UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Funções Afins e a Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três

José Ricardo Correia de Figueiredo

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

F475f Figueiredo, José Ricardo Correia de.
Funções afins e a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três / José Ricardo Correia de Figueiredo. – Campina Grande, 2017.
110 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Teoria das Funções. 2. Funções Afins. 3. Função Linear. 4. Proporcionalidade. 5. Regra de Três. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 517.5(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Funções Afins e a Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três

por

José Ricardo Correia de Figueiredo †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Funções Afins e a Relação entre Função Linear, Pproporcionalidade e Regra de três Três

por

José Ricardo Correia de Figueiredo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira - UFCG

Prof. Dr. Francisco Sibério B. Albuquerque - UEPB

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

agosto/2017

Dedicatória

À minha amada esposa, Alexsandra, e aos meus queridos filhos, Rafael, Gabriel e Rodrigo. O amor e a confiança de vocês, certamente, foi decisivo para mais essa conquista.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem Ele na minha vida nenhuma conquista seria possível.

Agradeço também a minha esposa, Alexandra, pois ela compreendeu o quanto esse curso significava para mim, entendendo a minha ausência, principalmente quando eu estava em casa, mas com os pensamentos no PROFMAT. O mestrado exigiu um sacrifício de todos os membros da família.

À UFCG e todos os professores que tivemos durante o curso, pois contribuíram de forma significava para o nosso crescimento profissional.

Ao professor Daniel Cordeiro, que tão sabiamente me orientou na dissertação.

A todos os colegas do curso, pois a interação com eles me enriqueceu como pessoa e como profissional. Sentirei saudades de todos.

À secretária do PROFMAT, Andreza, pela forma sempre solícita como nos atendeu esses anos. Que ela continue seu trabalho por muitos anos, sem esquecer de cuidar dos seus muitos animais. Um exemplo de ser humano.

Agradeço ainda à diretora da Escola Municipal José Inácio Cavalcante, Adriana Marinho, e ao Secretário de Educação do Brejo da Madre de Deus/PE, Tobias Barbosa, por terem flexibilizado o meu horário de trabalho na escola.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Iniciamos este trabalho com o intento de pesquisar o ensino de funções afins no Ensino Médio, os erros e acertos no ensino desse conteúdo e como relacioná-lo a outros conteúdos matemáticos. Antes de qualquer iniciativa buscamos revisitar alguns documentos oficiais que regem a educação básica, PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) e Orientações Curriculares Para o Ensino Médio, para que assim tivéssemos um norte a seguir. Dando continuidade a pesquisa analisamos três livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio. Nessa análise buscamos verificar se esses livros apresentavam as demonstrações, entre elas a que mostra que o gráfico de uma função afim é uma reta, e verificamos também a lista de exercícios propostos desses livros. No capítulo seguinte apresentamos uma sugestão de como tais demonstrações podem ser apresentadas e num capítulo a parte apresentamos a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. No capítulo subsequente procuramos encontrar nas provas do ENEM (Exane Nacional do Ensino Médio) questões em que é empregada a ideia de proporcionalidade nas suas respectivas soluções.

Palavras Chaves: 1. Função Linear 2. Proporcionalidade 3. Regra de Três.

Abstract

We started this work with an attempt to investigate the teaching of Functions Affected in High School, the errors and correctness in the teaching of this content and how to relate them to other mathematical contents. Before any initiative we seek to revise the official documents that govern basic education, PCNEM (National Curricular Parameters for Secundary Education) and Curricular Orientations for High School, so that we would have a north to follow. Continuing the research we analyzed three textbooks of the first year of High School. In this analysis we tried to verify if these books presented the demonstrations, among them the one that shows the graphic of an affine function is a straight line, and we also check out the list of proposed exercises in these books. In the following chapter we present a suggestion of how such statements can be presented and in a chapter the part we present the relation between linear function, proportionality and rule of three. In the next chapter we seek to find in the ENEM (National High School Exam) evidence questions in which the idea of proportionality is used in their respective solutions.

Key words: 1. Linear Function 2. Proportionality 3. Rule of Three

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Entendemos que a proporcionalidade e a regra de três, conteúdos vistos no sétimo ano do Ensino Fundamental, são dois conteúdos dos mais importantes vistos no Ensino Básico e também são muito usados no nosso dia a dia. Sendo assim, entendemos que o ensino desses conteúdos devem ser resgatados sempre que possível e uma forma de fazer isso é relacionar esses conteúdos a outros, como por exemplo, à função linear, conteúdo do nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio. Mas, função linear é vista como um caso particular de função afim. Portanto, focaremos nossa pesquisa no ensino de funções afins, verificando se é apresentada a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Decidimos então começar nossa pesquisa por alguns documentos oficiais, PCNEN e Orientações Curriculares Para o Ensino Médio, para relembrarmos as orientações contidas nesses documentos e assim tê-los como balizadores do nosso trabalho.

Nos documentos oficiais encontramos a recomendação de apresentarmos as demonstrações sempre que essas estiverem num nível adequado para a fase de ensino. Dessa forma procuramos pesquisar em três livros didáticos como se dá a apresentação da função afim, se são apresentadas as demonstrações e como estas são feitas.

Outra recomendação que encontramos nos documentos oficiais foi a de procurar estabelecer uma relação entre o conteúdo matemático que está sendo trabalhado com outros conteúdos já estudados. Sendo assim procuramos verificar nos livros didáticos se a função linear, caso especial da função afim, estava relacionada à proporcionalidade e regra de três, conteúdos trabalhados no sétimo ano do Ensino Fundamental. Por fim, buscamos analisar nos livros didáticos a lista de exercícios propostos, buscando verificar se as questões são verossímeis, ou não.

Depois da análise do livros didáticos passamos a apresentar uma sugestão de como os itens analisados nesses livros podem ser apresentados. Procuramos sempre apresentar demonstrações que estejam no nível adequado para um aluno do primeiro ano do Ensino Médio. Um exemplo disso foi a forma como demonstramos a caracterização de uma função afim.

A relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, foco da nossa pesquisa, é apresentada no Capítulo 5, onde mostraremos que esses três conteúdos representam a mesma noção matemática. A necessidade de se estabelecer esta relação é devido à grande importância da proporcionalidade. Essa importância se dá ao fato da proporcionalidade ser uma ideia natural e por ser a noção matemática mais difundida entre todos os povos. Contudo, ao estabelecermos esta relação estamos aproveitando a oportunidade para resgatar dois dos conteúdos mais importantes estudados no Ensino Fundamental.

A fim de comprovar essa importância, apresentamos no Capítulo 6 as questões do ENEM em que devem ser usadas a ideia de função linear, proporcionalidade ou regra de três. Além de apresentarmos as questões, que também servem como lista de exercícios para serem usados pelos professores em sala de aula, apresentamos também uma tabela, em que consta o percentual dessas questões, ano a ano. Nessa tabela podemos constatar o grande percentual dessas questões em tais exames.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

O principal objetivo dessa pesquisa é de contribuir para o processo de ensino/aprendizagem, especificamente, para o ensino de funções afins no primeiro ano do Ensino Médio, estabelecendo uma relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Outro objetivo é apresentar uma sugestão de como abordar os tópicos analisados nos livros textos, e ainda um banco de questões que possam ser usados nas nossas salas de aula, servindo como produção de material didático adicional a ser usado pelos colegas professores.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Analisar alguns documentos oficiais e verificar que recomendações eles fazem quanto ao ensino de funções afins;

- Analisar alguns livros didáticos, escolhidos aleatoriamente, e verificar se eles seguem as recomendações contidas nos documentos oficiais referentes ao ensino de função afim e da relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três;

- Sugerir uma forma de se apresentar os tópicos analisados nos livros didáticos;

- Buscar uma relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três;

- Pesquisar nas provas do ENEM questões que usam a ideia de função linear, proporcionalidade ou regra de três;

1.2 Organização

Quanto a estrutura, nosso trabalho está dividido em sete capítulos, da forma como se segue:

Capítulo 2: Estudo de alguns documentos oficiais que regem o Ensino Médio no Brasil, PCNEM e Orientações Curriculares Para o Ensino Médio, buscando identificar quais orientações eles dão para o ensino de função afim.

Capítulo 3: Análise de três livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio. Buscamos nesses livros verificar como é feita a apresentação da função afim e se eles apresentam as demonstrações, como por exemplo a de que o gráfico de uma função afim é uma reta, etc. Buscamos verificar ainda se tais livros apresentam a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três.

Capítulo 4: Nesse capítulo apresentamos, a título de sugestão, como apresentar em sala de aula os itens analisados nos livros didáticos.

Capítulo 5: Esse capítulo foi destinado à apresentação da relação que existe entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Iniciamos o capítulo definindo proporcionalidade e depois passamos a resolver problemas usando esses três conceitos matemáticos, que na verdade representam a mesma ideia.

Capítulo 6: Nesse capítulo apresentamos as questões do ENEM, de 2012 a 2016, nas quais é necessário o emprego da função linear, proporcionalidade e regra de três nas suas resoluções.

Capítulo 7: No último capítulo apresentamos algumas conclusões a que chegamos ao fim desta pesquisa.

Referências Bibliográficas

Capítulo 2

Documentos Oficiais

Quando começamos esta pesquisa planejávamos apenas analisar o processo de ensino/aprendizagem, incluindo aplicações e contextualizações, de funções afins. Mas, conforme nossa pesquisa foi avançando o foco passou a incluir, principalmente, a relação existente entre função linear, proporcionalidade e regra de três, fato que, geralmente, passa desapercebido no ensino desses assuntos. Buscamos verificar se os livros didáticos apresentam esta relação e como a fazem. Entretanto, imaginamos que analisar imediatamente os livros didáticos seria precipitado, pois para isso deveríamos conhecer as orientações contidas nos documentos oficiais que regem a educação básica no Brasil e pesquisar o que os documentos preconizam sobre o assunto. Sendo assim, iniciaremos por uma análise de documentos oficiais, para isso escolhemos os PCNEM [2] e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [3], principalmente no que tange ao ensino de funções.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM

Os PCNEM [2] são uma proposta para o Ensino Médio, a qual objetiva explicitar as habilidades básicas e as competências específicas que devem ser desenvolvidas pelos alunos nessa fase do ensino básico. Procuraremos identificar neste documento quais são as habilidades e as competências que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao estudarem matemática no Ensino Médio, especificamente ao estudarem funções afins.

Antes de avançarmos, vamos esclarecer o que são habilidades e competências. De acordo com Le Boterf e Perrenoud [17]: "*competência é a capacidade de o sujeito mobilizar recursos visando a abordar e resolver uma situação complexa*". Para o professor Vasco Pedro Moretto [17], os recursos são: "*conteúdos conceituais, habilidades, domínio de linguagens, valores culturais e administração do emocional*". Veja que habilidade é um dos recursos mobilizados para abordar e resolver uma situação complexa ou situação-problema.

Um bom exemplo é o fato de um aluno aprender a ler e escrever nos primeiros anos de estudo. Ler e escrever é uma habilidade que o aluno passou a ter. Porém, se o aluno ler e consegue interpretar corretamente aquilo que ler, então ele desenvolveu uma competência.

Agora que entendemos o que são competências e habilidades vamos verificar quais as competências que os alunos devem desenvolver ao estudarem matemática no Ensino Médio. Segundo os PCNEM [2] umas das competências que os alunos devem desenvolver ao estudar matemática no Ensino Médio é: "*ler e representar textos de Matemática*". Se o aluno não conseguir desenvolver essa competência ele não conseguirá avançar no estudo de funções afins, e ainda terá dificuldades em compreender outros conteúdos. Por outro lado, ao desenvolver essa competência o aluno compreenderá mais facilmente a função afim e consequentemente se habilitará a avançar nos estudos e passar para outros conteúdos, como por exemplo, funções quadráticas.

Outra competência que o aluno deverá desenvolver ao estudar matemática no Ensino Médio, segundo os PCNEM [2], é de: "*ler e interpretar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc)*". O conteúdo de função afim serve bem a esse propósito, pois ao estudá-lo o aluno será levado a construir tabelas e gráficos que representem expressões matemáticas que modelam problemas do quotidiano.

''*Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento*" é outra competência que, segundo os PCNEM [2], deve ser desenvolvida pelo aluno no Ensino Médio. Ora, problemas matemáticos modelados por uma função afim são inúmeros, logo o estudo desse conteúdo uma ótima oportunidade para o aluno desenvolver essa competência, aplicando-a no estudo da Física, por exemplo.

Observe agora este trecho extraído do PCNEM [2]:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.

Acreditamos que esse trecho representa bem a maneira como devemos encarar o ensino de matemática no Ensino Médio, em especial o ensino de funções afins e a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Devemos ter em mente que o aluno deve compreender e saber empregar aquilo que está sendo estudado. Devemos formar alunos capazes de associar os conteúdos matemáticos estudados em sala de aula com problemas que eles irão encontrar no seu cotidiano, sendo capazes inclusive de, a partir dos conhecimentos adquiridos, desenvolverem outros mais sofisticados e de maior abstração.

O estudo da relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três certamente é uma ótima oportunidade para desenvolver essas competências, haja vista a grande variedade de exemplos do emprego de um desses conteúdos no nosso dia a dia, que, quando bem contextualizados, proporcionam uma associação entre o que se estuda e as necessidades dos dias atuais. No Capítulo 6, apresentaremos bons exemplos de questões contextualizadas que podem ser empregadas nas salas de aula.

Veja ainda este outro trecho, também extraído dos PCNEM [2]:

> ... Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.

Ao ler esse trecho somos levados a admitir a importância de se trabalhar com os alunos questões contextualizadas ou questões de aplicação. Esse tipo de questão faz o aluno tentar entender a situação-problema e em seguida procurar converter essa situação para a linguagem matemática. Porém, é necessário que se diga que essas questões devem representar situações verdadeiras, evitando-se as questões em que são empregados argumentos inverossímeis, e não é raro encontrar essas questões em livros, provas, etc.

Não queremos dizer com isso que os exercícios de manipulação não são importantes. Entendemos que exercícios manipulativos são tão importantes quantos os exercícios de aplicação. Entendemos ainda que antes do aluno passar a resolver os exercícios de aplicação ele deve estar preparado para isso, e esse preparo, ele consegue ao resolver os exercícios de manipulação.

O conteúdo de função afim é visto inicialmente no nono ano do Ensino Fundamental e volta a ser visto no primeiro ano do Ensino Médio e, dessa vez, os livros didáticos apresentam mais exercícios de aplicação. Veja o que diz os PCNEM [2] a esse respeito:

> ... A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Como funções afins é um conteúdo que já foi visto no Ensino Fundamental, ao trabalharmos ele no Ensino Médio devemos nos aprofundar mais naquilo que já foi apresentado ao aluno. Segundo nossa opinião, devemos ainda apresentar aquilo que o aluno não viu no ano anterior, como, por exemplo, a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três.

O trecho a seguir, também extraído dos PCNEM [2], nos chamou atenção quanto a orientação do saber aprender.

> Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

Seguindo essa orientação, devemos entender o aluno como um ser capaz de produzir seu próprio conhecimento e não como um mero receptor desse conhecimento. Devemos estimular os alunos a questionarem e a buscarem respostas para seus questionamentos por si mesmos. O aluno também não pode ter o professor como fonte inesgotável de conhecimento, longe disso. Logo, o aluno tem também que assumir a responsabilidade pelo desenvolvimento de seu conhecimento. Agindo assim, professores e alunos, estarão contribuindo para uma sociedade mais consciente, onde cada cidadão passa a ser um crítico. Ao criticar, o cidadão estará obrigando as autoridades a se justificarem.

Entendemos que uma maneira de formamos esse cidadão crítico é fazendo pensarem, raciocinarem e questionarem. Eles têm de ser treinados para questionar o porquê de estudar certos assuntos, a relacionar os assuntos que estudam com outros e como esses assuntos se relacionam e como podem ser aplicados no dia a dia. Esse tipo de pensamento, primeiramente, apenas "matemático", pode se tornar parte e dar subsídios lógicos a sua maneira de pensar. É dessa forma que buscaremos estabelecer uma relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Ao estabelecermos essa relação, esperamos que os alunos busquem outras relações entre conteúdos.

2.2 Orientações Curriculares Para o Ensino Médio

Como a nossa pesquisa trata da função afim e relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, vamos verificar nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio se existem orientações quanto ao estudo de funções e mais especificamente se existe alguma orientação quanto a se buscar uma relação entre os conteúdos.

Vejamos o seguinte trecho extraído das Orientações Curriculares para o Ensino Médio [3]:

> As ideias de crescimento, modelo linear $(f(x) = a \cdot x)$ e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa $\left(f(x) = \frac{a}{x}\right)$. O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do quotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação. Situações em que se faz necessária a função afim $(f(x) = ax + b)$ também devem ser trabalhadas.

Nesse trecho as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [3] já nos recomenda estabelecermos uma relação entre função linear e proporcionalidade, o que buscaremos fazer no capítulo 5. Nesta dissertação buscaremos estabelecer uma relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Procuraremos mostrar ainda que problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais podem ser solucionados usando-se os conceitos de função linear, ou de proporcionalidade, ou ainda de regra de três, deixando claro que esses três conteúdos representam a mesma ideia matemática, mesmo que muitas vezes esse fato possa passar desapercebido para professores e alunos.

O trecho que citamos acima, ainda nos chama atenção quanto ao fato comum dos alunos confundirem crescimento com proporcionalidade, ou seja, eles acham que se duas grandezas estão relacionadas, de forma que, quando uma cresce a outra também cresce, então essas grandezas são diretamente proporcionais. Procuraremos mostrar nos capítulos seguintes que isso nem sempre é verdade e faremos isso exatamente por entendermos que função linear, proporcionalidade e regra de três estão estreitamente relacionados, de sorte que, esclarecimentos sobre um desses conteúdos ajudarão no bom entendimento dos outros.

Entendemos que o fato das Orientações Curriculares para o Ensino Médio se referir a uma estreita relação entre o modelo linear e proporcionalidade, deixa claro o quanto esta relação é importante. E já que essa relação é tão importante, acreditamos que ela poderia ser apresentada nos livros didáticos. No Capítulo 3 buscaremos analisar alguns desses livros para verificar se esses apresentam esta relação tão importante e como a fazem.

Já que analisaremos livros didáticos quanto apresentação da relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, aproveitaremos a oportunidade para analisar a forma como é apresentada a função afim nesses livros. É bom lembrar que função linear é um caso particular de função afim, logo, ampliaremos nosso espectro de pesquisa, sem esquecer que o principal objetivo é pesquisar a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três.

Ao analisarmos a forma como os livros didáticos apresentam as funções afins, buscaremos verificar como o conteúdo é introduzido, como são feitas as demonstrações, e ainda a lista de exercícios propostos.

Ao analisarmos a lista de exercícios dos livros didáticos nos preocuparemos com o contido no trecho extraído das Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> Vale uma ressalva sobre as ineficazes contextualizações artificiais, em que a situação evocada nada tem de essencialmente ligada ao conceito ou ao procedimento visado, como também não são educativas as contextualizações pretensamente baseadas na realidade, mas com aspectos totalmente fantasiosos.

Seguindo essa orientação, procuraremos identificar nas listas de exercícios propostos dos livros analisados as questões de aplicação e se essas questões representam realmente situações verossímeis, ou se tratam de contextualizações artificiais. Entendemos que os exercícios de aplicação representam uma oportunidade que o aluno tem de relacionar o conteúdo matemático com o seu cotidiano, logo devemos ter atenção com a qualidade desses exercícios. Acreditamos ainda que não se pode argumentar que as questões com "contextualizações artificiais" servem para desenvolver no aluno a habilidade em manusear equações. Essa habilidade o aluno deve desenvolver ao resolver as questões de manipulação. No nosso entendimento as questões de aplicação se destinam a desenvolver no aluno a competência em resolver problemas verossímeis.

Capítulo 3

Análise de Livros Didáticos

Neste capítulo faremos uma pesquisa para analisar como é apresentada a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, mas iniciaremos analisando a função afim, já que função linear é um caso particular dessa função. Para isso, escolhemos aleatoriamente três livros didáticos na biblioteca da Escola Estadual de Ensino Médio André Cordeiro, localizada na cidade de Brejo da Madre de Deus/PE, única escola de Ensino Médio da cidade onde residimos. Entre outros objetivos, verificaremos se esses livros apresentam demonstrações, e como as fazem. Por exemplo, se nesses livros aparece que o gráfico de uma função afim é uma reta, ou ainda que $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$, implicam que a função afim é crescente, decrescente, ou constante, respectivamente. Ao nos referirmos a esses livros os chamaremos de Livro 1, Livro 2 e Livro 3, pois nosso objetivo aqui não é de indicar o melhor livro para ser usado nas nossas salas de aula e nem fazer qualquer tipo de crítica aos livros. Na verdade o nosso objetivo é analisar a maneira como esse tipo de função é apresentada e se as demonstrações são factíveis ou não de serem apresentadas. Levando em consideração o resultado dessa pesquisa buscaremos nos Capítulos 4 e 5 sugerir como as Funções Afins podem ser apresentadas e principalmente como podemos apresentar as demonstrações que passaremos a tratar neste capítulo.

3.1 Apresentação da Função Afim nos Livros Didáticos

3.1.1 Como o Livro 1 apresenta função afim

O Livro 1 começa a apresentação da função afim com um exemplo de um casal que resolve fazer uma viagem ao Rio de Janeiro, separando o dinheiro que irão gastar nessa viagem. Os gastos com essa viagem são R$ 150,00 com combustível e pedágio e R$ 190,00 por dia em diárias completas, incluindo café da manhã, almoço e janta. Sendo esclarecido que existe nesse problema um gasto fixo, com combustível e pedágio, e um gasto variável, que depende da quantidade de dias que o casal ficará hospedado. Depois é apresentada a lei da função que modela essa situação problema, sendo ela *“$g(x) = 150 + 190 \cdot x$”*, sendo x a quantidade de dias e $g(x)$ o gasto que o casal terá com a viagem.

Em seguida é apresentada a seguinte definição para função afim:

"Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se ***função afim*** *quando existem números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$".*

Depois o livro apresenta as definições dos casos particulares de função afim e dá exemplos dessa funções. Veja figura 3.1.

■ Casos particulares de função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função constante** quando existe um número real b tal que $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -13$
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{7}$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função polinomial do 1º grau** quando existem números reais a e b, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -11x + \sqrt{2}$
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x$

Uma função polinomial do 1º grau que tem o coeficiente $b = 0$ recebe o nome de **função linear**. Por exemplo: $f(x) = 3x$ e $g(x) = -6x$.

A função polinomial do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**. Nesse caso, $a = 1$ e $b = 0$.

Figura 3.1: casos particulares da função afim - Livro 1

Comentários sobre a apresentação da função afim feita pelo Livro 1: Quanto ao exemplo usado para introduzir a função afim entendemos que é um bom exemplo para os fins a que se presta. O exemplo passa a ideia de que aumentos iguais da variável x implica aumentos iguais em $g(x)$. Mas, ao usar esse exemplo o professor deve deixar claro que pode existir outros gastos numa viagem, mas nesse caso está sendo considerado apenas esses. Quanto a definição apresentada no livro, entendemos que é ela bem ampla, pois considera a, b e x como números reais, podendo inclusive serem nulos. Por consequência, inclui o caso de função constante como sendo um caso particular da função afim. Lembremos que tanto a função constante, quanto a função afim têm como gráfico uma reta, sendo perfeitamente compreensível considerarmos a primeira como caso particular da segunda. Os exemplos que se seguem exploram bem a definição, já que percebemos alguns exemplos com o parâmetro $a = 0$ (taxa de crescimento nulo) e em outros exemplos temos $b = \sqrt{2}$, ou seja, b sendo um número irracional.

3.1.2 Como o Livro 2 apresenta função afim

O Livro 2 começa a apresentação da função afim com o seguinte exemplo:

"*Em uma panificadora, a temperatura interna de um forno elétrico desligado era 20ºC. A partir do momento em que o forno foi ligado, a temperatura passou a aumentar 40ºC por minuto, até atingir o valor máximo.*"

Depois é apresentado o texto e a tabela da figura 3.2.

A tabela ao lado mostra alguns valores que descrevem a temperatura y interna do forno, em grau Celsius, em função do tempo x, em minuto, a partir do instante em que o forno foi ligado ($x = 0$), quando sua temperatura interna era 20 °C.

Como a temperatura inicial do forno era 20 °C e, a cada minuto, houve acréscimo de 40 °C na temperatura, podemos verificar que a lei de associação entre x e y é $y = 20 + 40x$.

Tempo (min)	Temperatura (°C)
x	y
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180

Figura 3.2: tabela do problema introdutório - Livro 2

Em seguida é dada a seguinte definição de função afim:

"*Toda função do tipo $f(x) = ax + b$, com $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada* ***função afim*** *ou* ***função polinomial do 1º grau***".

Depois da definição são apresentados alguns exemplos de funções afins. Veja figura 3.3.

Exemplos

a) $y = 5x - 6$ é uma função afim, em que $a = 5$ e $b = -6$.

b) $y = 4x$ é uma função afim, em que $a = 4$ e $b = 0$.

c) $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{5}$ é uma função afim, em que $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{5}$.

d) Na escala de um termômetro, o comprimento da coluna de mercúrio varia de acordo com a temperatura, de modo que, para cada variação de 1 °C, o comprimento da coluna varia 0,2 cm.

Se a 0 °C o comprimento da coluna é 12 cm, podemos expressar o comprimento y da coluna, em centímetro, em função da temperatura x, em grau Celsius, pela função afim: $y = 12 + 0{,}2 \cdot x$.

Figura 3.3: exemplos de funções afins - Livro 2

Comentários sobre a apresentação da função afim feita pelo Livro 2: Entendemos que o exemplo usado para introduzir função afim também é bom, pois também passa a ideia que aumentos iguais em x implica em aumentos iguais em y. Porém, o professor deve deixar claro que o exemplo considera a variação de 40º por minuto até o forno atingir uma temperatura máxima, que não fica explicitada qual é. Sendo assim, não se pode imaginar que a temperatura aumentaria indefinidamente. Na definição de função afim não é informado quais são o domínio e o contradomínio da função, limitando-se a informar que $a, b \subset \mathbb{R}$, mas nada é dito sobre a variável x. Entendemos que seria mais didático deixar claro que se trata de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pois se existe uma função, deve haver um domínio e um contradomínio. Portanto, entendemos que seria mais apropriado informar também que $x \in \mathbb{R}$. Com a restrição $a \neq 0$, a função constante deixa de ser considerada um caso particular da função afim. Ora, nos documentos oficiais vimos que se deve buscar uma relação entre os conteúdos, mas aqui o Livro 2 faz exatamente o contrário disso, pois em vez de relacionar os conteúdos o livro trata função afim e função constante como sendo conteúdos diferentes. Quanto aos exemplos usados após a definição, entendemos que esses poderiam ser mais abrangentes, pois não apresentam casos em que a ou b são números irracionais.

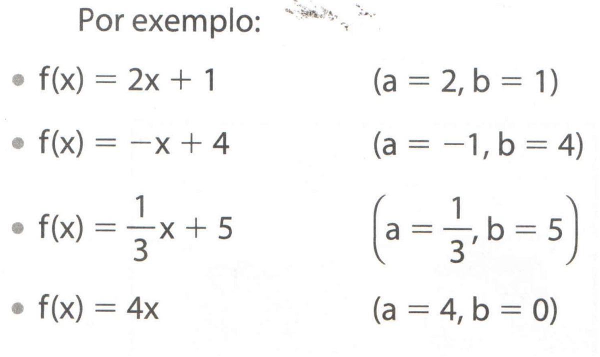
3.1.3 Como o Livro 3 apresenta função afim

No Livro 3 o conteúdo de função afim é introduzido por meio de um exemplo de um representante comercial que recebe um salário composto em duas partes, uma delas fixa, no valor de R$ 1.500,00, e uma parte variável, que corresponde a uma porcentagem de 6% calculada sobre o valor total das vendas realizadas por ele durante o mês. É apresentada a lei da função que modela esse problema e depois são apresentados mais dois exemplos de funções afins.

Em seguida é apresentada a seguinte definição para função afim:

*"Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem dois números reais **a** e **b** tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$".*

Dando continuidade, o livro apresenta quatro exemplos de funções afins, em seguida define os casos particulares desta função. Veja figuras 3.4 e 3.5.


Por exemplo:

- $f(x) = 2x + 1$ $(a = 2, b = 1)$
- $f(x) = -x + 4$ $(a = -1, b = 4)$
- $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$ $\left(a = \frac{1}{3}, b = 5\right)$
- $f(x) = 4x$ $(a = 4, b = 0)$

Figura 3.4: exemplos de funções afins - Livro 3

3. Casos particulares importantes da função afim $f(x) = ax + b$

1º) Função identidade

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $a = 1$ e $b = 0$.

2º) Função linear

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $b = 0$. Alguns exemplos:

- $f(x) = -2x$ $\quad (a = -2)$
- $f(x) = \frac{1}{5}x$ $\quad \left(a = \frac{1}{5}\right)$
- $f(x) = \sqrt{3}x$ $\quad (a = \sqrt{3})$
- $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ $(a = 0)$. Esta é a chamada *função identicamente nula*.

3º) Função constante

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $a = 0$. Alguns exemplos:

- $f(x) = 3$
- $f(x) = -2$
- $f(x) = \frac{3}{4}$
- $f(x) = \sqrt{2}$

4º) Translação (da função identidade)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Nesse caso, $a = 1$. Alguns exemplos:

- $f(x) = x + 2$
- $f(x) = x - 3$
- $f(x) = x + \frac{1}{2}$
- $f(x) = x - \frac{3}{5}$

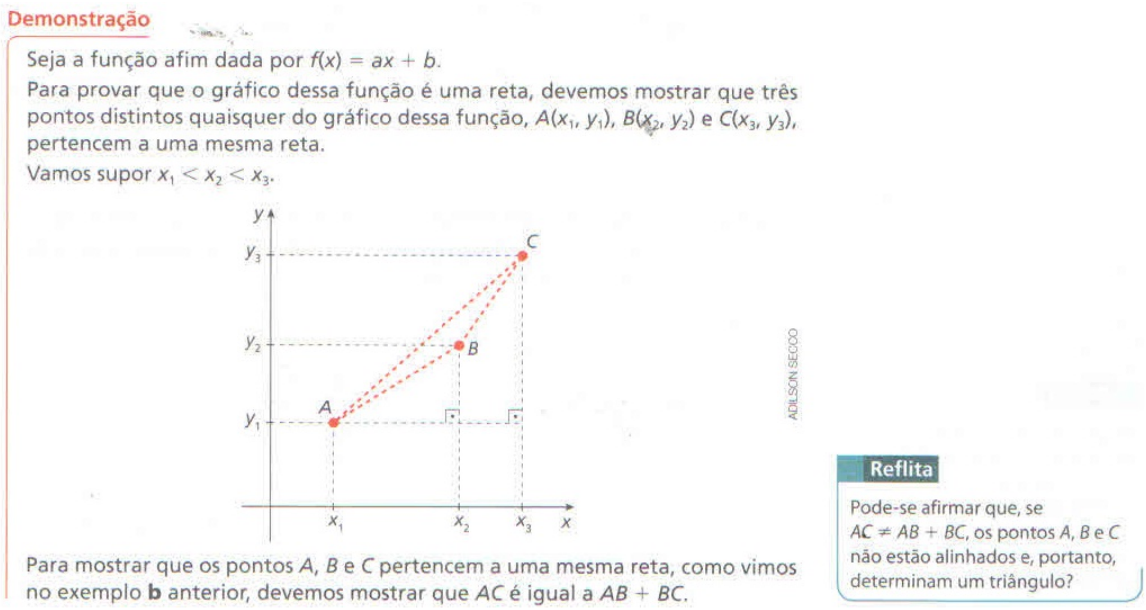
Figura 3.5: casos particulares da função afim - Livro 3

Comentários sobre a apresentação da função afim feita pelo Livro 3: Entendemos que o exemplo usado para introduzir a função afim também é útil, pois também passa a ideia de que incrementos iguais no total de vendas implica incrementos iguais no salário do representante comercial. Quanto a definição o Livro 3 também considera a, b e x como sendo números reais, podendo inclusive serem nulos. Sendo assim a função constante passa ser considerada como um dos casos particulares da função afim. Os exemplos apresentados após a definição, figura 3.4, não usam valores irracionais para a e b, porém na apresentação dos casos particulares, feita na página seguinte (figura 3.5) esse problema fica solucionado, pois apresenta casos em que a e b são números irracionais.

3.2 Análise de como os livros didáticos apresentam o gráfico da função afim

3.2.1 Como o Livro 1 apresenta o gráfico da função afim

Na seção destinada ao gráfico da função afim o Livro 1 começa demonstrando que a taxa de variação de uma função afim, $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, é constante para qualquer intervalo do domínio. Sobre o fato da taxa de variação ser constante o Livro 1 acrescenta que isso significa dizer que para incrementos iguais na variável x implicará em incrementos iguais na variável $f(x)$. Em seguida é relembrada a desigualdade triangular, sendo apresentado os casos em que três pontos são vértices de um triângulo e quando esses são colineares. Usando a desigualdade triangular e o Teorema de Pitágoras é feita a demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta. Veja figuras 3.6 e 3.7.


Demonstração

Seja a função afim dada por $f(x) = ax + b$.
Para provar que o gráfico dessa função é uma reta, devemos mostrar que três pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta.
Vamos supor $x_1 < x_2 < x_3$.

Para mostrar que os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, como vimos no exemplo **b** anterior, devemos mostrar que AC é igual a $AB + BC$.

Reflita

Pode-se afirmar que, se $AC \neq AB + BC$, os pontos A, B e C não estão alinhados e, portanto, determinam um triângulo?

Figura 3.6: demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta - parte 1 - Livro 1

Em seguida o livro passa para a seção 2.2, *"Construção do gráfico da função afim"*, na referida seção é afirmado que dois pontos distintos são suficientes para determinar o gráfico da função afim. Depois são apresentados alguns exercícios resolvidos e outros propostos.

Comentários sobre a apresentação do gráfico da função afim feita pelo Livro 1: O Livro 1 apresenta a demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta. Faz isso de maneira simples e elegante. Para essa demonstração é apresentada como se calcular a distância entre dois pontos num plano, o que é louvável, pois o aluno do primeiro ano do Ensino Médio ainda não conhece Geometria Analítica, mas pode ser apresentado a esse fato. O cálculo da distância entre dois pontos num plano é simples de ser feito, pois requer apenas que o aluno conheça o Teorema de Pitágoras. Em seguida o Livro 1 usa a ideia de distância entre pontos e demonstra que três pontos quaisquer do gráfico de uma função afim pertencem a uma mesma reta. A demonstração é simples e completa.

Como o ponto A pertence ao gráfico de f, temos: $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$

Para o ponto B, temos: $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$

O ponto C também pertence ao gráfico de f, então: $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2$$
$$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 (1 + a^2)$$
$$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)}$$

Como $AC > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$:

$$AC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Analogamente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter AB e BC:

- $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow AB = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$
- $(BC)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \Rightarrow BC = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

Assim:

$$AB + BC = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$
$$AB + BC = \left[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)\right]\sqrt{1 + a^2}$$
$$AB + BC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$AB + BC = AC$$

Como $AB + BC = AC$, então A, B e C estão em uma mesma reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Figura 3.7: demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta - parte 2 - Livro 1

3.2.2 Como o Livro 2 apresenta o gráfico da função afim

O Livro 2 não faz a demonstração de que o gráfico da função afim é uma reta, em vez disso mostra que no plano cartesiano os pontos que representam os valores apresentados na tabela da figura 3.8 estão disposto sobre uma mesma reta. E ao final é feita a seguinte afirmação:

“Esse resultado pode ser generalizado pelo seguinte teorema: O gráfico de toda função afim é uma reta.”

Veja figura 3.9. Nessa seção o autor estabelece uma relação entre o fato das variações de x e y serem diretamente proporcionais, com o fato do gráfico da função afim ser uma reta.

Comentários sobre a apresentação do gráfico da função afim feita pelo Livro 2: Na seção que trata do gráfico da função afim o Livro 2 usa o fato de que Δy e Δx são diretamente proporcionais, fato não demonstrado, para afirmar que o gráfico de uma função afim é uma reta. Entendemos que o aluno do primeiro ano do Ensino Médio não tem conhecimento suficiente sobre Geometria Analítica para compreender que a taxa de variação constante

Tempo (min)	Temperatura (°C)
x	**y**
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180

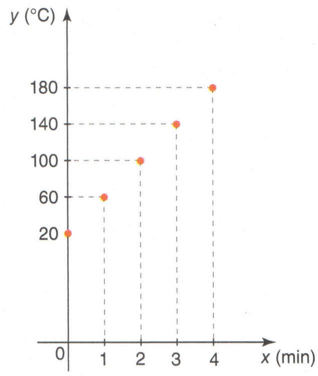
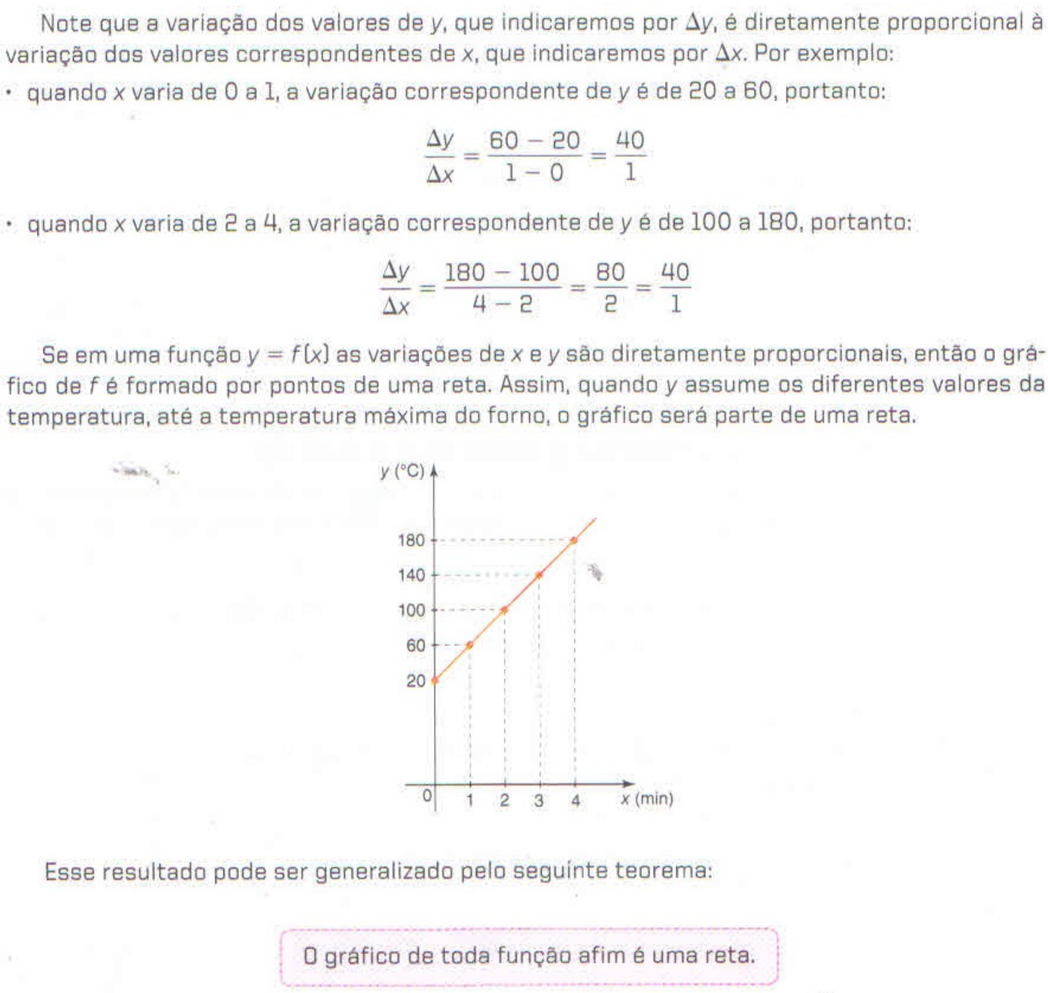


Figura 3.8: tabela $tempo \times temperatura$ - Livro 2

implica que o gráfico da função afim é uma reta. Nós sabemos que, dado três pontos distintos, A, B e C, dispostos sobre um mesmo plano, existe uma reta que passa pelos pontos A e B e uma reta que passa pelos pontos A e C. Se essas retas têm o mesmo coeficiente angular então se trata da mesma reta. Mas o aluno do primeiro ano do Ensino Médio não tem ainda esse conhecimento sobre Geometria Analítica, e isso teria que ser demonstrado. Entendemos que seria mais simples e mais didático o Livro usar o Teorema de Pitágoras e a desigualdade triangular para demonstrar que o gráfico de uma função afim é uma reta, como foi feito pelo Livro 1.



Note que a variação dos valores de y, que indicaremos por Δy, é diretamente proporcional à variação dos valores correspondentes de x, que indicaremos por Δx. Por exemplo:

- quando x varia de 0 a 1, a variação correspondente de y é de 20 a 60, portanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60 - 20}{1 - 0} = \frac{40}{1}$$

- quando x varia de 2 a 4, a variação correspondente de y é de 100 a 180, portanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{180 - 100}{4 - 2} = \frac{80}{2} = \frac{40}{1}$$

Se em uma função $y = f(x)$ as variações de x e y são diretamente proporcionais, então o gráfico de f é formado por pontos de uma reta. Assim, quando y assume os diferentes valores da temperatura, até a temperatura máxima do forno, o gráfico será parte de uma reta.

Esse resultado pode ser generalizado pelo seguinte teorema:

O gráfico de toda função afim é uma reta.

Figura 3.9: demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta - Livro 2

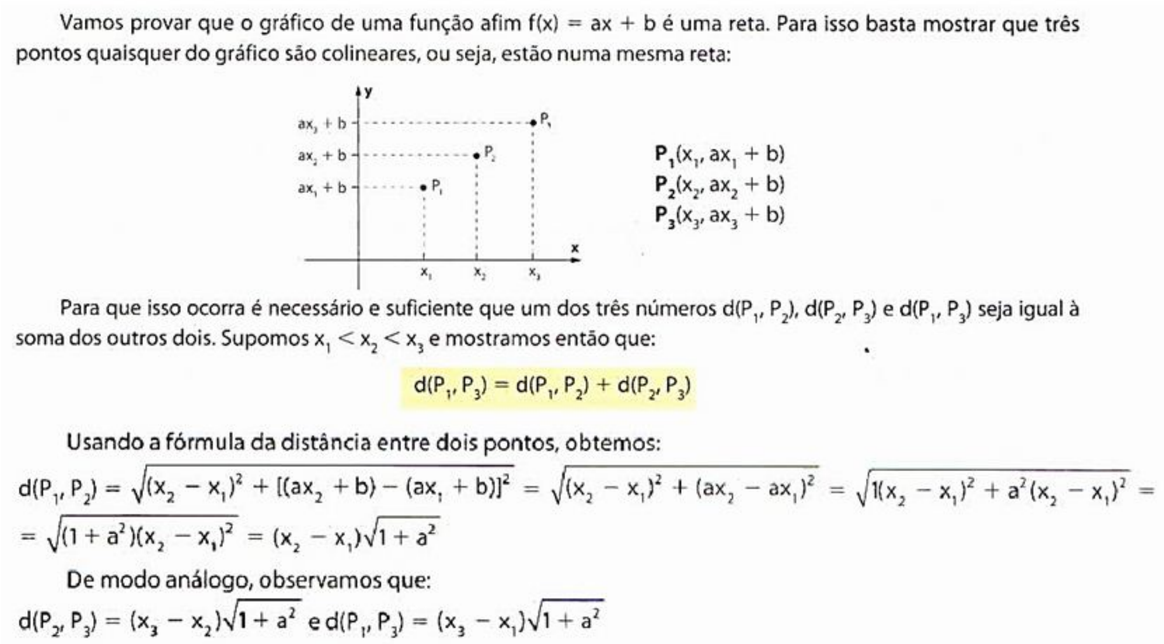
3.2.3 Como o Livro 3 apresenta o gráfico da função afim

No Livro 3 encontramos a demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta. Para apresentar essa demonstração o livro considera conhecida a fórmula da distância entre dois pontos e afirma que três pontos quaisquer do gráfico de uma função afim são colineares se, e somente se, a maior distância entre esses pontos for igual a soma das outras duas distâncias. Veja figura 3.10.

Sobre o gráfico de funções afins o Livro 3 apresenta ainda as seguintes observações:

1. *"O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo y".*

2. *"Como dois pontos determinam uma reta, basta considerarmos dois pontos do plano cartesiano para construir o gráfico (compare isso com o que foi dito na página 114 sobre a determinação de uma função afim conhecendo-se seus valores em dois pontos distintos)."*



Vamos provar que o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta. Para isso basta mostrar que três pontos quaisquer do gráfico são colineares, ou seja, estão numa mesma reta:

$P_1(x_1, ax_1 + b)$
$P_2(x_2, ax_2 + b)$
$P_3(x_3, ax_3 + b)$

Para que isso ocorra é necessário e suficiente que um dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Supomos $x_1 < x_2 < x_3$ e mostramos então que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} = \sqrt{1(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(1 + a^2)(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

De modo análogo, observamos que:

$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

Figura 3.10: demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta - Livro 3

Na figura 3.11 podemos ver parte da página 114 do Livro 3, onde é demonstrado que a taxa de variação da função afim é sempre constante, sendo

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

e

$$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

Como $f(x) = ax + b$ está definida para todo x real, conforme a definição do Livro 3, teremos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ bem definidos para quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1 \neq x_2$.

Dessa forma podemos representar no plano cartesiano os pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Considerando essas informações, o professor, e consequentemente o aluno, é levado a concluir que por esses dois pontos passa uma única reta e que ela é gráfico de uma função afim. Portanto, além de demonstrar que o gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical o Livro 3 dá elementos para o professor e o aluno concluírem que uma reta não-vertical é sempre gráfico de uma função afim.

5. Determinação de uma função afim conhecendo-se seus valores em dois pontos distintos

Uma função afim $f(x) = ax + b$ fica inteiramente determinada quando conhecemos dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para quaisquer $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais, com $x_1 \neq x_2$. Ou seja, com esses dados determinamos os valores de **a** e de **b**.

Por exemplo:

- se $f(2) = -2$, então para $x = 2$ tem-se $f(x) = -2$, ou seja, $-2 = 2a + b$;
- se $f(1) = 1$, então para $x = 1$ tem-se $f(x) = 1$, ou seja, $1 = a + b$.

Determinamos os valores de **a** e **b** resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2a} + b = -2 \\ -\cancel{2a} - 2b = -2 \end{cases}$$
$$-b = -4 \Rightarrow b = 4$$

Como $a + b = 1$, então:

$$a + 4 = 1 \Rightarrow a = -3$$

Logo, a função afim $f(x) = ax + b$ tal que $f(2) = -2$ e $f(1) = 1$ é dada por $f(x) = -3x + 4$.

Generalização

De modo geral, conhecendo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais quaisquer, com $x_1 \neq x_2$, podemos explicitar os valores **a** e **b** da função $f(x) = ax + b$, determinando-a completamente.

Assim:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = ax_1 + b \\ y_2 &= f(x_2) = ax_2 + b \end{aligned}\right\}$$

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$

Substituindo esse valor de **a** em $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$, obtemos o valor de **b**:

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 + b \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b(x_2 - x_1) \Rightarrow y_1x_2 - \cancel{y_1x_1} - y_2x_1 + \cancel{y_1x_1} = b(x_2 - x_1) \Rightarrow b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$

Para refletir

Colocamos $x_1 \neq x_2$ para que no denominador $(x_2 - x_1)$ não apareça o zero, pois não existe divisão por zero. Esse procedimento é muito comum. Sempre que colocamos $x_1 \neq x_2$ é porque aparecerá $x_2 - x_1$ no denominador.

Figura 3.11: Determinação de uma função afim conhecendo-se seus valores em dois pontos distintos - página 114 do Livro 3

Comentários sobre a apresentação do gráfico da função afim feita pelo Livro 3: O Livro 3 faz a demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta. Para isso considera já conhecida a fórmula da distância entre dois pontos num plano. Acreditamos que seria importante demonstrar como chegar a essa fórmula e só depois fazer a demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta. Essa demonstração se faz necessário pelo fato de um aluno do primeiro ano do Ensino Médio ainda não ter estudo Geometria Analítica, que é conteúdo do terceiro ano do Ensino Médio. Isso pode ser feito, pois essa fórmula é bem simples de ser demonstrada, sendo usado apenas o Teorema de Pitágoras para demonstrá-la. Usando a fórmula da distância entre dois pontos e a desigualdade triangular o Livro 3 demonstra que o gráfico de uma função afim é uma reta. Também nos fornece informações suficientes para concluirmos que uma reta não-vertical contida no plano cartesiano é sempre gráfico de uma função afim.

Diferente dos outros dois livros o Livro 3 teve a preocupação em apresentar a ideia que uma reta não-vertical é sempre gráfico de uma função afim. Fez isso no final da seção, onde apresentou duas observações e ao final pediu para se comparar essas observações com o que foi dito na página 114 (figura 3.11). Acreditamos que o Livro 3 fez bem em apresentar esse resultado, pois muitos exercícios apresentam retas e pedem para que o aluno responda qual é a lei da função.

Veja a figura 3.12. No nosso entendimento esse tipo de questão só teria sentido se tivéssemos a garantia de que uma reta não-vertical é sempre gráfico de uma função afim.

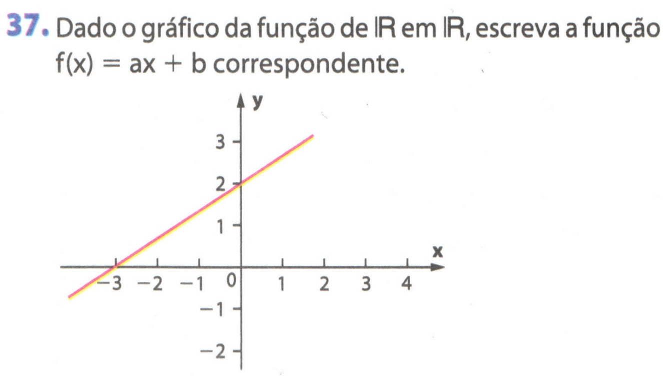
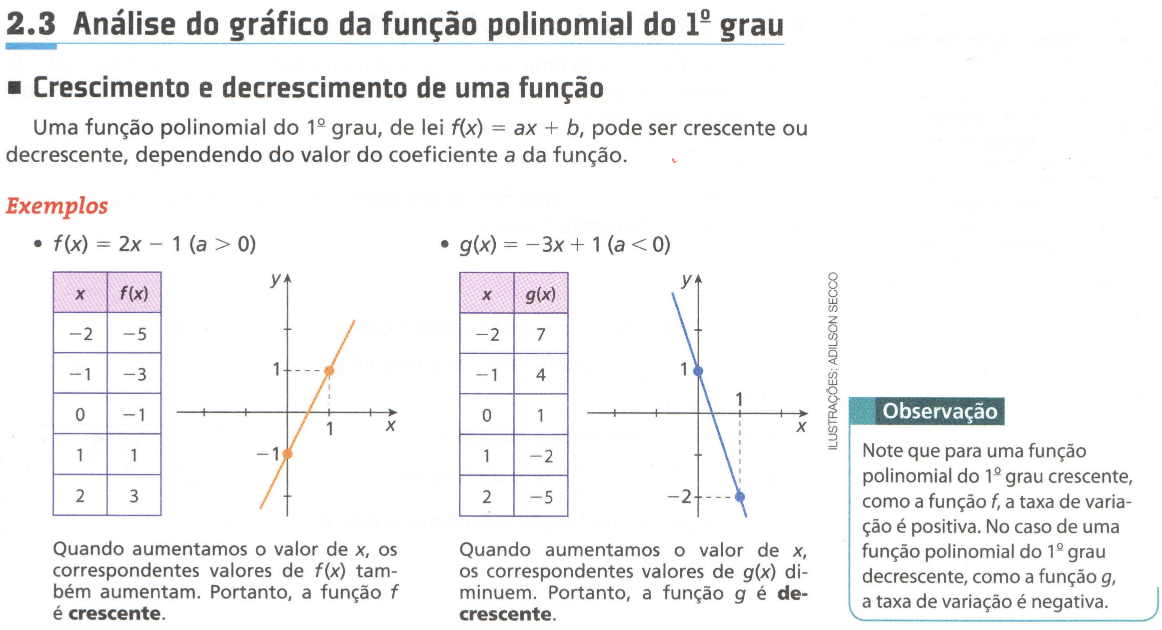


Figura 3.12: questão 37 - Livro 3

3.3 Análise de como os livros didáticos apresentam o crescimento e o decrescimento da função afim

3.3.1 Como o Livro 1 apresenta o crescimento e o decrescimento da função afim

No livro 1 encontramos demonstração de que a função afim é crescente ou decrescente se, e só se, $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente. Lembramos que o parâmetro a de uma função afim, $f(x) = ax + b$, é conhecido como taxa de variação, ou taxa de crescimento, Sendo essa parte do conteúdo apresentada, como mostram as figuras 3.13 e 3.14.



2.3 Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau

Crescimento e decrescimento de uma função

Uma função polinomial do 1º grau, de lei $f(x) = ax + b$, pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor do coeficiente a da função.

Exemplos

- $f(x) = 2x - 1$ $(a > 0)$

x	$f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $f(x)$ também aumentam. Portanto, a função f é **crescente**.

- $g(x) = -3x + 1$ $(a < 0)$

x	$g(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $g(x)$ diminuem. Portanto, a função g é **decrescente**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

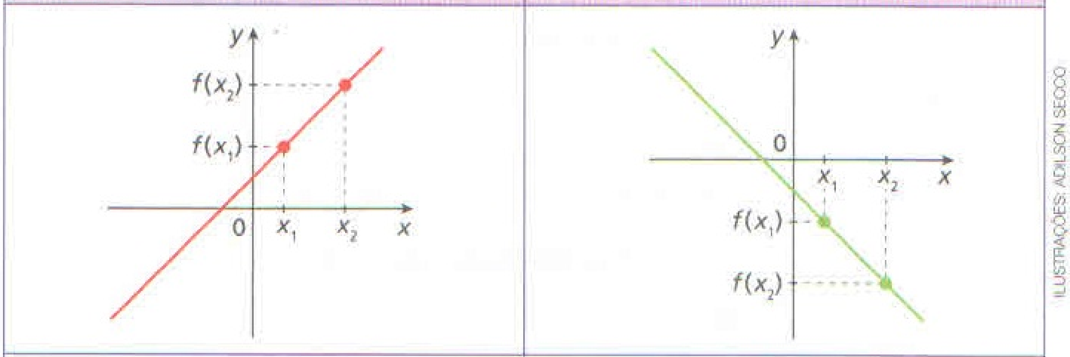
Note que para uma função polinomial do 1º grau crescente, como a função f, a taxa de variação é positiva. No caso de uma função polinomial do 1º grau decrescente, como a função g, a taxa de variação é negativa.

Figura 3.13: exemplos de funções afins, crescente e decrescente - Livro 1

Depois o Livro 1 apresenta alguns exemplos, um de função afim crescente e outro de função afim decrescente, conforme figura 3.15.

Comentários sobre como o Livro 1 apresenta o crescimento e o decrescimento da função afim: A demonstração de que a função afim é crescente, ou decrescente se $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente, é iniciada apresentando-se as funções afins $f(x) = 2x - 1$, com $a > 0$, e $g(x) = -3x + 1$, com $a < 0$. Abaixo da função $f(x)$ o autor chama atenção para o fato de que quando o valor de x cresce o valor de $f(x)$ também cresce, logo $f(x)$ é crescente. Abaixo da função $g(x)$ é feita uma observação análoga, dizendo-se que quando os valores de x crescem os valores de $f(x)$ decrescem, logo a $g(x)$ é decrescente. Ao lado desses gráficos é feita uma observação em que é destacado que numa função afim crescente a taxa de variação é positiva e numa função afim decrescente a taxa de variação é negativa.

Logo em seguida é feita uma generalização, conforme figura 3.14. A generalização é feita de forma simples e bem elegante, deixando claro que taxa de variação positiva implica numa função afim crescente e taxa de variação negativa implica numa função afim decrescente. Entendemos que a demonstração é bem feita, sendo adequada para ser apresentada numa turma do primeiro ano do Ensino Médio.



De modo geral, temos:

Função crescente ($a > 0$)	Função decrescente ($a < 0$)
$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$

Figura 3.14: demonstração que $a > 0$, $a < 0$, implica na função ser crescente, decrescente, respectivamente - Livro 1

Exemplos

- $f(x) = -\sqrt{2}x + 3$ é uma função decrescente, pois $-\sqrt{2} < 0$, ou seja, $a < 0$.
- $g(x) = 0{,}5x - 2$ é uma função crescente, pois $0{,}5 > 0$, ou seja, $a > 0$.

Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $b \in \mathbb{R}$ e $a = 0$, não é crescente nem decrescente. Nesse caso a função é constante. Por exemplo, $h(x) = \pi$ é uma função constante, pois $a = 0$.

Figura 3.15: exemplos de funções afim crescente e decrescente - Livro 1

3.3.2 Como o Livro 2 apresenta o crescimento e o decrescimento da função afim

O Livro 2 começa a seção que trata sobre crescimento e decrescimento da função afim fazendo a afirmação que podemos ver na figura 3.16.

A demonstração da afirmação apresentada na figura 3.16 é feita algebricamente, como podemos ver na figura 3.17.

Comentários sobre como o Livro 2 apresenta o crescimento e o decrescimento da função afim: A demonstração de que a função afim, $f(x) = ax + b$, é crescente se, e só se, $a > 0$ e que a função afim é decrescente se, e só se, $a < 0$, é feita de forma também simples e elegante. Mais importante, a demonstração é adequada para ser apresentada numa turma do primeiro ano do Ensino Médio, pois os argumentos matemáticos usados na demonstração já são conhecidos por esses alunos.

Crescimento e decrescimento

Dada a função afim $f(x) = ax + b$, com taxa de variação a, temos:

I. f é **crescente** se, e somente se, a é **positivo**.

II. f é **decrescente** se, e somente se, a é **negativo**.

Figura 3.16: início da seção sobre crescimento e decrescimento da função afim- Livro 2

Demonstração

Para essas demonstrações, aplicaremos os conceitos estudados no capítulo anterior sobre funções crescentes e funções decrescentes.

I. Considere os números reais x_1 e x_2 quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para $a > 0$, temos a equivalência:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 > ax_1$$

Adicionando b a ambos os membros da última desigualdade, temos a equivalência:

$$ax_2 > ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$$

Logo, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$, portanto f é uma função crescente para $a > 0$.

II. Considere os números reais x_1 e x_2 quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para $a < 0$, temos a equivalência:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 < ax_1$$

Adicionando b a ambos os membros da última desigualdade, temos a equivalência:

$$ax_2 < ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$$

Logo, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$, portanto f é uma função crescente para $a < 0$.

Figura 3.17: demonstração que $a > 0$, $a < 0$, implica na função ser crescente, decrescente, respectivamente - Livro 2

3.3.3 Como o Livro 3 apresenta o crescimento e o decrescimento da função afim

O Livro 3 traz uma seção que trata o fato da função afim ser crescente ou decrescente.

Veja na figura 3.18 que o autor chama atenção para o fato que o gráfico de uma função afim, $f(x) = ax + b$, é uma reta e que a é a taxa de variação ou taxa de crescimento da função. Lembra ainda que para o caso em que $a \neq 0$ só há duas possibilidades para essa reta, ou os valores de $f(x)$ crescem a partir do ponto $(0, b)$, ou decrescem.

Depois de apresentar os gráficos da figura 3.18, o Livro 3 conclui abaixo dos gráficos, dizendo:

"*Logo, f é crescente se a taxa de crescimento é positiva, e decrescente se a taxa de crescimento for negativa.*

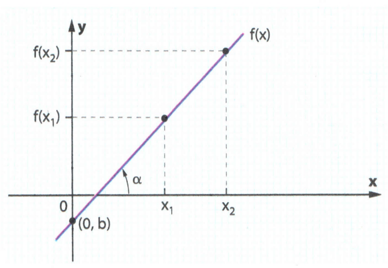
12. Função afim crescente e decrescente

Já vimos que uma função afim f(x) = ax + b tem como gráfico uma reta (que indicamos por y = ax + b) não vertical, ou seja, não paralela ao eixo **y**.

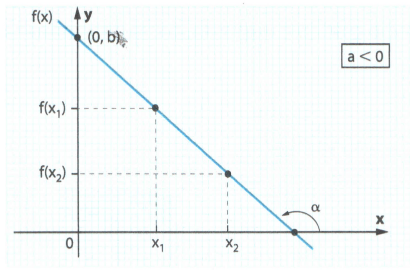
A ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo **y** é sempre **b**.

Já vimos que o número **a** chama-se *taxa de variação* ou *taxa de crescimento da função*. Quanto maior o valor absoluto de **a**, mais a reta se afasta da posição horizontal.

Para a ≠ 0 existem duas possibilidades:



Se a > 0, **f** é crescente.



Se a < 0, **f** é decrescente.

Logo, **f** é *crescente* se a taxa de crescimento é *positiva*, e *decrescente* se a taxa de crescimento é *negativa*.

Assim, o que determina se a função afim f(x) = ax + b, com a ≠ 0, é crescente ou decrescente é o sinal de **a**. Se **a** é positivo, ela é crescente; se **a** é negativo, ela é decrescente.

No caso de a = 0, o valor de f(x) permanece constante [f(x) = b] e o gráfico de **f** é a reta paralela ao eixo **x** que passa por (0, b), como já vimos.

Figura 3.18: demonstração que $a > 0$, $a < 0$, implica na função ser crescente, decrescente, respectivamente - Livro 3

Comentários sobre como o Livro 3 apresenta o crescimento e o decrescimento da função afim: Entendemos que, apesar do Livro 3 apresentar muitas informações na seção que trata sobre o crescimento/decrescimento da função afim, não ficou demonstrado que esta função é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

Acreditamos ainda que seria mais didático ter sido usado o mesmo valor para b no dois gráficos apresentados da figura 3.18. Quanto a taxa de variação poderia ser uma o oposto simétrico da outra, deixando claro que o valor absoluto de a e o valor de b em nada influencia no resultado da função ser crescente ou decrescente e sim o fato do valor de a ser positivo ou negativo.

3.4 Análise de como os livros didáticos apresentam a caracterização da função afim

Os Livros 1 e 2 não tratam sobre a caracterização da função afim, ou seja, que dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, crescente ou decrescente, se a diferença $f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h mas não de x, então f é uma função afim.

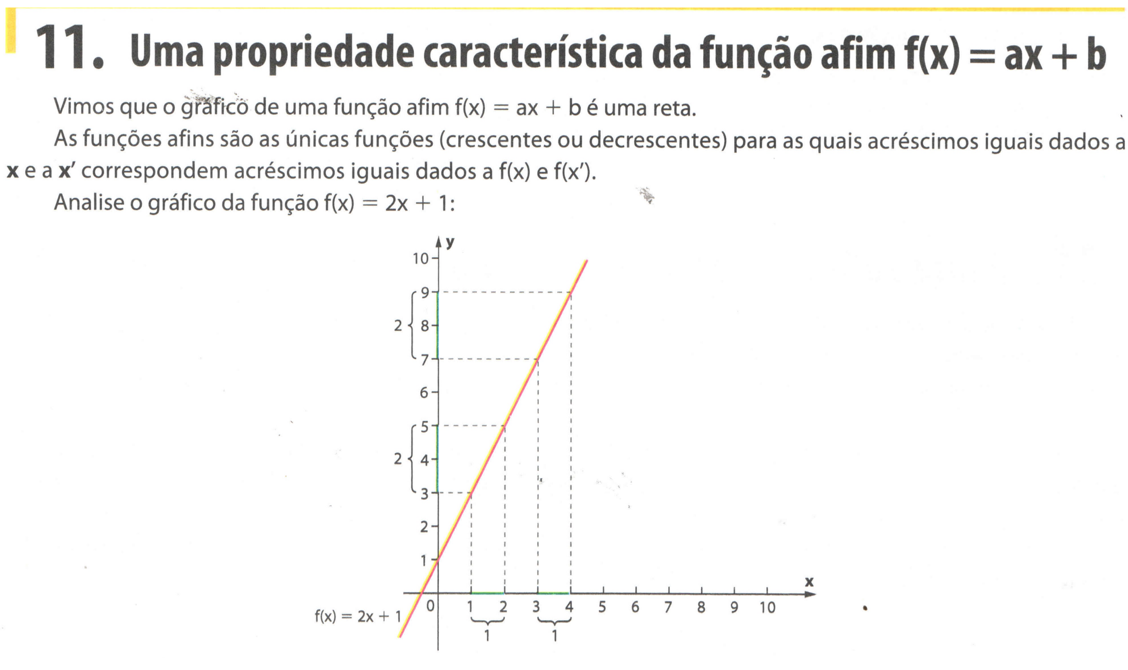
Entendemos que é importante abordar a caracterização da função afim no Ensino Médio, pois, se trata de algo que identifica esta função. Mais ainda, no nosso entendimento a caracterização poderia ser apresentada, mas não demonstrada. Nosso entendimento se baseia no fato dessa demonstração não está num nível adequado para uma turma do Ensino Médio. Veremos essa demonstração na seção 4.4.

O Livro 3 lembra que o gráfico de uma função afim é uma reta, depois faz a seguinte colocação:

"As funções afins são as únicas funções (crescentes ou decrescentes) para as quais acréscimos iguais dados a x e a x' correspondem a acréscimos iguais dados a $f(x)$ e $f(x')$."

A colocação acima significa dizer que o valor de x não interfere na diferença $f(x+h) - f(x)$.

Em seguida pede para que se analise o gráfico da função $f(x) = 2x+1$. Veja figura 3.19.



11. Uma propriedade característica da função afim f(x) = ax + b

Vimos que o gráfico de uma função afim f(x) = ax + b é uma reta.

As funções afins são as únicas funções (crescentes ou decrescentes) para as quais acréscimos iguais dados a **x** e a **x'** correspondem acréscimos iguais dados a f(x) e f(x').

Analise o gráfico da função f(x) = 2x + 1:

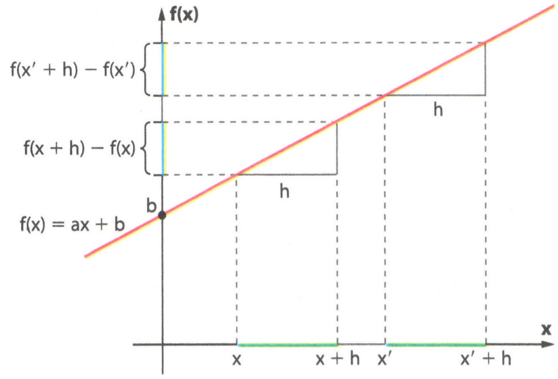
Figura 3.19: gráfico da função $f(x) = 2x+1$

Na página seguinte conclui informando que foi dado dois acréscimos iguais a 1 em x e foi obtido dois acréscimos iguais a 2 em y.

Dando continuidade, o Livro 3 generaliza esse fato, conforme figura 3.20.

Como podemos ver na figura 3.20, é apresentado um gráfico de uma função afim qualquer e em seguida é afirmado que $f(x+h) - f(x) = f(x'+h) - f(x')$. Todavia, esse fato não fica demonstrado, pois não foi usado o fato de que os triângulos retângulos da referida figura são congruentes. Entendemos que essa demonstração é simples e pode ser apresentada numa turma do primeiro ano do Ensino Médio, ajudando a desenvolver no aluno o pensamento dedutivo. Mas, vale ressaltar que, a recíproca dessa afirmação não é simples de ser demonstrada, conforme veremos na seção 4.5.

Demos dois acréscimos iguais a 1 em **x** e obtivemos dois acréscimos iguais a 2 em **y**.
De modo geral, em qualquer função afim $f(x) = ax + b$, temos:



Demos dois acréscimos iguais a **h** em **x** e obtivemos dois acréscimos iguais em f(x):

$$f(x + h) - f(x) = f(x' + h) - f(x')$$

Figura 3.20: caracterização da função afim apresentada no Livro 3

3.5 Como os livros didáticos apresentam a relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três

3.5.1 Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três - Livro 1

O Livro 1 nada apresenta sobre a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Entendemos que o autor perdeu a oportunidade de reforçar a aprendizagem de dois conteúdos muito importantes, proporcionalidade e regra de três, os quais foram vistos no sétimo ano do ensino fundamental. Na verdade, função linear, proporcionalidade e regra de três são vistos pelos alunos, e por alguns professores, como se fossem conteúdos completamente diferentes, não sendo estabelecidas as relações entre esses conteúdos. Cada um desses conteúdos é trabalhado isoladamente, não sendo apresentada a relação entre eles. No nosso entendimento função linear, proporcionalidade e regra de três são conteúdos matemáticos que servem para modelar as mesmas situações-problemas. Veremos nos capítulos seguintes que dependendo da situação-problema pode ser mais conveniente se usar o conceito de função linear, em outras situações pode ser mais conveniente se usar proporcionalidade ou regra de três. Nos Capítulos 5 e 6 veremos que proporcionalidade é um conteúdo matemáticos muito importante e bastante explorado nas provas do ENEM, o justificaria o resgate da proporcionalidade no momento de se estudar função linear.

3.5.2 Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três - Livro 2

O Livro 2 também não estabelece uma relação direta entre função linear, proporcionalidade e regra de três. Em vez disso mostra que na função afim existe uma proporcionalidade entre Δy e Δx. Veja figura 3.21 e 3.22.

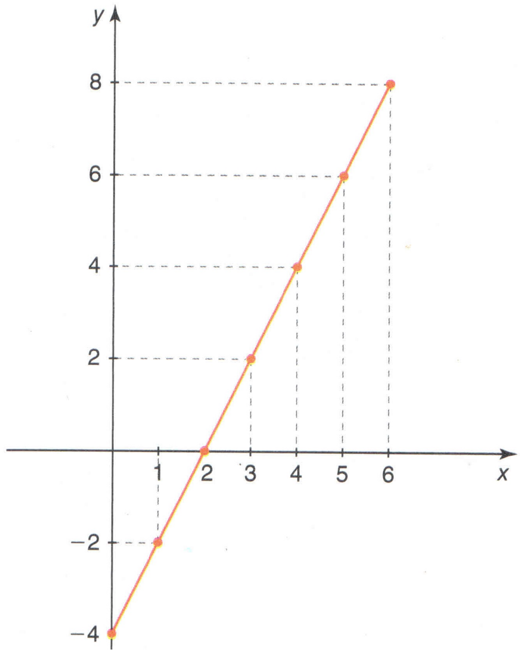


Figura 3.21: Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três - Livro 2

Observe que:

quando x varia de 1 a 3, a variação correspondente de y é de -2 a 2; assim, a razão entre a variação de y e a variação dos valores correspondentes de x é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-2)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

isso significa que a temperatura variou 4 graus Celsius em 2 horas, o que equivale à variação de 2 graus Celsius por hora;

quando x varia de 3 a 6, a variação correspondente de y é de 2 a 8; assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-2}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$$

isso significa que a temperatura variou 6 graus Celsius em 3 horas, o que equivale à variação de 2 graus Celsius por hora;

Figura 3.22: Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três - Livro 2

Na seção que trata de função linear o Livro 2 apresenta ainda as seguintes propriedades desta função:

"***P1*** *Em toda função linear $y = ax$ os valores correspondentes das variáveis x e y são diretamente proporcionais.*

P2 *O gráfico de uma função linear $y = ax$ é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas.*"

Mas, em nenhum momento estabelece uma relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, nem diz que um problema que se resolve usando o conceito de função linear, também pode ser resolvido usando proporcionalidade ou regra de três. Entendemos que a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três é importante e proporciona uma melhor compreensão do conteúdo de função linear.

3.5.3 Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três - Livro 3

O Livro 3 relaciona função linear com proporcionalidade e ainda define o que é uma proporcionalidade e uma regra de três. Veja figura 3.23 e 3.24.

18. Proporcionalidade e função linear

Um motorista mantém seu carro numa rodovia a uma velocidade constante de 90 km/h.

a) Em quanto tempo ele percorrerá 225 km?

b) Quantos quilômetros ele percorrerá em 3,5 horas?

Essa é uma situação que envolve os conceitos de proporcionalidade e de função linear.

Proporcionalidade

Analisando a tabela abaixo, que representa a situação anterior, observe que:

a) quanto maior o tempo, maior será a distância percorrida;

b) se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor do tempo (**t**), então o valor correspondente da distância (**d**) fica dobrado, triplicado, etc.

t (em horas)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	t
d (em km)	30	45	90	180	270	360	d = 90t

Quando isso ocorre entre duas grandezas, dizemos que elas são proporcionais (ou diretamente proporcionais). Logo, tempo e distância percorrida são grandezas proporcionais, quando se tem velocidade constante.

Linguagem matemática

Na linguagem matemática, essa noção de proporcionalidade pode ser assim expressa:

Duas *grandezas* são *diretamente proporcionais* se para cada valor **x** de uma delas corresponde um valor **y** bem definido na outra ($x \rightarrow y$), satisfazendo:

a) Quanto maior for **x**, maior será **y**, ou seja:
se $x \rightarrow y$ e $x' \rightarrow y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$.

b) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de **x**, então o valor correspondente de **y** será dobrado, triplicado, etc., ou seja:
se $x \rightarrow y$, então $nx \rightarrow ny$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

A correspondência $x \rightarrow y$ que satisfaz essas duas condições chama-se *proporcionalidade*.

Figura 3.23: Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três - Livro 3

Regra de três

Quando temos uma proporcionalidade f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, para quaisquer $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ com $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, obtemos $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = a$. A igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ chama-se *proporção*. Ao procedimento que permite, conhecendo três dos números $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, determinar o quarto número damos o nome de *regra de três*.

Usando uma regra de três podemos resolver as questões do item 18 (página 138).

a) Em quanto tempo o carro percorrerá 225 km?

$$\frac{90}{1} = \frac{225}{x} \Rightarrow x = \frac{1 \cdot 225}{90} = 2{,}5 \text{ horas}$$

O carro percorrerá 225 km em 2 horas e 30 minutos.

b) Quantos quilômetros ele percorrerá em 3,5 horas?

$$\frac{90}{1} = \frac{x}{3{,}5} \Rightarrow x = \frac{3{,}5 \cdot 90}{1} = 315 \text{ km}$$

Em 3,5 horas o carro percorrerá 315 km.

Observação: Grandezas inversamente proporcionais

Existem também grandezas chamadas de *inversamente proporcionais*, pois, quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa. Por exemplo, se uma grandeza dobrar, a inversamente proporcional a ela cai à metade. Dizer que **y** é inversamente proporcional a **x** equivale a dizer que **y** é proporcional a $\frac{1}{x}$. Exemplos:

- Altura e base de uma região retangular de área A = 5 são inversamente proporcionais (quanto maior a base, menor a altura).
- Tempo de percurso e velocidade de um móvel que percorre um trajeto de 100 km são inversamente proporcionais (quanto maior a velocidade, menor o tempo de percurso).
- A relação entre duas grandezas inversamente proporcionais não é descrita por uma função afim.

Figura 3.24: definição de Regra de Três - Livro 3

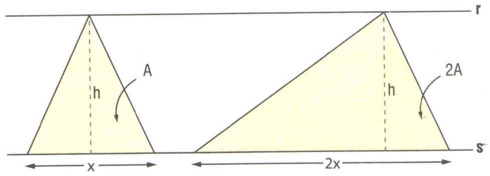
Comentários sobre como o Livro 3 apresentou a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três: Entendemos que o Livro 3 além de apresentar a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três, a fez de uma forma detalhada, preocupando-se em definir o que é uma proporcionalidade e o que é uma regra de três. Depois das definições de proporcionalidade e regra de três, o Livro 3 apresentou dois exemplos, veja figura 3.25, os quais são resolvidos usando-se o conceito de proporcionalidade apresentado na figura 3.23. Nesta oportunidade o Livro 3 poderia apresentar como resolver essas questões aplicando o conceito de função linear ou de regra de três, deixando claro como a função linear, a proporcionalidade e a regra de três estão estreitamente relacionados. Ou melhor, que se tratam de uma mesma noção matemática.

Observamos ainda que a proporcionalidade é apresentada no Livro 3 com uma linguagem matemática mais rigorosa que aquela que foi apresentada no sétimo ano do Ensino Fundamental. Na verdade a proporcionalidade, como entendemos e vamos tratar nesta dissertação, não é definida no sétimo ano do Ensino Fundamental, nessa fase do ensino é dito que se a razão entre dois números a e b é igual a razão entre os números c e d, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção e por consequência tem-se que $a \cdot d = b \cdot c$.

Exemplos:

1º) Consideremos **r** e **s** retas paralelas. Dado qualquer triângulo que tenha um vértice em uma dessas retas e o lado oposto contido na outra, vamos verificar se a correspondência **x** (medida desse lado) e **A** (área da região triangular) é uma proporcionalidade.

A correspondência $x \rightarrow A$ é uma proporcionalidade, ou seja, quando a altura relativa a um lado de uma região triangular é fixada, sua área (**A**) é proporcional a esse lado (**x**).



As duas condições da proporcionalidade estão satisfeitas: Quanto maior o valor de **x**, maior será o valor da área, e dobrando-se, triplicando-se, etc. **x**, duplica-se, triplica-se, etc. a área **A**.

2º) Ao ser aplicada uma quantia de dinheiro **x** em uma caderneta de poupança, após 1 mês é obtido um montante **y**. Vamos verificar se a correspondência $x \rightarrow y$ é uma proporcionalidade, isto é, se o montante no final do mês é proporcional à quantia aplicada.

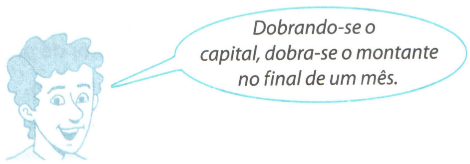
Podemos notar que as duas condições da proporcionalidade estão satisfeitas:

a) Quanto maior a quantia investida, maior será o montante.

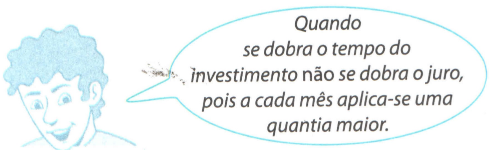
b) Ao ser dobrada, triplicada, etc. a quantia **x**, duplicado, triplicado, etc. será o montante.

Por exemplo, uma aplicação de R$ 1 000,00 que rende 0,7% ao mês dá um montante de R$ 1 007,00 no fim de um mês:

Capital inicial (C)	Juros (j)	Montante (M = C + j)
R$ 1 000,00	R$ 7,00	R$ 1 007,00
R$ 2 000,00	R$ 14,00	R$ 2 014,00



Observemos, porém, que no segundo mês calculamos 0,7% de R$ 1 007,00 (e não de R$ 1 000,00), sendo obtido um montante de R$ 1 014,05:



Tempo (em meses)	Capital	Juros	Montante
1	R$ 1 000,00	R$ 7,00	R$ 1 007,00
2	R$ 1 007,00	R$ 7,05	R$ 1 014,05

Conclusão: Num período fixo, o retorno é proporcional ao capital inicial investido mas *não* é proporcional ao tempo de investimento.

Figura 3.25: exemplos de proporcionalidade - Livro 3

3.6 Análise de alguns Exercícios Propostos no capítulo de Função Afim dos Livros Analisados

3.6.1 Análise de alguns exercícios propostos no Livro 1

Entendemos que no Livro 1 poderia ter havido uma maior atenção quanto à formulação de alguns deles. Veja figura 3.26. A questão mostrada nessa imagem trata de um marceneiro que vende alguns modelos de armário para cozinha pelo preço único de R$ 450,00 cada, gastando R$ 2.250,00 com matéria-prima, além de R$ 75,00 com mão de obra por cada armário produzido. Entendemos que essa questão não representa uma situação factível, por isso poderia não ser possível de ocorrer. Na questão o gasto mensal com matéria-prima é um valor fixo, o que nos parece muito estranho. Ora, se o marceneiro não produzir nada em um mês, certamente não utilizará a matéria-prima e poderá usá-la no mês seguinte, ou seja, no mês seguinte o gasto com matéria-prima será zero, visto que o marceneiro aproveitará a matéria-prima do mês cuja produção foi nula. Na verdade o marceneiro compra a matéria-prima de acordo com a demanda do mês, ou seja, a matéria-prima, consequentemente o valor gasto com ela, é uma grandeza que está relacionada com a quantidade de armários que ele planeja construir. Portanto, essa questão não representa uma situação verdadeira.

22. Um marceneiro vende alguns modelos de armário para cozinha ao preço de R$ 450,00 a unidade. Ele gasta com matéria-prima um valor fixo mensal de R$ 2.250,00, além de R$ 75,00 de mão de obra por armário produzido.

a) Se forem vendidos 3 armários em um mês, o marceneiro terá lucro ou prejuízo? De quanto? prejuízo de R$ 1.125,00

b) Escreva no caderno a lei de formação das funções: v, que relaciona o valor das vendas com o número x de armários vendidos; g, que relaciona o gasto na produção com o número x de armários produzidos; l, que relaciona o lucro obtido com o número x de armários vendidos.

c) Para não ter lucro nem prejuízo, quantos armários o marceneiro precisará vender em um mês? 6 armários

d) Quantos armários ele deve vender para ter lucro mensal de R$ 1.500,00? 10 armários

e) Qual será o lucro desse marceneiro com a venda de 15 desses armários? R$ 3.375,00

f) As funções v, g e l são afins? Justifique sua resposta. Não, porque o domínio dessas funções não é $\mathbb{R}$

22. b) $v(x) = 450x$; $g(x) = 2.250 + 75x$; $l(x) = 375x - 2.250$

Figura 3.26: Questão 22 - Livro 1

Veja agora a questão da figura 3.27:

Entendemos que essa questão também apresenta falhas na sua formulação, pois no início é dito que os preços das frutas variam de acordo com a época de produção. Em seguida é informado que certa fruta custa R$ 1,75, independente da época ou variação de preço. Ora, pede-se para desconsiderar um fato real, a variação de preço, para moldar a situação-problema, de forma que essa possa ser modelada por uma função afim.

4. (Enem) As frutas que antes se compravam por dúzia, hoje em dia, podem ser compradas por quilograma, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:

alternativa e

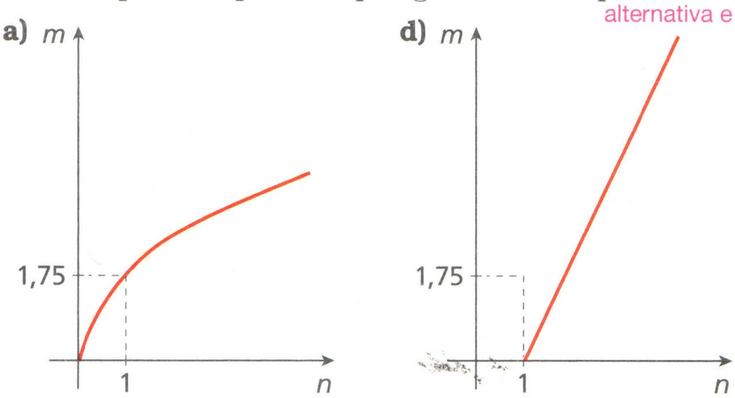


Figura 3.27: Questão 4 - Livro 1

3.6.2 Análise de alguns exercícios propostos no Livro 2

Na lista de exercícios propostos do Livro 2 encontramos algumas questões que entendemos existir também falhas na sua elaboração. O primeiro problema trata de um condicionador de ar que ao ser ligado faz a temperatura variar linearmente. É informado que no momento em que o aparelho foi ligado a temperatura estava em 30ºC e cinco minutos depois passou a ser 26ºC e mais cinco minutos depois marcava 22ºC . A questão como se apresenta dá a ideia de que enquanto o aparelho estiver ligado a temperatura pode diminuir indefinidamente, o que não é verdade. Se assim fosse estaria resolvido o problema do aquecimento global. Entendemos que poderia haver a informação dizendo que a variação de temperatura ocorreria de forma linear até atingir uma determinada temperatura. Veja figura 3.28.

7 Quando a temperatura interna de uma sala atinge 30 °C, um aparelho de ar condicionado é ligado automaticamente, fazendo a temperatura variar linearmente com a variação do tempo.
Sabe-se que, no intervalo de 5 a 10 minutos, depois de o aparelho ser ligado, a temperatura variou, respectivamente, de 26 °C a 22 °C.
Elaborar uma equação que expresse a temperatura y, em grau Celsius, da sala em função do tempo x, em minuto, enquanto o aparelho estiver ligado.

Figura 3.28: exercício proposto - Questão 7 - Livro 2

Analisemos agora a questão mostrada na figura 3.29.

22 Quando um reservatório continha 400 litros de água, foi aberto um registro para esvaziá-lo à razão de 4 litros por segundo.

a) Obtenha uma equação que expresse a quantidade de água do reservatório, a partir do instante em que foi aberto o registro.

b) Qual é a taxa de variação da função afim obtida no item **a**? O que essa taxa de variação significa?

Figura 3.29: Questão 22 - Livro 2

Ora, essa questão também não representa uma situação verdadeira. Na figura 3.30 extraída do livro Equações Diferenciais [6], mostra que conforme a altura da coluna d'água diminui no reservatório, a vazão também diminui, sendo assim, a vazão não é constante. Logo esse problema, da forma como se apresenta, não pode ser modelado por uma função afim. Entendemos que esse problema poderia representar uma situação verdadeira se tivesse sido informado que o escoamento se daria com auxílio de algum de tipo de motor, ou algum tipo de válvula que conseguisse manter a vazão sempre constante.

Os argumentos usados na figura 3.30 podem ser compreendidos facilmente se lembrarmos alguns conceitos da Física. Por exemplo, devemos lembrar que a água só escoa porque existe uma força agindo sobre ela, a força da gravidade, a qual diminui conforme a água vai escoando e consequente a vazão d'água também diminui.

EXEMPLO 8

Um tanque cheio de água é drenado através de um orifício sobre a influência da gravidade. Gostaríamos de calcular a altura h da água no tanque em qualquer instante de tempo t.

Considere o tanque mostrado na Figura 1.11. Se a área do orifício é A_0 (em m^2) e a velocidade da água saindo do tanque é $v = \sqrt{2gh}$ (em m/s), então o volume de água que sai do tanque por segundo é $A_0\sqrt{2gh}$ (em m^3/s). Logo, se $V(t)$ denota o volume de água no tanque no instante t, temos

$$\frac{dV}{dt} = -A_0\sqrt{2gh}, \tag{15}$$

em que o sinal de subtração indica que V decresce com o tempo. Note que estamos ignorando qualquer possibilidade de atrito no orifício, o que reduziria a taxa de vazão da água.

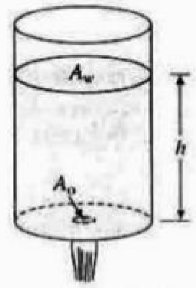


Figura 3.30: problema encontrado em [6]

Ainda no Livro 2 encontramos a questão mostrada na figura 3.31.

34 (Covest-PE) Uma dose de certa droga é injetada em um paciente e, às 8 h, a concentração sanguínea da droga é 1,0 mg/mL. Passadas 4 horas, a concentração é 0,2 mg/mL. Admitindo que a concentração seja uma função afim do tempo, em quantos minutos, contados a partir das 12 h, a concentração da droga será zero?

Figura 3.31: exercício proposto - questão 34 - Livro 2

Ora, no livro A Matemática do Ensino Médio [4] é mostrado que esse tipo de questão é modelado por uma função do tipo exponencial. Outra coisa, a expressão "*admitindo-se que a concentração é uma função afim do tempo*" nos leva a crer que estamos no mundo das suposições, ou seja, quem elaborou essa questão nos parece saber que esse problema não pode ser modelado por uma função afim, mas mesmo assim, resolveu usá-la.

Veja figura 3.32 e entenda por que a questão da figura 3.31 é modelada por uma função do tipo exponencial, $f(b,t) = ba^t$, onde b é quantidade ingerida da droga e t é o tempo decorrido. Como a situação-problema em análise é modelada por uma função do tipo exponencial, conforme figura 3.32. Do contrário poderíamos estar ensinando o aluno a aplicar o modelo de função linear sempre que quiser resolver uma situação-problema, sem se preocupar se o modelo é adequado ou não.

Concentração de uma solução. Agora temos, no instante $t = 0$, um volume b de sal misturado com a água do tanque, do qual a mistura se escoa por um ralo e é compensada igualmente pela água despejada de uma torneira. Decorrido o tempo t, o volume de sal restante, indicado por $f(t) = f(b,t)$, é uma função decrescente de t e é proporcional a b. Isto é claro. Ademais, se recomeçarmos nossa observação depois de decorrido o tempo s, quando o volume de sal que restou é $f(b,s)$, passado o tempo t a partir daí, o volume de sal que permanecerá no tanque é, por um lado, igual a $f(f(b,s),t)$ e, por outro lado, é $f(b,s+t)$. Logo $f(b,s+t) = f(f(b,s),t)$, o que comprova a condição 2), portanto $f(b,t) = ba^t$ é do tipo exponencial. Como de praxe, põe-se $f(b,t) = be^{\alpha t}$ onde $\alpha = \ell n\, a$ é a taxa instantânea de escoamento (igual à taxa de abastecimento). Novamente aqui se tem $0 < a < 1$ logo $\alpha < 0$, pois $f(b,t)$ é uma função decrescente de t.

O princípio deste exemplo é o mesmo que se aplica para estudar a eliminação de drogas (medicinais ou não) no corpo de um animal. Neste caso, o escoamento se dá principalmente por suor e urina e o abastecimento se faz mediante a ingestão de líquidos.

Figura 3.32: Exemplo de como ocorre a eliminação de drogas no corpo de um animal [4]

3.6.3 Análise de alguns exercícios propostos no Livro 3

No Livro 3 encontramos o seguinte exercício proposto:

"*(Vunesp) Uma pessoa obesa, pesando em certo momento 156 kg, recolhe-se a um spa onde se anunciam perdas de peso de até 2,5 kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:*

a) *encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo,* ***P****, que essa pessoa poderá atingir após* ***n*** *semanas*;

b) *calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no spa para sair de lá com menos de 120 kg de peso*."

Essa é uma questão que não deveria ser apresentada ao aluno, já que também não representa um exemplo factível de ser modulado por uma função afim de função afim, pois a perda de peso não ocorre linearmente, sequer podemos afirmar que o problema pode ser modelado por uma função crescente ou decrescente, pois é comum durante um tratamento desse tipo, as pessoas perderem peso no início e em seguida ganharem de volta alguns dos quilos perdidos. Outra coisa, da forma como foi colocado o problema, pode-se imaginar que se o paciente passar muito tempo nesse *spa* ele pode atingir peso nulo. Poderia ter sido colocado que nas primeiras semanas a perda de peso ocorre de forma linear e assim seguiria até uma determinada quantidade de semanas, mesmo assim ainda ficaria no campo das suposições.

Veja o que trecho extraído do Artigo Saiba por que 95% das dietas falham [16] diz a respeito de perda de peso.

> Ao contrário do que muitos ainda pensam e de muito que se diz, perda e ganho de peso não é matematicamente coerente, ou seja, um exemplo: Se cortarmos 800 calorias por dia, matematicamente sabemos que ao longo de uma semana teremos um déficit calórico de 5600 kcal ($7 \cdot 800$), certo? certo.
>
> A conta esta certa, mas o comportamento do nosso corpo não é igualmente exato. Geralmente, quando se inicia uma dieta, nas primeiras poucas semanas, a queda de peso é acentuada. Cortando-se 800 kcal por dia pode-se sim se acabar criando um déficit de 5600 kcal no final da semana. Este é o momento que você fica super animado com o resultado... ok. Com o passar das semanas você continua cortando a mesma quantidade e começa a perceber que você esta perdendo cada vez MENOS peso ao longo do tempo até que nota, tristemente, que você, de fato, PAROU de perder peso, mesmo cortando ainda as 800kcal por dia.

Como podemos ver no trecho acima é comum pessoas terem uma diminuição acentuada no seu peso nas primeiras semanas de uma dieta, mas essa diminuição de peso desacelera nas semanas seguintes até parar. Como é dito no trecho acima, ganho ou perda de peso não é "*matematicamente coerente*". Logo, seria melhor que essa questão não fosse apresentada ao aluno. Se o professor resolver apresentá-la, deve frisar bem que se trata de uma situação hipotética e que não condiz com a realidade, o que também foge de uma contextualização verossímil.

Perceba ainda que na questão o Livro 3 usa a frase: "*Suponhamos que isso realmente ocorra.*", o que deixa claro que tudo não passa de uma suposição. No nosso entendimento são vários os exemplos de situações-problemas que realmente são modelados por uma função afim. Sendo assim, questão desse tipo poderia não ser apresentada aos alunos, sob pena de fazer o aluno entender equivocadamente que podemos usar o modelo matemático de função afim quando acharmos melhor, ou seja, sempre que supusermos que a função afim modela determinada situação-problema. No nosso entendimento o aluno tem que ter a preocupação de saber se a situação-problema realmente apresenta as características da função afim e o professor deve saber disso. Veremos no Capítulo 4 o que realmente caracteriza uma função afim.

Capítulo 4

Função Afim

Vimos no Capítulo 3 que cada um dos livros analisados introduziu o conteúdo com exemplos diferentes. Vimos livro que considerou como domínio da função o conjunto dos Naturais, outro considerou um subconjunto do Reais positivos. Entendemos que uma boa forma de introduzir esse conteúdo é usando exemplos que tratam sobre escalas termométricas, ou melhor, como converter uma determinada temperatura em Celsius para Fahrenheit, ou vice-versa. Ao usar uma função afim para convertermos uma temperatura em Celsius para Fahrenheit estaremos considerando o conjuntos dos números Reais, para isso, usam-se graus positivos e negativos

O aluno do primeiro ano do Ensino Médio viu no nono ano do Ensino Fundamental, mais especificamente na disciplina de Ciências, como fazer essas conversões. Sendo assim, estamos aproveitando o fato do aluno já conhecer essas escalas e como usar fórmulas para fazerem essas conversões. Dessa forma sugerimos usar uma situação problema que envolva essas escalas termométricas para apresentar funções afins.

4.1 Sugestão de como introduzir função afim usando escalas termométricas

Alguns países do mundo utilizam a Escala Fahrenheit para medir temperaturas, entre eles os Estados Unidos da América. Considerando que o Estados Unidos é a maior potência econômica e a grande influência cultural que exerce em outros países, entendemos que é interessante conhecermos a relação que existe entre a escala Celsius e a escala Fahrenheit.

Exemplo 4.1 *Exemplo: Ao nível do mar a água ferve a* 100^o *na Escala Celsius, enquanto na Escala Fahrenheit isso ocorre a* 212^o*. Já o ponto de fusão da água ocorre a* 0^o *na Escala Celsius, enquanto na Escala Fahrenheit esse fato ocorre a* 32^o*. Veja figura 4.1. Mas qual temperatura em Fahrenheit teremos* $T_C = T_F$*? Onde* T_C *é a temperatura medida na escala Celsius e* T_F *e a temperatura medida na escala Fahrenheit.*

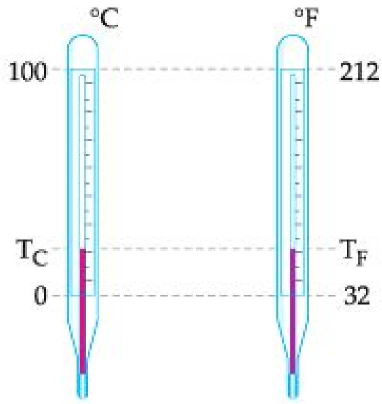


Figura 4.1: fonte: http://www.vestibulandoweb.com.br

Já sabemos que $100^oC \to 212^oF$ e $0^oC \to 32^oF$ e que dada uma temperatura em Celsius, T_C, a medida correspondente na Escala Fahrenheit, T_F, fica completamente definida. Mas como converter uma medida em Celsius numa medida em Fahrenheit? Ou melhor, qual função modela esta situação-problema?

Primeiramente devemos ter em mente que a altura da coluna de mercúrio nos dois termômetros são iguais, pois expressam a mesma temperatura. A diferença está apenas como medimos essa temperatura. Perceba que cada temperatura medida na Escala Celsius tem sua correspondente na Escala Fahrenheit.

Vejamos ainda que entre o ponto de fusão e o ponto de ebulição da água temos uma variação de temperatura de 100^o na escala Celsius, ΔC, e uma variação de 180^o na Escala Fahrenheit, ΔF. Se dividirmos ΔC por cem teremos 1^oC como resultado dessa operação, e dividindo ΔF também por cem, teremos como resultado $1,8^oF$. Sendo assim podemos concluir que uma variação de 1^o na Escala Celsius corresponde a uma variação de $1,8^o$ na Escala Fahrenheit. Veja a tabela 4.1.

temperatura em Celsius	**temperatura em Fahrenheit**
0	32
1	$32+1,8=33,8$
2	$32+2\cdot 1,8=35,6$
3	$32+3\cdot 1,8=37,4$
$\vdots$	$\vdots$
100	$32+100\cdot 1,8=212$
$\vdots$	$\vdots$
x	$32+x\cdot 1,8=32+1,8x$

Tabela 4.1: tabela Celsius/Fahrenheit

Assim temos que $T_F = 1,8T_C + 32$. Esse resultado pode ser demonstrado matematicamente. Vejamos:

Demonstração.

Vamos aplicar nesta demonstração o Teorema de Tales. Lembremos que as alturas de mercúrio nos dois termômetros é a mesma para qualquer temperatura, assim os segmentos de retas tracejados que podemos ver na figura 4.1 são paralelos entre si. Logo, aplicando o Teorema de Tales temos,

$$\frac{T_C - 0}{100} = \frac{T_F - 32}{180} \Rightarrow T_C = \frac{T_F - 32}{1,8} \Rightarrow T_F = 1,8T_C + 32 \qquad \square$$

Voltando agora ao exemplo 4.1, onde $T_C = T_F$, logo,

$T_F = 1,8T_C + 32 \Rightarrow T_F = 1,8T_F + 32 \Rightarrow T_F - 1,8T_F = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow -0,8T_F = 32 \Rightarrow T_F = -40^oF$

Analisando esse exemplo, podemos concluir que a função que modela esta situação-problema, é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, ou seja, é uma função afim. Veja abaixo a definição que passarem a usar para função afim.

Definição 4.1 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

4.1.1 Exemplos de funções afins:

Exemplo 4.2 $f(x) = \sqrt{4}x + \sqrt{7}$, *onde* $a = \sqrt{4}$ *e* $b = \sqrt{7}$

Exemplo 4.3 $f(x) = 0$, *onde* $a = 0$ *e* $b = 0$

Exemplo 4.4 $f(x) = -\frac{2}{5}x - 3$, *onde* $a = -\frac{2}{5}$ *e* $b = -3$

Exemplo 4.5 $f(x) = 9$, *onde* $a = 0$ *e* $b = 9$

Exemplo 4.6 $f(x) = \pi x + e$, *onde* $a = \pi$ *e* $b = e$

Exemplo 4.7 $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}$, *onde* $a = \frac{1}{4}$ *e* $b = \frac{2}{3}$

4.1.2 Casos Particulares da Função Afim

Algumas funções afins aparecem na literatura matemática com nomes específicos, isso ocorre dado a frequência com que essas funções aparecem. São elas:

- Quando $a = 0$ a função afim recebe o nome de **função constante**;

- Quando $a = b = 0$, a função afim recebe o nome de **função nula**;
- Quando $a = 1$ e $b = 0$, a função afim é recebe o nome **função identidade**.
- Quando $a \neq 0$ e $b = 0$, a função afim recebe o nome de **função linear**;

Então, como pudemos verificar a função afim $f(x) = ax$ recebe o nome de função linear. Como há quem pense que o nome função linear vem do fato do gráfico dessa função ser uma reta assim, antes de avançarmos vamos procurar justificar por que esta função é conhecida como *função linear*.

Bom, em LIMA [10], temos a seguinte definição de transformação linear:

Definição 4.2 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

i) Quaisquer que sejam u e v em V,

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(kv) = kF(v)$$

A função linear é o exemplo mais simples de uma *transformação linear*, e daí o motivo de ter “herdado” o nome **linear**.

4.1.3 Determinando a Função Afim $f(x) = ax + b$, conhecendo-se dois dos seus valores

Um fato importante que não pode deixar de ser apresentado ao aluno é que uma função afim $f(x) = ax + b$ fica completamente determinada quando conhecemos dois de seus valores $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1 \neq x_2$. Vejamos:

$$y_1 = ax_1 + b \tag{4.1}$$

$$y_2 = ax_2 + b \tag{4.2}$$

Subtraindo a equação 4.1 da equação 4.2, obtemos,

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - ax_1 - b \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

Daí,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para encontrarmos o valor de b, vamos substituir o valor encontrado para a na equação 4.1.

Vejamos,

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + b \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = y_2 x_1 - y_1 x_1 + b(x_2 - x_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1 x_2 - y_1 x_1 - y_2 x_1 + y_1 x_1 = b(x_2 - x_1) \Rightarrow b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$

Segue-se que,

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2 \tag{4.3}$$

Observação 4.1 *A substituição também poderia ter sido feita na equação 4.2, que teríamos o mesmo resultado.*

Observação 4.2 *O fato de podermos determinar a função afim conhecendo-se dois de seus valores está relacionado ao fato do gráfico dessa função ser uma reta. Lembremos ainda que uma reta fica determinada quando se conhece dois de seus pontos.*

4.2 Gráfico da Função Afim

No capítulo anterior vimos que alguns livros não demonstraram que o gráfico de uma função afim é uma reta. Entendemos que uma demonstração matemática ajuda a desenvolver no aluno o pensamento dedutivo, mas para isso é necessário que a demonstração tenha um nível de complexidade adequado para o aluno. Uma demonstração muito elaborada e laboriosa pode fazer o aluno imaginar que matemática é difícil e que ele não tem capacidade para aprender a disciplina. Não é esse o caso que tratamos, já que demonstrar que o gráfico de uma função afim é uma reta é algo bastante simples, sendo adequado para ser apresentado para uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. Seguindo esse entendimento, passaremos a demonstrar esse fato, mas antes vamos definir o que é um Gráfico de uma função e depois relembrar e demonstrar a Desigualdade Triangular, pois precisaremos dessas definições na demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Definição 4.3 *O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x,y) onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$.*

Em símbolos matemáticos,

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}$$

.

Teorema 4.1 *(Desigualdade Triangular) Se três pontos não estão dispostos sobre uma mesma reta, então eles são vértices de um triângulo qualquer e o comprimento de um dos lados desse triângulo é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados. Veja figura 4.2.*

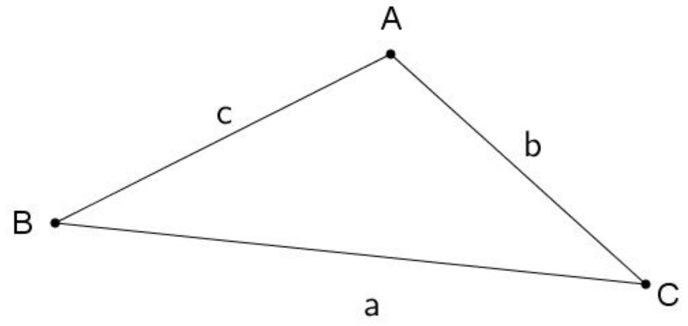


Figura 4.2: triângulo qualquer

Demonstração. Veja a figura 4.4. Prolonguemos o lado BA, de sorte que $AD = AC$.

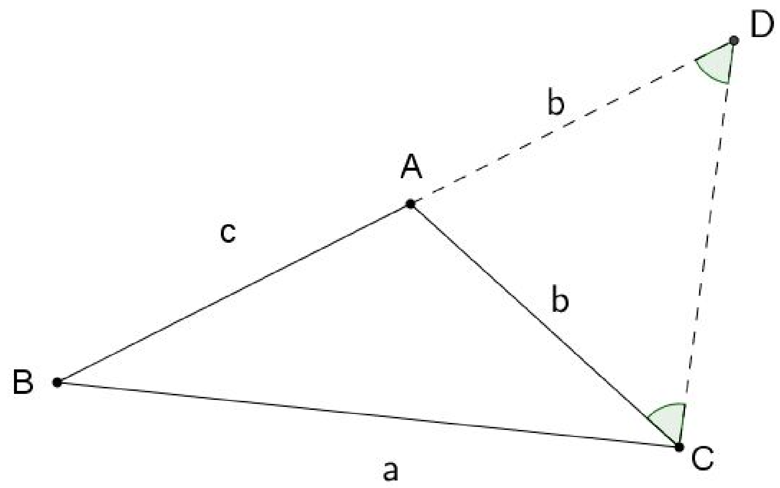


Figura 4.3: triângulo qualquer com BA prolongado

Analisando a figura 4.3, percebemos que no triângulo isósceles ACD, temos $AC = AD = b$ e $\angle ACD = \angle ADC$.

Temos ainda que $\angle BCD > \angle ACD = \angle ADC$. No triângulo BDC temos $BD > BC$, pois oposto ao maior ângulo tem-se o maior lado, logo, $b + c > a$. Temos então que $a < b + c$ e de forma análoga podemos concluir que $b < a + c$ e que $c < a + b$. $\square$

Teorema 4.2 *Três pontos A, B e C, nesta ordem, são colineares, se, e somente se $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$. Veja figura 4.4. Onde $d(A,B)$ é a distância entre os pontos A e B, $d(B,C)$ é a distância entre os pontos B e C e $d(A,C)$ é a distância entre os pontos A e C.*

Figura 4.4: três pontos sobre uma mesma reta

Demonstração. Tomando-se três pontos quaisquer A, B e C, nesta ordem, sobre uma mesma reta (cf. figura 4.4). Demonstrar que, dados três pontos colineares A, B e C, temos $d(A,B)+d(b,C)=d(A,C)$ é imediato. Vamos demonstrar a recíproca desse fato, que $d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$, então os pontos A, B e C são colineares.

Vamos supor por absurdo que A, B e C não são colineares. Logo eles são vértices de um triângulo qualquer. Dessa forma, teremos pelo teorema 4.1 que $d(A,B)+d(B,C)>d(A,C)$. O que é um absurdo. Logo os três pontos são colineares.□

Usaremos os teoremas 4.2 e 4.1 para concluir que três pontos quaisquer, A, B e C, nesta ordem, pertencentes ao gráfico da função afim, são colineares, pois, $d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$.

Teorema 4.3 *O gráfico G da função afim $f(x)=ax+b$ é uma reta não-vertical e toda reta não-vertical contida no plano cartesiano é gráfico de alguma função afim.*

Demonstração. Para demonstrarmos que o gráfico de uma função afim é uma reta basta verificarmos que dados três pontos quaisquer do gráfico da função afim, eles são sempre colineares.

Vamos tomar três pontos quaisquer, $P_1=(x_1,ax_1+b)$, $P_2=(x_2,ax_2+b)$, e $P_3=(x_2,ax_2+b)$, pertencentes ao gráfico da função afim $f(x)=ax+b$. Veja figura 4.5.

Sendo $d(P_1,P_2)$, $d(P_2,P_3)$ e $d(P_1,P_3)$ as distâncias entre os respectivos pontos. Estes serão colineares se, e somente se, a maior distância entre esses pontos for igual a soma das outras duas distâncias, conforme provamos no Teorema 4.2. Podemos tomar x_1,x_2 e x_3 em tal ordem que $x_1<x_2<x_3$. Aplicando o Teorema de Pitágoras encontramos que a distância entre os pontos em questão é,

$$
\begin{aligned}
&d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2(1+a^2)}=(x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}\\
&d(P_2,P_3)=\sqrt{(x_3-x_2)^2+a^2(x_3-x_2)^2}=\sqrt{(x_3-x_2)^2(1+a^2)}=(x_3-x_2)\sqrt{1+a^2}\\
&d(P_1,P_3)=\sqrt{(x_3-x_1)^2+a^2(x_3-x_1)^2}=\sqrt{(x_3-x_1)^2(1+a^2)}=(x_3-x_1)\sqrt{1+a^2}\\
&d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)=(x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}+(x_3-x_2)\sqrt{1+a^2}=\\
&=(x_2-x_1+x_3-x_2)\sqrt{1+a^2}=(x_3-x_1)\sqrt{1+a^2}=d(P_1,P_3)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, com base no Teorema 4.2, podemos concluir que o gráfico de uma função afim é uma reta, mais especificamente uma reta não-vertical, pois como vimos na expressão 4.3 (página 45) temos a restrição $x_1\neq x_2$, o que implica que a reta não pode ser vertical.

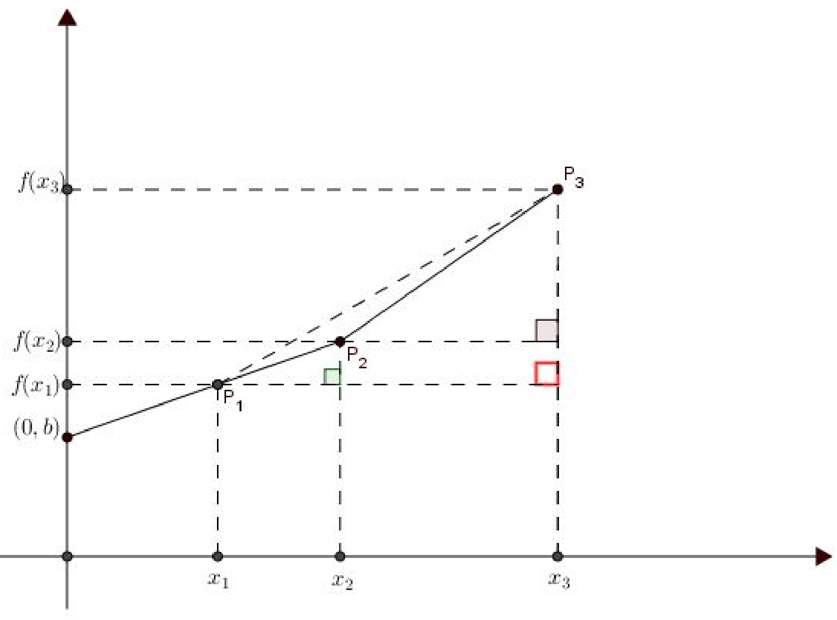


Figura 4.5: gráfico de uma função afim

Agora vamos considerar uma reta não-vertical r que contenha os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Como essa reta é não-vertical, então $x_1 \neq x_2$, segue-se daí que existe uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como vimos página 45, dados os números reais x_1, x_2, y_1 e y_2 é possível definir a função afim. O gráfico dessa função afim é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2. Como por dois pontos passa uma única reta, podemos concluir que r coincide com o gráfico de $f(x)$, que acabamos de provar na primeira parte da demonstração, que é uma reta. $\square$

4.3 Sugestão de como apresentar o crescimento e o decrescimento da função afim

Sugerimos inicialmente que seja lembrado que uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se *função crescente* quando, dados dois números reais quaisquer, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de f, tem-se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, *função decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ e *função constante* quando temos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Teorema 4.4 *Na expressão de uma função afim $f(x) = ax + b$, $a > 0$ implica em f crescente, $a < 0$ implica em f decrescente e $a = 0$ em f constante.*

Demonstração. Tomando-se dois números reais quaisquer pertencentes ao *domínio* de f, x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$ teremos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{4.4}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b. \tag{4.5}$$

Subtraindo-se a equação 4.4 da equação 4.5, obtemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

Observe que $x_2 - x_1 > 0$, pois por hipótese $x_1 < x_2$. Assim, quando tivermos $a > 0$ implicará que o produto $a \cdot (x_2 - x_1)$ será maior que zero e consequentemente $f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1) > 0$, ou seja a função afim será crescente. Quando tivermos $a < 0$ implicará que o produto $a \cdot (x_2 - x_1)$ será menor que zero e consequentemente $f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1) < 0$, ou seja a função afim será decrescente. Quando $a = 0$, teremos $f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, o que significará $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, a função afim é constante, pois não varia, qualquer que seja o valor de x. $\square$

Vamos ver dois exemplos.

Exemplo 4.8 *Vamos analisar o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.*

x	**f(x)**
0	$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Tabela 4.2: valores de $f(x) = 2x + 1$ para $x = 0$ e $x = 1$

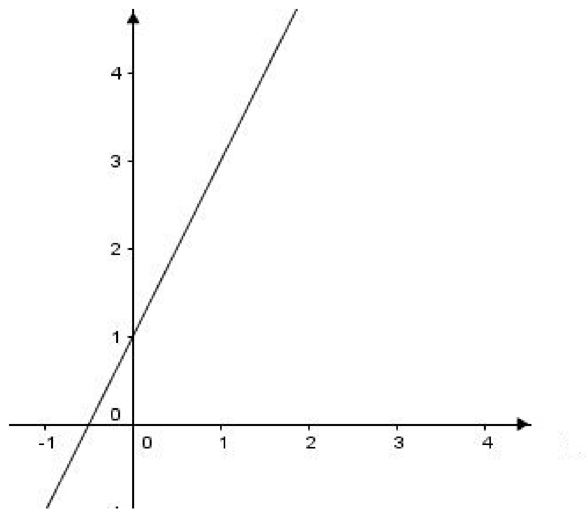


Figura 4.6: gráfico da função $f(x) = 2x + 1$

Exemplo 4.9 *Vejamos agora o gráfico da função $f(x) = -2x + 1$.*

x	f(x)
0	$f(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$f(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -1$

Tabela 4.3: valores de $f(x) = -2x + 1$ para $x = 0$ e $x = 1$

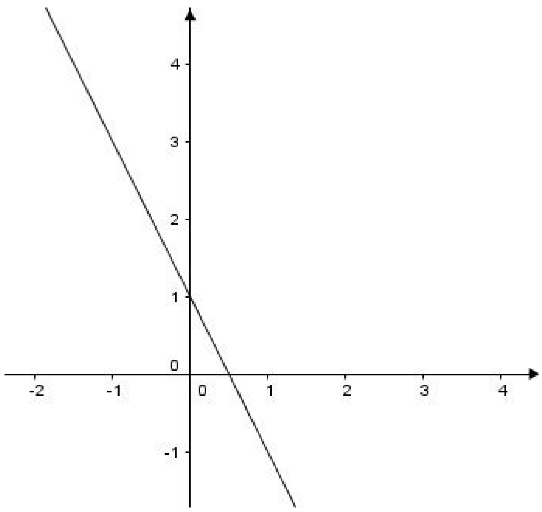


Figura 4.7: gráfico da função $f(x) = -2x + 1$

Exemplo 4.10 *Vejamos agora o gráfico da função $f(x) = 2$.*

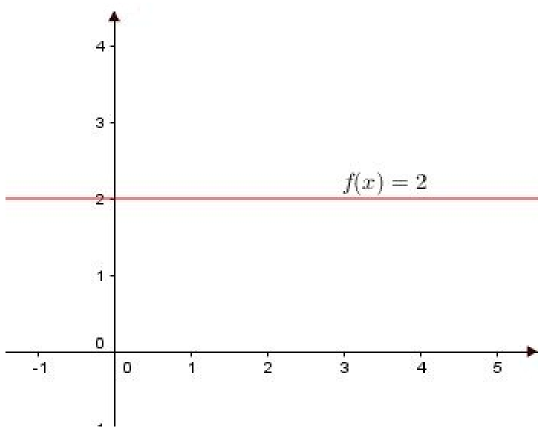


Figura 4.8: gráfico da função $f(x) = 2$

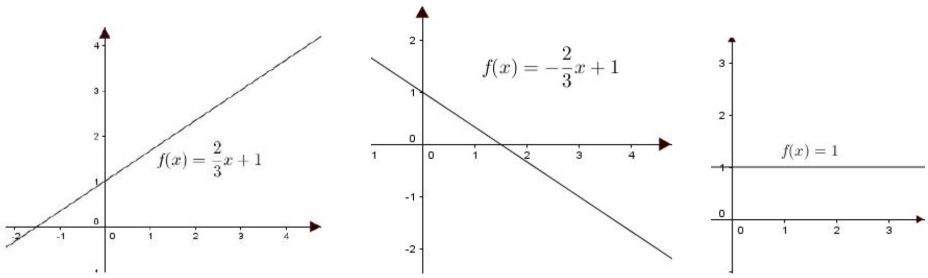
Analisando as funções afins dos exemplos 4.8 e 4.9, podemos perceber que a única diferença está no valor do parâmetro a. No exemplo 4.8 temos $a > 0$, enquanto que no exemplo 4.9 temos $a < 0$. Podemos perceber que o valor absoluto do parâmetro a nos dois exemplos é o mesmo. Entretanto, o gráfico do exemplo 4.8 é de uma função crescente, pois quando os valores de x crescem, os valores da f também crescem. No gráfico do exemplo 4.9 percebemos que o gráfico é de uma função afim decrescente, pois quando os valores de x

crescem, os valores da f decrescem. Quanto ao exemplo 4.10, os valores de x crescem, mas f continua valendo 2.

Resumo:

$a > 0$	função afim crescente
$a < 0$	função afim decrescente
$a = 0$	função afim constante

Observação 4.3 *Quando a for positivo, teremos uma função afim crescente. Quando a for negativo, teremos uma função afim decrescente. Quando a for nulo, teremos uma função afim constante. Veja a figura 4.9.*



(a) (b) (c)

Figura 4.9: (a) $a > 0$ função crescente, (b) $a < 0$ função decrescente e (c) $a = 0$ função constante.

4.4 Caracterização da Função Afim e Aplicações

Como ter certeza que para uma determinada situação o modelo matemático a ser usado é realmente uma função afim?

Em algumas situações fica claro qual modelo matemático deve ser empregado. Um exemplo disso é o caso do representante comercial que tem seu salário composto de duas partes. Uma parte fixa e a outra variável, sendo parte variável calculada em cima do valor total das vendas que ele realizou durante o mês. Porém em outros casos pode não ser tão fácil identificar que o modelo a ser empregado é o de uma função afim.

Vejamos três exemplos:

Exemplo 4.11 *Na cidade do Recife/PE se paga pela corrida de táxi R$ 4,75 pela bandeirada comum, mais R$ 2,31 por quilômetro rodado na bandeira 1. Quanto se paga por x quilômetros rodados?*

Exemplo 4.12 *(LIMA [4]) Dado um triângulo qualquer, temos que uma paralela a um dos lados divide os outros dois lados em dois segmentos. Como esses segmentos se relacionam?. Veja figura 4.10.*

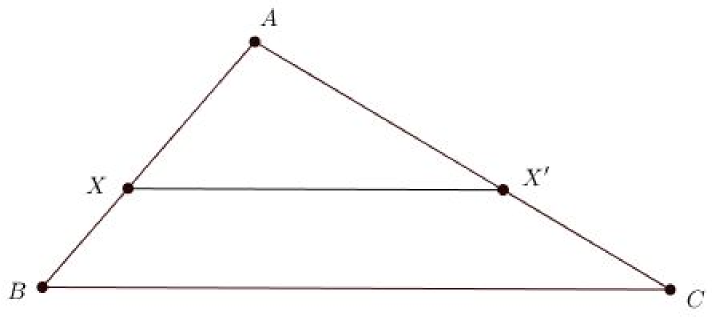


Figura 4.10: triângulo qualquer, com segmento XX' paralelo ao lado BC

Exemplo 4.13 *(RPM [18]) "Um automóvel, a 32 km/h, é freado e para depois de percorrer mais 8 metros. Se freado a 60 km/h, quantos metros percorrerá até parar?"*

A função afim será o modelo matemático a ser usado quando para acréscimos iguais da variável independente, x, implicar acréscimos iguais a variável dependente, $f(x)$. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema 4.5 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \Phi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração. Aplicaremos o Teorema Fundamental da Proporcionalidade para demonstrar o Teorema 4.5. Para simplificar, suporemos que a função f seja crescente. Então $\Phi : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ também é crescente, com $\Phi(0) = 0$. E ainda, para quaisquer h, $k \in \mathbb{R}$ temos

$$\Phi(h+k) = f(x+h+k) - f(x)$$

$$\Phi(h+k) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)$$

$$\Phi(h+k) = \Phi(h) + \Phi(h).$$

Daí, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $\Phi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto significa dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0) = 0$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo x real.

A recíproca desse teorema é óbvia. Vamos considerar a função afim $f(x) = ax + b$, então $f(x+h) - f(x) = [a(x+h)+b] - [ax+b] = ax+ah+b-ax-b = ah$, que não depende de x. $\square$

Entendemos que essa demonstração não é tão simples e que por isso não deve ser apresentada numa turma do Ensino Médio. Todavia, não queremos dizer com isso que o Teorema 4.5 não deva ser apresentado. Este teorema é muito importante, pois ele apresenta elementos que nos fazem concluir se uma função é, ou não é, afim.

Vamos voltar aos três exemplos apresentados no início desta secção e analisar se eles apresentam ou não essa característica.

4.4.1 Análise do exemplo 4.11

Percebemos que ao rodar 1km o passageiro terá que pagar R$ 2,31 pelo 1km rodado, mais R$ 4,75 referente à bandeirada. Percebemos ainda, e principalmente, que a cada 1km rodado a mais, o passageiro continuará pagando R$ 2,31, não importando o quanto ele já tenha rodado. Essa é uma situação-problema bastante conhecida, a qual é facilmente relacionada a seguinte função afim: $f(x) = 2,31x + 4,75$.

É fácil perceber também que:

- Quando percorremos uma determinada distância x, fica prontamente definido o valor a ser pago, $f(x)$, logo a função é injetiva;

- Quando aumentamos a distância percorrida, o valor a ser pago também aumenta, logo se trata de uma função crescente;

Vamos verificar se o Teorema 4.5 se aplica nessa situação tão emblemática. Vejamos.

Denotando por x_0 a distância percorrida até o momento em que o passageiro olhou no taxímetro e verificou o quanto iria pagar se a corrida parasse ali, e por x_1 a distância percorrida até o destino final do passageiro. Denotando ainda por $h = x_1 - x_0$. Podemos verificar que o valor a ser pago por $f(x_1) - f(x_0) = ax_1 + b - ax_0 - b = a(x_1 - x_0) = ah$, logo $f(x_1) - f(x_0)$ depende unicamente de h e não de x.

Assim, podemos verificar que a função afim ($f(x) = 2,31x + 4,75$) que modela a situação-problema do Exemplo 4.11 satisfaz às condições do Teorema 4.5.

Observação 4.4 *Esse é um exemplo emblemático de função afim, mas não é difícil encontrarmos alunos tentando resolver esse tipo de problema usando a ideia de proporcionalidade. Esses alunos entendem que, se em uma corrida de x quilômetros paga-se y reais, então numa corrida de* $10x$ *quilômetros paga-se* $10y$ *reais, o que nós sabemos que não é verdade. Esse equívoco ocorre pelo fato da proporcionalidade ser uma ideia natural e muito comum no nosso dia a dia, o que leva os alunos a entenderem que se duas grandezas estão relacionadas, de modo que, quando uma cresce a outra também cresce, então essas grandezas são proporcionais.*

4.4.2 Análise do exemplo 4.12

Vamos verificar se esse exemplo apresenta aquilo que caracteriza a função afim, enunciado no teorema 4.5.

Vamos traçar uma outra reta paralela ao lado BC. O ponto em que essa reta intersecta o lado AB denotaremos por Z e o ponto em que essa reta intersecta o lado AC denotaremos por Z'. Da mesma forma que XB e $X'C$ estão relacionados, também estão ZB e $Z'C$, e XZ e $X'Z'$.

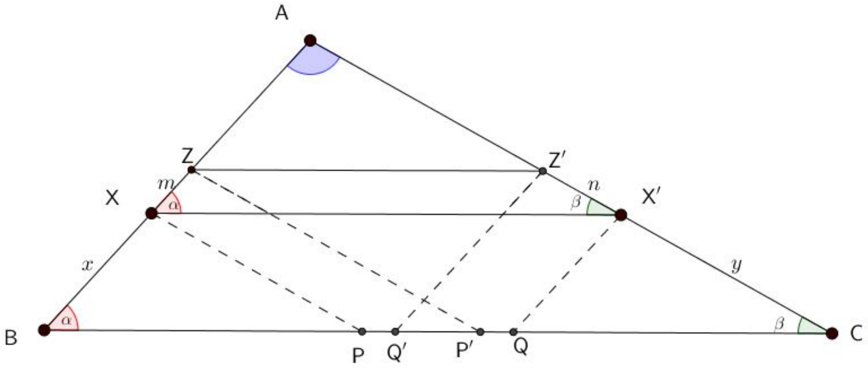


Figura 4.11: triângulo ABC, com XX' e ZZ' paralelos a BC

Assim, existe uma função que relaciona $x \to y$, $(x+m) \to (y+n)$ e $m \to n$

Dessa forma, existe uma f, tal que,

$$f(x) = y$$

$$f(x+m) = y+n$$

$$f(m) = n$$

Assim, temos que $f(x+m) - f(x) = y+n-y = n = f(m)$

Como podíamos imaginar, $f(x+m) - f(x)$ depende unicamente do incremento dado a x, e não do valor de x. Portanto, a f é uma função afim.

Vamos agora encontrar a expressão dessa função. Temos que XX' // BC, por construção, tal que $X \in AB$ e $X' \in AC$. Tracemos uma reta paralela ao lado AB, passando por X, a qual intersectará o lado BC no ponto Q, em seguida tracemos uma reta paralela ao lado AC, passando por X', a qual intersectará o lado BC no ponto P. Veja figura 4.12.

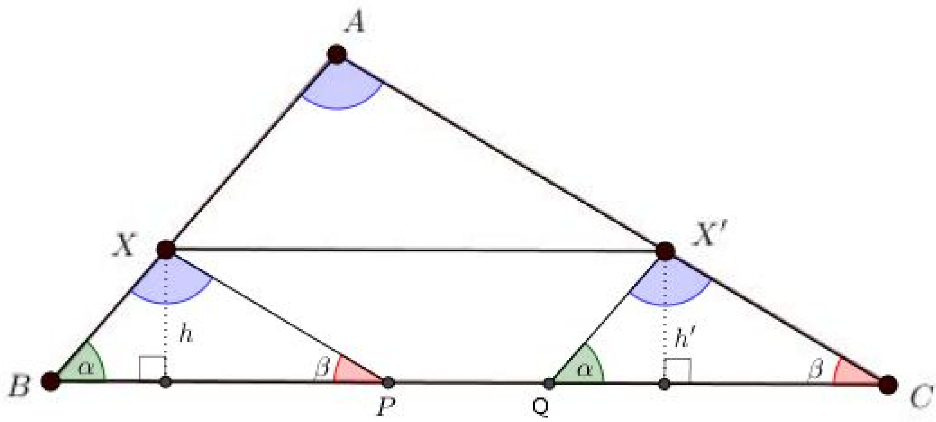


Figura 4.12: triângulo ABC do Exemplo 4.12

Analisando a figura 4.12 percebemos pelo caso de semelhança AAA, que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle XBP$ e $\triangle X'QC$ são todos semelhantes, por construção. Sendo assim,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{XB}{XP} = \frac{X'Q}{X'C} = k \tag{4.6}$$

Podemos perceber que os triângulos $\triangle XBP$ e $\triangle X'QC$ além de semelhantes são congruentes. De fato, como os triângulos $\triangle XBP$ e $\triangle X'QC$ estão compreendidos entre retas paralelas, podemos concluir que $h = h'$. Segue daí que $sen(\beta) = \dfrac{h}{XP} = \dfrac{h}{X'C} \Rightarrow XP = X'C$. Logo, pelo caso de congruência de triângulos ALA, temos $\triangle XBP \equiv \triangle X'QC$.

Dessa forma, pela equação 4.6 temos que $\dfrac{XB}{X'C} = k$. Agora, observe que a distância entre os segmentos de retas XX' e BC, é dada por:

$$h = sen(\alpha) \cdot XB = sen(\beta) \cdot X'C \Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)} = \frac{XB}{X'C} = k,$$

temos que uma paralela a um dos lados divide os outros dois lados em segmentos proporcionais, como relatado no Exemplo 4.12.

Por outro lado, se denotarmos o segmento XB por x e o segmento $X'C$ por y, temos que a função linear que modela a situação-problema do Exemplo 4.12 é dada por

$$\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = f(x) = \frac{sen(\beta)}{\text{sen}(\alpha)} \cdot x$$

sendo $\dfrac{sen(\beta)}{\text{sen}(\alpha)}$ a taxa de crescimento. Ou em outras palavras, os segmentos são proporcionais.

Esse é um exemplo de que nem sempre é tão claro ver que o modelo a ser usado em determinado problema é realmente de uma função afim.

4.4.3 Análise do exemplo 4.13

No primeiro momento podemos tentar resolver esse tipo de problema usando função linear, proporcionalidade, ou regra de três. Isso ocorre pelo fato de imaginarmos que, se duas grandezas estão relacionadas, de modo que, quando uma cresce a outra também cresce, então essas grandezas são diretamente proporcionais. Sabemos que quando aumentando a velocidade, a distância percorrida após a freada também aumenta, logo temos uma função crescente, que relaciona a velocidade do veículo ao seu deslocamento após a freada. Mas será que essa função apresenta as propriedades dadas no Teorema 4.5 que caracterizam uma função afim?

Podemos encontrar esse problema resolvido na RPM [18] da forma a seguir, que mostra que esse tipo de problema não pode ser modelado por uma função afim. Representemos por D a distância percorrida pelo carro e por v sua velocidade. Provaremos na próxima subseção que as distâncias percorridas pelo carro são proporcionais ao quadrado da velocidade.

$$\frac{D_1}{v_1^2} = \frac{D_2}{v_2^2} = k \tag{4.7}$$

Onde k é a constante de proporcionalidade. Segue-se que,

$$\frac{8}{32^2} = \frac{D_2}{60^2} \Rightarrow D_2 = \frac{60^2 \cdot 8}{32^2}$$

Portanto $D_2 = 28$ metros.

Usando a fórmula 4.7, podemos concluir que o veículo a 88 km/h se deslocaria 60,5 metros após o início da freada.

Observe que existe a seguinte relação:

$$32km/h \to 8m$$

$$60km/h \to 28m$$

$$88km/h \to 60,5m$$

Podemos concluir que existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que relaciona a velocidade ao deslocamento, mas ainda não sabemos de que tipo ela é. Vimos no teorema 4.5 que se esta função for uma função afim, então a diferença $f(x+h) - f(x)$ depende apenas do incremento dado a x e não do valor de x. No caso ora analisado, isso não ocorreu. Vejamos,

$$f(32+28) - f(32) = 28 - 8 = 20$$

$$f(60+28) - f(60) = 60,58 - 28 = 32,5$$

Como pudemos verificar a função f que modela esta situação-problema não é uma função afim, pois f não apresenta aquilo que caracteriza uma função afim, visto que $f(32+28) - f(32) = 20 \neq 32,5 = f(60+28) - f(60)$.

4.4.4 Usando um pouco de Física Clássica para explicar o problema anterior

Como uma contribuição aos professores, mostraremos a seguir como se chegou ao resultado $\frac{D_1}{v_1^2} = \frac{D_2}{v_2^2} = k$. Para isso buscamos em [13] lembrar algumas ideias da física clássica para nos convencer e convencer nosso leitor de que esse é realmente o modelo matemático correto para este problema. Vejamos:

A Segunda Lei de Newton diz que: "a força resultante que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida." Em termos matemáticos,

$$F = m \cdot a. \tag{4.8}$$

Desprezando a resistência do ar, temos que a única força atuando na direção contrária ao veículo, de modo a fazê-lo parar, é a força de atrito, a qual é uma propriedade dos materiais em contato, nesse caso, o asfalto e os pneus do veículo. Sendo assim a força que atua no primeiro momento (quando a velocidade é igual 32km/h) e no segundo (quando a velocidade é igual a 60km/h) são de mesma intensidade e direção, logo a aceleração, ou melhor, a desaceleração também tem mesma intensidade e direção nos dois casos.

Usando a equação de Torricelli, temos,

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot \Delta S. \tag{4.9}$$

Como a velocidade final é igual a zero, temos,

$$v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta S \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2\Delta S}.$$

onde v é a velocidade final do veículo, v_0 é a velocidade inicial e ΔS a distância que o veículo percorreu após o início da freada.

Como em ambos os casos a aceleração tem a mesma intensidade, temos,

$$a = \frac{v_1^2}{2\Delta S_1} = \frac{v_2^2}{2\Delta S_2} \Rightarrow \frac{\Delta S_1}{v_1^2} = \frac{\Delta S_2}{v_2^2},$$

que é o resultado apresentado na RPM [18].

Conclusão: No exemplo 4.13 pudemos observar que a situação-problema não pode ser modelada por uma função afim, visto que a função f que modela tal situação-problema não apresenta a característica de $f(x+h) - f(x)$ depender unicamente de h, e não de x. Logo devemos ter atenção antes de aplicarmos a função afim para modelar uma situação-problema. O fato de termos $x \to y$, de modo que, quando x cresce, y também cresce, não nos garante que a função que relaciona x a y é uma função afim. Somente será uma função afim quando a f satisfizer as condições do teorema 4.5.

Capítulo 5

Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três

Muitos alunos e alguns professores entendem função linear, proporcionalidade e regra de três, como se fossem conteúdos distintos e desconexos, mas na verdade esses conteúdos descrevem a mesma ideia matemática. Neste capítulo mostraremos como função linear, proporcionalidade e regra de três estão estreitamente relacionados, mas antes vamos procurar definir proporcionalidade e regra de três.

Veremos que função linear, proporcionalidade e regra de três estão estreitamente relacionados. Então como escolher qual desses conteúdos usar para resolver uma determinada situação-problema? A escolha de usar uma desses conceitos para resolver um problema vai depender da familiaridade que cada pessoa tem com esses conteúdos e ainda da conveniência. Lembremos do exemplo 4.12 (página 52). Encontrar a constante de proporcionalidade não foi algo simples de se fazer, consequentemente encontrar a função linear que modelasse a situação-problema também não foi tão simples. Para o problema do Exemplo 4.12 é mais conveniente usar a ideia de proporcionalidade. Da mesma forma podemos encontrar situações em que seja mais conveniente usar função linear.

5.1 Proporcionalidade

A proporcionalidade é uma noção matemática muito importante, pois faz parte da cultura de todos os povos e há milênios vem sendo empregada. Vejamos o que diz LIMA [4] a esse respeito:

> A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso data de milênios.

Mas, o que é uma proporcionalidade? É comum os alunos fazerem algumas confusões, achando que se duas grandezas estão relacionadas, de forma que, quando uma cresce a outra também cresce, então elas são proporcionais. Vimos no exemplo 3 do capítulo anterior que isso nem sempre é verdade. Mas, por quê? Vejamos a definição de proporcionalidade que encontramos em LIMA [11], a qual já responde essa pergunta no seu item (2).

Definição 5.1 *Dizemos que duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa cada valor de x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal maneira que sejam obedecidas as condições:*

1. *Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$*
2. *Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, então o valor correspondente de y fica dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$, então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Nessas condições, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se proporcionalidade. Dessa forma podemos concluir que, se x e y são proporcionais, então existe uma função f tal que,

$$f(x) = y \tag{5.1}$$

e

$$f(nx) = ny. \tag{5.2}$$

Substituindo 5.1 em 5.2, temos

$$f(nx) = nf(x). \tag{5.3}$$

Exemplo 5.1 *Vamos considerar num plano o ângulo $\angle AOB$ e uma reta r contida nesse plano. Dado um segmento de reta de comprimento x, contido em OA, as retas paralelas à r que passam nas extremidades desse segmento determinam sobre OB um outro segmento de reta, de comprimento y. Veja figura 5.1. Como x e y se relacionam?*

Afirmamos que $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade.

De fato. Percebemos facilmente que o comprimento y depende exclusivamente do comprimento de x mas não da posição do segmento tomado sobre o lado OA, o que significa dizer que a correspondência $x \mapsto y$ está bem definida.

Vamos observar a figura 5.2.

Se tomarmos dois segmentos de reta sobre OA, ambos de comprimento x, os quais estão relacionados a dois outros segmentos de comprimento y e y', respectivamente. Se traçarmos dois segmentos de reta, MN e $M'N'$, ambos paralelos a OA como na figura 5.2,

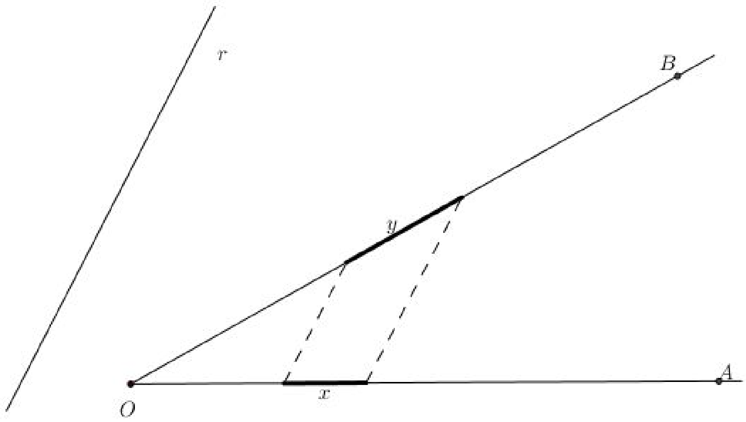


Figura 5.1: figura do exemplo 5.1

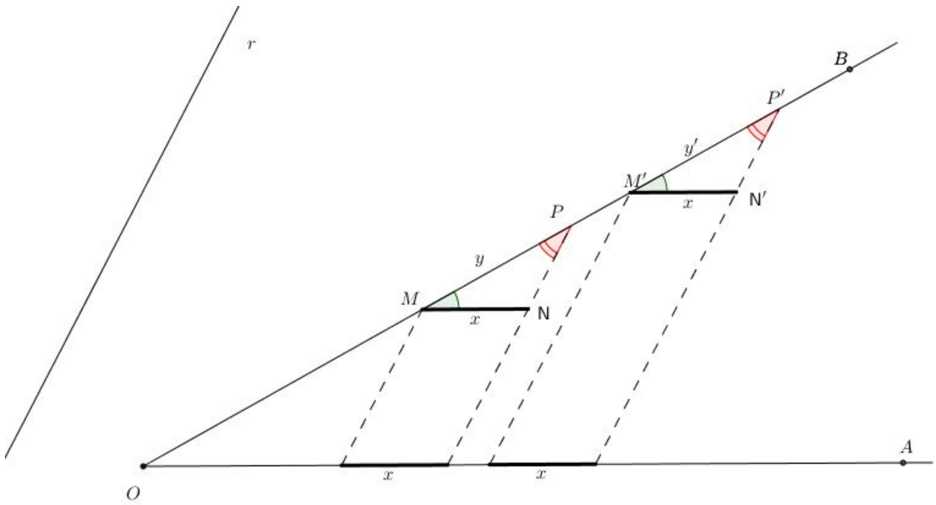


Figura 5.2: figura do exemplo 5.1

teremos os triângulos MNP e $M'N'P'$, os quais são congruentes entre si, pois $P\widehat{M}N \equiv P'\widehat{M'}N'$ e $M\widehat{P}N \equiv M'\widehat{P'}N'$, consequentemente, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180^o, temos que $M\widehat{N}P \equiv M'\widehat{N'}P'$. Portanto, pelo caso de congruência ALA, os triângulos MNP e $M'N'P'$, são congruentes. Dessa forma, $y = y'$.

Acabamos de demonstrar que não importa a localização em que o segmento de comprimento x se encontra sobre OA, ele sempre estará relacionado a um segmento de reta de comprimento y. Dessa forma, sempre que tivermos $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$, quando quisermos comparar y com y' podemos tomar x e x' como medidas de segmentos de reta com origem no vértice O. Dessa forma, fica bastante claro que se $x < x' \Rightarrow y < y'$ e que $x' = n \cdot x \Rightarrow y' = n \cdot y$.

Esse exemplo deixa claro que quanto maior for a medida x maior será a medida y e que se dobramos, triplicarmos x, y também dobra, triplica, etc.

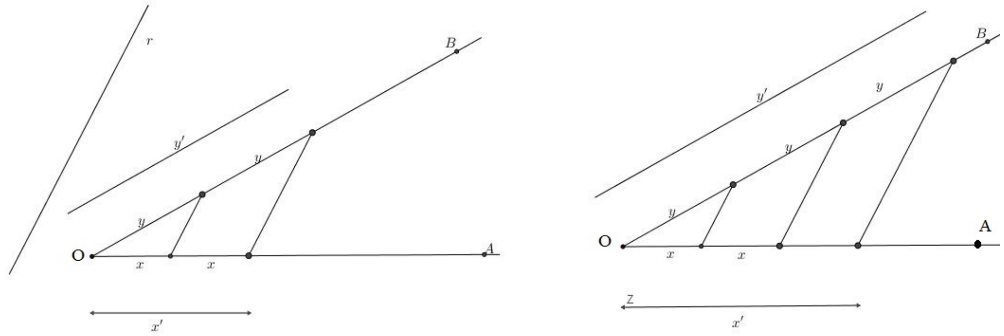


Figura 5.3: figura do exemplo 5.1

5.2 Regra de Três

Vejamos agora a definição de regra de três, que encontramos em LIMA [11].

> Chama-se regra de três ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, y_1, x_2, y_2, determinar o quarto.
> Há duas maneiras tradicionais de resolver esse problema. Suponhamos dados x_1, y_1 e x_2. O quarto elemento da proporção será chamado y. Então deve ser $y_1/x_1 = y/x_2$, donde se tira $y = x_2 y_1/x_1$. Esta é a forma de resolver a regra de três.
> O outro método de resolver a regra de três chama-se "redução à unidade". Sabendo que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $ax_1 = y_1$, obtemos $a = y_1/x_1$ e daí vem o valor do termo y, que falta na proporção $y_1/x_1 = y/x_2 : y = f(x_2) = ax_2 = y_1 x_2/x_1$. O nome "redução à unidade" provém do fato de que $a = f(1)$ é o valor de $f(x)$ quando $x = 1$.
> Deve-se ressaltar enfaticamente que a regra de três, proveniente da proporção $y_1/x_1 = y/x_2$, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade f, sendo $y_1 = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$.

Observemos que o conceito acima já relaciona regra de três com proporcionalidade. Assim, se conseguirmos estabelecer uma relação entre função linear e proporcionalidade, consequentemente estabeleceremos a relação entre função linear e regra de três.

5.3 Estabelecendo a Relação entre Função Linear e Proporcionalidade

Veremos agora o que diz o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que encontramos em LIMA [4], para concluirmos que a função f, tratada na seção 5.1, é uma função linear.

Teorema 5.1 *Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f(nx)=nf(x) para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$

Demonstração. Com o objetivo de demonstrar que $(1) \Rightarrow (2)$, mostraremos primeiro que, para todo número racional $r = m/n$, a hipótese (1) implica em $f(rx) = rf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, $r = m/n \Rightarrow m = nr$, daí

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x),$$

logo,

$$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = rf(x).$$

Agora tomemos $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0)$, a monotonicidade de f nos garante que $a = f(1) > f(0) = 0$. Portanto, a é positivo. Temos ainda que, $f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = r \cdot a = ar$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostraremos agora que $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponhamos, por absurdo, que exista um número real x, tal que $f(x) \neq ax$. Admitamos que $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de forma análoga).

Dessa forma,

$$\frac{f(x)}{a} < x$$

devido à densidade dos números racionais no conjunto dos números reais, podemos concluir que existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que, $\frac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r) < ax$

Mas isto é um absurdo, pois f é crescente, assim, tomando $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova que $(1) \Rightarrow (2)$. $\square$

Observe que, pela definição 5.1 tínhamos que numa proporção $x \to y$ e $nx \to ny$, ou seja, que existe uma função f, tal que $f(x) = y$ e $f(nx) = ny = n(fx)$. Com o teorema 5.1 vimos que $f(nx) = n(fx) \Rightarrow f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O teorema 5.1, nos assegura portanto, que a proporcionalidade gera uma função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$. Portanto, fica estabelecida a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três.

5.4 Resolução de alguns exemplos usando o conceito de Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três

Agora que sabemos o que é uma função linear, uma proporcionalidade e uma regra de três e como essas noções matemáticas estão estreitamente relacionadas, vejamos então alguns exemplos que mostram o quão estreita é esta relação.

Exemplo 5.2 *{DANTE [12]}Em uma eleição de uma pequena cidade, votaram 3780 eleitores, que corresponderam a 90% do total. Qual era o número de eleitores inscritos?*

- **Resolução do exemplo 5.2 usando proporcionalidade**

  Dizer que 90% dos eleitores votaram, significa dizer que a cada grupo 100 eleitores, 90 votaram. Veja a tabela 5.1. Observemos que $37,8 \cdot 100 = 3780$, então, como se tra-

grupos de eleitores	100	200	300	$\cdots$	3780
90% do grupo de eleitores	90	180	270	$\cdots$	3402

Tabela 5.1: quantidade de eleitores que votaram

  tam de grandezas proporcionais, teremos que multiplicar 90 também por 37,8. Logo, a quantidade de eleitores que compareceram a eleição foi de $37,8 \cdot 90 = 3402$.

- **Resolução do exemplo 5.2 usando função linear**

  Veja que:

$$90 = f(100) = 100 \cdot a \Rightarrow a = 0,9.$$

  Segue daí que:

$$f(3780) = 0,9 \cdot 3780 = 3402.$$

- **Resolução do exemplo 5.2 usando regra de três**

quantidade de eleitores	90% do eleitores
100	90
3780	y

  Segue daí que:

$$\frac{100}{3780} = \frac{90}{y} \Rightarrow y = \frac{90 \cdot 3780}{100} \Rightarrow y = 3402$$

Exemplo 5.3 *(ENEM/2016 [14]) Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 mL de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.*

O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será ...

- **Resolução do exemplo 5.3 usando proporcionalidade:**

  Após as primeiras quatro horas só restará 60% do total a ser aplicado, já que 40% foram aplicados nas primeiras quatro horas. Sabemos que o paciente tomará cinco frascos de soro, cada um com 800 mL. Sendo assim, temos,

quant. de frascos	1	2	3	4	5
quant. de mL	800	1600	2400	3200	4000

Tabela 5.2: quant. de frascos / quant. de mL

Mas nos interessa saber a quantidade tomada pelo paciente após as primeiras quatro horas, ou seja, 60% da quantidade total. Vejamos,

quant. de mL	100	200	300	$\cdots$	4000
60% da quant.	60	120	180	$\cdots$	2400

Tabela 5.3: quant. de mL / 60% da quant. de mL

Assim, podemos concluir que o paciente receberá 2400 mL do soro em 20 horas. Mas como cada mililitro do soro corresponde a 12 gotas. Temos,

mililitro do soro	1	2	3	$\cdots$	2400
quant. de gotas	12	24	36	$\cdots$	28800

Tabela 5.4: mililitro do soro quant. de gotas

Temos ainda que,

quant. de horas	1	2	3	$\cdots$	20
quant. de minutos	60	120	360	$\cdots$	1200

Tabela 5.5: quant. de horas quant. de minutos

Logo a quantidade de gotas que o paciente receberá por minuto, será $\dfrac{28800}{1200} = 24$ gotas/min.

- **Resolução do exemplo 5.3 usando função linear:**

  Vamos calcular inicialmente a quantidade de soro que o paciente receberá durante vinte e quatro horas. Vejamos,

$$f(1) = a \cdot 1 = 800 \Rightarrow a = 800.$$

  Daí,

$$f(5) = 5 \cdot 800 = 4000.$$

  Logo, em 24 horas o paciente deverá tomar 4000 mL do soro. Mas, 40% dessa quantidade deverá ser tomada nas primeiras quatro horas. Assim, restará 60% para tomar nas vinte horas restante. Vamos calcular quanto 60% de 4000 mL.

$$g(v) = 0,6 \cdot v \Rightarrow g(4000) = 0,6 \cdot 4000 = 2400.$$

  Portanto nas vinte horas seguintes o paciente receberá 2400 mL do soro. Vamos verificar quantos minutos há em 20 horas.

$$h(t) = 60 \cdot t \Rightarrow h(20) = 60 \cdot 20 = 1200.$$

  Assim, o paciente receberá 2400 mL em 1200 minutos. Cada mililitro do soro corresponde a 12 gotas. Daí,

$$m(x) = 12x \Rightarrow m(1200) = 12 \cdot 1200 = 28800.$$

  Ou seja, o paciente receberá $28800/1200 = 24$ gotas/minutos

- **Resolução do exemplo 5.3 usando regra de três:**

  O paciente receberá 40% nas primeiras quatro horas, logo restará 60% para as vinte horas seguintes. Ele receberá cinco frascos de soro, cada um com 800 mL. Sendo assim, a quantidade de soro é de:

quantidade de frascos	quant. de mililitros
1	800
5	y

$$\frac{1}{5} = \frac{800}{y} \Rightarrow y = 800 \cdot 5 = 4000$$

Portanto o paciente receberá 4000 mL do soro durante as 24 horas, mas dessa quantidade 60% receberá nas últimas vinte horas. Logo,

porcentagem	quant. de mililitros
100	4000
60	y

Daí,

$$\frac{100}{60} = \frac{4000}{y} \Rightarrow y = \frac{60 \cdot 4000}{4000} \Rightarrow y = 2400$$

Assim, o paciente receberá 2400 mL nas últimas vinte horas. Convertendo 20 horas em minutos, temos,

quantidade de horas	quant. de minutos
1	60
20	y

Daí,

$$\frac{1}{20} = \frac{60}{y} \Rightarrow y = 20 \cdot 60 \Rightarrow y = 1200$$

ou seja, nos últimos 1200 minutos o paciente receberá 2400 mL. Mas cada mililitro corresponde a 12 gotas, logo,

quantidade de mL	quant. de gotas
1	12
2400	y

$$\frac{1}{2400} = \frac{12}{y} \Rightarrow y = 12 \cdot 2400 \Rightarrow y = 28800.$$

Segue daí, que o paciente receberá $\frac{28800}{1200} = 24$ gotas/minutos, após as primeiras quatro horas.

Exemplo 5.4 *(Só Matemática [15]) Um ciclista faz um treino para a prova de "1000 metros contra o relógio" mantendo em cada volta uma velocidade constante e obtendo, assim, um tempo correspondente, conforme a tabela 5.6. Qual o tempo transcorrido quando o ciclista desenvolver uma velocidade x m/s?*

velocidade (m/s)	tempo (s)	velocidade · tempo (m)
5	200	1000
8	125	1000
10	100	1000
16	$62,5$	1000
20	50	1000

Tabela 5.6: tabela das grandezas velocidade $\times$tempo

Podemos encontrar esse tipo de problema quando estudamos regra de três ou grandezas inversamente proporcionais. Vamos analisá-lo.

Veja na tabela 5.6 que o produto $velocidade \cdot tempo$ é sempre constante e que ao dobramos a velocidade o tempo diminui pela metade. É o que se chama de proporcionalidade indireta. Resolver esse tipo de problema usando proporcionalidade indireta ou regra de três é do nosso conhecimento e relativamente fácil. Mas, é possível relacionar proporcionalidade indireta com função linear?

Vejamos. Vamos dispor os pares ordenados (v,t) no plano cartesiano para termos uma melhor clareza do comportamento dessas grandezas.

Veja figura 5.4 e perceba que $v \cdot t = 1000 \Rightarrow t = \frac{1}{v} \cdot 1000$.

Ao ver o esboço do gráfico e perceberemos que o gráfico não é uma reta, logo a função que relaciona tais grandezas não é uma função afim.

Ora, quando afirmamos que t é inversamente proporcional a v, estamos afirmando também que t é diretamente proporcional a $\frac{1}{v}$ e vice-versa, ou seja, quando afirmamos que t é

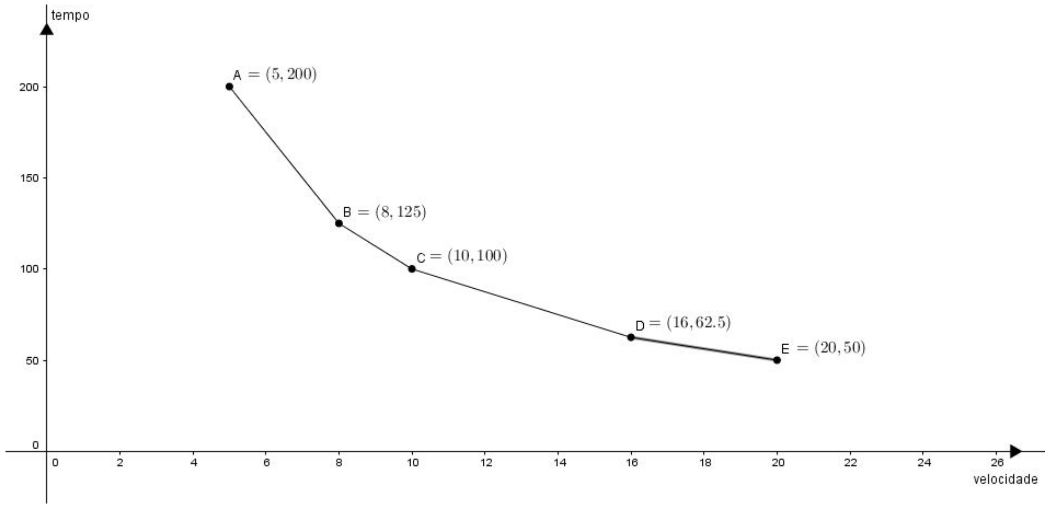


Figura 5.4: gráfico da função $f(v) = \frac{1}{v} \cdot a$

diretamente proporcional a $\dfrac{1}{v}$, estamos afirmando também que t é inversamente proporcional v.

Perceba ainda que

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = t_1 \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

e tomando $\dfrac{v_1}{v_2}$ como nossa variável independente, temos que

$$t_2 = f\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = t_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

Com isso estabelecemos a relação entre grandezas inversamente proporcionais e função linear.

Vejamos o esboço do gráfico dessa função, mas antes vamos construir uma tabela para nos auxiliar nesse esboço.

$x = v_1/v_2$	$t_2 = f(x) = t_1 \cdot x$
$5/8 = 0,625$	$3,125$
$5/10 = 0,50$	$2,5$
$5/16 = 0,3125$	$1,5625$
$5/20 = 0,25$	$1,25$

Esboçando o gráfico temos,

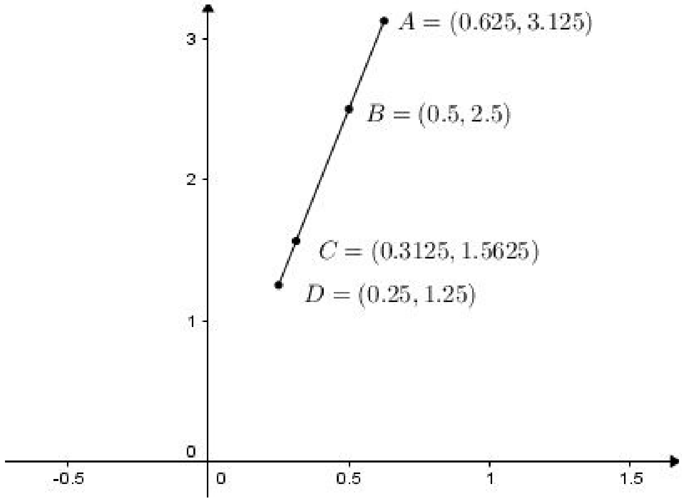


Figura 5.5: gráfico da função $f(x') = a \cdot x'$

Como podemos observar na figura 5.5 o gráfico é uma reta, ou seja, trata-se de um gráfico de uma função afim, mais especificamente de uma função linear.

Conclusão:

- Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$, então temos a seguinte função linear:
$$y_2 = f(x_2) = x_2 \cdot \frac{y_1}{x_1}$$
onde x_2 é nossa variável independente e $\dfrac{y_1}{x_1}$ é a taxa de variação.

- Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$, então temos a seguinte função linear:
$$y_2 = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = y_1 \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$
onde $\dfrac{x_1}{x_2}$ é a nossa variável independente e y_1 é a taxa de variação.

Considerações do Capítulo 5 - Vimos que fica estabelecida uma relação entre função linear e proporcionalidade (direta ou indireta), e consequentemente entre função linear e regra de três. Mas, será que é conveniente usarmos essas relações quando as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais? Entendemos que não. No nosso entendimento ao fazer essa relação o professor não estará facilitando o aprendizado desses conteúdos, mas ao contrário, poderá confundir seu aluno. Veja que a relação existente quando as grandezas são diretamente proporcionais é imediata, enquanto que quando as grandezas são inversamente proporcionais temos que descobrir primeiramente o valor da nossa variável independente e em seguida descobrir o respectivo valor da função.

Dessa forma, entendemos que a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três deve ser apresentada na sala de aula quando as grandezas envolvidas forem diretamente proporcionais. Pois ao estabelecer a relação entre esses conteúdos o professores estará resgatando dois conteúdos muito importantes, vistos no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Ao resolver os exemplos 5.2 e 5.3 usando as ideias de função linear, proporcionalidade e regra de três pudemos verificar que a regra de três é uma maneira mais prática de resolver esses problemas. Mas entendemos que outros podem discordar e entenderem que função linear ou proporcionalidade é a maneira mais prática. A verdade é que os três conteúdos representam uma mesma ideia matemática e que a preferência por uma ou por outra vai depender da familiaridade que se tem com cada conteúdo.

Capítulo 6

Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três nas provas do ENEM

Vimos no capítulo anterior que função linear, proporcionalidade e regra de três são conteúdos que estão estreitamente relacionados e que esses conteúdos representam a mesma ideia matemática. Mas como essa ideia vem sendo explorada nas provas do ENEM? A fim de respondermos essa pergunta examinaremos as provas do ENEM dos últimos cinco anos e procuraremos verificar em quantas questões se emprega a função linear, proporcionalidade ou regra de três para resolvê-las.

São muitas provas, pois esse exame começou a ser aplicado no anos de 1998, por isso, restringimos nossa pesquisa apenas as provas de 2012 a 2016, evitando assim que a apresentação do resultado se torne enfadonho para o leitor. Nessa pesquisa buscaremos identificar as questões em que foram usadas a ideia de função linear, proporcionalidade ou regra de três, para ao final do capítulo apresentarmos o percentual dessas questões nas provas do ENEM.

A pesquisa por essas questões e sua apresentação neste capítulo também se faz necessário como uma contribuição ao professor do Ensino Médio que está ensinando função linear e preparando seu aluno para o ENEM. As questões são diversificadas e boa parte delas usam dados coletados para algum instituto ou instituição. A qualidade dessas questões também é elogiável, pois não encontramos entre elas nenhuma que representasse uma situação-problema inverossímil.

6.1 ENEM 2016

Questão 136 - Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico ("figura 6.1"), formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

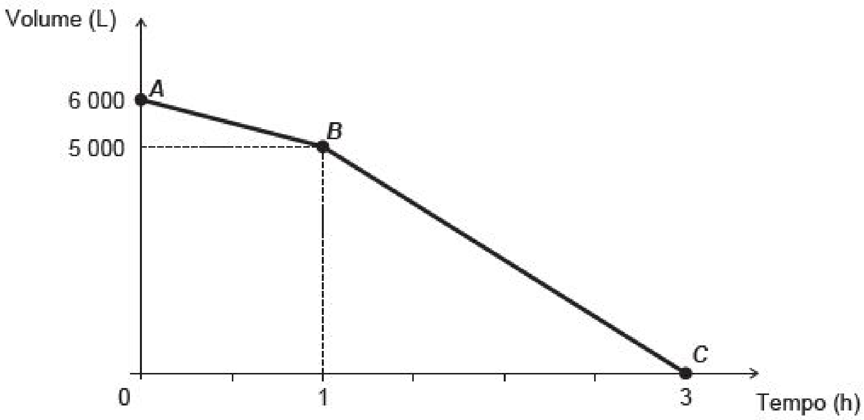


Figura 6.1: figura da questão 136/ENEM2016

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

Questão 140 - Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes período, em dia, como seguem:

* Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
* Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
* Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
* Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
* Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

www.redebrasilatual.com.br. Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é ...

Questão 142 - Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 mL de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.

O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será ...

Questão 145 - O LIRAa, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por Aedes aegypti, consiste num mapeamento da infestação do mosquito Aedes aegypti. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;

II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;

III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;

IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;

V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 28 out. 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro ...

Questão 146 - Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico (“figura 6.2”). Suponha essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

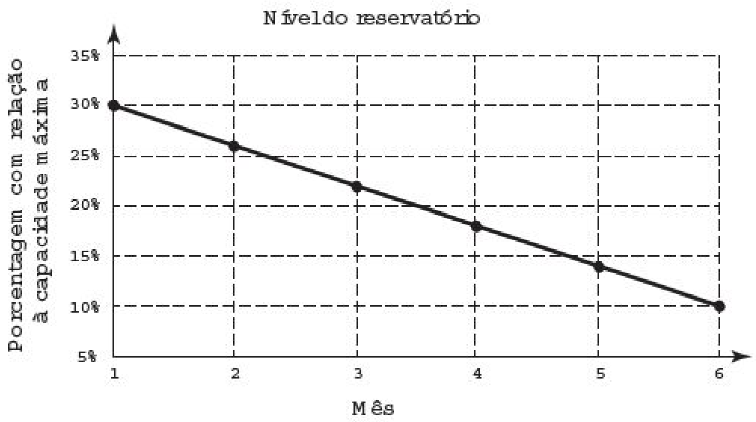


Figura 6.2: figura da questão 146/ENEM2016

Questão 150 - O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei n° 8.213/91, que dispõe:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoa com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:

I. até 200 empregados 2%;

II. de 201 a 500 empregados.............................. 3%;

III. de 501 a 1 000 empregados........................... 4%;

IV. de 1 001 em diante.. 5%.

Disponível em: www.planalto.gov.br. Acesso em: 3 fev. 2015.

Constatou-se que a empresa possui 1 200 funcionários, dos quais são reabilitados ou com deficiência, habilitados.

Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no art. 93. artigo 93.

O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é ...

Questão 151 - Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser ...

Questão 155 - Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

Questão 159 - Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

* Marca A: 2 g de fibra a cada 50 g de pão;
* Marca B: 5 g de fibra a cada 40 g de pão;
* Marca C: 5 g de fibra a cada 100 g de pão;
* Marca D: 6 g de fibra a cada 90 g de pão;
* Marca E: 7 g de fibra a cada 70 g de pão;

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é ...

Questão 167 - A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.

O gráfico (“figura 6.3”) apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.

Disponível em: www.aprocura.com.br. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

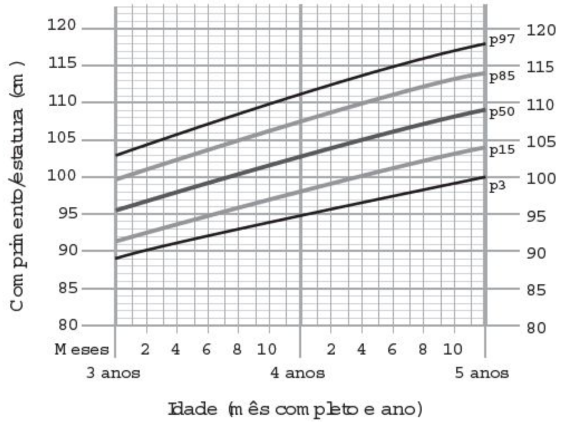


Figura 6.3: figura da questão 167/ENEM2016

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50.

Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina,descrito com uma casa decimal, no período considerado?

Questão 169 - O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela ("figura 6.1") apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos 1940 e 2000, referentes à população total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000

Grandes regiões	População residente					
	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1 632 917	12 900 704	368 528	3 895 400	1 264 389	9 005 304
Nordeste	14 434 080	47 741 711	1 270 729	10 162 346	13 163 351	37 579 365
Sudeste	18 278 837	72 412 411	3 346 991	18 822 986	14 931 846	53 589 425
Sul	5 735 305	25 107 616	459 659	3 290 220	5 275 646	21 817 396
Centro-Oeste	1 088 182	11 636 728	152 189	4 291 120	935 993	7 345 608

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940/2000.

Figura 6.4: figura da questão 169/ENEM2016

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é ...

Questão 173 - A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura ("figura 6.5").

No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários. O índice Gini, que mede o grau de concentração de

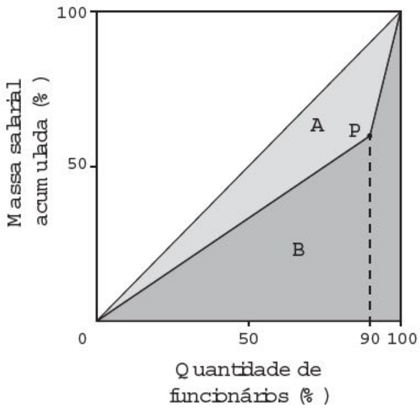


Figura 6.5: figura da questão 173/ENEM2016

renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $\dfrac{A}{A+B}$, em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu índice Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Disponível em: www.ipea.gov.br. Acesso em: 4 maio 2016 (adaptado).

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser ...

Questão 174 - Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: d_A, d_B, d_C. Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B e esse, por sua vez, tinha $\frac{3}{4}$ da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira ...

Questão 175 - No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura "6.6" a seguir.

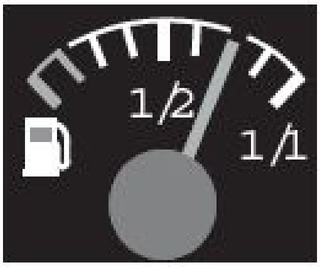


Figura 6.6: figura da questão 175/ENEM2016

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida. Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

Questão 177 - Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas XOY da figura "6.7", em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

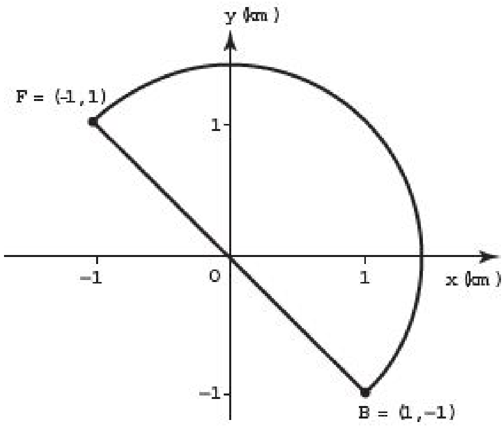


Figura 6.7: figura da questão 177/ENEM2016

Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$. O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de ...

Questão 178 - Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura “6.8”. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento. Utilize 3 como

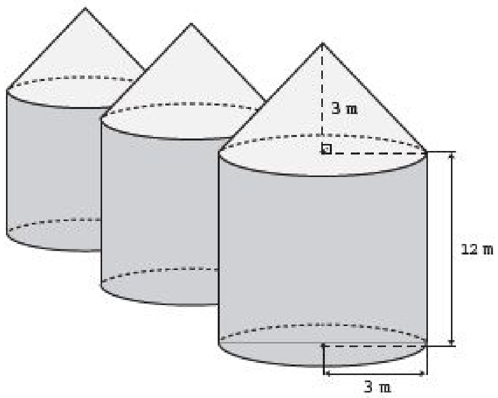


Figura 6.8: figura da questão 178/ENEM2016

aproximação para π. O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é ...

Questão 179 - Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1 : 8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.

A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente,

Questão 180 - A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou

Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Figura 6.9: figura da questão 180/ENEM2016

surpreendido com o resultado obtido em metros.

Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

6.2 ENEM 2015

Questão 136 - Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema (“figura 6.10”).

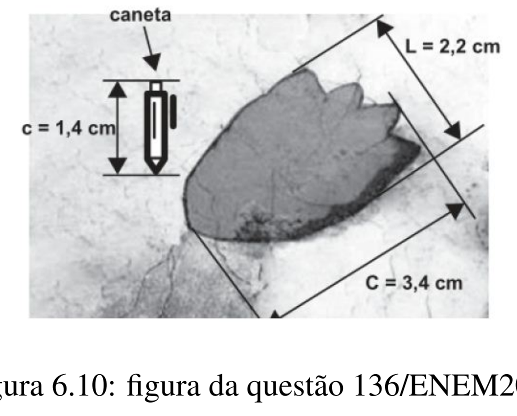


Figura 6.10: figura da questão 136/ENEM2015

A largura e o comprimento da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a ...

Questão 137 - Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de $(d-1)$ milímetros, conforme a figura "6.11". O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.

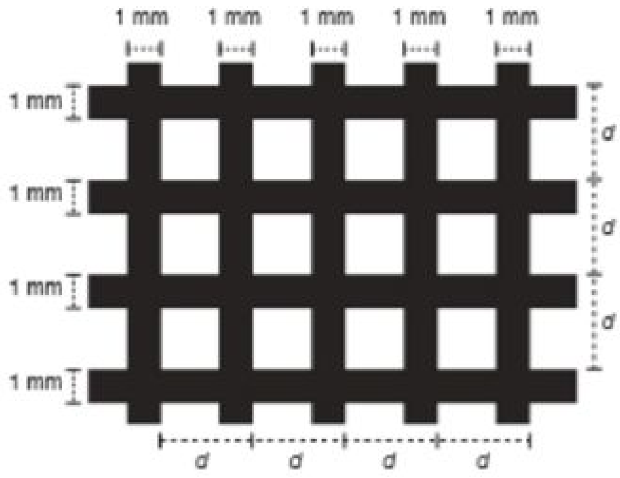


Figura 6.11: figura da questão 137/ENEM2015

Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é ...

Questão 139 - A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma caneta na qual pode ser inserido um refil contendo 3mL de insulina, como mostra a imagem ("figura 6.18").

Figura 6.12: figura da questão 139/ENEM2015

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite. Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

Questão 152 - Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de $1.000 cm^3$ e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é ...

Questão 154 - Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras (figura"6.13"):

Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o ...

Questão 156 - Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado na superfície corporal.

O quadro ("'figura 6.14") apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de ...

Questão 157 - Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08m3 de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser ...

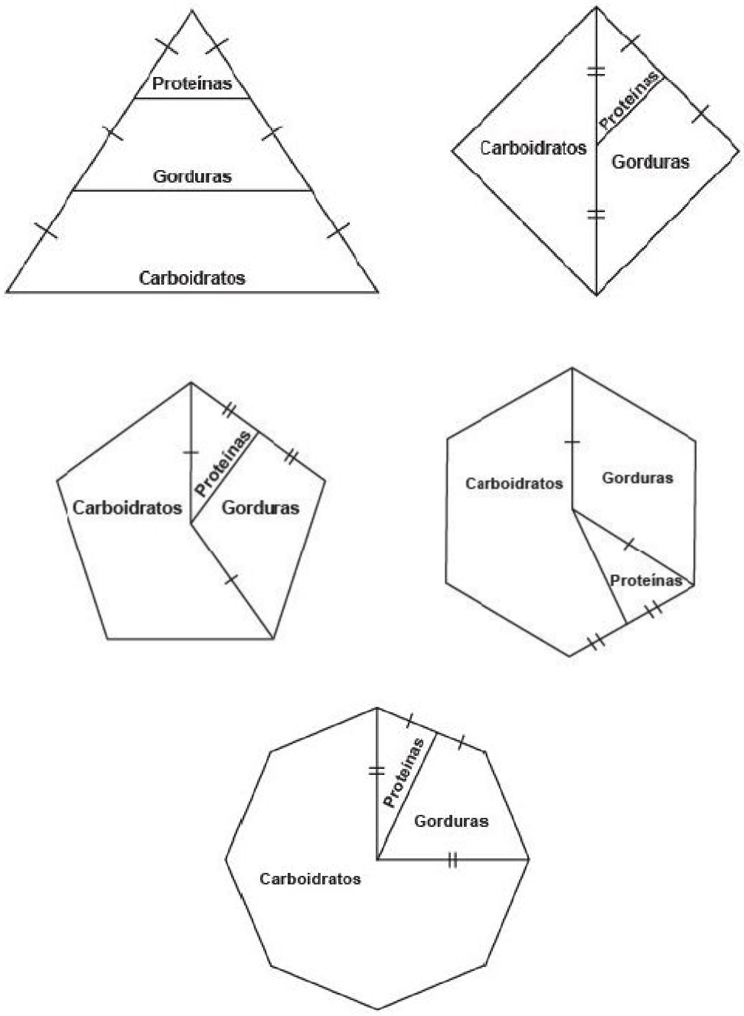


Figura 6.13: figura da questão 154/ENEM2015

Questão 161 - Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é ...

Questão 163 - Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juros de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m²)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

Figura 6.14: figura da questão 156/ENEM2015

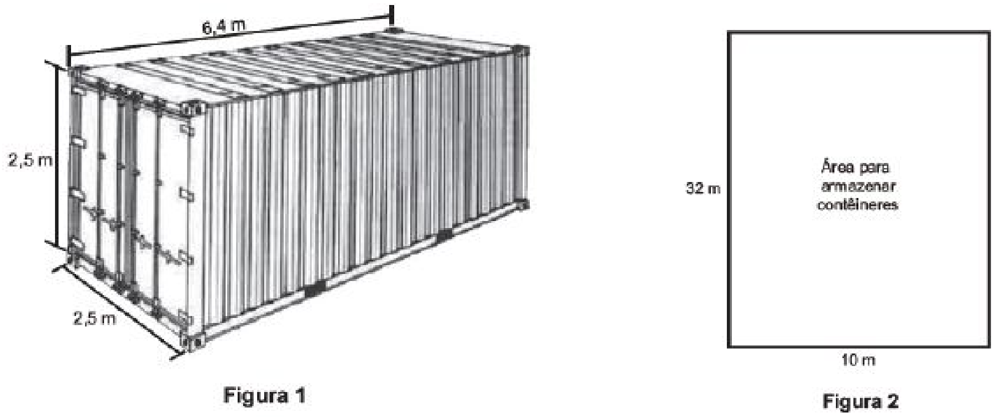


Figura 6.15: figuras da questão 161/ENEM2015

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de ...

Questão 166 - Segundo dados apurados no Censo 2010, para uma população de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em 2010, a renda média mensal apurada foi de R$ 1 202,00. A soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres correspondeu a apenas 1,1% do total de rendimentos dessa população considerada, enquanto que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos correspondeu a 44,5% desse total.

Qual foi a diferença, em reais, entre a renda média mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos e de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais pobres?

Questão 173 - O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos ("figura 6.16") mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

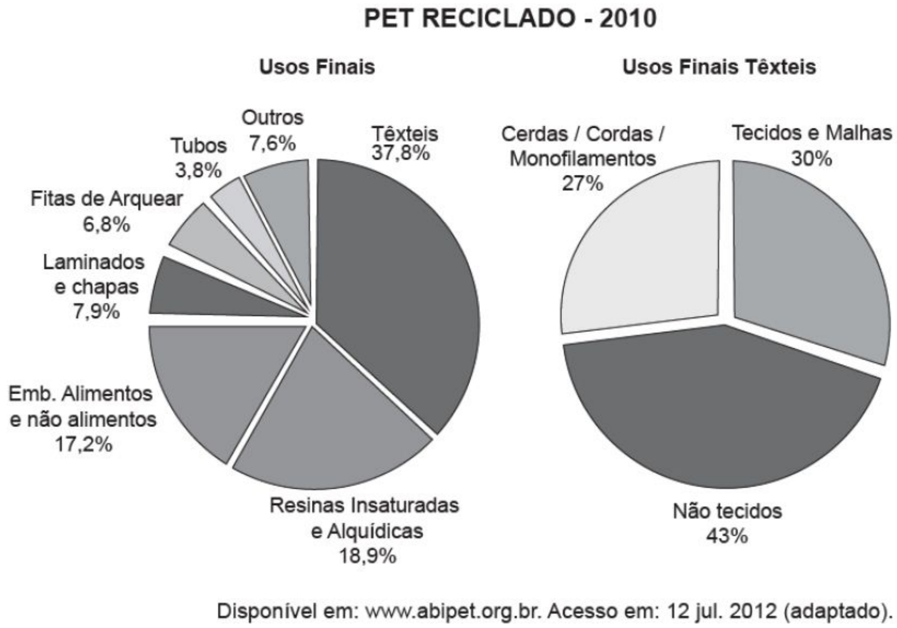


Figura 6.16: figuras da questão 173/ENEM2015

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de ...

Questão 176 - Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as dez horas que antecedem um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

Garrafa I: 0,15 litro
Garrafa II: 0,30 litro
Garrafa III: 0,75 litro
Garrafa IV: 1,50 litro
Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

Questão 178 - O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu calculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m^2, ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m^2 de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de...

6.3 ENEM 2014

Questão 136 - Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é ...

Questão 137 - De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

* 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
* 33% são utilizados em descarga de banheiro.
* 27% são para cozinhar e beber.
* 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia. O quadro ("figura 6.17") mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades. Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro,

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Figura 6.17: figura da questão 137/ENEM2014

mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água ...

Questão 139 - Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura "6.18".

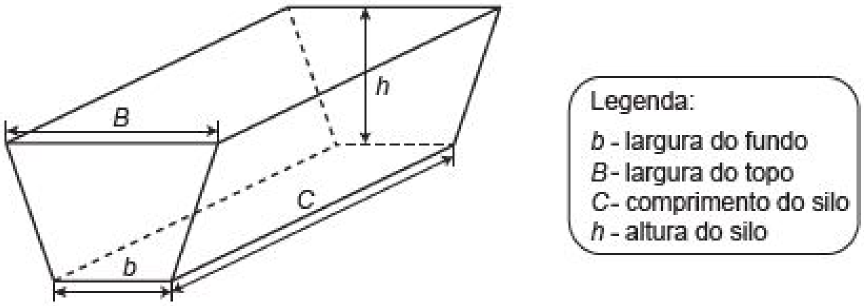


Figura 6.18: figura da questão 139/ENEM2014

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br.

Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é,

Questão 140 - A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.

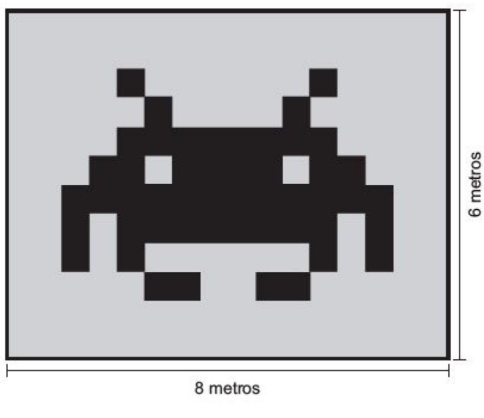


Figura 1

Figura 6.19: figura 1 da questão 140/ENEM2014

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.

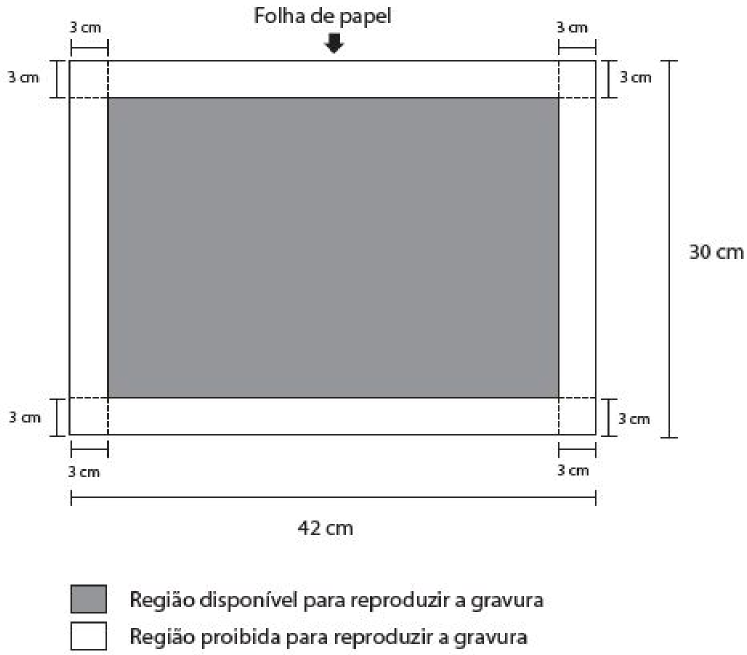


Figura 2

Figura 6.20: figura 2 da questão 140/ENEM2014

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é ...

Questão 141 - Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno do cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura "6.21".

Figura 6.21: figura da questão 141/ENEM2014

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

Questão 142 - Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente ...

Questão 144 - A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

Questão 145 - Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- Recipiente I: 0,125 litro
- Recipiente II: 0,250 litro
- Recipiente III: 0,320 litro
- Recipiente IV: 0,500 litro
- Recipiente V: 0,800 litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

Questão 146 - Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem P da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é ...

Questão 153 - Um show especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.
Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

Questão 155 - Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura “6.22”.

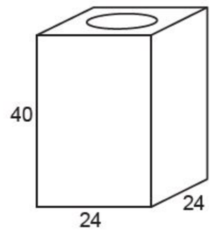


Figura 6.22: figura da questão 155/ENEM2014

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em ...

Questão 156 - Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas.

Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.
Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser ...

Questão 157 - Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1 (“figura 6.23”). No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução está no gráfico 2 (“figura 6.24”).

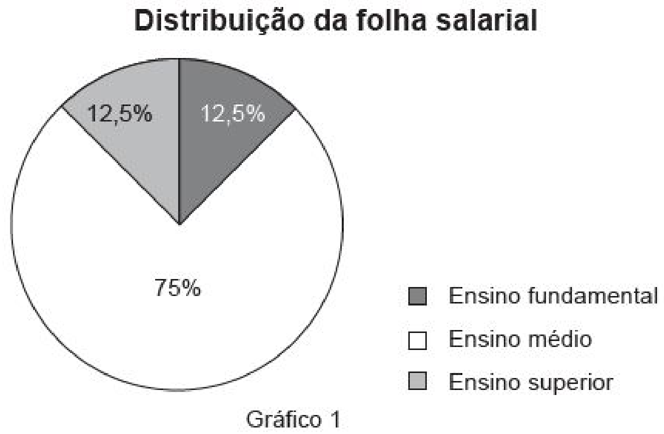


Figura 6.23: figura 1 da questão 157/ENEM2014

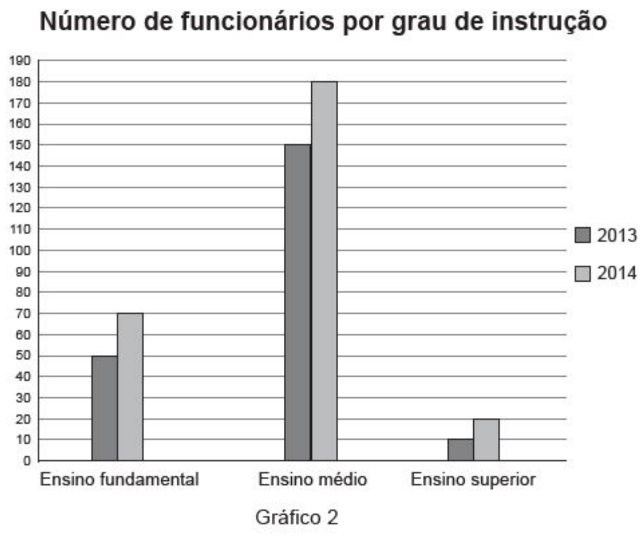


Figura 6.24: figura 2 da questão 157/ENEM2014

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

Questão 162 - O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos.

Folha de S. Paulo, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de ...

Questão 165 - Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) $\times$ consumo (em kWh) Cosip.

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro ("figura 6.25") mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Figura 6.25: figura da questão 165/ENEM2014

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

Questão 169 - O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.
O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será ...

Questão 171 - Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro ("figura 6.26") refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. **Epidemiologia**: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Figura 6.26: figura da questão 171/ENEM2014

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de ...

Questão 172 - Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.
O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é ...

Questão 174 - Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura "6.27". A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

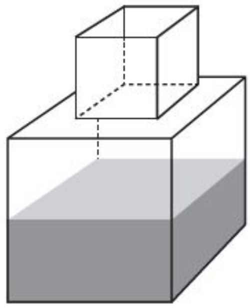


Figura 6.27: figura da questão 174/ENEM2014

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

Questão 175 - Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm $\times$ 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.
Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

Questão 176 - Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.
A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era ...

Questão 179 - A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela ("figura 6.28") apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Figura 6.28: figura da questão 179/ENEM2014

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de ...

6.4 ENEM 2013

Questão 136 - Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura “6.29”. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.

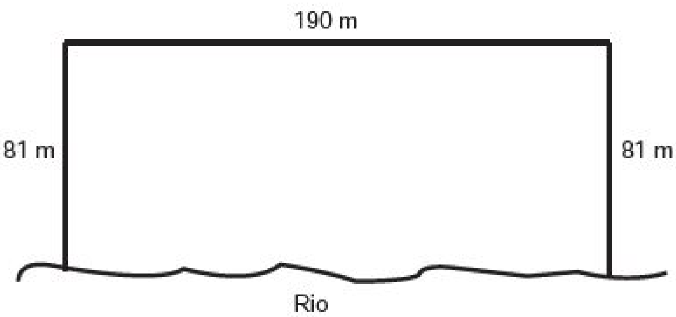


Figura 6.29: figura da questão 136/ENEM2013

A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é ...

Questão 141 - O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura “6.30” representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

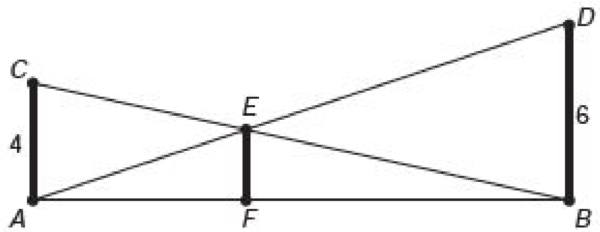


Figura 6.30: figura da questão 141/ENEM2013

Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

Questão 146 - A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico ("figura 6.31").

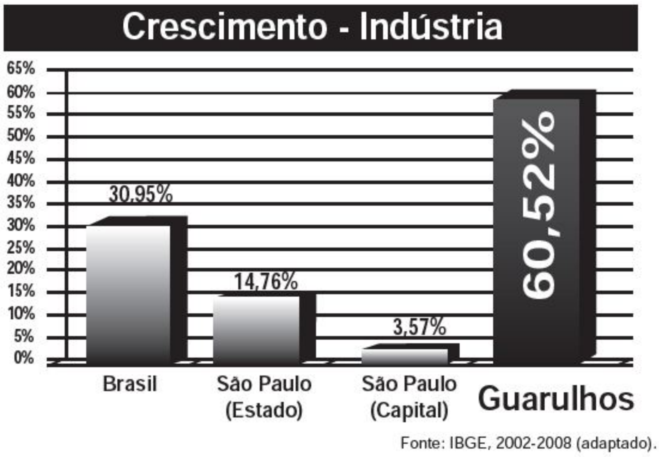


Figura 6.31: figura da questão 146/ENEM2013

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

Questão 151 - Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico ("figura 6.32"), as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.

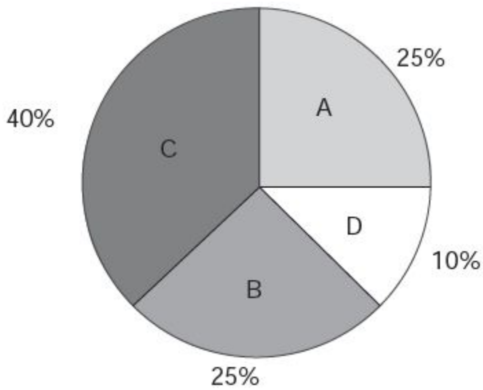


Figura 6.32: figura da questão 151/ENEM2013

O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é...

Questão 152 - Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de ...

Questão 153 - Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro ("figura 6.33") mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Figura 6.33: figura da questão 153/ENEM2013

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente...

Questão 156 - A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura "6.34", na escala 1 : 25 000, por um período de cinco dias.

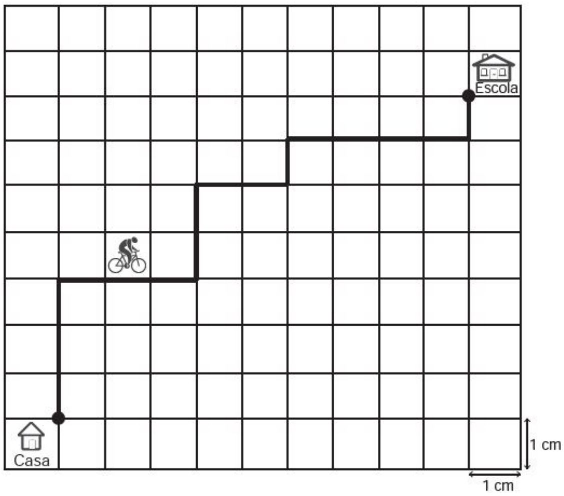


Figura 6.34: figura da questão 156/ENEM2013

Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

Questão 164 - Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d'água tem volume de 0,2 mL.

Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

Questão 165 - Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a ...

Questão 168 - O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de ...

Questão 169 - Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e

2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

Questão 173 - A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em ...

Questão 176 - Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de ...

Questão 179 - O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número ...

Questão 180 - A figura "6.35" apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.

Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.
Esse número é ...

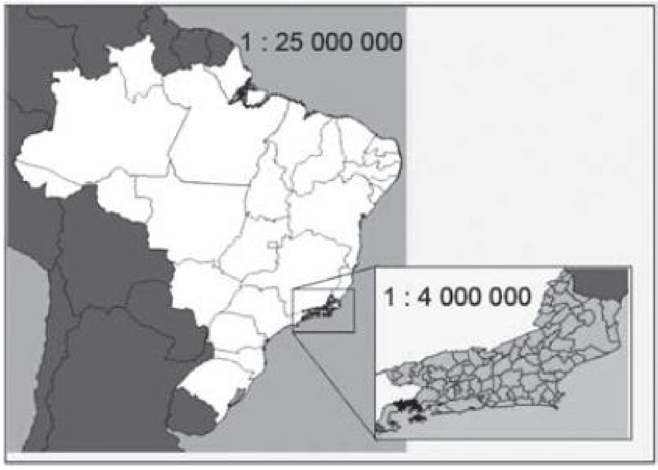


Figura 6.35: figura da questão 180/ENEM2013

6.5 ENEM 2012

Questão 136 - Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.

Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

Questão 139 - Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura "6.36" a seguir.

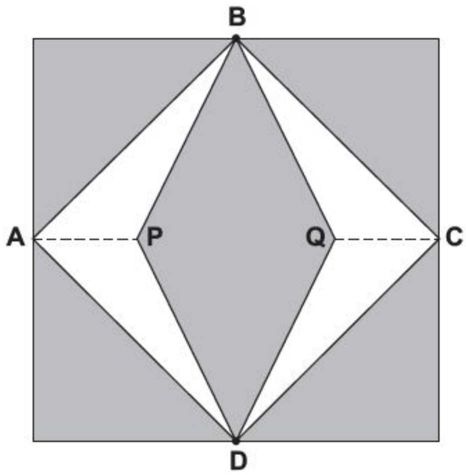


Figura 6.36: figura da questão 139/ENEM2012

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

Questão 143 - Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de ...

Questão 153 - Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção ...

Questão 158 - Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura “6.37” a seguir.

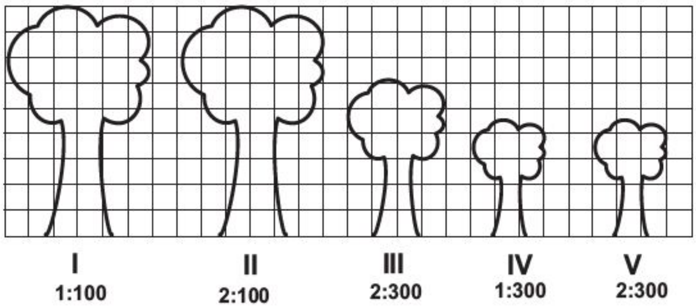


Figura 6.37: figura da questão 158/ENEM2012

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

Questão 163 - Nos shopping centers costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.
Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é ...

Questão 164 - O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas.

Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

Questão 165 - O losango representado na Figura 1 ("figura 6.38") foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2 ("figura 6.39").

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento "percentual" de...

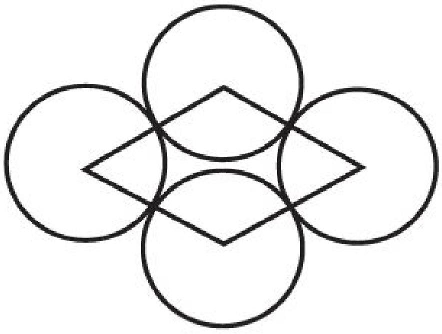


Figura 6.38: figura 1 da questão 165/ENEM2012

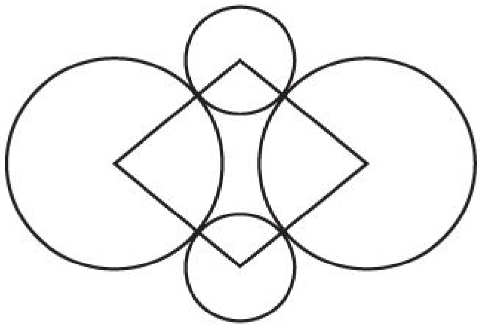


Figura 6.39: figura 2 da questão 165/ENEM2012

Questão 166 - José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção $6 : 5 : 4$, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

Questão 172 - A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo "espaços vazios" que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um valor que é...

Questão 176 - Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3' 0" a leste do Meridiano de Greenwich.
Dado: 1° equivale a 60' e 1' equivale a 60".

PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado).

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é...

Questão 178 - Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

Questão 180 - Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro ("tabela 6.1") a seguir:

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Tabela 6.1: tabela da questão 180/ENEM2012

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de...

6.6 Comentários sobre o capítulo

Vimos no capítulo anterior que função linear, proporcionalidade e regra de três representam uma mesma ideia matemática, assim vamos construir um tabela para apresentar o número de questões que envolvem essa ideia e ainda o percentual que esse número representa do total de questões da prova de matemática do ENEM.

Os números que passaremos a apresentar se referem a questões em que o conceito de um desses conteúdos foi usado. Porém, frisamos que não queremos dizer com isso que apenas esse conceito é suficiente para resolvermos tais questões e sim que em algum momento essa ideia deverá ser empregada. Esclarecemos ainda que entre essas questões que selecionamos estão aquelas em que é necessário o uso de porcentagens ou de escalas, já que esses conteúdos se tratam de casos especiais de proporcionalidade, como ensinamos no sétimo ano do Ensino Fundamental. Encontramos questões de probabilidade que usavam porcentagens em seus enunciados, mas essas não foram selecionadas, pois as porcentagens não eram calculadas nas resoluções desses problemas, apenas eram apresentadas no enunciado.

ano	quantidade de questões	porcentagem
2016	18	40,0
2015	13	28,9
2014	22	48,9
2013	14	31,1
2012	13	28,9

Tabela 6.2: percentual de questões que envolvem proporcionalidade nas provas do ENEM

Analisando os dados apresentados na tabela 6.2 podemos perceber que o percentual de questões que envolvem a ideia de proporcionalidade e regra de três é bastante significativo, chegando a 48,9% no ano de 2014, o que deixa claro a importância desses conteúdos para aqueles que elaboram as provas do ENEM. Dessa forma é imperiosa a necessidade de darmos uma maior atenção ao abordarmos esses conteúdos na sala de aula. Daí a necessidade de se aproveitar o momento em que formos trabalhar com os alunos o conteúdo de função linear para estabelecermos a relação com proporcionalidade e regra de três, dois conteúdos tão explorados nesses exames.

Não tivemos como objetivo nesse capítulo de fazer um estudo para verificar a qualidade das questões. Mas nos chamou atenção o fato de em várias delas estarem sendo usados dados de pesquisas realizadas por alguma instituição ou instituto. Como exemplo, podemos citar a questão 150 do ENEM de 2016 e entendemos que isso é positivo, pois mostra que a matemática representa ideias factíveis do nosso dia a dia, sendo uma ferramenta que auxilia e ajuda na compreensão de vários fenômenos estudados por outras ciências.

Também nos chamou atenção o fato de que a maioria das questões serem contextualizadas e do tipo abertas, levando o aluno a tentar identificar qual conteúdo está sendo tratado nas questões e quais técnicas ele deve empregar para resolvê-las.

Capítulo 7

Conclusões

A primeira conclusão a que chegamos ao fim dessa dissertação é que devemos dar mais atenção àqueles conteúdos aos quais podemos estabelecer uma relação com a proporcionalidade, haja vista a importância desse conteúdo. Nesta dissertação vimos, especialmente no Capítulo 5, que existe uma estreita relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três e que esse fato pode e deve ser explorado no momento em que estivermos apresentando a função afim numa turma do primeiro ano do Enino Médio. Certamente esse não é o único conteúdo que podemos associar à proporcionalidade, por exemplo, semelhança de triângulos e porcentagem são exemplos de conteúdos que também podemos usar para reforçar o ensino da proporcionalidade.

O porquê da nossa preocupação em estabelecermos a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três é muito simples. A ideia de proporcionalidade é muito usada durante o Ensino Básico, como também em situações do nosso cotidiano. Podemos verificar o uso da proporcionalidade em situações de compra e venda, ou ainda em algumas prescrições médicas. Essa importância pode ser verificada também ao examinarmos o Capítulo 6, onde analisamos algumas provas do ENEM para constatarmos que esse é o conteúdo mais explorado nesses exames.

Ora, saber resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais é relativamente fácil. Para isso o aluno pode usar função linear, proporcionalidade ou regra de três. Mas tão importante quanto saber quando empregar estas ideias é saber quando não usá-las. A ideia de proporcionalidade é tão natural que muitos alunos se confundem e empregam essas ideias em situações-problemas em que as grandezas envolvidas não são proporcionais. Um aluno descuidado pode usar a ideia de proporcionalidade no emblemático problema da corrida de táxi (exemplo 4.11, pág. 51) ou ainda no problema da freada do automóvel (exemplo 4.13, pág. 52). Sendo assim, entendemos que se faz necessário apresentarmos exemplos que envolvam grandezas não proporcionais, para assim ajudar o aluno entender melhor quando empregar essa ideia e quando não empregá-la.

Concluímos ainda que os livros didáticos analisados no Capítulo 3 diferem na abordagem das Funções Afins. Uns apresentam as demonstrações, outros não. Uns procuram estabelecer a relação entre função linear e proporcionalidade, outros não. O que nos faz concluir que um professor ao planejar suas aulas deve pesquisar os conteúdos em várias fontes, para assim fazer uma abordagem mais completa do conteúdo que estiver trabalhando.

Outra conclusão é que devemos estar atentos à lista de exercícios do livro didático que usamos nas nossas aulas. Essa preocupação se justifica pelo fato de termos encontrado nos três livros didáticos analisados questões que em nossa opinião não ficaram bem formuladas (veja seção 3.6). Um professor mais atento poderá desaconselhar seus alunos a tentarem resolvê-las, ou em alguns casos, pode fazer algumas considerações para tentar minimizar as falhas apresentadas nessas questões. Os conteúdos que abordamos nas nossas aulas devem estar imbricados com situações-problemas que encontramos no nosso dia a dia, atendendo às necessidades da vida contemporânea. Sendo assim, entendemos que o professor deve evitar a apresentação de situações imaginárias, ou pior, irreais. É na lista de exercícios que podemos encontrar esse afastamento da realidade, pois em algumas questões são usados argumentos inverídicos a fim de modelar uma situação problema.

Fizemos essa dissertação acreditando, por fim, que toda nossa pesquisa possa ser usada por alunos e professores no que se refere ao ensino de função afim e à relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três.

Referências Bibliográficas

[1] DE MORAIS FILHO, D. C.; *Manual de Redação Matemática, com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como escrever uma dissertação*, 1^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (2014), 186p.

[2] *BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio), Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, MEC/SEF, Brasília, (1997). 58p.

[3] *BRASIL, Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, v. 2, Brasília, MEC/SEB, (2006), 140p.

[4] LIMA, et al. *A Matemática do Ensino Médio - volume. 1*. 9ª edição. Coleção do Professor de Matemática; Rio de Janeiro: SBM, (2006), 280p.

[5] LIMA, Elon Lages et al. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, (2001).

[6] ZILL, Dennis G. ; CULLEN, Michel R., *Equações Diferenciais*, 3ª edição. v. 1. São Paulo, Pearson Makron Books, (2001), 467p

[7] DANTE, Luiz Roberto, *Matemática : Contexto e Aplicações*, v. 1, São Paulo, Ática, (2010), 504p.

[8] LEONARDO, Fábio Martins de, *Conexões com a Matemática*, 2ª edição, v. 1, São Paulo, Moderna, (2013), 504p.

[9] PAIVA, Manoel Rodrigues, *Matemática (Ensino Médio)*, 2ª edição, volume 1, São Paulo, Moderna, (2010), 600p.

[10] LIMA, Elon Lages, *Álgebra Linear*, 8ª edição, Rio de Janeiro: SBM, (2009), 357p.

[11] LIMA, Elon Lages et al. *Temas e Problemas*, 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, (2010), 225p.

[12] DANTE, Luiz Roberto, *Projeto Teláris*: Matemática 7º ano, 2ª edição, São Paulo, Editora Ática, (2015), 400p.

[13] CHIQUETTO, Marcos José; PARADA, Antonio Augusto, *FÍSICA, vol. 1 - Mecânica*, 2ª edição, São Paulo/SP, Editora Scipione, (1991), 383p.

[14] INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) - *Provas do ENEM* - disponível em http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos, último acesso em 01/06/2017.

[15] Só Matemática. Disponível em http://www.somatematica.com.br/fundam/graninv.php, último acesso em 02/05/2017.

[16] POLESSO, Rodrigo, *Saiba porque 95% das dietas falham!*, disponível no site http://emagrecerdevez.com/saiba-por-que-95-das-dietas-falham/, último acesso em 26/06/2017.

[17] MORETTO, Vasco Pedro, *Educar para competências: o desafio do professor no novo contexto social*, Santos/SP, disponível em www.portal.santos.sp.gov.br/seduc/request.php?1596. último acesso em 14/06/2017

[18] *Revista do Professor de Matemática*, disponível em http://rpm.org.br/cdrpm/12/5.htm. Acesso em 21 de março de 2017.