelo Lema 7.3, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $b-1 < x$. Mas isso equivale a dizer que $b < x+1$. Porém, pelos Axiomas de Peano, $x+1 \in \mathbb{N}$. Logo, existe um número natural $x+1$ maior que b o que contradiz a afirmação de que $b = sup\mathbb{N}$, pois b deveria ser uma cota superior.

Logo, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Para demonstrar a proposição 2, utilizaremos a proposição 1: para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{b}{a}$, ou seja, $na > b$. Destacamos que $\dfrac{b}{a}$ não é, necessariamente, um número racional, apesar de estar escrito em forma de fração: para que esse número fosse racional, deveríamos ter $a, b \in \mathbb{Z}$, mas a e b são dois reais quaisquer. Portanto, a proposição é válida para qualquer número real.

Em particular, se $a = 1$, para todo $b \in \mathbb{R}$ podemos afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > b$.

Por fim, vamos provar a proposição 3 como decorrente da proposição 2: para $b = 1$ e um $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1}{a}$, isto é, $0 < \dfrac{1}{n} < a$. ■

Exemplo 7.5 *Mostraremos que a sequência* (a_n)*, com* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *converge para* 0*.*

Pela Propriedade Arquimediana (Teorema 7.5), para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$*. Mas isso equivale a dizer que* $\varepsilon > \dfrac{1}{n_0}$*. Além disso, para todo* $n > n_0$*, ainda teremos* $n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$*. Portanto, a sequência* (a_n) *converge para* 0*.* ■

7.2 Subsequências: conceitos e resultados importantes

Existem situações em que não precisamos analisar o comportamento de todos os termos de uma sequência, pois observando um número infinito de termos conseguimos chegar às conclusões desejadas. A seguir, apresentaremos a definição necessária para esse caso e estudaremos os principais resultados envolvendo tal definição que serão necessários para o estudo dos conteúdos do Ensino Médio abordados neste trabalho:

Definição 7.4 *Dada uma sequência* (a_n)*, definimos uma* **subsequência** *da mesma como a restrição de* (a_n) *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$ *do conjunto de índices. Denotamos a subsequência por* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*.*

Exemplo 7.6 *Dada a sequência* (x_n) *tal que* $x_n = 2n$*,* (y_n) *tal que* $y_n = 4m$ *será uma subsequência de* (x_n)*. Ou seja,* (y_n) *é uma restrição de* (x_n) *ao subconjunto dos índices pares.*

Outro ponto importante a ser destacado é a possibilidade de realizar operações com os limites de sequências convergentes. Esse fato costuma ser mencionado de forma bastante sucinta nos livros, ao apresentar potências com expoente irracionais, referindo-se ao fato como sendo propriedades das potências:

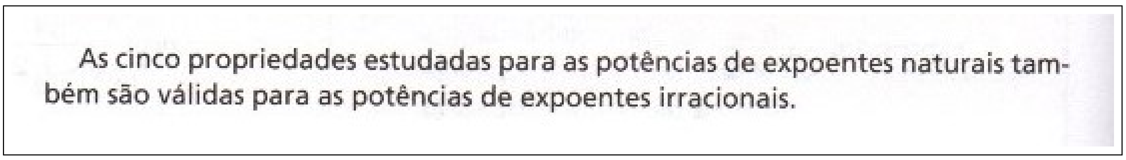

As cinco propriedades estudadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes irracionais.

Figura 7.10: Propriedades das operações entre potências com expoentes irracionais, apresentadas no livro C

A seguir, apresentaremos formalmente a afirmação acima:

Proposição 7.2 *Dadas duas sequências* (a_n) *e* (b_n) *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *e um número* $c \in \mathbb{R}$*, temos:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(d) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *e* (b_n) *é limitada, então,* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

(e) Se $b_n \neq 0$*, para todo* $n \geq 1$*, então* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

A demonstração foi apresentada no Apêndice B.

Em alguns casos, a convergência de várias subsequências será mais fácil de observar que a convergência de toda a sequência. Por isso, apresentamos um resultado que mostra a relação entre a convergência de subsequências e a convergência da sequência:

Proposição 7.3 *Se toda subsequência de uma sequência* (a_n) *converge para L, então* (a_n) *também converge para L.*

Demonstração: Vamos considerar duas subsequências (a_{2n}) e (a_{2n+1}).

Pela hipótese, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.

Observe que os conjuntos $\{2n; n \in \mathbb{N}\}$ e $\{2n+1; n \in \mathbb{N}\}$ formam uma partição de $\mathbb{N}$, ou seja, todo número natural pertence a exatamente um desses conjuntos. Assim, todo elemento de (a_n) pertencerá a uma das subsequências (a_{2n}) ou (a_{2n+1}).

Pela definição de limite, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_0 \Rightarrow |a_{2n} - L| < \varepsilon$$

e

$$n > n_1 \Rightarrow |a_{2n+1} - L| < \varepsilon.$$

Suponhamos agora que a sequência (a_n) não convirja para L. Pela definição de limite, isso significa que existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n' > n$ tal que $|a_{n'} - L| > \varepsilon_0$.

Denotemos $n_2 = max\{n_0, n_1\}$ e observemos o seguinte:

- Se n' é par, então para todo $n > n_2$, temos $|a_{2n} - L| < \varepsilon_0$;
- Se n' é ímpar, então para todo $n > n_2$, temos $|a_{2n+1} - L| < \varepsilon_0$.

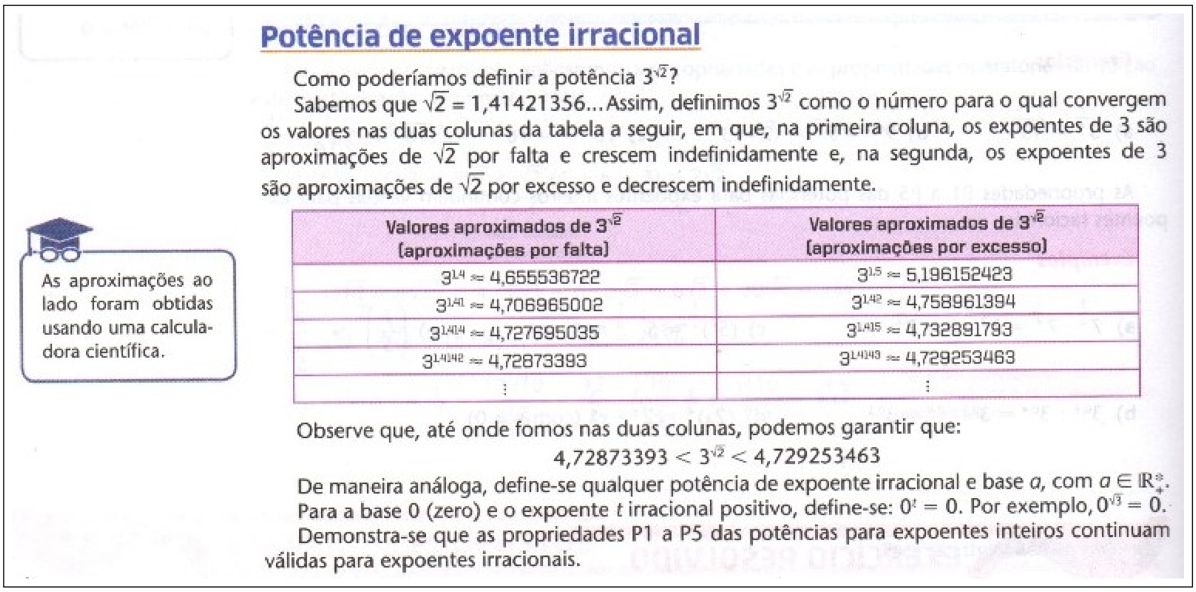
Como todos os elementos de (a_n) estão enquadrados em um dos casos acima, concluímos que, independentemente do valor de $\varepsilon_0 > 0$, sempre existirá $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_2$, temos

$$|a_n - L| < \varepsilon_0,$$

contradizendo a hipótese de que (a_n) não convergisse para L.

Portanto, concluímos que (a_n) também converge para L. ∎

Vamos continuar nossa apresentação do conteúdo mostrando uma situação apresentada em um livro didático, conforme vemos na Figura 7.11:



Potência de expoente irracional

Como poderíamos definir a potência $3^{\sqrt{2}}$?

Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$ Assim, definimos $3^{\sqrt{2}}$ como o número para o qual convergem os valores nas duas colunas da tabela a seguir, em que, na primeira coluna, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por falta e crescem indefinidamente e, na segunda, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por excesso e decrescem indefinidamente.

Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por falta)	Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por excesso)
$3^{1,4} \simeq 4{,}655536722$	$3^{1,5} \simeq 5{,}196152423$
$3^{1,41} \simeq 4{,}706965002$	$3^{1,42} \simeq 4{,}758961394$
$3^{1,414} \simeq 4{,}727695035$	$3^{1,415} \simeq 4{,}732891793$
$3^{1,4142} \simeq 4{,}72873393$	$3^{1,4143} \simeq 4{,}729253463$
$\vdots$	$\vdots$

As aproximações ao lado foram obtidas usando uma calculadora científica.

Observe que, até onde fomos nas duas colunas, podemos garantir que:

$$4{,}72873393 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}729253463$$

De maneira análoga, define-se qualquer potência de expoente irracional e base a, com $a \in \mathbb{R}^*_+$.

Para a base 0 (zero) e o expoente t irracional positivo, define-se: $0^t = 0$. Por exemplo, $0^{\sqrt{3}} = 0$.

Demonstra-se que as propriedades P1 a P5 das potências para expoentes inteiros continuam válidas para expoentes irracionais.

Figura 7.11: Aproximação de potência com expoente irracional, extraída do livro A

Observe que ao fazer essas aproximações, na realidade estamos construindo duas sequências, uma crescente e outra decrescente. Pelo que vimos no Teorema 7.4, podemos garantir que cada uma das sequências é convergente. Mas como podemos garantir que as duas convergem para o mesmo valor? A seguir, apresentamos um resultado que garante a convergência para o mesmo valor:

Lema 7.6 (Teorema dos Intervalos Encaixantes) *Dada uma sequência*

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$$

de intervalos fechados encaixantes cujos comprimentos tendem para zero, temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] = \{c\}, c \in \mathbb{R}.$$

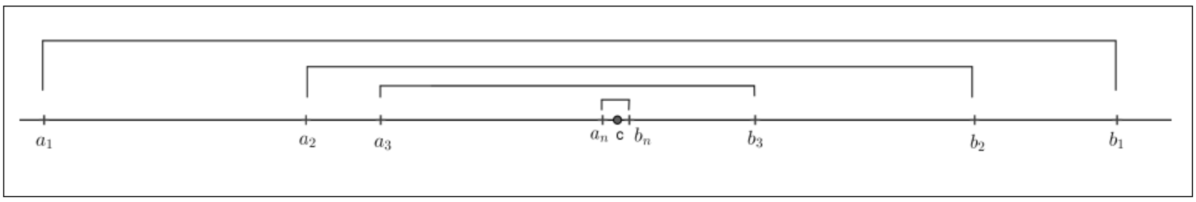


Figura 7.12: Sequência de intervalos encaixantes
FONTE: Morais Filho e Oliveira (2017)

Demonstração: A demonstração desse lema foi extraída de Morais Filho e Oliveira (2017).

Para $n \in \mathbb{R}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Considere $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto A é não-vazio e limitado superiormente, pois b_1 é uma cota superior de A, e mais, cada b_n é uma cota superior de A. Pelo Axioma de Dedekind (Axioma 7.1), existe $c = supA$.

Evidentemente, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que c é uma cota superior de A. Por outro lado, como cada b_n é uma cota superior de A e c é a menor das cotas, então $c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq c \leq b_n$, ou seja, $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Além disso, no caso que os comprimentos dos intervalos tendem a zero, queremos mostrar que o ponto c é único.

Sejam $c, d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ com $c \neq d$. Podemos supor sem perda de generalidade $c < d$. Daí $a_n \leq c < d \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica

$$b_n - a_n \geq d - c > 0.$$

Fazendo n crescer infinitamente, chegamos a uma contradição, pois quando n cresce infinitamente, o comprimento $b_n - a_n$ tende a zero. Portanto $c = d$. ■

Para garantir que a aproximação apresentada na Figura 7.11 é de fato válida, podemos considerar os intervalos com extremidades em cada valor de aproximação por falta e por excesso:

$$(4,655536722; 5,196152423)\ (4,706965002; 4,758961394)\ (4,727695035; 4,732891793)$$
$$(4,72873393; 4,729253463) \vdots$$

Logo, o Lema 7.6 garante que ambas as sequências convergem para o mesmo valor.

Outra forma de demonstrar a convergência das duas sequências para o mesmo valor é através do Teorema do Sanduíche:

Teorema 7.7 (Teorema do Sanduíche) *Dadas três sequências (a_n), (b_n) e (c_n), tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $lima_n = limc_n = L$, temos $limb_n = L$.*

Demonstração: Por definição, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \text{ e } n > n_2 \Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Das hipóteses, se $n > max\{n_1, n_2\}$, então:

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Logo, (b_n) também converge para L. ■

A seguir, apresentaremos mais um resultado interessante demonstrado no Capítulo 6 do referido trabalho: a equivalência entre o Teorema dos Intervalos Encaixantes e o Axioma de Dedekind.

Proposição 7.4 *No conjunto dos números reais o Axioma de Dedekind é equivalente ao Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE).*

Demonstração: Apresentaremos *ipsis litteris* a demonstração apresentada por Morais Filho e Oliveira (2017):

Como já demonstramos que o TIE é uma consequência do Axioma de Dedekind, ao demonstrar o Lema 7.6, basta provar a recíproca, que o TIE implica no Axioma de Dedekind.

Seja $A \subset \mathbb{R}$, um conjunto não-vazio limitado superiormente. Seja $b_1 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in A, x < b_1$. Escolhemos qualquer $a_1 \in A$ e tomamos o intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Em seguida dividimos o intervalo I_1 através do seu ponto médio, $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Se $[m_1, b_1] \cap A \neq \emptyset$, tomamos $I_2 = [m_1, b_1]$. Caso contrário, tomamos $I_2 = [a_1, m_1]$.

Representamos as situações geometricamente nas Figuras 7.13 e 7.14.

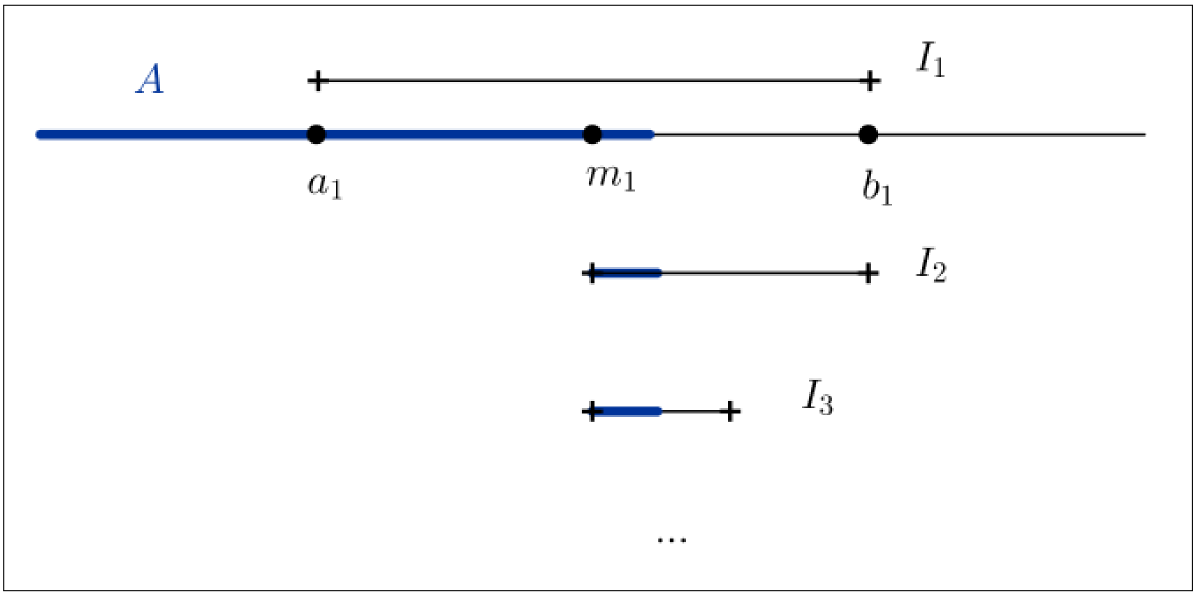


Figura 7.13: Construção da sequência de intervalos encaixantes - caso 1
FONTE: Morais Filho e Oliveira (2017)

Renomeamos o intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$. Note que $|I_2| = b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.

A seguir, dividimos I_2 através do seu ponto médio e repetimos o mesmo processo para encontrarmos o intervalo I_3. Prosseguindo dessa forma, geramos uma sequência de intervalos fechados $I_n = [a_n, b_n]$ com as propriedades:

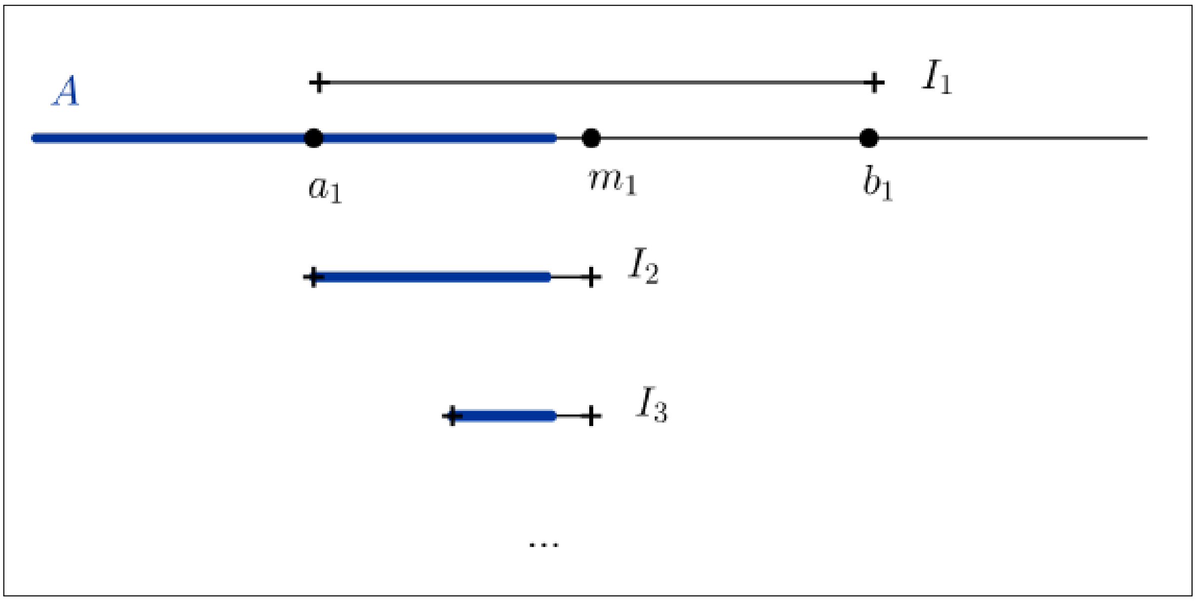


Figura 7.14: Construção da sequência de intervalos encaixantes - caso 2
FONTE: Morais Filho e Oliveira (2017)

(i) $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$;

(ii) $|I_n| = b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, logo $|I_n| \to 0$;

(iii) $I_n \cap A \neq \emptyset$;

(iv) Cada b_n é uma cota superior para A.

Pelos itens (i) e (ii), os intervalos I_n são encaixantes, fechados e seu comprimento tende a zero; pelo TIE, Lema 7.6, sabemos que existe um único número real k tal que

$$\{k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \tag{7.1}$$

Para mostrar que $k = supA$, verificaremos duas condições dadas no Axioma de Dedekind (Axioma 7.1): se k é cota superior de A e se k é a menor cota superior de A.

(a) Seja $x \in A$ um elemento qualquer de A. Por (iv), $x \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E, por 7.2,

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \Rightarrow b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Logo,

$$x \leq b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \leq k + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},$$

pois, por 7.1, temos $a_n \leq k$.

Mas se $x \leq k + \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, por (ii), $x \leq k$. Como x pode ser qualquer elemento de A, segue que k é uma cota superior de A.

(b) Suponhamos que k não seja a menor das cotas superiores de A. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $k - \varepsilon$ é cota superior de A. Por (iii), $I_n \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $x \in [a_n, b_n]$. Como $k - \varepsilon$ é cota superior, então $a_n \leq x \leq k - \varepsilon$. Mas $a_n \leq k \leq b_n$. Logo,

$$a_n \leq x \leq k - \varepsilon < k \leq b_n \Rightarrow [k - \varepsilon, k] \subset I_n, \forall n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{k\},$$

que é contradição. Logo, k é a menor cota superior de A. ■

Esse resultado nos garante que a reta que representa os números reais não tem "buracos", ou seja, não temos a ausência de algum ponto na reta. De fato, se não existisse algum ponto da reta, poderíamos considerar um conjunto de intervalos $[a_n, b_n]$ encaixantes que se aproximassem desse "buraco" e, consequentemente, teríamos $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \emptyset$, o que contradiz o Axioma de Dedekind (Axioma 7.1) e seu equivalente, o Teorema dos Intervalos Encaixantes (Teorema 7.6).

Aos leitores interessados em estudar mais sobre o Teorema dos Intervalos Encaixantes, recomendamos o capítulo 5 de Morais Filho e Oliveira (2017).

Para finalizar, apresentamos um resultado que será necessário para demonstrar por que é possível definir as potências com expoente irracional, na seção 9.2:

Teorema 7.8 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada admite uma subsequência convergente.*

Demonstração: A demonstração desse teorema foi extraída de Muniz Neto (2015).

Seja I_0 um intervalo fechado e limitado contendo todos os elementos da sequência limitada (a_n):

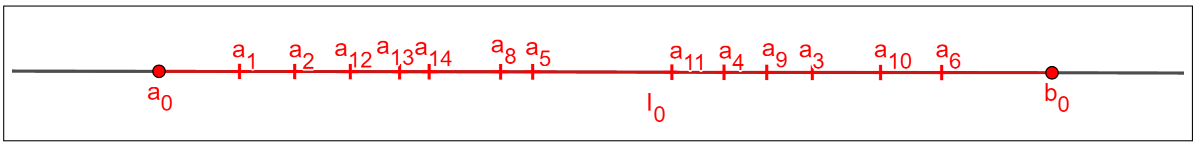


Figura 7.15: Sequência limitada contida no intervalo fechado I_0
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Vamos dividir esse intervalo em dois, $\left[a_0, \dfrac{a_0 + b_0}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$:

Pelo menos um desses intervalos deve ter infinitos termos de (a_n), ou seja, contém uma subsequência de (a_n). Vamos escolher um intervalo que possua infinitos termos de (a_n) e denotá-lo por I_1.

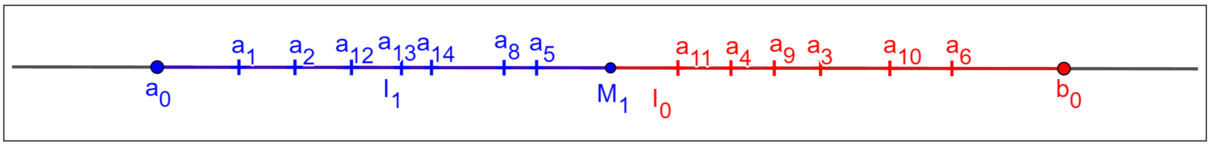


Figura 7.16: Subsequência contida no intervalo I_1
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Vamos repetir o procedimento, obtendo pelo menos um intervalo fechado que contém uma subsequência de (a_n). Denotaremos o intervalo por I_2 e sabemos que $|I_2| = \dfrac{1}{2}|I_1|$:

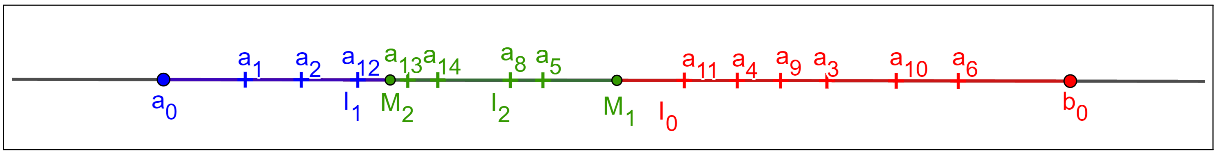


Figura 7.17: Subsequência contida no intervalo I_2
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Repetindo o mesmo procedimento sucessivas vezes, obtemos uma sequência de intervalos fechados e limitados, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ e $|I_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|I_n|$, para todo $n \geq 1$, e que contêm subsequências de (a_n):

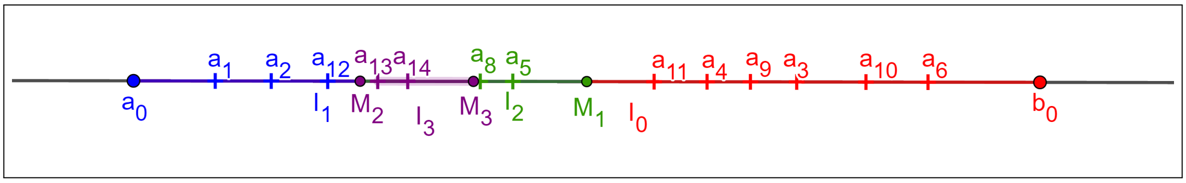


Figura 7.18: Subsequência contida no intervalo I_3
FONTE: Elaborado pela autora, utilizando o *software Geogebra*

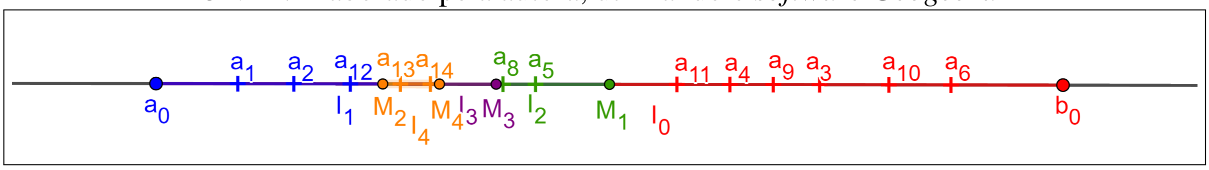


Figura 7.19: Subsequência contida no intervalo I_4
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Logo, pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes (Lema 7.6), concluímos que existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap\limits_{k \geq 1} I_k = \{l\}$.

Finalmente, escolhamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \in I_1$. Em seguida, para cada $j \geq 1$, após termos escolhido $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_j} \in I_j$, selecionaremos $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ e $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ (tais escolhas são possíveis pela definição dos I_j). Desse modo, construímos uma subsequência (a_{n_k}) de (a_n) tal que $a_{n_k} \in I_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como a_{n_k} e l pertencem a I_k, temos $|a_{n_k} - l| \leq |I_k|$. Mas $|I_k| = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} |I_k| = 0$, ou seja, fixado um $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k + 0 \Rightarrow |I_k| < \varepsilon$. Logo, $|a_{n_k} - l| \leq |I_k| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = l$. ■

7.3 Sequências com limites infinitos

Para finalizar a exposição de limites de sequências, vamos responder à pergunta levantada a partir da Figura 7.6: o que significa "tender ao infinito"?

Vamos considerar, por exemplo, a sequência $a_n = n$:

$$(1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$$

Pela Propriedade Arquimediana (Teorema 7.5), sabemos que para qualquer $X \in \mathbb{R}$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > X$. Além disso, para todo $n > n_0$, ainda teremos $n > X$.

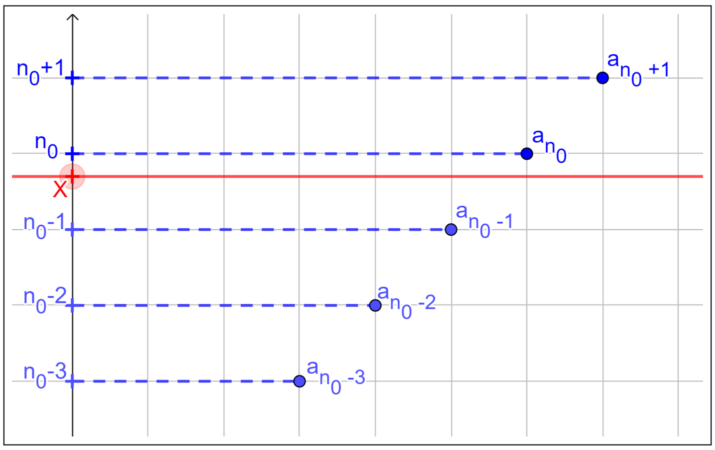


Figura 7.20: Representação dos termos da sequência $a_n = n$ próximos de um real qualquer
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

De forma semelhante, se considerarmos a sequência $b_n = -n$, também podemos dizer que para qualquer $Y \in \mathbb{R}$, existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-m_0 < Y$ e que para todo $m > m_0$, ainda teremos $-m < Y$.

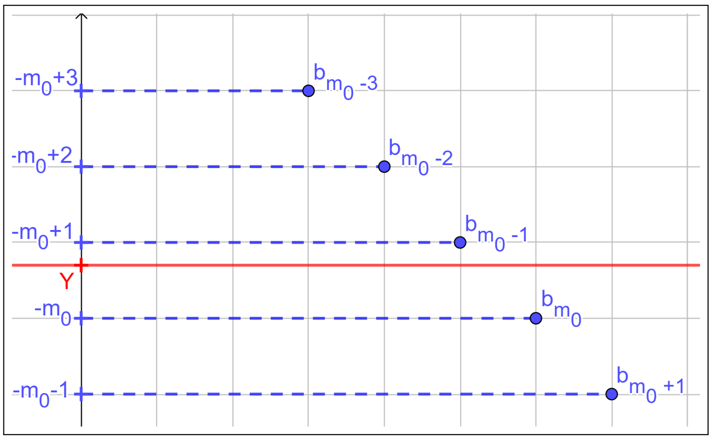


Figura 7.21: Representação dos termos da sequência $b_n = -n$ próximos de um real qualquer
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Dizemos que essas sequências têm limites infinitos, que definimos a seguir:

Definição 7.5 *Uma sequência tem* ***limite infinito*** *quando, para todo $X \in \mathbb{R}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, temos $a_n > X$. A notação para esse caso é:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Analogamente, uma sequência tem ***limite menos infinito*** *quando, para todo $Y \in \mathbb{R}$, existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > m_0$, temos $a_m < Y$. Nesse caso, a notação utilizada é:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Essas definições serão utilizadas no Capítulo 10, quando precisaremos demonstrar que para $0 < |q| < 1$, a sequência $(|q|^n)$ converge.

Para finalizar a seção, gostaríamos de remover uma possível confusão: as definições de sequência com limite infinito e sequência ilimitada não são equivalentes! De fato, toda sequência com limite infinito é ilimitada; porém, nem toda sequência ilimitada tem limite infinito. Por exemplo, a sequência $(-2)^n$ é ilimitada, mas seus termos oscilam entre positivos e negativos; logo, ela não tem limite $+\infty$ nem $-\infty$.

Capítulo 8

Análise da Apresentação de Potências com Expoentes Irracionais em Livros Didáticos e Páginas Eletrônicas

Neste capítulo, vamos analisar a apresentação das potências com expoentes irracionais em livros didáticos e páginas eletrônicas. Formalmente, as potências com expoentes racionais são definidas de tal forma que são mantidas as propriedades a seguir:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \text{ e } (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

São essas propriedades que garantem que as operações entre potências aconteçam da forma como conhecemos. No capítulo seguinte, dedicamos a seção 9.1 para abordar a definição de potências com expoentes racionais com mais detalhes.

Para definir potências com expoentes irracionais, utilizamos limites de sequências:

Definição 8.1 *Sejam $a \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e (r_n) uma sequência de números racionais tal que $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = x$. Definimos $a^x := \lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$.*

Mas essa definição nos traz algumas dúvidas. Primeiro, por que (r_n) existe? Segundo, o que garante que $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$ exista? Terceiro, se os limites de sequências não são estudados no ensino médio, como o professor poderá apresentar essa definição para alunos de ensino médio? No capítulo seguinte, responderemos a essas perguntas, mostrando por que $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$ existe e apresentando nossa proposta de abordagem, adequando o conteúdo a esse nível de ensino, sem perder a formalidade na exposição do conteúdo.

Neste capítulo, analisaremos a abordagem realizada nos livros didáticos de ensino médio e em uma página eletrônica. Esclarecemos que em nossas pesquisas apenas uma página eletrônica apresentava o conteúdo com abordagem voltada para o ensino médio; por isso, analisamos três livros e apenas uma página eletrônica.

8.1 Apresentação de Potências com Expoentes Irracionais no Livro A

O livro A apresenta a estimativa sendo feita através de aproximações por falta e por excesso, conforme vemos na Figura 8.1.

Potência de expoente irracional

Como poderíamos definir a potência $3^{\sqrt{2}}$?

Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$ Assim, definimos $3^{\sqrt{2}}$ como o número para o qual convergem os valores nas duas colunas da tabela a seguir, em que, na primeira coluna, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por falta e crescem indefinidamente e, na segunda, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por excesso e decrescem indefinidamente.

As aproximações ao lado foram obtidas usando uma calculadora científica.

Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por falta)	Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por excesso)
$3^{1,4} \approx 4{,}655536722$	$3^{1,5} \approx 5{,}196152423$
$3^{1,41} \approx 4{,}706965002$	$3^{1,42} \approx 4{,}758961394$
$3^{1,414} \approx 4{,}727695035$	$3^{1,415} \approx 4{,}732891793$
$3^{1,4142} \approx 4{,}72873393$	$3^{1,4143} \approx 4{,}729253463$
$\vdots$	$\vdots$

Observe que, até onde fomos nas duas colunas, podemos garantir que:

$$4{,}72873393 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}729253463$$

De maneira análoga, define-se qualquer potência de expoente irracional e base a, com $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Para a base 0 (zero) e o expoente t irracional positivo, define-se: $0^t = 0$. Por exemplo, $0^{\sqrt{3}} = 0$.

Demonstra-se que as propriedades P1 a P5 das potências para expoentes inteiros continuam válidas para expoentes irracionais.

Figura 8.1: Estimativa de potência com expoente irracional através de aproximações por falta e por excesso, extraída do livro A

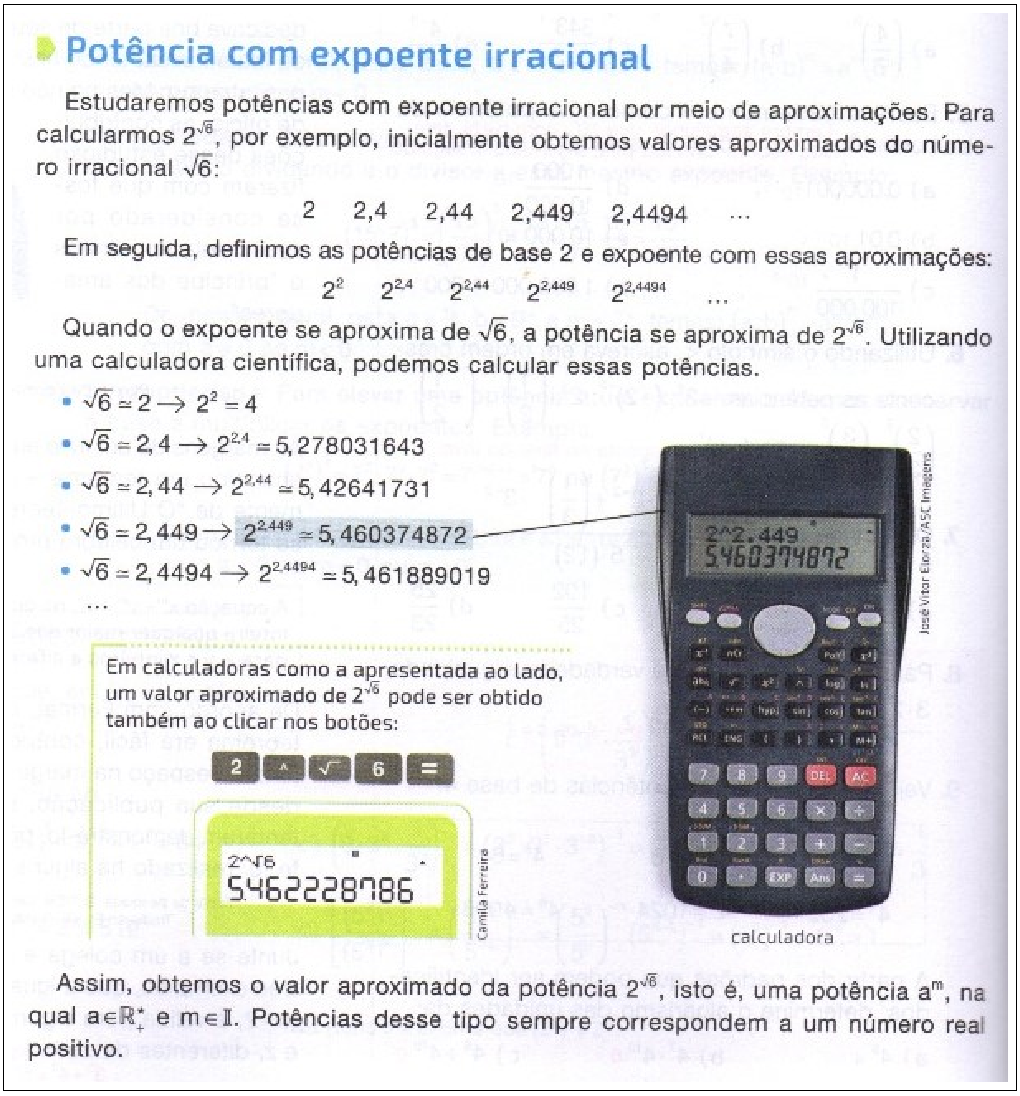
Do ponto de vista matemático, a apresentação é adequada. Destacamos que a conclusão de que os números apresentados convergirão para um único número real é decorrente de resultados estudados em Análise Real, os quais abordamos no Capítulo 7. Porém, é preciso destacar que a desigualdade apresentada não define a potência $3^{\sqrt{2}}$, ao contrário do que o livro sugere quando diz: "De maneira análoga, define-se qualquer potência de expoente irracional e base a, com $a \in \mathbb{R}^*$". A abordagem é adequada, mas mostra apenas um caminho para fazer aproximações do valor procurado.

Do ponto de vista didático, o aluno se convence de quão precisa é a aproximação de $3^{\sqrt{2}}$ obtida em cada passo, pois é possível comparar o número de casas decimais iguais em ambas as colunas da tabela. Tendo em vista que a demonstração formal do conteúdo está além do nível de ensino dos alunos, é adequado levá-los à conclusão de que os números de ambas as colunas se aproximarão cada vez mais de um mesmo valor de forma intuitiva. Ressaltamos que o uso da intuição é recomendado na teoria de Fischbein, citada por Vieira (2014), conforme citamos no Capítulo 2. Porém, tratar essa abordagem intuitiva como definição formal é equivocado.

Após essa apresentação, o livro A afirma que é possível demonstrar que as propriedades para potências com expoentes inteiros continuam sendo válidas para as potências com expoentes irracionais. Consideramos que os alunos do Ensino Médio não devem ser apresentados às demonstrações das propriedades, por serem utilizados limites de sequências. Sendo assim, entendemos que é suficiente para este nível de ensino afirmar que é possível demonstrá-las. A demonstração formal de que as propriedades continuam válidas serão apresentadas no Apêndice B.

8.2 Apresentação de Potências com Expoentes Irracionais no Livro B

O livro B apresenta a estimativa sendo feita através de aproximações por falta, conforme vemos na Figura 8.2.



Potência com expoente irracional

Estudaremos potências com expoente irracional por meio de aproximações. Para calcularmos $2^{\sqrt{6}}$, por exemplo, inicialmente obtemos valores aproximados do número irracional $\sqrt{6}$:

$$2 \quad 2{,}4 \quad 2{,}44 \quad 2{,}449 \quad 2{,}4494 \quad \ldots$$

Em seguida, definimos as potências de base 2 e expoente com essas aproximações:

$$2^{2} \quad 2^{2{,}4} \quad 2^{2{,}44} \quad 2^{2{,}449} \quad 2^{2{,}4494} \quad \ldots$$

Quando o expoente se aproxima de $\sqrt{6}$, a potência se aproxima de $2^{\sqrt{6}}$. Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular essas potências.

- $\sqrt{6} \simeq 2 \rightarrow 2^{2} = 4$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}4 \rightarrow 2^{2{,}4} \simeq 5{,}278031643$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}44 \rightarrow 2^{2{,}44} \simeq 5{,}42641731$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}449 \rightarrow 2^{2{,}449} \simeq 5{,}460374872$
- $\sqrt{6} \simeq 2{,}4494 \rightarrow 2^{2{,}4494} \simeq 5{,}461889019$

...

Em calculadoras como a apresentada ao lado, um valor aproximado de $2^{\sqrt{6}}$ pode ser obtido também ao clicar nos botões:

2 ^ √ 6 =

Assim, obtemos o valor aproximado da potência $2^{\sqrt{6}}$, isto é, uma potência a^{m}, na qual $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e $m \in \mathbb{I}$. Potências desse tipo sempre correspondem a um número real positivo.

Figura 8.2: Estimativa de potência com expoente irracional através de aproximações por falta, extraída do livro B

Pelas aproximações, os alunos são convencidos de que os valores estão se tornando próximos um do outro e, por isso, estarão se aproximando do valor real da potência procurada, fato que é evidenciado através do uso da calculadora. Porém, o aluno pode se perguntar: por que precisei calcular cada potência, se eu poderia calcular diretamente $2^{\sqrt{6}}$? É importante esclarecer que o valor apresentado pela calculadora é uma aproximação e que os cálculos feitos pelos alunos são o procedimento para encontrar esse valor.

Ressaltamos que o uso da calculadora científica para calcular cada valor de aproximação é de grande utilidade, pois o cálculo manual seria extremamente demorado, o que tiraria a atenção do conteúdo principal. Por outro lado, o uso da calculadora para encontrar a melhor aproximação se fez necessário porque a estimativa estava sendo feita apenas por falta e, dessa forma, os alunos poderiam não se convencer de que os valores se aproximam cada vez mais de um número específico. Caso fosse feita a estimativa com aproximações por falta e por excesso, seria possível convencer os alunos dessa aproximação e eles até verificariam o grau de precisão das aproximações encontradas, através da observação das casas decimais iguais em ambas as aproximações (ver as aproximações feitas no livro A, apresentadas na Seção 8.1).

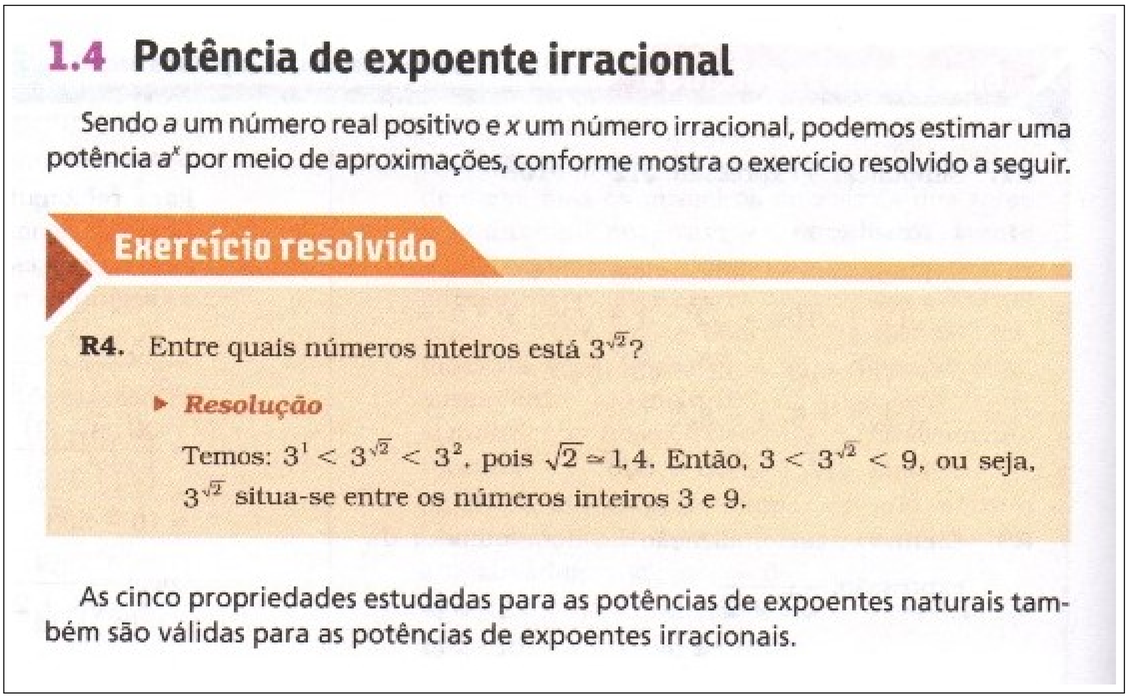
Os valores encontrados nas aproximações formam uma sequência de números. Demonstraremos formalmente a convergência dessa sequência para um valor real específico no Capítulo 9.

8.3 Apresentação de Potências com Expoentes Irracionais no Livro C

No livro C, a apresentação do conteúdo é feita de forma bastante resumida, conforme apresentamos na Figura 8.3.

A seção começa com uma rápida explicação de que as potências com expoente irracional podem ser estimadas por meio de aproximações. A expressão “podemos estimar” pode passar a ideia equivocada de que a estimativa é opcional e que existe outra forma de calcular a potência.

Após essa explicação, o livro C apresenta apenas um exercício resolvido. A aproximação é feita através de uma desigualdade com números inteiros que sequer são consecutivos: 3 e 9, o que não permite que o aluno tenha uma noção de qual seria o valor aproximado de $3^{\sqrt{2}}$. Passa-se a impressão de que a aproximação só é utilizada para ter uma vaga noção de qual seria o número correspondente, mas não para estimar o número com algum grau de precisão.



1.4 Potência de expoente irracional

Sendo a um número real positivo e x um número irracional, podemos estimar uma potência a^x por meio de aproximações, conforme mostra o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

R4. Entre quais números inteiros está $3^{\sqrt{2}}$?

▸ ***Resolução***

Temos: $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, pois $\sqrt{2} \simeq 1,4$. Então, $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$, ou seja, $3^{\sqrt{2}}$ situa-se entre os números inteiros 3 e 9.

As cinco propriedades estudadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes irracionais.

Figura 8.3: Estimativa de uma potência com expoente irracional, extraída do livro C

Nesse livro, não foi feita uma aproximação por falta e por excesso, tendo em vista que não temos sequer uma aproximação sendo feita! A apresentação é tão resumida que prejudica a compreensão do conteúdo. O aluno não terá noção de como estimar o valor de uma potência com expoente irracional após ver uma desigualdade com margem de erro tão grande.

O livro já finaliza o conteúdo com a afirmação de que as propriedades válidas para as potências com expoentes naturais continuam sendo válidas para expoentes irracionais, sem nenhum comentário a respeito da razão por que a afirmação seja verdadeira.

8.4 Apresentação de Potências com Expoentes Irracionais na Página Eletrônica 1

A página eletrônica 1 apresenta vários conteúdos de uma só vez: a primeira seção aborda potências com expoentes racionais, seguida por uma seção exemplificando alguns números irracionais. Na seção seguinte, a página apresenta as potências com expoente irracional como exibido na Figura 8.4:

Mas, como caracterizar potência com expoente $n = \sqrt{2}$, por exemplo $2^{\sqrt{2}}$. ?

Vamos tomar as aproximações racionais do número $\sqrt{2}$, que são:

$A^{racional} = \{1, 1.4 , 1.41, 1.414 , ... \}$ para definir as potências com expoentes racionais.

$P^{racional} = \{2^{1} , 2^{1.4} , 2^{1.41} , 2^{1414} , ... \}$.

Observe que à medida os valores calculados para $A^{racional}$ se aproximam de $\sqrt{2}$

Os valores calculados para $P^{racional}$ se aproximam de $2^{\sqrt{2}}$.

Para facilitar os cálculos podemos usar uma calculadora, e verificar que:

$2^{1} = 2$

$2^{1.4} = 2,639015$,

$2^{1.41} = 2,657371$,

$2^{1414} = 2,664749$, ... $2^{\sqrt{2}} = 2,665144...$

Desta forma obtemos por aproximação de racionais, a potência de a^{n} , com n irracional e a um número real positivo.

Figura 8.4: Apresentação das potências com expoente irracional na página eletrônica 1

Como podemos observar, a abordagem é bastante parecida com a do livro B (ver Seção 3.2): o número apresentado é estimado por meio de aproximações por falta, sendo indicado o uso de uma calculadora, o que é recomendado pela complexidade dos cálculos, considerando o objetivo dos exemplos dados. Após várias aproximações, é calculado diretamente o valor $2^{\sqrt{2}}$, sem mais explicações. O aluno pode ficar em dúvida: qual a necessidade de fazer aproximações, se posso calcular diretamente o valor procurado? É importante esclarecer que o valor apresentado pela calculadora trata-se de uma aproximação e esclarecer que o procedimento para se realizar uma aproximação é o que foi feito pelos próprios alunos.

Encerramos o capítulo esclarecendo que, ao pesquisarmos páginas eletrônicas abordando esse conteúdo, os resultados seguintes apresentavam dissertações de mestrado sugerindo abordagens do tema. Por essa razão, encerraremos nosso capítulo tendo apresentado três livro didáticos e apenas uma página eletrônica.

Capítulo 9

Potências com Expoentes Irracionais: Como Definir?

No início do Capítulo 8, já apresentamos a definição das potências com expoentes x irracionais. Porém, nos deparamos com três inquietações: O que garante a existência de uma sequência (r_n) de números racionais com limite x? O que garante a existência de $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$? Como apresentar essa definição aos alunos do ensino médio que ainda não estudaram limites?

Para responder a essas perguntas, na primeira seção relembraremos a definição de potências com expoentes racionais; em seguida, apresentaremos uma seção com a definição de potências com expoentes irracionais, onde explicamos por que o limite apresentado na definição existe e ainda destacaremos resultados importantes relacionados a esse conteúdo; finalmente, na última seção sugerimos uma apresentação do conteúdo adequada ao ensino médio, sem prejudicar o formalismo necessário.

9.1 Potências com expoentes racionais

Desde os primeiros anos do ensino fundamental, aprendemos que a operação de multiplicação corresponde a várias adições. Posteriormente, aprendemos que a potência corresponde a várias multiplicações.

Com essa ideia em mente, temos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{n fatores}},$$

para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. No caso particular em que $n = 1$, como não há operação com um elemento só, define-se $a^1 = a$.

Como consequência, dados $a \in \mathbb{R}$ e $m,n \in \mathbb{N}$, temos:

$$a^{m+n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{m fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n fatores}} = a^m \cdot a^n$$

e

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{\text{n fatores}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{\text{n fatores}}} = a^{m \cdot n}.$$

A definição de potências com expoentes racionais é feita de modo que as igualdades apresentadas acima são mantidas como propriedades ao realizar operações com as potências:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Destacamos que o procedimento que faremos a seguir não tem o objetivo de demonstrar a definição, pois isso seria absurdo! Estamos apenas verificando as condições para que as propriedades 9.1 sejam mantidas. Após essa verificação, será possível compreender por que a definição de potências com expoentes racionais mantém as propriedades das operações.

Primeiro vamos estudar os casos em que o expoente não é natural:

1º caso: a^0.

Para que sejam mantidas as propriedades 9.1, devemos ter $a^{n+0} = a^n \cdot a^0$. Tendo em vista que $a^{n+0} = a^n$, devemos ter

$$a^0 = 1.$$

Note que a definição de a^0 vale para qualquer a diferente de zero.

2º caso: a^m, com $m < 0$.

Seja $m = -n$. Queremos que $a^{-n+n} = a^{-n} \cdot a^n$, para que sejam mantidas as propriedades 9.1. Pelo que vimos no último caso analisado, temos $a^{-n+n} = a^0 = 1$, para $a \neq 0$. Logo, $a^{-n} \cdot a^n = 1$, ou seja,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ com } a \neq 0.$$

Desse modo, estendemos a definição de potências para $n \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.

3º caso: a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Continuando o raciocínio, observemos o comportamento de a^r, onde $r \in \mathbb{Q}$. Inicialmente, vamos pensar no caso $r = \frac{q}{q}$, onde q é um inteiro positivo diferente de zero. Por um lado, temos $a^{\frac{q}{q}} = a^{\overbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}}^{\text{q fatores}}}$.

Para que sejam mantidas as propriedades 9.1, queremos que $a^{\overbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}}^{\text{q fatores}}} = \overbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{q}}}^{\text{q fatores}}$

e que $\overbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{q}}}^{\text{q fatores}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$. Por outro lado, $a^{\frac{q}{q}} = a^1 = a$; por isso, queremos que $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$. É importante salientar que a expressão $\sqrt[q]{a}$ não está definida para a negativo se q for um número par. Por isso, ao definir potência com expoente racional, só consideramos $a > 0$.

Diante de tais considerações, definimos

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \text{ para } p \text{ e } q \text{ inteiros e } a \geq 0.$$

9.1.1 Resultados importantes envolvendo potências com expoentes racionais

Nessa seção, vamos apresentar alguns resultados envolvendo potências com expoentes racionais que são fundamentais para o desenvolvimento da seção 9.2.

Inicialmente, apresentaremos fatos relacionados ao comportamento das potências com expoentes racionais. Com o conhecimento desses fatos, demonstraremos a monotonicidade das potências logo em seguida:

Lema 9.1 *Dados $a \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$ temos:*

(i) se $a > 1$, então $a^q > 1$;

(ii) se $0 < a < 1$, então $0 < a^q < 1$.

Demonstração:

(i) Denotemos $a = 1 + h$, com $h > 0$, $q = \dfrac{r}{s}$, com $r, s \in \mathbb{N}$ e $x = a^q = (1+h)^{\frac{r}{s}}$.

Logo, $(1+h)^r = x^s$. Temos, então: $x^s = 1 + h + \dfrac{r(r-1)}{2}h^2 + \cdots + rh^{r-1} + h^r > 1$. Logo, $x^s > 1 \Rightarrow x > 1$, para todo $s \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $0 < a < 1$, então $\dfrac{1}{a} > 1$ (note que essa afirmação é válida para qualquer $a \in \mathbb{R}$, mesmo que a fração não corresponda a um número racional). Dessa forma, com base no caso (i), temos: $\left(\dfrac{1}{a}\right)^q > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^q} > 1$. Ou seja, $1 > a^q$.

É fácil ver que $a^q > 0$, pois se $\left(\dfrac{1}{a}\right)^q = \dfrac{1}{a^q} > 1$, então $\dfrac{1}{a^q} > 0$. Como a razão de um número positivo por a^q é positiva, concluímos que a^q também é positivo. ■

O resultado a seguir apresenta a monotonicidade dessas potências:

Proposição 9.1 (Monotonicidade das potências) *Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, dada uma sequência monótona de números racionais $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, com $r_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, a sequência de potências $(a^{r_1}, a^{r_2}, \cdots, a^{r_n}, \cdots)$ também será monótona crescente ou decrescente.*

Demonstração: Inicialmente, observemos que se $r_i < r_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então podemos definir um $q_i = r_{i+1} - r_i$, sendo $q_i \in \mathbb{Q}_+$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $a^{r_{i+1}} = a^{r_i + q_i} = a^{r_i} \cdot a^{q_i}$

Vamos dividir os passos seguintes em casos, para facilitar a compreensão:

1º caso: $a > 1$:

Conforme mostrado no Lema 9.1, garantimos que $a^{q_i} > 1$. Assim, $a^{r_i} < a^{r_i} \cdot a^{q_i} = a^{r_{i+1}}$. Para a sequência $r_1 < r_2 < \cdots < r_n \cdots$, temos:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots$$

Portanto, se $a > 1$, a sequência (a^{r_n}) é crescente.

2º caso: $0 < a < 1$:

Pelo Lema 9.1, temos $0 < a^{q_i} < 1$, que implica em: $a^{r_i} > a^{r_i} \cdot a^{q_i} = a^{r_{i+1}}$. Para a sequência $r_1 < r_2 < \cdots < r_n \cdots$, temos:

$$a^{r_1} > a^{r_2} > \cdots > a^{r_n} > \cdots$$

Portanto, se $0 < a < 1$,a sequência (a^{r_n}) é decrescente. ■

Proposição 9.2 *Dados $a \in \mathbb{R}$ e $r_1 \in \mathbb{Q}$, existe $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $a^{r_2} < 1 + r_1$ e existe $r_3 \in \mathbb{Q}$ tal que $1 - r_1 < a^{r_3}$.*

Demonstração: Para facilitar o raciocínio, vamos dividir a demonstração em casos:

1ª PARTE: Demonstração de que existe $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $a^{r_2} < 1 + r_1$

1º caso: $a > 1$:

Podemos escrever $a = 1 + h$, para algum $h > 0$ e considerar r_2 na forma $r_2 = \dfrac{1}{q}$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Assim, mostraremos que $a < (1 + r_1)^q$, para algum $q \in \mathbb{N}$ a ser escolhido posteriormente.

Temos:

$$(1 + r_1)^q = 1 + qr_1 + \frac{q(q-1)}{2} {r_1}^2 + \cdots + {r_1}^q > 1 + qr_1.$$

Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais, garantimos que existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_0 r_1 > h$. Logo, $(1 + r_1)^{q_0} > 1 + q_0 r_1 > 1 + h = a$, ou seja, $1 + r_1 > a^{\frac{1}{q_0}} = a^{r_2}$.

2^o caso: $0 < a < 1$*:*

Nesse caso, pela monotonicidade das potências (ver Proposição 9.1), basta tomarmos qualquer $r_2 \in \mathbb{N}$ para termos

$$a^{r_2} \leq a < 1 < 1 + r_1.$$

2ª PARTE: Demonstração de que existe $r_3 \in \mathbb{Q}$ tal que $1 - r_1 < a^{r_3}$

1^o caso: $a > 1$*:*

Nesse caso, pela monotonicidade das potências (ver Proposição 9.1), para qualquer $r_3 \in \mathbb{N}$, teremos $a^{r_3} \geq a > 1 > 1 - r_1$.

2^o caso: $0 < a < 1$*:*

Primeiramente vamos mostrar que $a^{\frac{1}{n_0}} > \dfrac{1}{1+r_1}$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. A tese será uma consequência dessa desigualdade.

Vamos definir $r := \dfrac{1}{1+r_1}$. Temos $0 < r < 1$. Assim, $\dfrac{1}{r} > 1$, ou seja, $\dfrac{1}{r} = 1 + h$, para algum $h > 0$.

Como $\left(\dfrac{1}{r}\right)^n = (1+h)^n$, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}\right)^n &= 1 + nh + \cdots + h^n \\
&> 1 + nh \\
&= 1 + h + (n-1)h \\
&= \frac{1}{r} + (n-1)h \qquad (9.2)
\end{aligned}$$

Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais (ver Teorema 7.5), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{r} + (n_0 - 1)h > \dfrac{1}{a}$. Logo,

$$\frac{1}{r} + (n_0 - 1)h > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{\frac{1}{r} + (n_0 - 1)h}.$$

Da desigualdade 9.2, resulta $\dfrac{1}{\frac{1}{r} + (n_0 - 1)h} > \dfrac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^{n_0}}$. Mas $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^{n_0}} = r^{n_0}$. Logo,

$$a > r^{n_0} = \left(\frac{1}{1+r_1}\right)^{n_0}.$$

Para finalizar, basta lembrar que $r_1 > 0$, por isso $(1+r_1)(1-r_1) = 1 - (r_1)^2 < 1$. Logo, concluímos que

$$a^{\frac{1}{n_0}} > \frac{1}{1+r_1} > 1 - r_1.$$

■

Agora, veremos um resultado extremamente importante e que retoma o conteúdo apresentado no Capítulo 7 e será fundamental para definirmos as potências com expoentes irracionais, na Seção 9.1. Para isso, primeiro introduziremos o conceito de densidade, que será necessário para apresentarmos o resultado principal:

Definição 9.1 *Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **denso** em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a,b) de números reais, com $a < b$, contém algum ponto de X.*

Exemplo 9.1 *O conjunto $\mathbb{N}$ não é denso em $\mathbb{R}$.*

De fato, qualquer intervalo aberto $(n, n+1)$, com $n \in \mathbb{N}$, não contém nenhum elemento de $\mathbb{N}$.

Como pudemos ver, foi bastante simples demonstrar que $\mathbb{N}$ não é denso em $\mathbb{R}$. Porém, a demonstração da densidade de um conjunto costuma ser bem mais detalhada. Vamos demonstrar agora que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$ são densos em $\mathbb{R}$

Teorema 9.2 (Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) *Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.*

Dias, Morais Filho e Oliveira (2018) apresentaram uma abordagem que contempla os aspectos didáticos e formais para essa demonstração, por isso a utilizamos nesse trabalho:

Demonstração: Dados dois números $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrários, com $a < b$, queremos mostrar que no intervalo (a,b) existe pelo menos um número r racional e um número i irracional, como ilustrado na figura a seguir:

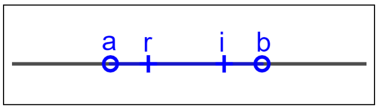


Figura 9.1: Representação da densidade de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Para facilitar a organização das ideias, vamos analisar separadamente alguns casos:

1º caso: a e b são números racionais

Qual número racional e qual irracional poderemos encontrar nesse intervalo?

Facilmente, podemos encontrar o número $\dfrac{a+b}{2}$, o qual pertence ao intervalo e é racional.

Para encontrar um número irracional no intervalo, podemos pensar em um número na forma $a + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, pois sabemos que ele será irracional. Mas como podemos ter certeza que para algum $n \in \mathbb{N}$ ele pertencerá ao intervalo (a,b)? Para qualquer n, sabemos que $a < a+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$, então basta garantirmos que $a+\dfrac{\sqrt{2}}{n} < b$. Para isso, precisamos que $\dfrac{\sqrt{2}}{n} < b-a$, ou seja, $n > \dfrac{\sqrt{2}}{b-a}$.

Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais (ver Teorema 7.5), sempre conseguiremos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{\sqrt{2}}{b-a}$. Assim, conseguimos encontrar um número racional e um irracional em qualquer intervalo (a,b) com a e b racionais.

2º caso: a é um número racional e b, irracional

Para encontrar um número irracional nesse intervalo, podemos seguir o mesmo procedimento realizado no 1º caso: encontrar um número natural $n_0 > \dfrac{\sqrt{2}}{b-a}$ tal que $a+\dfrac{\sqrt{2}}{n_0}$.

Agora, para encontrar um número racional nesse intervalo, vamos aplicar o mesmo raciocínio para procurar um número na forma $a+\dfrac{1}{n}$ que pertença ao intervalo. Já temos que $a < a+\dfrac{1}{n}$, então basta garantir que $a+\dfrac{1}{n} < b$, isto é, devemos ter $n > \dfrac{1}{b-a}$. Mais uma vez, pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais (Teorema 7.5), podemos garantir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{b-a}$.

3º caso: a é um número irracional e b, racional

Esse caso é similar ao 2º, basta procurarmos um número racional $b-\dfrac{1}{n_0} > a$, ou seja, $n_0 > \dfrac{1}{b-a}$, e um irracional $b-\dfrac{\sqrt{2}}{n_0} > a$, isto é, $n_0 > \dfrac{\sqrt{2}}{b-a}$.

4º caso: a e b são números irracionais

Para encontrar um número irracional nesse intervalo, realizamos o mesmo procedimento de encontrar um número natural $n_0 > \dfrac{\sqrt{2}}{b-a}$, para que $a < a+\dfrac{\sqrt{2}}{n_0} < b$.

Já para encontrar um número racional no intervalo, vamos precisar de um raciocínio diferente. Inicialmente, se $b-a > 1$, então existe pelo menos um $\in \mathbb{Z}$ que pertence ao intervalo; consequentemente, já encontramos um número racional no intervalo, como representamos na figura a seguir:

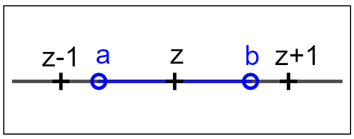


Figura 9.2: Densidade de $\mathbb{Q}$ em intervalo de comprimento maior que 1
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Suponhamos agora que $b-a < 1$. Nesse caso, para qualquer número n natural, temos $n > b-a$, ou seja, $\dfrac{1}{n} < b-a$. Agora, vamos mostrar que existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a < \dfrac{m}{n} < b$.

Inicialmente, pela Propriedade Arquimediana (Teorema 7.5), garantimos que existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > bn$, ou seja, $\frac{N_0}{n} > b$. Vamos considerar agora o conjunto $M = \{N; N > bn\}$. Pelo Princípio da Boa Ordenação (Teorema 5.1), como este conjunto não é vazio, então ele deve ter um menor elemento, ou seja, existe um $N' \leq N$, para todo $N \in M$. Logo, $\frac{N'-1}{n} < b$. Esse caso está ilustrado na figura seguinte, restando apenas verificar se $\frac{N'-1}{n}$ ocupa a posição P_1 ou a posição P_2:

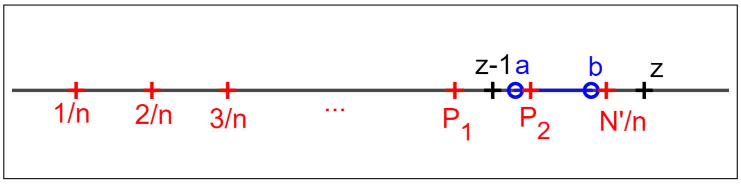


Figura 9.3: Densidade de $\mathbb{Q}$ em intervalo de comprimento menor que 1
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Se não existisse um m tal que $a < \frac{m}{n} < b$, então teríamos o ponto $\frac{N'-1}{n}$ na posição P_1, ou seja, $\frac{N'-1}{n} < a$ e $\frac{N'}{n} > b$. Logo, $\frac{N'}{n} - \frac{N'-1}{n} = \frac{1}{n} > b-a$, o que contradiz nossa hipótese de que $\frac{1}{n} < b-a$.

Portanto, concluímos que deve existir um número racional no intervalo (a,b), que está ilustrado na figura 9.3 na posição P_2, o que finaliza o último caso a ser considerado em nossa demonstração. ■

Agora que conhecemos o conceito de densidade e sabemos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, podemos compreender a demonstração do resultado principal:

Proposição 9.3 *Sejam* (r_n) *uma sequência de números racionais que converge para* 0 *e* $a > 0$. *A sequência* (a^{r_n}) *converge para* 1.

Demonstração: Por hipótese, (r_n) converge para 0, ou seja, para todo $\delta > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $-\delta < r_n < \delta$.

1º CASO: $a = 1$:

Se $a = 1$, então $1^{r_n} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência (1^{r_n}) é constante, com todos os termos iguais a 1. É imediato concluir que essa sequência converge para 1.

2º CASO: $a > 1$:

Pela Proposição 9.2, garantimos que existe um racional $\delta_q > 0$ tal que $a^{\delta_q} < 1 + \varepsilon_q$. Consequentemente, $a^{-\delta_q} > \frac{1}{1+\varepsilon_q}$. Por fim, basta verificarmos que $\frac{1}{1+\varepsilon_q} > 1 - \varepsilon_q$. De fato, $(1+\varepsilon_q)(1-\varepsilon_q) = 1 - (\varepsilon_q)^2 < 1$, o que implica que $1 - \varepsilon_q < \frac{1}{1+\varepsilon_q}$.

Além disso, como $a > 1$, pela Proposição 9.1, temos $a^{-\delta_q} < a^{\delta_q}$. Logo, temos

$$1 - \varepsilon_q < a^{-\delta_q} < a^{\delta_q} < 1 + \varepsilon_q \tag{9.3}$$

Além disso, sabendo que (r_n) converge para 0, para todo $n > n_0$ temos: $-\delta_q < r_n < \delta_q$. Pela monotonicidade das potências (ver Proposição 9.1, 1º caso), para todo $n > n_0$, temos:

$$a^{-\delta_q} < a^{r_n} < a^{\delta_q} \tag{9.4}$$

para qualquer $\delta_q > 0$ racional.

Para ampliarmos a desigualdade para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, a densidade dos números racionais (Teorema 9.2) garante que existe $\varepsilon_q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \varepsilon_q < \varepsilon$.

Portanto, das equações 9.3 e 9.4, concluímos que, para todo $\varepsilon > 0$, existem dois números racionais $\delta_q > 0$ e ε_q e, associado a esse, um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon_q < a^{-\delta_q} < a^{r_n} < a^{\delta_q} < 1 + \varepsilon_q < 1 + \varepsilon,$$

ou seja, para todo $n > n_0$, temos $|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$.

3º CASO: $0 < a < 1$:

Dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, utilizando mais uma vez o Teorema 9.2 da densidade de $\mathbb{Q}$, garantimos a existência de $\varepsilon_q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \varepsilon_q < \varepsilon$.

Provaremos agora a existência de um número racional $\delta_q > 0$ tal que $a^{-\delta_q} < 1 + \varepsilon_q$:

Inicialmente, temos $a^{-\delta_q} = \dfrac{1}{a^{\delta_q}} < 1 + \varepsilon_q \Leftrightarrow \dfrac{1}{1 + \varepsilon_q} < a^{\delta_q}$. Aplicando mais uma vez a desigualdade $1 - \varepsilon_q < \dfrac{1}{1 + \varepsilon_q}$, concluímos também que

$$1 - \varepsilon_q < a^{\delta_q} \tag{9.5}$$

Pela Proposição 9.2, seguindo raciocínio análogo ao 2º caso da 1ª parte, basta tomarmos $r_1 = \varepsilon_q$ e garantiremos a existência de um $r_2 \delta'_q$ que satisfaça à desigualdade 9.5 (não repetimos os cálculos por serem muito similares, mas recomendamos que o leitor interessado em acompanhar os detalhes da demonstração releia os cálculos da referida proposição). Portanto, garantimos que existe $\delta_q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a^{-\delta_q} < 1 + \varepsilon_q \tag{9.6}$$

Pela monotonicidade das potências (ver Proposição 9.1, 2º caso), temos:

$$a^{\delta_q} < a^{-\delta_q} \tag{9.7}$$

Por fim, pela hipótese inicial, para $n > n_0$, temos $-\delta_q < r_n < \delta_q$ e, pela monotonicidade das potências (ver Proposição 9.1, 2º caso), temos:

$$a^{\delta_q} < a^{r_n} < a^{-\delta_q} \tag{9.8}$$

Assim, pelas equações 9.5, 9.6, 9.7 e 9.8, para todo $\varepsilon > 0$, existem um número racional $\delta_q > 0$ e um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$1-\varepsilon < 1-\varepsilon_q < a^{\delta_q} < a^{r_n} < a^{-\delta_q} < 1+\varepsilon_q < 1+\varepsilon.$$

Assim, para todo $a > 0$, se a sequência (r_n) converge para 0, então a sequência (a^{r_n}) converge para 1. ■

Para finalizar, destacamos que nossa intenção não é apresentar todas essas definições e resultados aos alunos de ensino médio, mas ao professor da disciplina. As considerações sobre a abordagem de ensino aos alunos do nível médio serão apresentadas na Seção 9.3.

9.2 Definição de potência com expoente irracional

Nessa seção, estudaremos a definição de potências com expoentes irracionais, por meio de limites de sequências, conforme visto no Capítulo 7.

Assim como na seção anterior, destacamos que os conteúdos dessa seção são voltados aos professores do ensino básico e alunos de licenciatura. Nossa proposta não é que os alunos de ensino médio estudem todos os conteúdos de Análise Real que abordaremos nessa seção; nossas considerações sobre a abordagem de ensino para o nível médio serão feitas após a apresentação formal do conteúdo, na Seção 9.3.

Intuitivamente, a potência de expoente irracional i é estimada por meio de aproximações, com potências cujos expoentes racionais sejam cada vez mais próximos de i. Porém, precisamos demonstrar formalmente que essa aproximação é possível e que a sequência de potências com expoentes racionais converge para um limite, o qual denotaremos por a^i.

Inicialmente, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (Teorema 9.2), sabemos que sempre existirá um número racional em qualquer intervalo aberto. Agora, vamos aplicar este resultado para demonstrar que sempre teremos uma sequência de racionais que converge para um irracional arbitrário, como queríamos inicialmente:

Teorema 9.3 *Para todo número irracional x, existe uma sequência de números racionais que converge para x.*

Demonstração: Dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, pela Propriedade Arquimediana dos Números

Reais (Teorema 7.5), existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Logo, para todo $n > n_0$, temos $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Consideremos agora uma sequência (ε_n), com $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ e os respectivos intervalos $(x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n)$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (Teorema 9.2), o que nos garante a existência de pelo menos um racional r_n em cada um desses intervalos.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < r_n - x < \frac{1}{n}$; quando $n > n_0(\varepsilon_n)$, teremos ainda

$$|r_n - x| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

■

Finalmente, temos os resultados necessários para provar que a sequência (a^{r_n}), com $r_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ e $a > 0$ é convergente (restringimos que a seja positivo porque a potência a^{r_n} não está definida quando a for negativo e r_n for par). Após tal demonstração, poderemos definir tal limite como a^x.

Teorema 9.4 *Dados uma sequência de números racionais (r_n) que converge para um $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e um número $a > 0$, a sequência de potências (a^{r_n}) será convergente.*

Demonstração: Inicialmente, como (r_n) é convergente, pelo Lema 7.2, garantimos que (r_n) é limitada, ou seja, existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $|r_n| \leq A$, para todo número n natural. Pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais (Teorema 7.5), garantimos que exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > A$. Logo, $-N < r_n < N$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos agora que (a^{r_n}) também será limitada:

Como $N > r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos definir $s_n = N - r_n$, sendo $s_n > 0$ e $s_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $a^N = a^{r_n + s_n}$, ou seja, $a^N = a^{r_n} \cdot a^{s_n}$. A potência a^{s_n} está bem definida porque $s_n \in \mathbb{Q}$.

De forma similar, como $r_n > -N$, podemos definir $t_n = r_n + N$, com $t_n > 0$ e $t_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $a^{r_n} = a^{-N+t_n} = a^{-N} \cdot a^{t_n}$. Mais uma vez, a potência a^{t_n} encontrada está bem definida porque $t_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

1º caso: $a > 1$

Nesse caso, $a^{s_n} > 1$ e $a^{t_n} > 1$, porque $a > 1$, $s_n > 0$ e $t_n > 0$. Dessa forma, concluímos que $a^{-N} < a^{r_n} < a^N$ quando $a > 1$.

2º caso: $0 < a < 1$

Agora, temos $0 < a^{s_n} < 1$ e $0 < a^{t_n} < 1$, porque $0 < a < 1$, $s_n > 0$ e $t_n > 0$. Dessa forma, concluímos que $a^{-N} > a^{r_n} > a^N$ quando $0 < a < 1$.

Pelo Teorema 7.8, a sequência limitada (a^{r_n}) possui uma subsequência $(a^{r'_n})$ convergente. Denotemos por L o limite dessa subsequência. Note que todos os termos r'_n serão termos da sequência (r_n); logo, a subsequência (r'_n) deve convergir para x.

Suponhamos agora que (a^{r_n}) não seja convergente. Logo, existe outra subsequência $(a^{r''_n})$, com $(r''_n) \subset (r_n)$, que não converge para L.

Pela definição de sequência, dizer que (a^{r_n}) não converge para L significa dizer que existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n' \in \mathbb{N}$, existe $n'' > n'$ tal que $|a^{r_{n''}} - L| > \varepsilon_0$. Por outro lado, dizer que a subsequência $\left(a^{r'_n}\right)$ converge para L equivale a dizer que, para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $\left|a^{r'_n} - L\right| < \varepsilon_1$. Em particular, tomaremos $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

Pela desigualdade triangular, temos:

$$\left|a^{r''_n} - L\right| \leq \left|a^{r''_n} - a^{r'_n}\right| + \left|a^{r'_n} - L\right|.$$

Logo,

$$\varepsilon_0 \leq \left|a^{r''_n} - a^{r'_n}\right| + \frac{\varepsilon_0}{2},$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leq \left|a^{r''_n} - a^{r'_n}\right| \tag{9.9}$$

Agora, mostraremos que essa última desigualdade não pode acontecer:

Vamos escrever $r''_n = r'_n + v_n$. Como (r'_n) e (r''_n) são subsequências da sequência convergente (r_n), concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Temos, então:

$$\left|a^{r''_n} - a^{r'_n}\right| = \left|a^{r'_n} \cdot (a^{v_n} - 1)\right| \leq \left|a^{r'_n}\right| \cdot |a^{v_n} - 1|.$$

Pela Proposição 9.3, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{v_n} = 1$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a^{r'_n}\right| |a^{v_n} - 1| = 0$, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $\left|a^{r'_n}\right| |a^{v_n} - 1| < \varepsilon$.

Dessa forma, para $n > n_0$,

$$\left|a^{r''_n} - a^{r'_n}\right| \leq \left|a^{r'_n}\right| |a^{v_n} - 1| \leq \varepsilon,$$

contradizendo a desigualdade 9.9.

Assim, a hipótese que gerou a desigualdade 9.9 é falsa; ou seja, toda subsequência de (a^{r_n}) converge para L. Pela Proposição 7.3, concluímos que a sequência (a^{r_n}) é convergente.

Para finalizar, vamos demonstrar que a definição da potência a^x não depende da sequência (r_n) de números racionais escolhida:

Sejam (r_n) e (s_n) duas sequências distintas de números racionais, ambas convergentes, com $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$. Definamos ainda $t_n = r_n - s_n$. É fácil concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = R$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = S$. Temos, então:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{t_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

.

Da proposição 9.3, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = 1$. Logo, concluímos que $R = S$, que denotaremos por a^x. ■

9.3 Considerações sobre a apresentação das potências com expoentes irracionais no ensino médio

Para iniciar nossas sugestões, vamos voltar nossa atenção às abordagens realizadas nos livros didáticos. É possível que surja a seguinte pergunta: qual é a apresentação correta para as potências com expoentes irracionais: a aproximação apenas por falta feita no livro B ou a aproximação por falta e excesso, como feita no livro A?

Na verdade, a definição de potência com expoente irracional não pode depender da sequência escolhida para fazer as aproximações. Ou seja, qualquer que seja a sequência (x_n) tal que $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to\infty} x_n = i$, com i irracional, então para $a \in \mathbb{R}_+$ devemos ter $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^i$.

Nos livros e na página eletrônica que analisamos, todos tiveram a mesma ideia de representar um número irracional x em sua forma decimal e escolher a sequência de números racionais (r_n) que converge para x como sendo a sequência formada por termos com um número crescente de casas decimais, para melhorar o grau de precisão da aproximação. Nessa escolha, não existe um erro matemático. Na verdade, acreditamos que essa seja a estratégia mais adequada e eficaz para esse nível de ensino, mas destacamos que o professor da disciplina precisa compreender que:

- A sequência convergente escolhida não era a única possível;
- Ele precisa compreender por que a sequência de potências é convergente. Para isso, é necessário compreender o que apresentamos nas seções 9.1 e 9.2;
- As falas do professor precisam deixar claro que o procedimento que será realizado não é a definição formal do conteúdo, mas que é apenas um procedimento que ajudará o aluno a compreender por que a aproximação que ele está calculando corresponde àquela potência.

Destacamos ainda a importância de estimular os alunos a realizar os cálculos e observar o comportamento dos termos da sequência, a fim de desenvolver a competência 3 relacionada ao ensino de Matemática no ensino médio, indicada na BNCC (ver Seção 2.2), que está relacionada ao desenvolvimento de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos. Além disso, o professor precisa deixar claro que o procedimento realizado não é a definição formal, pois isso atrapalharia outro aspecto indicado na mesma competência: construir argumentação consistente. No ensino médio, os alunos não terão condições de compreender toda a argumentação necessária para justificar adequadamente o conteúdo, então se eles tentarem defender que o raciocínio apresentado é a demonstração completa, serão tendenciados a apresentar argumentos falhos.

Por fim, relembramos a importância de utilizar diferentes registros para representar os mesmos objetos matemáticos, conforme defendido por Duval (vide Trindade et al. (2016)) e proposto na competência específica 4 da BNCC (ver Seção 2.2). Exemplificamos como esse aspecto pode auxiliar na compreensão do conteúdo por meio do uso da representação gráfica:

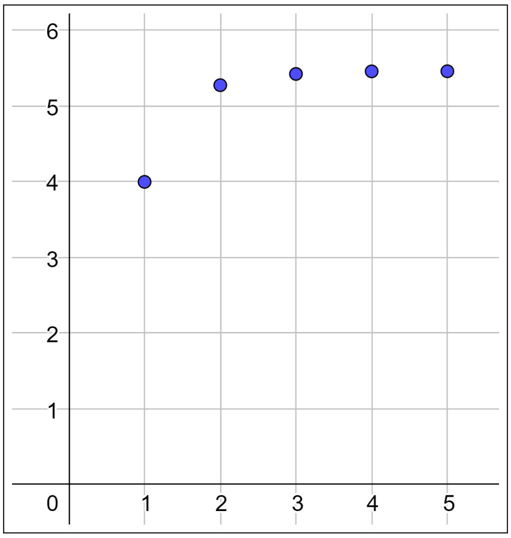


Figura 9.4: Representação gráfica da aproximação por falta proposta no livro B para potência com expoente irracional

FONTE: Elaborada pela autora, com recursos do *software Geogebra*

Acreditamos que a representação gráfica pode ser mais eficaz para convencer o aluno de que os termos se aproximam cada vez mais de um valor específico, por estimular o aspecto visual.

Capítulo 10

“Soma” de Infinitos Termos de uma Progressão Geométrica

As progressões geométricas (PGs) são apresentadas em todos os livros de ensino médio. Em particular, as PGs infinitas sempre são apresentadas, pois posteriormente serão utilizadas no estudo dos juros.

Antes de iniciarmos a apresentação do conteúdo, é preciso comentarmos com mais detalhes a expressão “soma” de infinitos termos. A soma é o resultado da adição, a qual é uma operação binária que pode ser realizada entre números reais:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrowtail & x+y \end{array}$$

E se quisermos somar $x_1 + x_2 + x_3$, o que podemos fazer? Na realidade, fazemos as duas operações consecutivas: $(x_1 + x + 2) + x_3$. Pela propriedade associativa, é possível realizar a operação $x_1 + (x_2 + x_3)$ e obter o mesmo resultado. Por sua vez, a propriedade comutativa nos garante que $(x_2 + x_1) + x_3$, $x_3 + (x_1 + x_2)$ $x_3 + (x_2 + x_1)$, $\cdots$ sempre terão o mesmo resultado. Sendo assim, podemos definir qualquer dessas possibilidades como sendo simplesmente $x_1 + x_2 + x_3$.

Mais geralmente, para qualquer quantidade finita de termos, a soma

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

será definida da mesma forma, valendo-se das propriedades associativa e comutativa.

Na seção a seguir, estudaremos casos em que são feitas infinitas somas sucessivas.

10.1 Séries numéricas

O que acontece se tentarmos somar um número infinito de termos? Seja (a_n) a sequência numérica formada pelos termos a serem somados. Pelo que vimos, já conhecemos as somas parciais $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Agora, vamos definir uma nova sequência de somas parciais: $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. A sequência de somas parciais (s_n) é chamada de **série numérica**.

Definição 10.1 *Uma **série numérica** (s_n) é a sequência de somas parciais $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, que denotamos por $\sum a_n$.*

Por termos vários casos diferentes envolvendo as séries, apresentamos alguns tipos de séries a seguir:

Definição 10.2 *Se existir $s = \sum a_n$, dizemos que a série é **convergente**.*

*Caso não exista $s = \sum a_n$, dizemos que a série é **divergente**.*

*Quando existe $s' = \sum |a_n|$, dizemos que a série é **absolutamente convergente**.*

*Se $\sum a_n$ convergir, mas $\sum |a_n|$ divergir, diremos que a série é **condicionalmente convergente**.*

Dessa forma, podemos definir a soma de infinitos termos? Não. Para cada série, podemos não ter o limite para as somas parciais, ou essa soma pode mudar quando alteramos a ordem posicional dos termos da sequência. Por exemplo, mudando a ordem posicional dos termos da série harmônica $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, nós alteramos o limite da série. Essa mudança na ordem posicional dos termos é chamada de **reordenação**.

Aos interessados em conhecer mais sobre reordenações de séries que convergem para diferentes valores, destacamos um fato curioso:

Teorema 10.1 (Teorema de Riemann) *Seja $\sum a_n$ uma série absolutamente convergente, isto é, $\sum a_n$ converge, mas $\sum |a_n|$ diverge. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação (b_n) dos termos de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = a_n$*

Aos interessados em conhecer a demonstração desse teorema, recomendamos o trabalho de Andrade e Morais Filho (2018), que fazem a demonstração utilizando o *software Scilab*.

Antes de iniciarmos a análise dos livros didáticos, ainda precisamos compreender por que a série formada pela soma parciais dos termos de uma PG é convergente quando a razão q for tal que $0 < |q| < 1$:

Proposição 10.1 *Se q for a razão de uma PG, com $0 < |q| < 1$, então a série formada pelas somas parciais dos termos da PG será convergente.*

Demonstração: Como $|q| < 1$, então $\frac{1}{|q|} > 1$. Ou seja, para algum $h > 0$, temos $\frac{1}{|q|} = 1 + h \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n$.

O próximo passo é provar que $\lim_{n\to\infty}(1+h)^n = \infty$:

Sabemos que $(1+h)^n = 1 + nh + \cdots + h^n$, sendo todos os termos positivos. Logo, $(1+h)^n > 1+nh$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. A propriedade arquimediana (Teorema 7.5) nos garante que, para qualquer $X \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > X$. Logo, para todo $n > n_0$, teremos:

$$(1+h)^n > 1+nh > 1+n_0h > X$$

Logo, pela definição 7.5, concluímos que $\lim_{n\to\infty}(1+h)^n = \infty$.

Por consequência, teremos $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \infty$. Pela definição, isso significa que para todo $X \in \mathbb{R}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m_0$, então $\frac{1}{|q|}^n > X$. Ou seja, $\frac{1}{|q|^n} > X \Leftrightarrow \frac{1}{X} > |q|^n$.

Lembrando que X é um número fixo dado arbitrariamente, podemos então denotar $\varepsilon = \frac{1}{X}$. O que acabamos de demonstrar é que, para todo ε, sempre existirá $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m_0$, então $\varepsilon > |q|^n$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}|q|^n = 0.$$

■

Assim como no Capítulo 9, nossa pretensão não é de apresentar todo o conteúdo de Análise Real aos alunos de ensino médio; mas sim de apresentar toda a definição formal ao professor do ensino médio, junto com considerações sobre a abordagem do conteúdo, para poder norteá-lo em seu trabalho.

Com esse propósito em mente, vamos analisar as abordagens encontradas nos livros didáticos e páginas eletrônicas voltadas para o ensino médio.

10.2 Análise da apresentação da "soma" de infinitos termos de uma PG em livros didáticos e páginas eletrônicas

Inicialmente, destacamos que a expressão "soma" dos infinitos termos é amplamente utilizada em todos os livros e páginas eletrônicas consultados, para fins didáticos. De fato, os alunos do ensino médio não serão apresentados aos conceitos de séries convergentes, nem aos critérios de convergência; logo, não seria adequado utilizar as definições mais específicas. Por não ser o termo formalmente correto, sempre o apresentaremos entre aspas; porém, entendemos que seu uso para fins didáticos seja adequado para o ensino médio.

10.2.1 Apresentação da "soma" de infinitos termos de uma PG no livro B

Para iniciar a exposição de nossas análises, apresentamos a abordagem utilizada no livro B, por ser mais detalhada:

Série geométrica convergente

Considere a PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots\right)$, de razão $q=\frac{1}{3}$ cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Note que, quanto maior o valor de *n*, mais próximo de zero é o termo da PG. Por exemplo:

- $a_5 = \frac{1}{81} \simeq 0{,}01235$
- $a_8 = \frac{1}{2\,187} \simeq 0{,}00046$
- $a_9 = \frac{1}{6\,561} \simeq 0{,}00015$

Figura 10.1: Apresentação da série geométrica convergente no livro B

Podemos dizer que, à medida que *n* cresce indefinidamente, a_n aproxima-se de zero, ou seja, tende a zero.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$$

De modo geral, se $0 < |q| < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Estudamos anteriormente que $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, para $q \neq 1$. Calculando o limite de S_n quando *n* tende ao infinito e $0 < |q| < 1$, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ lê-se "limite de $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ tende a zero quando *n* tende ao infinito".

Figura 10.2: Apresentação do cálculo do limite das somas parciais dos termos de uma PG, extraída do livro B

Conforme apresentado na Figura 10.1, foi apresentada uma PG com razão $0 < |q| < 1$. Depois, foram apresentados os valores de q^n, para valores crescentes de n. O aluno consegue perceber que, quanto maior for n, menor será o valor de q^n, aproximando-se cada vez mais de 0. Em seguida, generaliza-se o fato de que $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ para toda razão cujo módulo esteja entre 0 e 1, conforme a Figura 10.2.

A abordagem utilizada é similar à que propomos no início do Capítulo 7. Valoriza-se o aspecto intuitivo nas explicações. Porém, destacamos a importância do professor compreender o Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4) para saber por que essa sequência converge, para acompanhar e solucionar as dificuldades de compreensão dos alunos.

Destacamos que apresentar apenas um exemplo pode ter um efeito negativo: o texto esclarece que temos $0 < |q| < 1$, mas o único exemplo dado apresentava uma razão positiva. Seria interessante apresentar no mínimo dois exemplos de q^n, um com $0 < q < 1$ e outro com $-1 < q < 0$.

Após apresentada a ideia de limite, a fórmula geral para a "soma" dos infinitos termos de uma PG com razão $0 < |q| < 1$ é deduzida a partir da fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PG, aplicando-se o limite de q^n. O livro apresenta de forma intuitiva as operações com limites de sequências. Porém, o professor precisa conhecer as propriedades apresentadas na Proposição 7.2 e demonstradas no Apêndice B, especificamente o item (a), para saber por que a sequência se comporta dessa maneira, convergindo para $\dfrac{a_1}{1-q}$.

10.2.2 Apresentação da "soma" de infinitos termos de uma PG no livro A

O livro A motiva o estudo do conteúdo através de um exemplo, apresentado na Figura 10.3:

Uma empresa reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicada a metade dessa verba, e em cada ano seguinte será aplicada metade do que sobrou da verba no ano anterior. A P.G. infinita a seguir representa os valores, em milhão de reais, aplicados ano a ano:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

Observe que, a cada ano que passa, o total aplicado em obras sociais aumenta e se aproxima cada vez mais de 1 milhão de reais:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

$$\vdots$$

Por mais que adicionemos termos a essa P.G., jamais chegaremos à soma 1; porém, adicionando mais e mais parcelas, vamos nos aproximar de 1 tanto quanto quisermos. Por isso, dizemos que 1 é o **limite** dessa soma.

Figura 10.3: Motivação para ideia de limite de somas parciais, extraída do livro A

Foi feito um esforço para contextualizar o conteúdo, mas o exemplo apresentado possui uma limitação: na prática, não se aplicam frações de centavos em obras sociais; logo, em determinado momento seria necessário parar a aplicação conforme proposta.

Após a contextualização inicial, o livro passa a apresentar a ideia de limite da "soma" dos infinitos termos da PG, quando temos a razão q de modo que $-1 < q < 1$:

Veremos, a seguir, que existe o limite da soma dos infinitos termos de qualquer P.G. cuja razão q obedeça à condição: $-1 < q < 1$.

O limite (indicado por S_∞) da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, de razão q, com $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Vamos justificar essa fórmula a partir da soma S_n dos n primeiros termos da P.G., isto é:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} \therefore S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

Quando o número n de termos aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero (tende a zero), pois o número q está entre -1 e 1.

Assim, a expressão S_n se aproxima indefinidamente de $\frac{a_1}{1-q}$. Indicando esse limite por S_∞, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Notas:

1. Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão q se, e somente se, $-1 < q < 1$.
2. O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. é chamado, simplesmente, de **soma** dos infinitos termos da P.G.

Figura 10.4: Apresentação de limite de somas parciais, extraída do livro A

O livro apresenta a noção de limite das somas parciais de forma adequada, apresentando o conceito de forma geral e levando a um pensamento mais intuitivo. Porém, quando ele afirma que o limite dessas somas será chamado simplesmente de "soma" dos infinitos termos da PG, induz o aluno a pensar que seja formalmente correto denominar como soma uma operação que envolve infinitos termos.

A apresentação da noção de convergência da série também induz ao pensamento intuitivo, mas ressaltamos mais uma vez que o professor precisa conhecer o Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4) para saber por que a sequência converge.

Por fim, destacamos mais uma falha: é feita a afirmação de que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, sem serem exibidos os cálculos de algumas dessas potências para valores cada vez maiores de n. Logo, o aluno não observará o decrescimento de q^n nem absorverá a noção de convergência para zero. Mais uma vez, destacamos que o professor precisa saber por que a sequência $a_n = q^n$ converge para zero; além disso, precisa convencer os alunos acerca desse fato utilizando os conhecimentos que eles já possuem.

10.2.3 Apresentação da "soma" de infinitos termos de uma PG no livro C

Conforme mostrado na Figura 10.7, o livro C inicialmente mostra o comportamento de duas potências com bases entre -1 e 1 e potências n cada vez maiores. O objetivo é levar os leitores a perceber que o termo q^n se aproxima cada vez mais de zero quando n cresce.

3.4 Soma dos infinitos termos de uma PG

Já estudamos a soma nos n primeiros termos de uma PG para $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, veremos como calcular a soma dos termos de uma PG infinita. Para isso, vamos primeiro analisar o valor de algumas potências. Observe.

n	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	n	$\left(-\frac{1}{5}\right)^n$
1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$	1	$\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5} = -0{,}2$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$	2	$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$	3	$\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125} = -0{,}008$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59.049}{1.048.576} \simeq 0{,}056314$	10	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9.765.625} \simeq 0{,}0000001$

Figura 10.5: Apresentação de potências com base $0 < a < 1$ e expoente n cada vez maior, extraída do livro C

Consideramos esse cuidado importante, pois a apresentação do conteúdo para esse nível de ensino depende muito da intuição. É importante garantir que os alunos acompanhem o raciocínio com conhecimentos adquiridos anteriormente, para que as partes mais avançadas sejam aceitas intuitivamente com mais facilidade.

Dando continuidade o livro apresenta o conceito de "limite":

Analisando os valores obtidos, verificamos que, em ambas as potências, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero será o resultado obtido. Intuitivamente, podemos considerar que para qualquer número real a, com $0 < |a| < 1$, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero estará o valor de a^n. Dizemos, então, que, para $-1 < a < 1$, quando n tende a infinito, o valor de a^n tende a zero, ou, ainda, para $-1 < a < 1$, o limite de a^n, quando n tende a infinito, é igual a zero.

Em linguagem simbólica: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, para $-1 < a < 1$

Exemplos

- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}6)^n = 0$

Figura 10.6: Apresentação de limites extraída do livro C

As expressões "quando n tende ao infinito, o valor de a^n tende a zero" e "o limite de a^n, quando n tende a infinito, é igual a zero" foram introduzidas e relacionadas com a ideia de ter valores cada vez maiores de n e cada vez menores de a^n, o que consideramos adequado.

O livro também já apresentou a notação de limite, para ser utilizada em seguida:

Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ uma progressão geométrica em que $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$. Como vimos, quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma S_n nesse caso:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $\mathbf{-1 < q < 1}$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

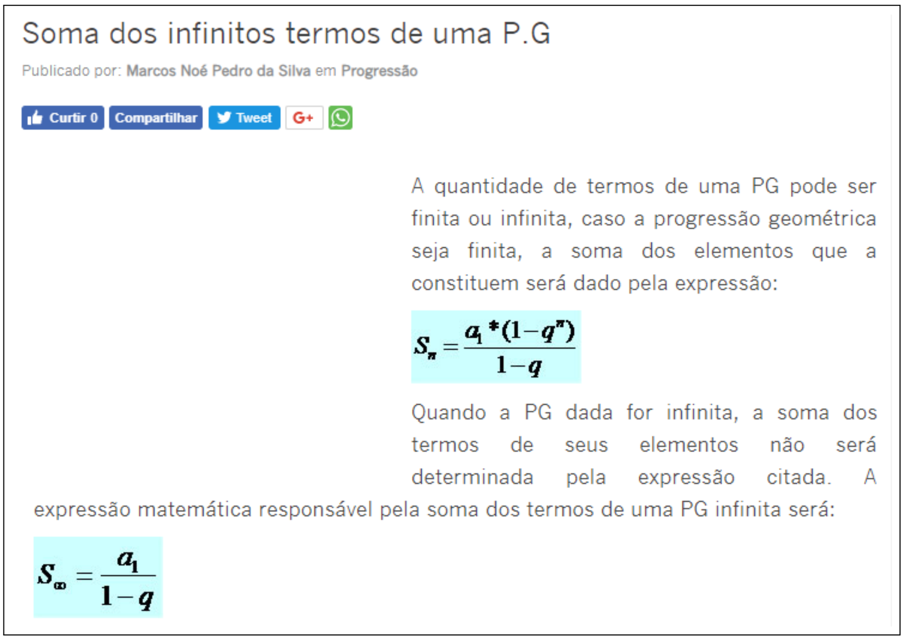
$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Figura 10.7: Dedução da fórmula para calcular a "soma" dos termos de uma PG infinita, extraída do livro C

De forma geral, a apresentação é adequada para os alunos de ensino médio. As ideias oriundas da Análise Real foram apresentadas de um modo que convence o aluno. Porém, precisamos destacar mais uma vez que o conhecimento do professor não pode se resumir a esses conhecimentos. Ele precisa saber por que q^n converge para zero quando $-1 < q < 1$ e n é tomado cada vez maior, conforme apresentado no Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4) e por que a sequência $\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ converge para $\dfrac{a_1}{1-q}$ (ver Proposição 7.2).

10.2.4 Apresentação da "soma" de infinitos termos de uma PG nas páginas eletrônicas 1 e 2

Ambas as páginas apresentaram o conteúdo de forma bastante similar. Por ter comentários muito parecidos para ambas, decidimos apresentá-las na mesma seção. A primeira semelhança entre ambas é a falta de explicação do motivo pelo qual $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, conforme vemos nas figuras 10.8 e 10.9,



Soma dos infinitos termos de uma P.G

Publicado por: Marcos Noé Pedro da Silva em Progressão

Curtir 0 Compartilhar Tweet G+

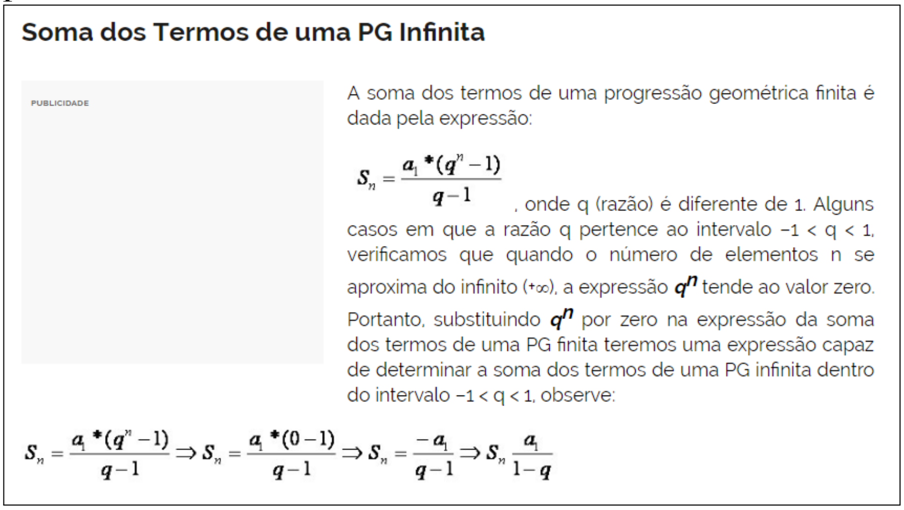
A quantidade de termos de uma PG pode ser finita ou infinita, caso a progressão geométrica seja finita, a soma dos elementos que a constituem será dado pela expressão:

$$S_n = \frac{a_1 * (1 - q^n)}{1 - q}$$

Quando a PG dada for infinita, a soma dos termos de seus elementos não será determinada pela expressão citada. A expressão matemática responsável pela soma dos termos de uma PG infinita será:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Figura 10.8: Apresentação da "soma dos infinitos termos de uma PG", extraída da página eletrônica 1



Soma dos Termos de uma PG Infinita

PUBLICIDADE

A soma dos termos de uma progressão geométrica finita é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{a_1 * (q^n - 1)}{q - 1}$$

, onde q (razão) é diferente de 1. Alguns casos em que a razão q pertence ao intervalo –1 < q < 1, verificamos que quando o número de elementos n se aproxima do infinito (+∞), a expressão q^n tende ao valor zero. Portanto, substituindo q^n por zero na expressão da soma dos termos de uma PG finita teremos uma expressão capaz de determinar a soma dos termos de uma PG infinita dentro do intervalo –1 < q < 1, observe:

$$S_n = \frac{a_1 * (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 * (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow S_n \frac{a_1}{1 - q}$$

Figura 10.9: Apresentação da "soma dos infinitos termos de uma PG", extraída da página eletrônica 2

A página eletrônica 1 apenas exibe as fórmulas, com o mínimo de explicação. A intenção parece ser que o aluno apenas memorize as fórmulas, sem qualquer compreensão do conteúdo. Essa abordagem é totalmente inadequada e torna o conteúdo descontextualizado. Destacamos ainda a afirmação "a expressão matemática responsável pela soma dos termos de uma PG infinita será". Tal afirmação não deixa claro que não estamos fazendo uma operação de adição; além disso, a ideia de que uma expressão matemática tenha uma responsabilidade de calcular algo não tem sentido lógico.

Por sua vez, a página eletrônica 2 apresenta os cálculos da dedução da fórmula para a "soma" infinita, sem discutir a justificativa de tais passagens. Inicialmente, é dito que q^n

tende a zero quando $-1 < q < 1$ quando n “se aproxima do infinito”. Essa expressão é totalmente equivocada, por deixar a impressão de que o infinito seja um valor específico, já que os valores de n podem se aproximar dele. Por fim, as passagens feitas para apresentar a fórmula $S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ a partir de $S_n = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ não acompanham quaisquer explicações, o que provavelmente confundirá o raciocínio dos alunos.

10.3 Sugestões de abordagem

Após observar as abordagens utilizadas nos livros, precisamos pensar em como apresentar esses fatos de modo adequado ao ensino médio, tendo em vista que os alunos desse nível de ensino não terão o conhecimento formal de limites de sequências.

Recomendamos fortemente que os alunos possam observar o comportamento de potências q^n, com $0 < |q| < 1$ e n sendo tomado cada vez maior; essa observação pode ser feita numericamente, como feito nos livros didáticos analisados ou graficamente, utilizando um *software* de geometria. É preciso convencer os alunos de que não é possível que a sequência q^n convirja para qualquer número maior que zero, por menor que seja. Para isso, é possível criar “duelos” entre os alunos: um escolhe um valor m pequeno e o segundo escolhe um n tão grande que $q^n < m$. Eles devem ser convencidos de que sempre existirá um n para o qual isso acontece e que, para todo $n' > n$, também teremos $q^{n'} < m$.

Em seguida, o aluno deverá ser convencido intuitivamente que, como q^n se aproxima cada vez mais de zero, a expressão $\dfrac{a_1(q^n-1)}{1-q}$ se aproximará cada vez mais de $\dfrac{a_1}{1-q}$. É importante destacar que essa não é uma “substituição” de q^n por zero, mas sim uma aproximação cada vez mais precisa.

Mais uma vez, lembramos que a alternância entre a representação numérica e gráfica é importante e recomendada na BNCC (ver Seção 2.2) e que os alunos precisam ter consciência de que estarão fazendo cálculos que os levam a levantar hipóteses, mas não estarão demonstrando de modo formal, pois essa demonstração exige conteúdos que eles ainda não estudaram. Esse esclarecimento evita confusões a respeito das demonstrações matemáticas.

Capítulo 11

Análise da Apresentação do Cálculo da Área do Círculo em Materiais Didáticos para o Ensino Médio

Assim como as potências com expoentes irracionais e a "soma" dos infinitos termos de uma PG, a área do círculo também é estimada por meio de aproximações e definida por meio de limites de sequências. Mais uma vez, vamos iniciar o capítulo apresentando o conteúdo de forma que seja mantido o rigor matemático:

11.1 Cálculo da área do círculo: aplicando o método da exaustão

Quando estudamos polígonos, a definição de área é feita tomando como base quadrados cujos lados medem uma unidade de medida. Dessa forma, facilmente calculamos a área de triângulos, quadriláteros, pentágonos e assim sucessivamente. Porém, para calcular a área do círculo, não é possível seguir o mesmo raciocínio, pois um círculo não será totalmente dividido em um número finito de regiões triangulares ou quadrangulares, por exemplo, como fazemos com os demais polígonos.

Para calcular essa área, utilizaremos o Método da Exaustão, inicialmente utilizado pelos matemáticos gregos e amplamente conhecido por meio dos trabalhos de Eudoxo e Arquimedes (SMITH, 1958). Destacamos que o cuidado de apresentar problemas com valor histórico é recomendado pela BNCC, na competência geral 1 (ver Seção 2.1. Para isso, consideraremos as áreas de polígonos inscritos e circunscritos ao círculo em questão, formando duas sequências de áreas cada vez mais próximas da área completa do círculo. São necessários conhecimentos de geometria euclidiana plana para demonstrar que um polígono regular pode ser inscrito ou circunscrito em uma circunferência, os quais não serão detalha-dos neste trabalho. Aos interessados em ver essa demonstração, Barbosa (2012) dedica um capítulo completo para estudar o círculo e, em particular, esse resultado é demonstrado.

Com auxílio do software *Geogebra*, construímos um triângulo inscrito e um circunscrito a uma circunferência de centro O e raio r, como vemos na Figura 11.1:

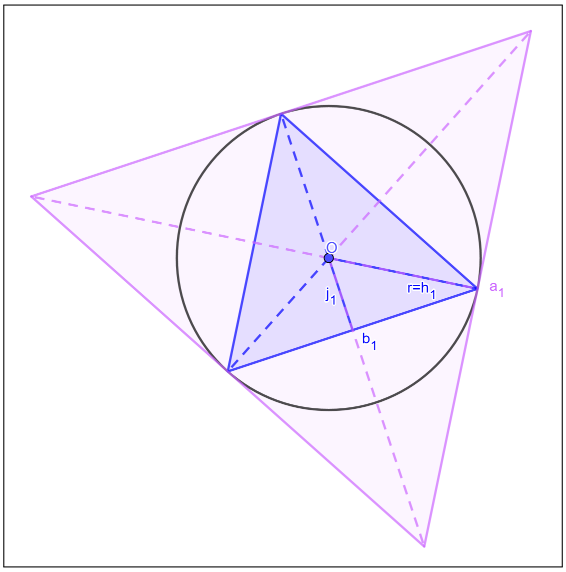


Figura 11.1: Triângulos inscrito e circunscrito a uma circunferência
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Note que o triângulo interno é formado por três triângulos menores, cada um com área $\dfrac{b_1 j_1}{2}$, onde b_1 é a medida do lado do triângulo inscrito e j_1, a medida do apótema do triângulo. Logo, a área do triângulo inscrito é $3 \cdot \dfrac{b_1 j_1}{2}$.

Por sua vez, o triângulo circunscrito também é formado por três triângulos menores, cada um com área $\dfrac{a_1 h_1}{2}$, onde a_1 é a medida do lado do triângulo circunscrito e h_1, a medida do apótema do triângulo. Além disso, o apótema desse triângulo coincide com o raio do círculo. Portanto, a área do triângulo circunscrito é dada por $3 \cdot \dfrac{a_1 r}{2}$.

Assim, após a primeira construção, obtemos a aproximação:

$$3 \cdot \frac{b_1 j_1}{2} < A_C < 3 \cdot \frac{a_1 r}{2},$$

onde A_C é a área do círculo.

Agora, faremos a segunda aproximação, considerando os hexágonos regulares inscrito e circunscrito à circunferência, conforme vemos na figura a seguir:

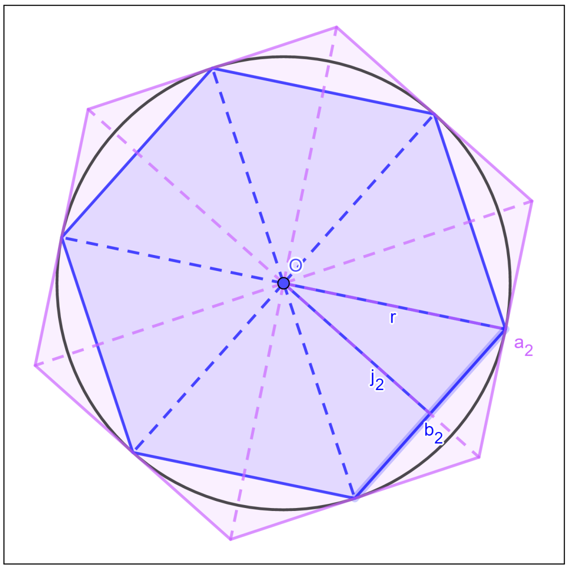


Figura 11.2: Hexágonos inscrito e circunscrito a uma circunferência
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

Procedendo de forma similar à anterior para calcular a área de cada hexágono, calcularemos a área de cada hexágono: o inscrito tem área $6 \cdot \dfrac{b_2 j_2}{2}$, enquanto o circunscrito tem área $6 \cdot \dfrac{a_2 r}{2}$. Desse modo, a segunda aproximação que obtemos é:

$$6 \cdot \frac{b_2 j_2}{2} < A_C < 6 \cdot \frac{a_2 r}{2}.$$

Repetindo o mesmo procedimento, construímos um dodecágono inscrito e um circunscrito ao círculo, como apresentado na figura a seguir:

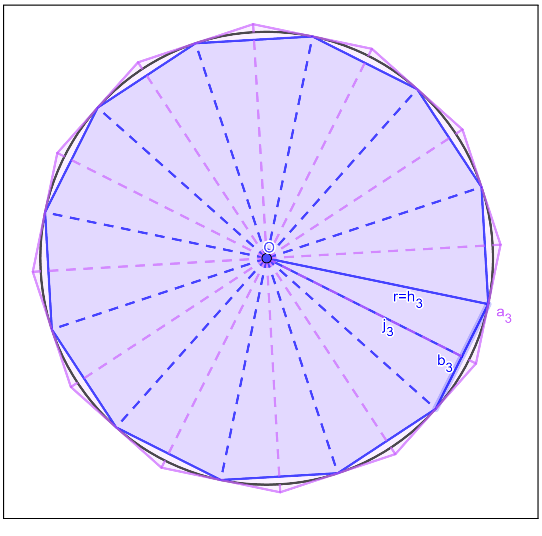


Figura 11.3: Dodecágonos inscrito e circunscrito a uma circunferência
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

De forma análoga às aproximações anteriores, obtemos a aproximação:

$$12 \cdot \frac{b_3 j_3}{2} < A_C < 12 \cdot \frac{a_3 r}{2}.$$

É fácil perceber que, quanto maior o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, mais a área de cada polígono se aproxima da área do círculo. Por outro lado, observe que a sequência formada pelas áreas dos polígonos inscritos é crescente e limitada, enquanto a sequência das áreas dos polígonos circunscritos é decrescente e limitada. Pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4), concluímos ambas são convergentes.

Resta-nos agora encontrar o limite de cada uma dessas sequências. Se tentássemos calcular diretamente $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nb_n j_n}{2}$, nos depararíamos com dois limites que não possibilitariam encontrar uma expressão exata: $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Situação similar aconteceria para os polígonos circunscritos, pois $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Porém, podemos notar que, quanto maior o valor de n, mais na_n e nb_n se aproximam da circunferência correspondente ao círculo. Dessa forma, na_n é uma sequência decrescente e limitada, enquanto nb_n é crescente e limitada. Pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4), concluímos que ambas são convergentes. Como o supremo do conjunto de valores de nb_n é a própria medida da circunferência, isto é, $2\pi r$, o Teorema de Weierstrass nos garante que $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 2\pi r$. Analogamente, como o ínfimo dos valores de na_n é $2\pi r$, também temos $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2\pi r$.

Além disso, a sequência (j_n) das medidas dos apótemas dos polígonos inscritos é crescente e limitada, com o raio r sendo seu supremo. Logo, pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 7.4), concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} j_n = r$. Analogamente, a sequência (h_n) das medidas dos apótemas dos polígonos circunscritos é decrescente e limitada, com o raio r sendo o seu ínfimo.

Pela Proposição 7.2, garantimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nb_n j_n}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} nb_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} j_n}{2} \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{na_n h_n}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} na_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} h_n}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} nb_n \lim\limits_{n\to\infty} j_n}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

e

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} na_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} h_n}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

Tendo em vista que ambas as sequências têm o mesmo limite e que $\frac{nb_n j_n}{2} \leq A_C \leq \frac{na_n h_n}{2}$, pelo Teorema do Sanduíche (7.7), com A_C sendo a sequência constante com a área do círculo, concluímos que

$$A_C = \pi r^2.$$

11.2 Considerações sobre a apresentação da área do círculo para alunos do ensino médio

A abordagem que propomos na Seção 11.1 foi pensada para ser acessível aos alunos de ensino médio, por exigir apenas conhecimentos de geometria euclidiana plana. O único fato que talvez seja desconhecido para os alunos é o motivo de sempre existirem polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência qualquer, que será utilizado em nossa demonstração. Sugerimos que o professor de ensino médio atribua uma medida de comprimento ao raio do círculo, para que o aluno tenha condições de calcular a medida da área encontrado a cada aproximação por conta própria.

Entendemos que o ato de se envolver no cálculo das áreas e de observar o comportamento dos valores desenvolve a competência 5 que a BNCC indica para a matemática no ensino médio, a qual se refere à investigação, criação de conjecturas, uso de estratégias e recursos e a identificação da necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal para validar as conjecturas. É importante que o aluno perceba que o procedimento realizado não é uma demonstração formal, mas apenas uma forma de compreender a origem do conteúdo que está estudando e conseguir acompanhar intuitivamente os argumentos utilizados.

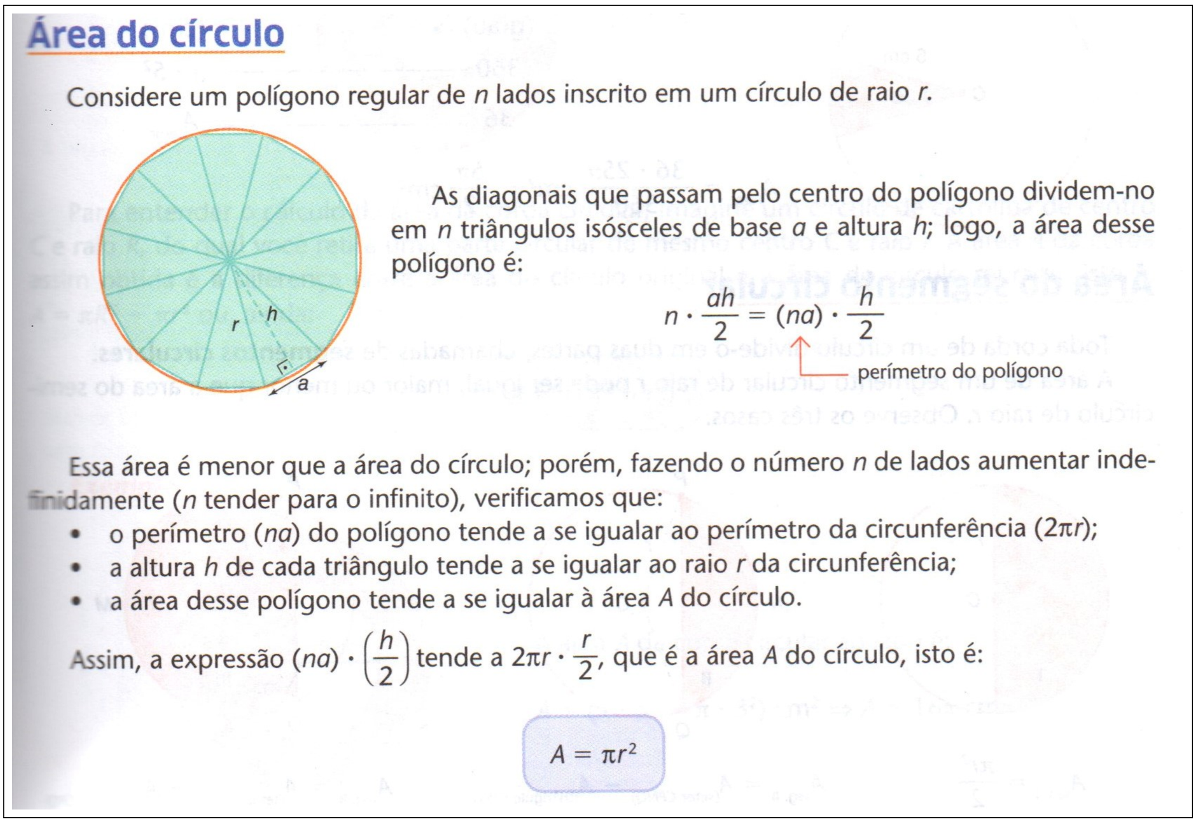
11.3 Análise da apresentação da área do círculo nos livros didáticos e em páginas eletrônicas

Vamos agora analisar como tal conteúdo é abordado nos livros didáticos recomendados pelo MEC e nas páginas eletrônicas mais pesquisadas na internet.

Os três livros apresentam a estimativa da área do círculo utilizando aproximações, através da construção de polígonos regulares inscritos na circunferência. A diferença entre eles está no caminho escolhido para fazer a estimativa.

11.3.1 Cálculo da área do círculo no livro A

Antes de apresentar o cálculo da área do círculo, o livro A já tinha mostrado como calcular a área de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência, com lado a e apótema h, utilizando a fórmula $A = n\frac{ah}{2}$. A medida da circunferência também já havia sido apresentada anteriormente. Na figura 11.4, vemos como o livro A apresenta o cálculo da área do círculo utilizando esses conhecimentos prévios:



Área do círculo

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r.

As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em n triângulos isósceles de base a e altura h; logo, a área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = \underbrace{(na)}_{\text{perímetro do polígono}} \cdot \frac{h}{2}$$

Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), verificamos que:

- o perímetro (na) do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tende a se igualar à área A do círculo.

Assim, a expressão $(na) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo, isto é:

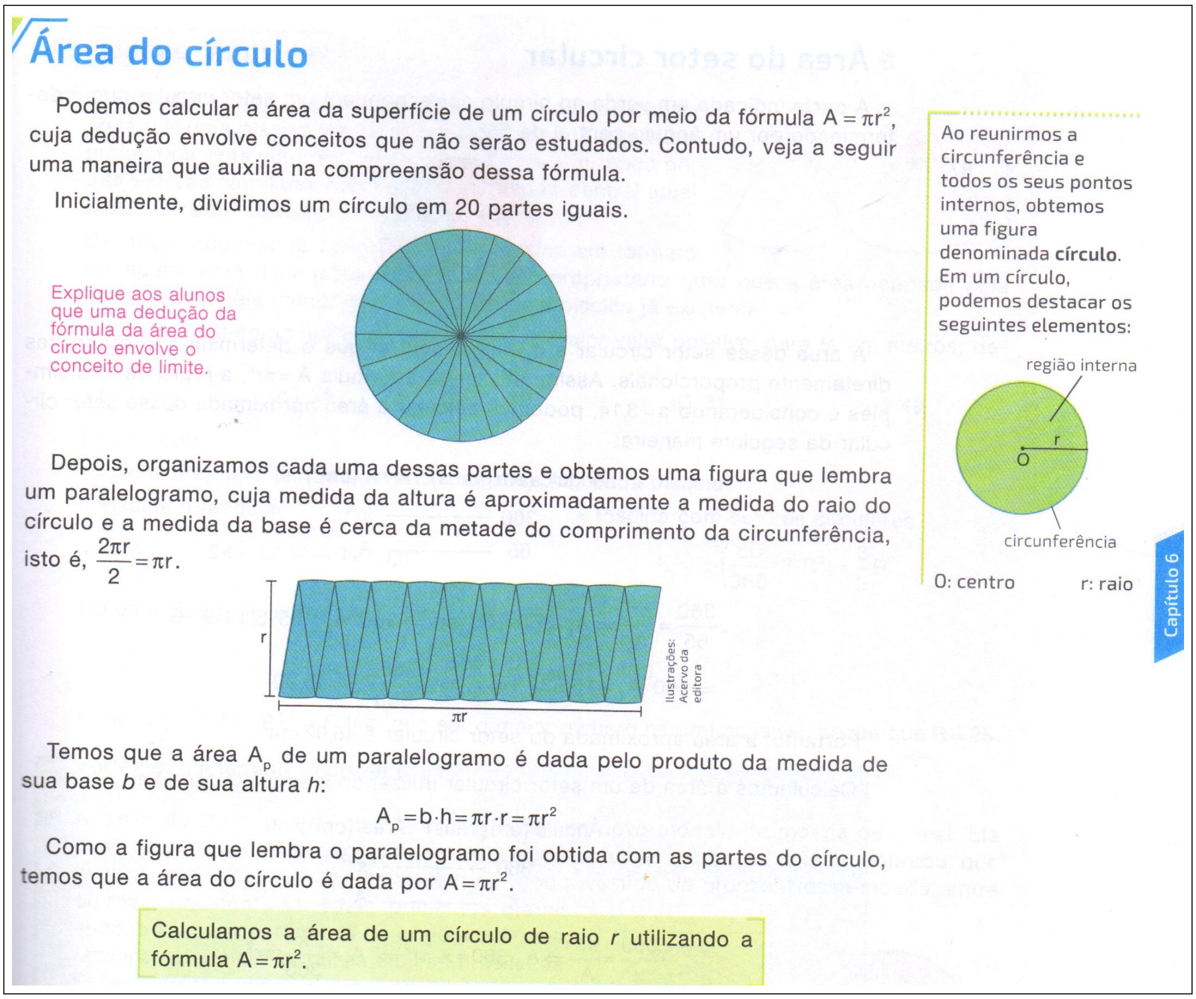
$$\boxed{A = \pi r^2}$$

Figura 11.4: Estimativa da área do círculo, apresentada no livro A

Os alunos são levados a concluir de forma intuitiva que, quando n tende ao infinito, o valor de na tende a $2\pi r$ e h tende para o raio r. Tendo em vista que os alunos não estudarão limites neste nível de ensino, uma abordagem que induza a conclusões intuitivas são realmente necessárias. Porém, o professor precisa ter conhecimento da definição formal do conteúdo, conforme apresentamos na Seção 11.1, para saber rigorosamente por que essas sequências convergem para esses valores.

11.3.2 Cálculo da área do círculo no livro B

Conforme vemos na Figura 11.5, o livro B afirma de forma clara que a demonstração da fórmula envolve conceitos que não serão estudados pelos alunos no ensino médio. O livro se propõe a mostrar uma abordagem que ajude a compreender a fórmula $A = \pi r^2$. Consideramos muito acertado o cuidado de esclarecer que a abordagem apresentada não é a demonstração formal, pois esse cuidado evita que os alunos do ensino médio tratem noções intuitivas como se fossem demonstrações formais.



Área do círculo

Podemos calcular a área da superfície de um círculo por meio da fórmula $A = \pi r^2$, cuja dedução envolve conceitos que não serão estudados. Contudo, veja a seguir uma maneira que auxilia na compreensão dessa fórmula.

Inicialmente, dividimos um círculo em 20 partes iguais.

Explique aos alunos que uma dedução da fórmula da área do círculo envolve o conceito de limite.

Depois, organizamos cada uma dessas partes e obtemos uma figura que lembra um paralelogramo, cuja medida da altura é aproximadamente a medida do raio do círculo e a medida da base é cerca da metade do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.

Temos que a área A_p de um paralelogramo é dada pelo produto da medida de sua base b e de sua altura h:

$$A_p = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, temos que a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$.

Calculamos a área de um círculo de raio r utilizando a fórmula $A = \pi r^2$.

Ao reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obtemos uma figura denominada **círculo**. Em um círculo, podemos destacar os seguintes elementos:

O: centro r: raio

Capítulo 6

Figura 11.5: Estimativa da área do círculo, apresentada no livro B

Vemos que a divisão do círculo em partes iguais é similar à do livro anterior, mas o raciocínio agora é diferente e possui um problema grave: não podemos definir o limite de uma sequência não numérica! As ilustrações apresentadas no livro, juntamente com as explicações dadas, passam a impressão de que cada arco de círculo "se aproxima" cada vez mais de um segmento de reta e, apenas por isso, podemos dizer que suas medidas serão próximas. Porém, esse argumento equivocado pode induzir os alunos a pensarem que figuras geométricas podem "convergir para outra figura", o que os levaria a uma conclusão igualmente equivocada!

Para ilustrar a falha desse raciocínio, vamos apresentar um exemplo. Considere um triângulo retângulo com catetos medindo 1cm. Consequentemente, sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$cm. Em seguida, consideremos a sequência de segmentos conforme mostramos na figura a seguir:

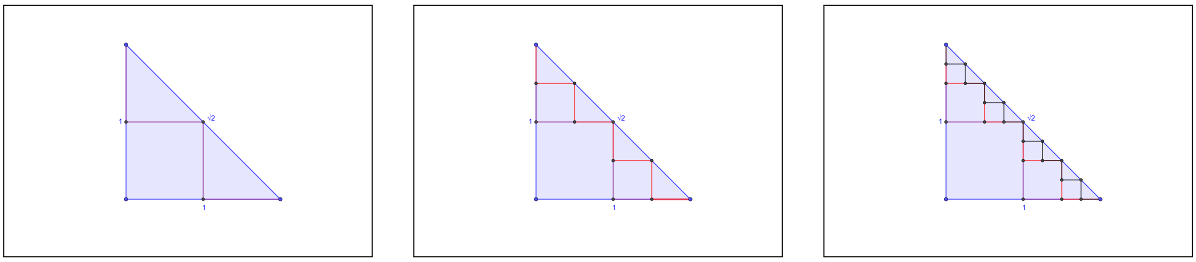


Figura 11.6: Sequência de caminhos poligonais que ligam os dois vértices da hipotenusa
FONTE: Elaborada pela autora, utilizando recursos do *software Geogebra*

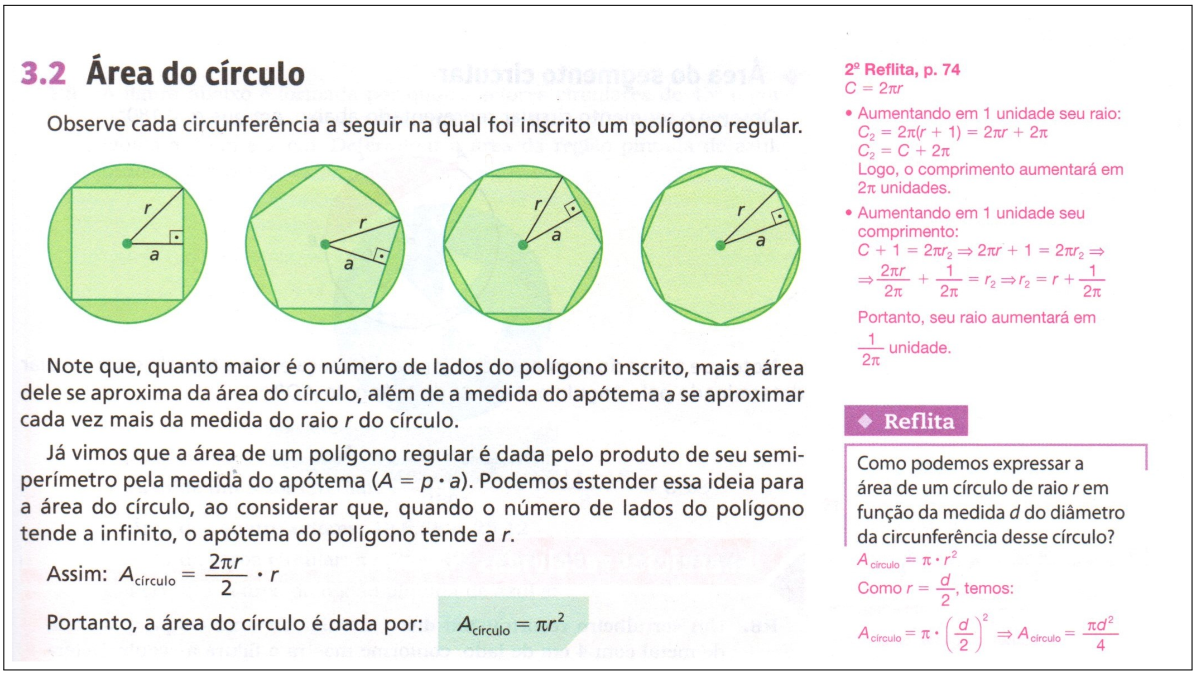
Qual é a soma das medidas dos segmentos destacados em cada figura? Naturalmente, a soma das medidas dos segmentos sempre será igual à soma das medidas dos catetos, que é de 2cm.

Observe que, aparentemente, os segmentos se aproximam cada vez mais da hipotenusa. Então, podemos dizer que a soma de suas medidas se aproxima cada vez mais de $\sqrt{2}$? Não! A cada passo, a soma das medidas dos segmentos continua sendo 2. Apesar de termos a impressão visual de que os segmentos se aproximam da hipotenusa, isso não significa que a soma das medidas desses segmentos convergirá para a medida da hipotenusa! Se isso acontecesse, teríamos a sequência constante $(2,2,2,2,\cdots)$ convergindo para $\sqrt{2}$, o que é um absurdo!

Após observarmos esse exemplo, torna-se notória a necessidade de compreender bem os conceitos e resultados matemáticos antes de propor uma apresentação didática mais acessível. Não podemos perder o rigor matemático e estimular o uso de raciocínios incorretos para que o aluno se convença do uso de uma fórmula.

11.3.3 Cálculo da área do círculo no livro C

Antes de apresentar o cálculo da área do círculo, o livro C já tinha apresentado em capítulos anteriores a fórmula $A = pa$, onde A é a área do polígono regular, p é o semi-perímetro e a é a medida do apótema. A abordagem é feita de forma similar à do livro A, tomando como base uma fórmula apresentada anteriormente, conforme vemos na Figura 11.7.



3.2 Área do círculo

Observe cada circunferência a seguir na qual foi inscrito um polígono regular.

Note que, quanto maior é o número de lados do polígono inscrito, mais a área dele se aproxima da área do círculo, além de a medida do apótema *a* se aproximar cada vez mais da medida do raio *r* do círculo.

Já vimos que a área de um polígono regular é dada pelo produto de seu semiperímetro pela medida do apótema ($A = p \cdot a$). Podemos estender essa ideia para a área do círculo, ao considerar que, quando o número de lados do polígono tende a infinito, o apótema do polígono tende a r.

Assim: $A_{\text{círculo}} = \dfrac{2\pi r}{2} \cdot r$

Portanto, a área do círculo é dada por: $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

2º Reflita, p. 74
$C = 2\pi r$

- Aumentando em 1 unidade seu raio:
  $C_2 = 2\pi(r + 1) = 2\pi r + 2\pi$
  $C_2 = C + 2\pi$
  Logo, o comprimento aumentará em 2π unidades.
- Aumentando em 1 unidade seu comprimento:
  $C + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow 2\pi r + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{2\pi r}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi} = r_2 \Rightarrow r_2 = r + \dfrac{1}{2\pi}$
  Portanto, seu raio aumentará em $\dfrac{1}{2\pi}$ unidade.

◆ Reflita

Como podemos expressar a área de um círculo de raio *r* em função da medida *d* do diâmetro da circunferência desse círculo?

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$

Como $r = \dfrac{d}{2}$, temos:

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \dfrac{\pi d^2}{4}$

Figura 11.7: Estimativa da área do círculo, apresentada no livro C

Notamos claramente que o autor sentiu a necessidade de utilizar noções de limite, quando o autor utiliza as expressões “tende a infinito” e “tende a *r*”, pois tais noções embasam a definição da área do círculo. Ressaltamos ainda o apelo intuitivo para utilizar as propriedades das operações com limites, para concluir que o produto dos limites é o limite dos produtos. Destacamos, mais uma vez, a importância de que o professor tenha o conhecimento rigoroso dos conceitos apresentados, conforme apresentamos na Seção 11.3 e no Apêndice B.

De forma geral, a abordagem desse livro é adequada e coerente com o nível de ensino; apenas recomendaríamos que o autor expressasse claramente que essa não é a demonstração formal do conteúdo, evitando conclusões equivocadas por parte dos alunos.

11.3.4 Cálculo da área do círculo na página eletrônica 1

Inicialmente, como vemos na Figura 11.8, a página eletrônica 1 apresenta o conceito de área do círculo como “o valor da superfície da figura, levando em conta a medida do seu raio”. Essa explicação apenas revela que a área depende da medida do raio, sem maiores esclarecimentos; na verdade, essa frase não apresenta a clareza necessária para definir a área.

A **área do círculo** corresponde ao valor da superfície dessa figura, levando em conta a medida de seu raio (r).

O que é Círculo?

Vale lembrar que o círculo, também chamado de disco, é uma figura geométrica que faz parte dos estudos da geometria plana.

Essa figura surge na medida em que os polígonos regulares inscritos nela vão aumentando o número dos lados.

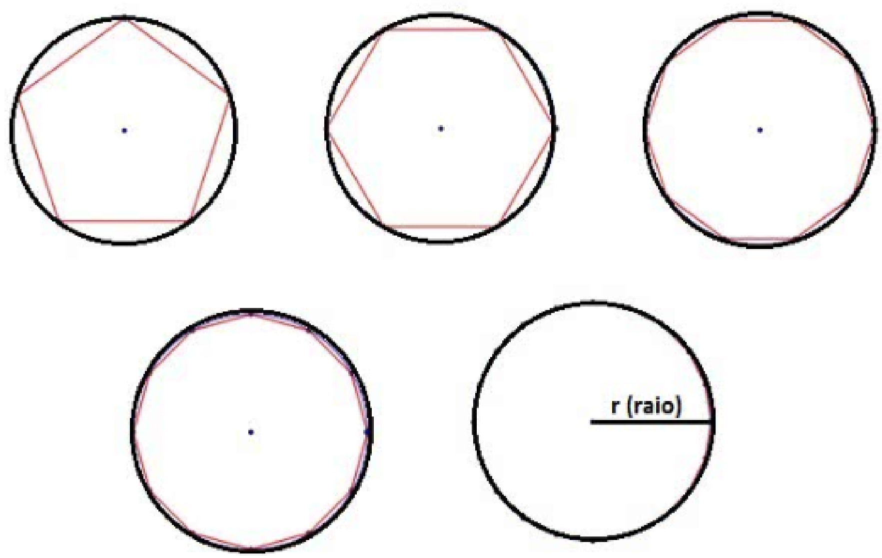


Figura 11.8: Definição de círculo na página eletrônica 1

Em seguida, temos a tentativa problemática de definir o círculo: uma figura que surge quando os polígonos inscritos nela aumentam o número de lados. Percebemos um problema na estrutura lógica de tal raciocínio, pois se ainda estamos definindo o círculo, não podemos nos referir aos polígonos inscritos na própria figura em construção. Além disso, os polígonos não aumentam de lado; na verdade, nós construímos polígonos diferentes, cada um com o número de lados diferente, para depois compararmos as medidas de suas áreas. Mais uma vez, a explicação não tem clareza para ser compreendida pelo leitor.

Após essa apresentação, é mostrada a fórmula para calcular a área do círculo, sem nenhuma explicação (ver Figura 11.9). Curiosamente, só após essa fórmula ser exibida, foi apresentado o perímetro do círculo, conforme vemos na Figura 11.10. A abordagem de apresentar uma fórmula para ser usada sem que o aluno sequer tenha noção da sua origem desencoraja o raciocínio do aluno do ensino médio. Ele apenas reproduzirá cálculos, sem compreender por quê.

Ou seja, com o aumento do número de lados dos polígonos estes vão se aproximando da forma circular.

Saiba mais sobre os Polígonos e a Geometria Plana.

Fórmula: Cálculo da Área do Círculo

Para calcular a área do círculo devemos utilizar a seguinte fórmula:

$A = \pi \,.\, r^2$

Onde,

π: constante Pi (3,14)
r: raio

Fique Atento!

Lembre-se que o **raio** (r) corresponde a distância entre o centro e a extremidade do círculo.

Figura 11.9: Fórmula para cálculo da área do círculo na página eletrônica 1

Perímetro do Círculo

O perímetro é um conceito da matemática que mede o comprimento (contorno) de determinada figura. Em outras palavras, o perímetro é a soma de todos os lados de uma figura geométrica.

No caso do círculo, o perímetro é chamado de **circunferência** e é calculado pelo dobro da medida do raio (2r). Assim, o perímetro da circunferência é medido pela fórmula:

$P = 2\,\pi \,.\, r$

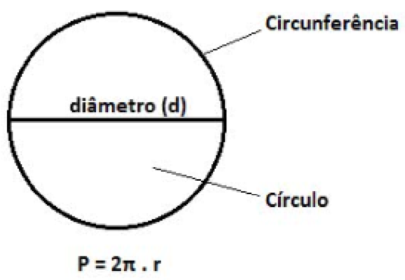


Figura 11.10: Perímetro do círculo, apresentado na página eletrônica 1

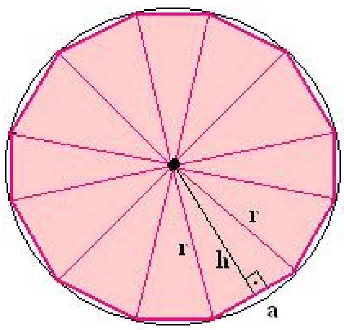
Destacamos ainda a falha na afirmação “No caso do círculo, o perímetro é chamado de **circunferência**” (grifo do autor da página eletrônica). A ideia transmitida é a de apenas mudarmos a nomenclatura de um objeto matemático, quando na realidade estamos trabalhando com uma figura com características bem diferentes dos segmentos de reta.

Quando o aluno de ensino médio unir as definições de perímetro e de circunferência, provavelmente questionará quais são os lados de uma circunferência e como calcular a soma das medidas desses "lados". Esses questionamentos ressaltam mais uma falha na apresentação do conteúdo, prejudicando sua compreensão por parte do aluno.

11.3.5 Cálculo da área do círculo na página eletrônica 2

Já a segunda página eletrônica começa de forma similar ao livro A, calculando a área do polígono inscrito como sendo o produto do semiperímetro pela medida do apótema, conforme vemos nas figuras 11.12.

Os seguimentos de reta que partem do centro da circunferência e que vão até o vértice do polígono regular são os raios do círculo. Assim, formando n triângulos no polígono regular, com base no cálculo da área de um hexágono regular, podemos dizer que a área de um polígono regular de n lados seria:



$$A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Sendo **n . a** o valor do perímetro do polígono regular

Figura 11.11: Introdução para o cálculo da área do círculo na página eletrônica 2

Porém, percebemos claros equívocos na apresentação do conteúdo. Inicialmente, passa-se a impressão de que os únicos raios existentes são os que foram destacados na figura, que ligam o centro a cada vértice do polígono inscrito à circunferência. Além disso, a expressão "que partem do centro da circunferência e que vão até o vértice do polígono regular" indica desnecessariamente que o segmento seja orientado.

Continuando sua apresentação, o livro tenta mostrar como realizar as aproximações das áreas:

$$A = (\text{perímetro do polígono regular}) \cdot \frac{h}{2}$$

Agora imagine se aumentarmos o número de lados do polígono regular, a tendência é do seu perímetro ficar cada vez mais parecido com o comprimento da circunferência, e a altura de cada triângulo formado no polígono regular ficar igual ao raio do círculo. Assim, podemos concluir que a fórmula do cálculo da área de um círculo poderá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de n lados, veja a relação abaixo:

$$A = (\text{comprimento da circunferência}) \cdot \frac{\text{raio}}{2}$$

$$A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$$

$$\mathbf{A = \pi\, r^2}$$

Figura 11.12: Apresentação da área do círculo na página eletrônica 2

O livro fala sobre aumentar o número de lados do polígono, o que não tem sentido matemático. O que de fato fazemos é construir uma sequência de polígonos inscritos na circunferência, de forma que cada termo tenha um número maior de lados.

Voltando-se à apresentação da área do círculo em si, a falta da noção de convergência gerará dúvidas: o que significa dizer que a "tendência" é o perímetro ficar cada vez mais "parecido" com o comprimento? Essa é uma "tendência" por ser algo que tem muita chance de acontecer, mas não é certa? Ser "parecido" se refere à forma da figura, à sua medida ou ambos? Como a altura de cada triângulo poderá "ficar igual" ao raio do círculo?

Da mesma forma, a página fala sobre a "tendência" da "altura de cada triângulo formado no polígono regular ficar igual ao raio do círculo", o que parece dizer que um segmento "se transformará" em outro. Claramente, a impressão passada está totalmente equivocada. O que teremos é uma sequência de medidas com valores diferentes, os quais se aproximam cada vez mais de um número específico.

Por fim, a página 2 afirma que, pelo fato de que os lados do polígono se aproximam da circunferência e o apótema se aproxima do raio, podemos concluir que "a fórmula do cálculo da área de um círculo poderá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de *n* lados", transmitindo a ideia de que estamos trabalhando com uma sequência não numérica convergente, o que é um absurdo (vide Subseção 11.3.2).

De forma geral, a natureza do conteúdo já exige uma correlação entre a representação geométrica e a numérica. Por outro lado, é necessário ter o conhecimento da base teórica para tentar solucionar as dúvidas que o aluno possa ter ao ter os primeiros contatos com o conteúdo.

Capítulo 12

Conclusões

Após as pesquisas bibliográficas e as análises dos livros didáticos e páginas eletrônicas, nós concluímos que o conhecimento dos conteúdos de Análise Real é fundamental para a formação do professor de matemática do ensino médio, pois são esses conteúdos que justificam muitas afirmações feitas nesse nível de ensino. Apesar de considerarmos que os alunos de ensino médio não devem estudar todos os conteúdos de Análise Real, entendemos que em alguns casos, como na definição de sequências e nas estimativas dos demais conteúdos abordados, é possível apresentar as definições e as principais proposições de modo mais intuitivo, com o fim de convencer o aluno.

Concluímos também que é possível apresentar o conteúdo de forma mais eficaz quando direcionamos nossa atenção ao desenvolvimento das competências apresentadas na BNCC, tanto as gerais, voltadas a todas as disciplinas em todo o ensino básico, quanto as específicas para o ensino de matemática no nível médio. Da mesma forma, a utilização de diferentes registros aumenta a capacidade de compreensão e domínio do conteúdo por parte do aluno.

Referências Bibliográficas

ACCUWEATHER. 2018. Acesso em 22 mai 2018. Disponível em: ⟨https://www.accuweather.com/\-pt/\-es/\-madrid/\-308526/\-february-weather/\-308526?monyr=2/1/2018\&view=table⟩.

ANDRADE, C. A. G. de M.; MORAIS FILHO, D. C. de. A magia das séries absolutamente convergentes. In: *III Encontro de Educação, Ciência e Tecnologia*. Campina Grande, PB: UEPB, 2018.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BBC NEWS BRASIL. *Onda de frio nos EUA: As impressionantes imagens de Chicago congelada*. 2019. Acesso em 12 fev 2019. Disponível em: ⟨https://www.bbc.com/portuguese/geral-47069288⟩.

BRASIL. Ministério da EducaÇão. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF, 2018. Acesso: 03 fev 2019. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf⟩.

DIAS, L. D.; MORAIS FILHO, D. C. de; OLIVEIRA, F. L. de. *Como os números racionais e irracionais estão "espalhados" na reta real*. Cuité, PB, 2018. In: ENCONTRO DE FÍSICA E MATEMÁTICA DO CES / UFCG. Disponível em: ⟨https://anaisfismat.wixsite.com/anais/edicao-atual⟩.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

LIMA, E. L. et al. *Exame de textos*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

MORAIS FILHO, D. C. de; OLIVEIRA, M. M. de. *Conceitos de Análise na Reta para bem compreender os números reais no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT/UFCG, 2017.

MORAIS FILHO, D. C. de; ROCHA, L. S. Enrolando os primos dos primos dos nossos primos. *Revista do Professor de Matemática*, n. 98, 2019.

MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos do Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PARAÍBA. AGÊNCIA EXECUTIVA DE GESTÃO DAS ÁGUAS. 2018. Acesso em 12 fev 2019. Disponível em: ⟨http://www.aesa.pb.gov.br/aesa-website/⟩.

SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation*. Springer New York, 2002. Acesso em 11 abr. 2019. Disponível em: ⟨https://www.fq.math.ca/Papers1/42-1/quarthoradam04review.pdf⟩.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. Tradução Seji Hariki.

SMITH, D. E. *History of mathematics*. New York: Dover Publications, 1958. I.

TRINDADE, D. S. et al. Abordagem do conceito de sequências em duas coleções de livros didáticos do ensino médio. In: *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12*. São Paulo, SP: [s.n.], 2016. Acesso em 16 mai 2018. Disponível em: ⟨https://sites.unipampa.edu.br/pibid/files/2014/08/XIIENEM_004.pdf⟩.

VIEIRA, W. Uma análise do tratamento de sequências numéricas em livros didáticos segundo as ideias de fischbein. In: *ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18*. Recife, PE: [s.n.], 2014. Acesso em 16 mai 2018. Disponível em: ⟨http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD4/vieira4.pdf⟩.

Apêndice A

Inexistência de Função Polinomial que Represente apenas Números Primos

Neste apêndice, vamos dedicar nossa atenção a um fato indicado pelo livro A na Seção 3.1, Figura 3.12, mas não foi claramente expresso e justificado: no exemplo apresentado, a sequência de números primos foi representada por uma propriedade, mas não por uma função polinomial. Nosso objetivo é mostrar por que não seria possível representar essa sequência através de uma função polinomial. Para isso, demonstraremos o fato a seguir:

Teorema A.1 *Todo polinônio com coeficientes inteiros assume uma infinidade de valores compostos.*

Demonstração: A demonstração deste fato foi apresentada por Morais Filho e Rocha (2019, p. 28-32) e será reproduzida *ipsis litteris*.

Por simplicidade, consideremos o caso de um polinômio de grau 2. O caso geral é análogo. Suponhamos que exista um polinômio $p(n) = an^2 + bn + c; a, b, c \in \mathbb{Z}$, tal que $p(n)$ seja primo para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $p(1) = a+b+c = q$ seria primo e, além disso, para qualquer número $k \in \mathbb{N}$, teríamos:

$$
\begin{aligned}
p(1+kq) &= a(1+kq)^2 + b(1+kq) + c \\
&= a+b+c+2akq+(kq)^2+b(kq) \\
&= q+2akq+(kq)^2+b(kq) \\
&\Rightarrow q|p(1+kq), \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Assim, já que $p(1+kq)$ é primo, necessariamente ocorre a igualdade $p(1+kq) = q, \forall k \in \mathbb{N}$. Portanto, ao fazer k variar, o polinômio $p(n)$ admitiria uma infinidade de valores iguais, um absurdo. Logo, não há polinômios geradores de primos que sempre gerem primos. ■

Apêndice B

Propriedades Aritméticas dos Limites de Sequências

Conforme vimos no Capítulo 9, os livros didáticos apenas afirmam que as propriedades das potências para expoentes inteiros continuam válidas para expoentes irracionais (ver Figuras 8.1 e 8.3). As propriedades supramencionadas são as seguintes:

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, temos:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

e

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Para demonstrar que as propriedades continuam válidas para quaisquer $m, n \in \mathbb{R}$, é necessário provar a proposição a seguir:

Proposição B.1 *Dadas duas sequências (a_n) e (b_n) tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ e um número $c \in \mathbb{R}$, temos:*

(a) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(d) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *e* (b_n) *é limitada, então,* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

(e) Se $b_n \neq 0$*, para todo* $n \geq 1$*, então* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Demonstração:

(a) Se $c = 0$, temos $ca_n = 0 = ca$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a afirmação é verdadeira.

Se $c \neq 0$, tomemos $\varepsilon > 0$. Como o limite de (a_n) é a, pela definição de limite garantimos a existência de um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$.

Queremos mostrar que $|ca_n - ca| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Das considerações acima, concluímos que $|ca_n - ca| = |c||a_n - a| \leq |c|\dfrac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$ ■

(b) Considerando as hipóteses de que as sequências (a_n) e (b_n) convergem para a e b, respectivamente, podemos fixar um $\varepsilon > 0$ qualquer e garantir que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $n > max\{n_1, n_2\}$, pelos resultados acima e pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a+b)| &= |a_n - a + b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \end{aligned} \tag{B.1}$$

e

$$\begin{aligned} |a_n - b_n - (a-b)| &= |a_n - a - (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |-(b_n - b)| \\ &= |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Das desigualdades B.1 e B.2, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$. ■

(c) Queremos mostrar que, fixado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

Temos:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \end{aligned} \tag{B.3}$$

Pelo Lema 7.2, sabemos que existe $A > 0$ tal que $|a_n| \leq A$. Além disso, pela convergência de (a_n) e (b_n), fixado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| <$

$\dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ e $n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$.

Logo, aplicando estas desigualdades na desigualdade B.3, temos:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &\leq A\frac{\varepsilon}{2A} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

(d) Da definição de limite, dizer que (a_n) converge para 0 é o mesmo que dizer que, fixado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, temos $|a_n| < \varepsilon$.

Queremos mostrar que, fixado um $\delta > 0$, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_1$, tenhamos $|a_n b_n| < \delta$. Sabemos que (b_n) é limitada, logo existe um $M > 0$ tal que $M \geq |b_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se $n > n_0$, temos:

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \varepsilon M.$$

Como ε é qualquer e M está fixado, podemos considerar $\varepsilon = \dfrac{\delta}{M}$. Logo, podemos concluir que $a_n b_n$ converge para 0. ■

(e) A demonstração deste fato utilizará o resultado demonstrado no item (c). Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos $a_n = \dfrac{a_n}{b_n} b_n$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} b_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \lim_{n\to\infty} b_n \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

■

Apêndice C

O Problema da Quadratura da Parábola: uma Aplicação das Séries Numéricas

Como já mencionado anteriormente, a noção de limite de sequências será utilizada pela primeira vez quando os alunos forem apresentados à ideia de "soma" dos infinitos termos de uma PG. Nesta seção, pretendemos apresentar um problema que pode ser resolvido utilizando vários conteúdos que foram abordados em nosso trabalho: séries numéricas (Seção 10.1), limites de sequências (Capítulo 7) e cálculo de área através de aproximações (Seção 11.1).

O termo "quadratura" era utilizado em textos antigos e se refere ao "ato ou processo de calcular uma área" (SIMMONS, 1987). Neste problema, vamos calcular a área de um segmento da parábola seguindo a solução proposta por Simmons (1987), o qual por sua vez se baseou nas ideias de Arquimedes; a diferença é que, enquanto Arquimedes apresentou uma demonstração puramente geométrica, Simmons (1987) usou geometria analítica no cálculo das áreas.

Exemplo C.1 *Calcule a área da figura delimitada pelo gráfico da parábola e o segmento de reta.*

Observação C.1 *Denotaremos por A_{XYZ} a área do triângulo XYZ.*

Conforme indicado na Figura C.1, a partir do segmento AB que particiona a área da parábola a ser calculada, traçamos o triângulo ABC, sendo C um ponto da parábola cuja tangente em C seja paralela a AB. Em seguida, construímos os triângulos ACD e BCE, com D e E sendo pontos tais que as tangentes a eles são paralelas a AC e BC, respectivamente.

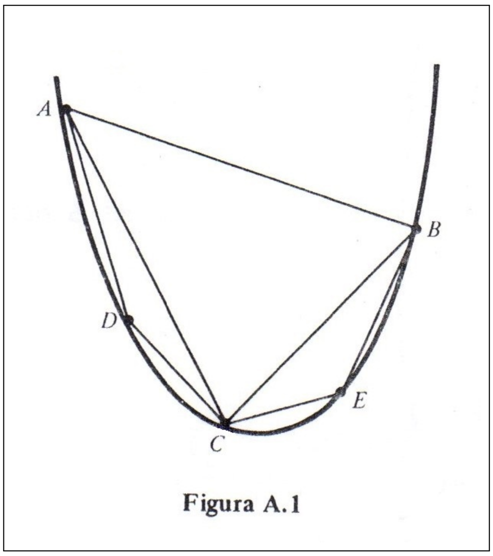


Figura C.1: Primeiro passo da quadratura da parábola
FONTE: Simmons (1987)

Suponhamos que a parábola seja o gráfico de $y = ax^2$ e que A, B e C têm coordenadas $A = (x_0, ax_0{}^2)$, $B = (x_2, ax_2{}^2)$ e $C = (x_1, ax_1{}^2)$. Nesse caso, o declive da tangente no ponto C será $2ax_1$ (esta é a derivada de $ax_1{}^2$; por fugir do escopo do nosso trabalho, a derivada será utilizada sem ser definida). Como a tangente em C é paralela a AB, então as inclinações da reta tangente em C e do segmento AB serão iguais, ou seja,

$$2ax_1 = \frac{ax_0{}^2 - ax_2{}^2}{x_0 - x_2} \text{ ou } x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_2).$$

Da última igualdade, concluímos que a reta vertical que passa por C toca o segmento AB em seu ponto médio P. Agora, provaremos que a área de BCP equivale a um quarto da área de BCE. Para isso, vamos completar o paralelogramo $CPBQ$. Com raciocínio análogo ao anterior, mostramos que a reta vertical que passa por E toca o segmento BC em seu ponto médio G e, por ser paralela aos lados do paralelogramo, toca também o segmento BP em seu ponto médio H, conforme indicado na Figura C.2.

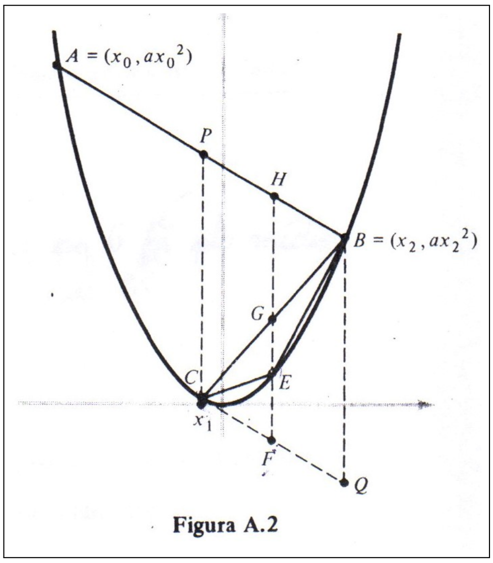


Figura C.2: Segundo passo da quadratura da parábola
FONTE: Simmons (1987)

Como GH é uma base média do triângulo BCP, concluímos que $A_{BCP} = 4A_{BGH}$.

Provemos agora que $FE = \frac{1}{4}FH = \frac{1}{4}QB$. Com os conhecimentos de geometria analítica, sabemos que:

$$\begin{aligned} FE &= a[\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2] - [ax_1{}^2 + 2ax_1 \cdot \frac{1}{2}(x_2-x_1)] \\ &= \frac{1}{4}a[(x_1+x_2)^2 - 4x_1{}^2 - 4x_1(x_2-x_1)] \\ &= \frac{1}{4}a(x^{1^2} - 2x_1x_2 + x_2{}^2) \\ &= \frac{1}{4}a(x_1-x_2)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} QB &= ax_2{}^2 - [ax_1{}^2 + 2ax_1(x_2-x_1)] \\ &= a(x_2{}^2 - 2ax_1x_2 + x_1{}^2) \\ &= a(x_1-x_2)^2 \end{aligned}$$

Logo, $FE = \frac{1}{4}QB = \frac{1}{4}FH$.

Agora, como BC é uma diagonal do paralelogramo e G é a interseção de BC com a base média FH do paralelogramo, concluímos que $GH = \frac{1}{2}FH$. Logo, $EG = FH - FE - GH =$

$\frac{1}{2}GH$, de onde concluímos que

$$A_{BEG} = \frac{1}{2}A_{BGH}.$$

Por outro lado, temos

$$A_{CGE} = \frac{1}{2}A_{BGH}.$$

Logo,

$$A_{BCE} = A_{BGE} + A_{CGE} = A_{BGH} = \frac{1}{4}A_{BCP}.$$

Analogamente, provamos que

$$A_{ACD} = \frac{1}{4}A_{ACP}.$$

Logo,

$$A_{ACD} + A_{BCE} = \frac{1}{4}A_{BCP} + \frac{1}{4}A_{ACP} = \frac{1}{4}A_{ABC}.$$

Procedendo de modo análogo, podemos construir triângulos sobre os lados AD, DC, CE e EB. Somando os triângulos sobre AD e DE, e depois somando os triângulos sobre CE e EB, a soma S das áreas dos quatro novos triângulos será:

$$S = \frac{1}{4}A_{ACD} + \frac{1}{4}A_{BCE} = \frac{1}{4^2}A_{ABC}.$$

Realizando sucessivas repetições desse procedimento, obteremos mais termos $\frac{1}{4^3}$, $\frac{1}{4^4}$, $\cdots$ Logo, a área do segmento parabólico será o resultado da série $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$, que corresponde ao limite das somas parciais dos termos da PG com termo inicial 1 e razão $q = \frac{1}{4}$.

Nesse caso, conforme o que já estudamos no Capítulo 10, a série converge para

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

.