



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



INDUÇÃO E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS NO ENSINO MÉDIO

Bruno Vinicius Alves de Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB
Agosto/2019

F866i Freitas, Bruno Vinicius Alves de.
Indução e progressões aritméticas no ensino médio / Bruno
Vinicius Alves de Freitas. – Campina Grande, 2019.
76 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes".
Referências.

1. Indução. 2. Recorrência. 3. Progressão Aritmética. I.
Fernandes, José de Arimatéia. II. Título.

CDU 511.1(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



INDUÇÃO E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS NO ENSINO MÉDIO

por

Bruno Vinicius Alves de Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

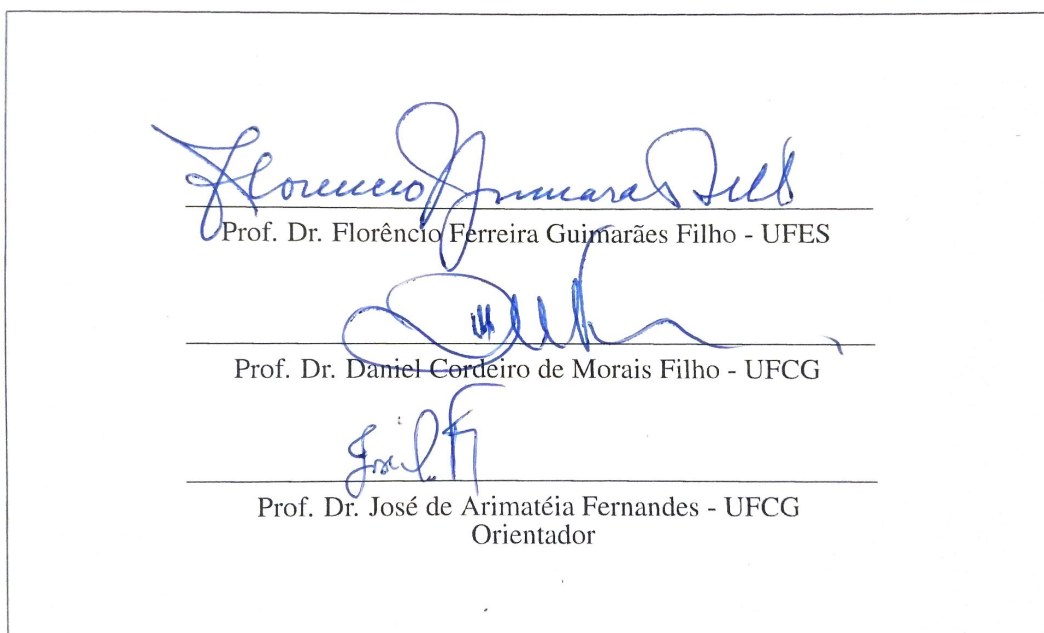
INDUÇÃO E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS NO ENSINO MÉDIO

por

Bruno Vinicius Alves de Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto / 2019

Abstração

Ultimamente tão banalizada e escanteada que até me questiono sobre sua necessidade.

É que mesmo me dedicando a ela por paixão, fica difícil os convencer da sua precisão.

Porém, dela originaram-se muitos nortes, como em Política, de Aristóteles, ou em Os Elementos, de Euclides.

Não desdenhe dos benefícios da abstração, pois sem ela não teríamos os sólidos de Platão.

Por isso deixo aqui o meu apelo: nunca julgue algo ou alguém, sem antes conhecê-lo!

Bruno V. A. Freitas

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar o meu caminho e minhas ideias de modo que eu pudesse ter maturidade e resiliência necessárias para enfrentar as dificuldades nessa trajetória em direção à obtenção do título de mestre.

À minha mãe, Zilaester Alves de Freitas, pela imensa dedicação e esforço em proporcionar a mim e a meus irmãos excelentes condições de estudo e pelo amor com que nos educou, nos mantendo sempre unidos.

Aos meus irmãos, Ricardo Alves de Freitas, Cláudio Henrique Alves de Freitas e Lucas Alves de Freitas, aos meus primos Lyom Martins Cordeiro e Renato Jordan Alves Teixeira, por me incentivarem e pelos excelentes momentos de descontração.

Agradeço também a meu pai, Francisco Claudiomar Martins de Freitas, que, quando em vida, me mostrou os primeiros passos para a realização de um estudo crítico dos temas da matemática.

À minha amiga física, feminista e umbandista Cícera Carla de Souza Pereira, pelo apoio incomensurável durante toda a minha formação. Também agradeço à Omolu e Iemanjá por guiarem-na em seu caminho e por a colocarem em minha vida. Você é a minha pessoa.

À minha amiga Denise Bonfim Oliveira, pela gentileza e cortesia em corrigir minha dissertação e também pelas esclarecedoras conversas sobre as dificuldades de um mestrando, além de muitos outros temas.

Um obrigado especial à Carla Simone de Souza e Silva, gestora da Escola Professor Jorge de Menezes, por compreender minha situação de mestrando e sempre ter me ajudado no ajuste dos meus horários de trabalho.

Aos meus amigos de curso Marcos dos Santos Silva, Jadielson Silva de Oliveira, Camila Paulino Marques, João Bosco de Souza e Luiz Sales Carneiro, pelo companheirismo durante todo o mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes e aos membros da banca Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho e Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, por estarem sempre atentos ao avaliarem meu trabalho e pelas sugestões que contribuíram imensamente para a melhoria do mesmo.

A todos os servidores técnico-administrativos e terceirizados da UAMat pelo importante e indispensável trabalho que realizam.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

O presente trabalho aborda temas como *Indução Matemática*, *Sequências*, *Somatórios* e *Progressões Aritméticas* (PA's), com ênfase no *Princípio da Indução Finita* e suas variantes, no uso do princípio da indução para a construção de definições e para demonstrações, dando destaque também ao incentivo à investigação matemática ao tratar das expressões gerais que representam alguns tipos de somatórios e na obtenção de fórmulas para o termo geral e para a soma dos termos de uma progressão aritmética de segunda ordem. Relaciona a caracterização das *Funções Afins* e *Funções Quadráticas* com PA's de primeira e segunda ordem, respectivamente, além de tratar de aplicações deste último caso de progressões aritméticas. Traz um pouco do contexto histórico desses temas e também uma justificativa para ensino dos mesmos, com base nos documentos oficiais e legislação da educação do Brasil.

Palavras-Chaves: Indução. Recorrência. Progressão aritmética.

Abstract

This paper discusses topics such as *Mathematical Induction*, *Sequences*, *Sums*, and *Arithmetic Progressions*, with emphasis on the *Principle of Finite Induction* and its variants, on the use of the induction method for constructing definitions and demonstrations, with emphasis on encouraging research mathematics when dealing with the general expressions that represent some types of summation and in obtaining formulas for the general term and the sum of the terms of a second order arithmetic progression. Relates the characterization of *Affine Functions* and *Quadratics Functions* with arithmetics progressions of first order and arithmetics progressions of second order, respectively. Besides dealing with applications of this last case of arithmetics progressions. Brings a smal historic context of this them and also a justify for teatching them, based in oficials documents and education' legislation of Brazil.

Keywords: Induction. Recurrence. Arithmetic progression.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Objetivos	4
1.1.1	Gerais	4
1.1.2	Específicos	4
1.2	Organização	5
2	A importância do estudo das sequências	6
2.1	Um pouco de história	6
2.2	A BNCC e os PCN sobre o ensino de sequências	12
2.3	Questões do ENEM e da OBMEP sobre sequências	16
3	Indução Matemática	20
3.1	Os Axiomas de Peano	20
3.1.1	O Princípio da Indução para Demonstrações	20
3.1.2	O Princípio da Indução para Construção de Definições	24
3.1.3	Aplicações do Princípio da Indução	25
4	Sequências e Somação por partes	37
4.1	Sequências	37
4.1.1	Definição (Sequência)	37
4.1.2	Definição (Progressão Aritmética)	38
4.1.3	Termo Geral de uma PA	38
4.1.4	Soma dos termos de uma PA	39
4.1.5	Progressões aritméticas de ordem superior	41
4.2	Somação por partes	45
5	Funções e Progressões Aritméticas	48
5.1	Caracterização das funções afim	48
5.2	Caracterização das funções quadráticas	51
5.3	Progressões Aritméticas de Ordem 2	56
5.3.1	Termo Geral de uma PA de segunda ordem	56

5.3.2	Soma dos Termos de uma PA de segunda ordem	58
5.4	Números Poligonais	59
6	Conclusões	63
	Referências Bibliográficas	65
A	Resolução das questões do ENEM e da OBMEP	67
B	Trabalhando Números Poligonais no Ensino Médio	75

Capítulo 1

Introdução

Para os que se dedicam ao estudo da Matemática, de certo sabem que Indução matemática nos fornece um eficiente método de demonstração e também de construção de definições por recorrência, embora não seja incentivado o seu estudo no ensino médio, pois a demonstração de teoremas não é uma competência que precise ser alcançada pelo aluno desse nível de ensino, talvez porque o estudo desse tema demande um nível de abstração não habitual para a realidade da maioria dos alunos. Porém, o princípio da indução também serve para entendermos o raciocínio recursivo na construção de algumas definições, o que certamente contribuirá para um entendimento mais completo da linguagem matemática. Este trabalho propõe-se a tentar, de maneira detalhada, explicar o uso do princípio da indução, de modo que a leitura deste possa servir tanto ao professor do ensino básico quanto ao aluno que queira se aprofundar neste tema.

A criatividade matemática, muitas vezes posta de lado para dar lugar à aplicação inconsciente de fórmulas, também é uma característica importantíssima para qualquer um que se disponha a estudar e evoluir dentro do campo da matemática. Essas fórmulas devem ser usadas somente após entender as motivações para sua criação, sempre procurando compreender as peculiaridades do contexto a que será aplicada. Questionamentos sobre, por exemplo, como se obtém a fórmula do termo geral e da soma dos termos de uma progressão aritmética de ordem igual a ou maior que 1, devem ser incentivados de forma que o aluno possa despertar ou manter o uso da sua criatividade ao utilizar seus conhecimentos matemáticos prévios para a obtenção dessas respostas.

Segundo [13], a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em sua segunda competência geral destaca que o aluno deve ser capaz de “*exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções [...]*”.

Essa é a principal proposta deste trabalho no que se refere a exercitar a curiosidade e a criatividade: fazer com que o leitor entenda a importância da investigação de um problema matemático e da elaboração de soluções diversas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Gerais

1. Mostrar o princípio da indução como um importante instrumento para demonstração de propriedades relativas aos números naturais e também como base para construção de definições;
2. Estimular a criatividade ao investigar a obtenção das fórmulas para o termo geral e para a soma dos termos de uma progressão aritmética de segunda ordem.
3. Relacionar as funções afins e as funções quadráticas com as progressões aritméticas de primeira e segunda ordens, respectivamente;
4. Exercitar a aplicação do conceito de recorrências e dos resultados obtidos no estudo de progressões aritméticas de segunda ordem.

1.1.2 Específicos

1. Mostrar o quarto axioma de Peano como um mecanismo para o *princípio da indução finita*;
2. Explicar e demonstrar as principais formas do *Princípio da Indução*;
3. Construir a definição de uma progressão aritmética e demonstrar suas propriedades usuais por meio do princípio da indução ou recorrência;
4. Utilizar a fórmula de *Somação por partes* para determinar o termo geral de alguns somatórios;
5. Caracterizar as funções afins e quadráticas usando progressões aritméticas.
6. Determinar as fórmulas para o termo geral e para a soma dos termos de uma Progressão Aritmética de segunda ordem.
7. Resolver problemas que envolvem o pensamento recursivo.

1.2 Organização

Em primeiro lugar é feito um apanhado histórico sobre uso das sequências por diversas civilizações antigas, discutindo sobre o conhecimento que cada uma tinha sobre sequências, analisando os problemas de cada época e conhecendo a contribuição de cada civilização. Também há uma análise do que dizem os documentos oficiais e legislação sobre a educação básica no Brasil. Por fim, serão mostradas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP) sobre progressões a fim de motivar o estudo deste tema.

No terceiro capítulo são mostrados os *Axiomas de Peano*, com o intuito de fornecer uma base sólida para a compreensão do *princípio da indução*. Em seguida são abordados os tipos do princípio da indução para demonstrações e também o seu uso para a construção de definições, enquanto que suas aplicações serão mostradas na seção 3.1.3.

No capítulo 4, definimos Sequência e Progressão Aritmética, também mostramos as leis de formação de uma sequência. Calcula-se o Termo Geral de uma PA por meio do princípio da indução ou recorrência, bem como a soma dos termos da mesma. Também é abordado o tema sobre progressões aritméticas de ordem superior, enfatizando as de segunda ordem e também a relação entre a ordem das progressões aritméticas e o grau dos polinômios que representam seus termos gerais. Neste trabalho, por questão de escrita, sempre que for omitida a ordem em uma progressão aritmética, esta será considerada de primeira ordem. Para finalizar, será discutida a seção sobre *Somação por partes*, de modo a determinar o polinômio que expressa o termo geral de alguns somatórios.

No quinto capítulo é feita a caracterização das funções afim e quadrática, com o intuito de relacioná-las às progressões aritméticas de primeira e segunda ordem, respectivamente. Também se tem o objetivo de conectar conceito de progressões aritméticas de segunda ordem com a caracterização do movimento uniformemente variado. Em seguida faz-se uma investigação sobre uma indagação muito comum em alunos que, ao estudarem PA's de segunda ordem, perguntam-se: qual o termo geral de uma PA de ordem 2 (2ª ordem)? E qual o polinômio que expressa o seu termo geral? Tais perguntas são respondidas neste capítulo de forma que na solução se usa apenas o que foi estudado no presente trabalho. Por último, será trabalhado o problema dos números poligonais, que expressam-se por meio de uma PA de segunda ordem.

Capítulo 2

A importância do estudo das sequências

2.1 Um pouco de história

As sequências e progressões foram objeto de estudo de civilizações muito antigas, como a da Babilônia, por exemplo, que na tábua de Louvre (por volta de 300 a.C) traziam dois problemas interessantes, os quais um deles, segundo [8], afirma que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^8 = 2^9 - 1$. A princípio, buscou-se determinar padrões nas enchentes do Rio Nilo, que foi objeto de observação dos egípcios de 5000 anos atrás para que pudessem plantar no período correto e garantir a integridade dos alimentos, pois necessitavam saber o padrão das inundações. Os egípcios perceberam que o rio subia logo depois que a estrela Sírius levantava-se ao leste, um pouco antes do Sol. Ao notar este acontecimento a cada 365 dias, criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

Segundo [8], era comum afirmar que os babilônios eram melhores que os egípcios na álgebra mas que tinham contribuído menos na geometria, entretanto, uma descoberta recente feita em 1936 mostra que um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado em Susa, a uns trezentos quilômetros da Babilônia, continham resultados geométricos significativos. Os escritos egípcios tiveram maior sorte em serem decifrados por conta de terem sido registrados em três escritas: grega, demótica e hieroglífica. O papiro de Rhind, datado aproximadamente de 1650 a.C., é um texto matemático na forma de um manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Também é uma fonte primária sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética. Nele consta o seguinte problema: *“Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja a soma das duas menores.”*.

No problema proposto no Papiro Rhind, temos uma sequência que deve estar em uma

progressão aritmética, ou seja, formada por meio de uma sequência onde a partir do segundo termo, a diferença entre um número e seu antecessor resulta em um valor constante. Por exemplo: $(x - 2q, x - q, x, x + q, x + 2q)$, considerando q a razão. A soma tem resultado 100, pois são 100 pães, portanto

$$x - 2q + x - q + x + x + q + x + 2q = 100 \Rightarrow x = 20.$$

Encontrando o valor de $x = 20$, agora basta descobrir o valor da razão q . O problema diz que um sétimo da soma das três partes maiores deve ser igual à soma das duas menores. Vamos então colocar isso em uma expressão:

$$\frac{1}{7}(x + x + q + x + 2q) = x - 2q + x - q \Rightarrow \frac{1}{7}(60 + 3q) = 40 - 3q \Rightarrow q = \frac{55}{6}.$$

Agora só resta sabermos quantos pães o homem que recebeu a maior parte tem:

$$x + 2q = 20 + 2 \cdot \frac{55}{6} = \frac{115}{3}.$$

Desse modo, as progressões aritméticas já são conhecidas há alguns milhares de anos, elas são o que chamamos de PA de ordem 1. Porém, o que não é muito trabalhado a nível de ensino médio hoje em dia são as progressões aritméticas de ordem maior que ou igual a 2, aparecendo apenas a título de desafio.

É natural presumir que se deve a Pitágoras (585 a.C - 500 a.C.) e aos sábios gregos que vieram depois dele a criação da aritmética teórica, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas e as geométricas, as harmonias musicais, os quadrados de uma soma ou de uma diferença, etc., como podemos ver em [8]. Dos membros da escola pitagórica de cerca de 600 a.C, originaram-se os *Números Figurados*, que expressam o número de pontos em determinadas configurações geométricas, representando assim um elo entre a geometria e a aritmética. Dentre os números figurados há os *Números Poligonais*, que correspondem à quantidade de pontos arranjados de modo a formar um polígono regular. Podemos dizer que número poligonal é a quantidade de pontos usados para construir uma figura formada pela sobreposição sucessiva de polígonos regulares de mesmo número de lados, com a quantidade de pontos em cada lado aumentada de uma unidade em razão do polígono imediatamente anterior, de maneira que cada polígono sobreposto tenha dois lados coincidentes com todos os antecessores e os pontos sobre esses lados também coincidam, como podemos visualizar nas figuras abaixo:

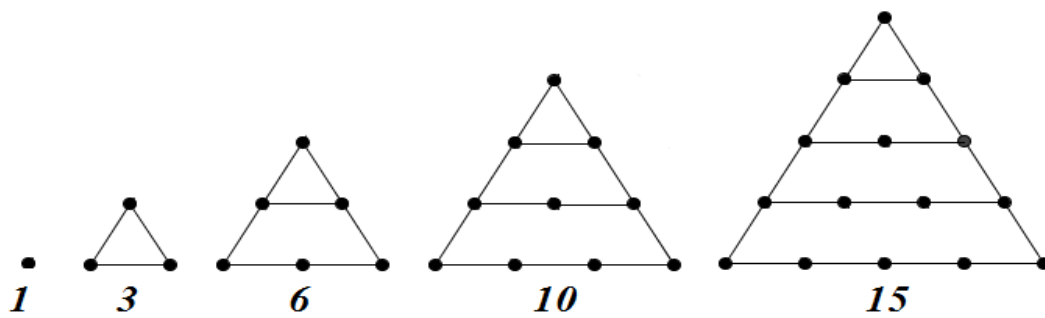


Figura 2.1: Números triangulares

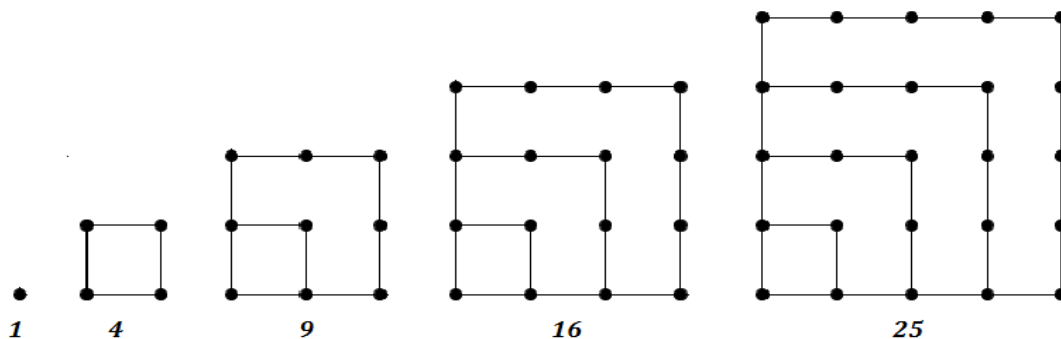


Figura 2.2: Números quadrados

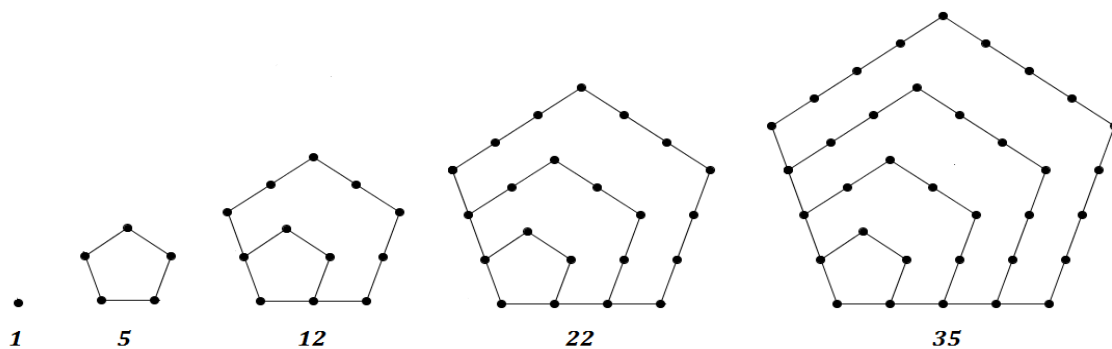


Figura 2.3: Números pentagonais

Tais seqüências de figuras determinam também uma seqüência de números poligonais, sendo o nome de cada seqüência determinado pelo polígono construído, ou seja, números triangulares, números quadrados, números pentagonais, etc. Aqui podemos observar que os pitagóricos já trabalhavam com progressões aritméticas de segunda ordem, pois os acréscimos de pontos feitos de uma figura para a seguinte formam uma progressão aritmética de primeira ordem, fato este que, posteriormente detalhado, garante que as seqüências de nú-

meros poligonais são na verdade progressões aritméticas de segunda ordem, assunto que será tratado na seção 5.3 .

Por [7], outro matemático importante na história foi o grego Euclides de Alexandria, com sua obra *Os Elementos*. A primeira edição impressa desse trabalho surgiu em 1482 e, depois desta data já surgiram mais de mil. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico, afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria. Os Elementos se compõem de 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de maneira que, se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica. A proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma fórmula para a soma de números em “progressão geométrica”, expressa em termos elegantes, mas poucos usuais: “Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem”. Podemos ver que este enunciado é equivalente a

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$\frac{a_1 \cdot q - a_1}{a_1} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{S_n}$$

$$q - 1 = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{S_n}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

que por sua vez equivale a

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}$$

onde q é a razão da proporção contínua, isto é, da progressão geométrica.

Diofanto de Alexandria (século III d. C.) foi muito importante para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus. Ele escreveu três obras, sendo a mais importante intitulada *Aritmética*, que era composta por treze livros. Nessa obra, Diofanto aborda a teoria algébrica dos números, o que o elevou à condição de gênio em seu campo. Dos problemas que encontram-se em *Aritmética*, pode-se dizer que todos eles são atraentes e alguns instigantes, devendo-se ter em mente que para Diofanto, número significa número racional positivo. No livro III, no problema 7, o seguinte questionamento é apresentado:

encontre três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado. Segundo Diofanto, a resposta é $120\frac{1}{2}$, $840\frac{1}{2}$, $1560\frac{1}{2}$.

Os hindus foram também aritméticos muito habilidosos e contribuíram significativamente com a álgebra, determinando a soma de Progressões Aritméticas e Geométricas rapidamente. Os problemas de aritmética hindus comumente envolviam o teorema de Pitágoras, Progressões Aritméticas e permutações. O Matemático hindu mais importante do século doze foi Bhaskara (1114 a cerca de 1185). Ele foi também o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. O seu tratado mais conhecido, o “lilavati”, recebeu o nome de sua filha, a fim de consolar a infeliz moça que perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Tanto o “lilavati” quanto o “vija-ganita”, contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, “progressões aritméticas e geométricas”, radicais, tríadas pitagóricas e outros. Um deles cita o seguinte problema: “Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana.”.

A Matemática na Europa conta a história de Michael Stifel (1486-1567) que é considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é “Arithmética na integra”, publicada em 1544 e dividida em três partes, números racionais, números irracionais e álgebra, nessa ordem. Na primeira parte, Stifel salienta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica.

Por volta de 1590, Napier revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas, que o levou aos logaritmos, gerando em consequência de sua descoberta a construção das tabelas de logaritmos que foram publicadas vinte e quatro anos após. Como sabemos hoje, o poder dos logaritmos como instrumentos de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração, respectivamente. No entanto, na alvorada da matemática moderna, a abordagem de John Napier (1550-1617) para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões se baseia no fato de que associando-se aos termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^m, \dots, b^n, \dots$ aos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots$, então o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ de dois termos de primeira progressão está associado à soma $m + n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da “progressão geométrica” suficientemente próximo do modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos da correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1.

Johann Friederich Carl Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de Abril de 1777. De família humilde, mas com o incentivo de sua mãe, obteve brilhantismo na sua carreira. Gauss deu sinais de ser um gênio antes dos três anos de idade. Nesta idade aprendeu

a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente. Aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática, seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto, que até então, ninguém era capaz de fazê-lo. Ele se baseou no fato de que a soma dos números opostos, com relação à sua posição na sequência, é sempre constante e igual a 101. Então ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando à fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, que será detalhada na Seção 4.1.4.

Ainda com base em [7], na doutrina de Darwin (o Darwinismo - teoria estudada em Biologia e criada por Charles Robert Darwin) também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. Num dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, podemos encontrar uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das ideias de Thomas Malthus, famoso economista. Diz o item: “As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A.”. Em consequência deste item, Darwin afirmou que “devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos (à seleção natural) de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros”. A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande como dizia.

Com base em [17], as progressões aparecem também na tentativa de Fermat (1607-1665) em calcular a área da região abaixo do gráfico de $y = x^k$, $x \in [0, b]$, $k \neq 1$, entre as retas $x = 0$, $x = b$ e o eixo x . Fermat considerou um número E , tal que $0 < E < 1$, e dividiu o intervalo $[0, b]$ em infinitos subintervalos da seguinte forma:

$$\dots [bE^i, bE^{i-1}], \dots, [bE^3, bE^2], [bE^2, bE], [bE, b]$$

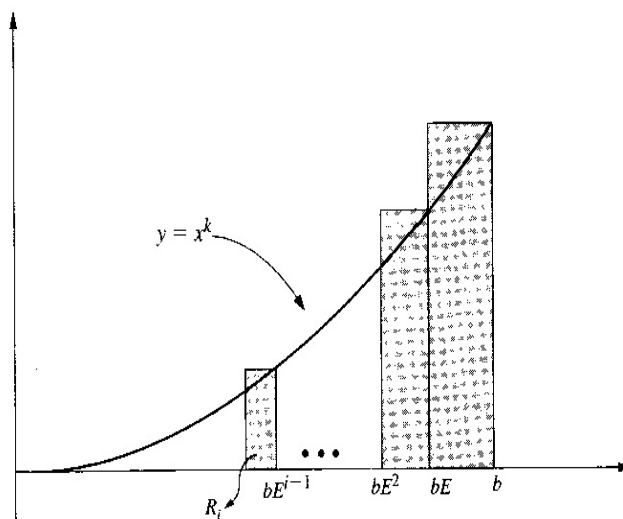


Figura 2.4: Áreas segundo Fermat (obtida em [17])

Podemos observar que $b, bE, bE^2, bE^3, \dots, bE^i, \dots$ é uma progressão geométrica de razão E , onde E^i tende a zero quando i vai para o infinito, pois $0 < E < 1$. A base do retângulo R_i é $bE^{i-1}(1-E)$ e sua altura é $b^k E^{k(i-1)}$, portanto sua área é

$$A(R_i) = b^{k+1}(1-E)(E^{k+1})^{i-1}$$

A sequência $A(R_1), A(R_2), \dots, A(R_n), \dots$ é uma progressão geométrica de razão E^{k+1} e primeiro termo $b^{k+1}(1-E)$. Por meio da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, chega-se à área total da soma infinita de todos os retângulos por excesso, conforme se segue:

$$A = \frac{b^{k+1}(1-E)}{1-E^{k+1}} = \frac{b^{k+1}(1-E)}{(1-E)(1+E+E^2+E^3+\dots+E^k)} = \frac{b^{k+1}}{1+E+E^2+E^3+\dots+E^k}$$

Como $0 < E < 1$, podemos perceber que quanto mais próximo E está de 1, mais eficaz é a aproximação por excesso, pois as diferenças $bE^{i-1} - bE^i$ são cada vez menores. Neste resultado, Fermat considerou $E = 1$ e chegou no seguinte resultado:

$$A = \frac{b^{k+1}}{1+E+E^2+E^3+\dots+E^k} = \frac{b^{k+1}}{k+1}.$$

A aproximação por falta é feita de modo análogo.

Em notação moderna, este é o valor da integral $\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$. Fermat mostrou que este resultado também é válido para k racional e também para os valores de k negativos, exceto $k = -1$. Apesar dos avanços na determinação de reta tangente e o cálculo de áreas sob curvas, Fermat não conseguiu estabelecer uma correspondência entre tais objetos matemáticos, impedindo-o assim de prosseguir na descoberta do Cálculo. Em contrapartida, devido a esses trabalhos, o matemático francês Lagrange (1736 - 1813) chegou a afirmar que Fermat era o pai do cálculo.

2.2 A BNCC e os PCN sobre o ensino de sequências

Esta seção está baseada nas seguintes referências: [11], [12], [13] e [14].

Para iniciarmos abordagens e reflexões acerca da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e suas indicações, é interessante realizar uma breve apresentação dos movimentos que precedem sua homologação, em 20 de dezembro de 2017.

É importante contrastar o tamanho do nosso país, seja em territorialidade ou em diversidade, com a desigualdade social ainda presente em inúmeras pesquisas e dados estatísticos.

Um dos principais desafios, para o profissional da educação e órgão competentes, é proporcionar oportunidades iguais para todos os nossos estudantes, sem perder a particularidade e singularidade de cada região ou grupo.

A Constituição Federal de 1988 já determinava o direito à educação e apresentava os conteúdos mínimos a serem desenvolvidos em todo o território nacional. Podemos encontrar ainda nesse documento, indicações da necessidade de resguardar os valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.

Em 1996, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) estabelece as competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, como o objetivo de nortear os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum, salientando que os conteúdos deveriam ser complementados com a parte diversificada que garantiria as características locais e regionais.

Mais uma vez a necessidade de uma formação básica comum surgiu com o Plano Nacional da Educação (PNE) de 2014, ou seja, em parceria, a União, os estados, o Distrito Federal e os municípios deveriam criar uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que garantisse a todos os alunos do território nacional as aprendizagens essenciais preservando-se as identidades étnicas, culturais e linguísticas. Para isso, cada Secretaria de Educação teria autonomia para pensar e planejar as ações de suas unidades escolares a partir das necessidades locais.

Desta forma, a BNCC, homologada em dezembro de 2017, apresenta um conjunto de aprendizagens essenciais a que têm direito todos os alunos da Educação Básica. Propondo uma perspectiva de igualdade, diversidade e equidade para a constituição da ação escolar a partir de uma proposta comum de direitos e objetivos de aprendizagem para os alunos da Educação Infantil ao Ensino Médio de todo o país. Indica o que deve ser ensinado e desenvolvido, isto é, os conhecimentos e as competências mínimas que devem ser garantidos a todos os estudantes brasileiros em sua vida escolar.

Com o foco no desenvolvimento de competências e no compromisso com a educação integral, o documento apresenta uma abordagem bastante clara no que diz respeito ao desenvolvimento integral dos estudantes (cognitivo e emocional) e a importância da experimentação, articulação e aplicabilidade dos conhecimentos e ao acesso e utilização consciente da informação e da tecnologia.

O documento apresenta como competência a capacidade de mobilizar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para que se possam resolver os desafios do cotidiano dentro e fora dos espaços escolares. Segundo a BNCC, sobre a definição das competências, tem-se: *“Ao definir essas competências, a BNCC reconhece que a educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza”*.

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas

faz parte de nossa cultura e de nossa história. Assim, as habilidades previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa.

Dentre as 5 competências específicas da BNCC para matemática, a que mais se relaciona com este trabalho é a quinta, onde o aluno deve desenvolver a seguinte competência: *“Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.”*

As habilidades vinculadas a essa competência assumem um importante papel na formação matemática dos estudantes que, mediante investigações, devem formular conjecturas, refutá-las ou validá-las e comunicar com precisão suas conclusões. Essa importância também decorre do fato de que é necessário que os estudantes adquiram uma compreensão viva do que é a Matemática, incluindo a sua relevância. Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências. Assim, a construção de uma argumentação, incluindo o desenvolvimento de algumas demonstrações matemáticas, é uma importante contribuição para a representatividade da Matemática como área do conhecimento. Além disso, a competência é fundamental também para o desenvolvimento dos processos de cognição e práticas argumentativas nos ambientes informatizados.

Para garantir o desenvolvimento dessa competência específica, a BNCC apresenta um conjunto de habilidades a serem alcançadas pelos alunos nessa etapa do ensino. Essas habilidades estão relacionadas a objetos de conhecimento, sendo que as mais próximas a este trabalho são:

(EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expres-

sar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º gr ou do tipo $y = ax^2$.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias, com uma proposta norteadora para o desenvolvimento das competências e habilidades definidas na BNCC, pretendem dar uma explicitação das habilidades básicas, das competências específicas, que se espera que sejam desenvolvidas pelos alunos em Biologia, Física, Química e Matemática nesse nível escolar, em decorrência do aprendizado dessas disciplinas e das tecnologias a elas relacionadas. O claro entendimento estabelecido pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96) do caráter do Ensino Médio como etapa final da Educação Básica, complementando o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental, foi um primeiro referencial sobre o qual se desenvolveu a proposta de área dos PCN. Tais referenciais já direcionam e organizam o aprendizado, no Ensino Médio, das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico.

No sentido desses referenciais, o documento referente aos PCN procura apresentar uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade. A recomendação de contextualização serve, dessa forma, a esses mesmos propósitos. O referido documento também apresenta sinteticamente os objetivos educacionais de cada área, revelando como estes se realizam em direta associação com os objetivos explícitos das outras áreas nas quais se organiza o Ensino Médio.

No que se refere ao ensino da matemática, os PCN enfatizam na contextualização e na interdisciplinaridade, ou seja, nas conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. O documento referente aos PCN+, complementar ao dos PCN, diz respeito ao ensino de sequências, que é um dos temas centrais desse trabalho, como sendo um tema que deve ser abordado em conjunto com a ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O ensino deste tema deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequências seus gráficos e relacionar os conceitos de sequência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma sequência sem precisar decorar informações.

2.3 Questões do ENEM e da OBMEP sobre sequências

Além de toda a teoria de ensino e aprendizagem que motiva o estudo de sequências no ensino médio, há uma outra motivação no exame que é a principal porta de acesso ao ensino superior do Brasil, o ENEM. Esta seção tratará de mostrar as questões do referido exame que cobram o conhecimento sobre sequências, mais especificamente das progressões aritméticas, no ensino médio com base na BNCC.

Também como forma de motivação para o estudo de sequências, serão reunidas algumas questões do Portal da OBMEP, que oferece gratuitamente uma variedade de materiais relacionados à grade curricular do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais que não costumam ser abordados no Ensino Fundamental ou Médio, de modo a complementar o aprendizado da matemática.

As questões da OBMEP sobre sequências são muito importantes para incentivar a investigação e a criatividade matemática do aluno, pois em boa parte delas é exigido que este tenha um pensamento recursivo ao observar padrões nessas sequências. A observação de recorrências em problemas ou situações reais é, em minha opinião, o que há de mais próximo ao trabalho de um matemático, nos aproximando cada vez mais à natureza que nos cerca.

O professor deve sempre procurar despertar o senso crítico do aluno. Segundo [21], um professor que tem o objetivo de desenvolver o potencial criativo de seus alunos pode:

- fortalecer traços de personalidade, como, autoconfiança, curiosidade, persistência, independência de pensamento, coragem para explorar situações novas e lidar com o desconhecido;
- diversificar as estratégias de ensino em sala de aula;
- ajudar o aluno a se desfazer de bloqueios emocionais, como, o medo de errar, o medo de ser criticado, motivados por sentimentos de inferioridade e insegurança;
- utilizar atividades que possibilitem ao aluno exercitar seu pensamento criativo;
- propiciar tempo adequado para o aluno pensar e desenvolver suas ideias;
- cultivar o senso de humor em sala de aula.

As questões apresentadas a seguir serão resolvidas no Apêndice A.

Questão 1. (ENEM - 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

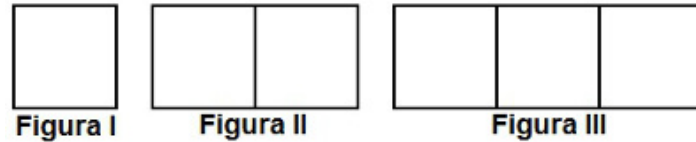


Figura 2.5: Sequência de canudos

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

- a) $C = 4Q$.
- b) $C = 3Q + 1$.
- c) $C = 4Q - 1$
- d) $C = Q + 3$.
- e) $C = 4Q - 2$.

Questão 2. (ENEM - 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Figura 2.6: Produção de arroz

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

- a) 497,25.
- b) 500,85.
- c) 502,87.
- d) 558,75.
- e) 563,25.

Questão 3. (ENEM - 2013) Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um chip, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse chip armazene, em sua memória, no máximo 9,5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados. Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

- a) 7.
- b) 8.
- c) 9.
- d) 12.
- e) 13.

Questão 4. (Portal OBMEP) A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para formar um castelo de 10 andares?



Figura 2.7: Castelos de cartas

Questão 5. (Portal OBMEP) Considere as figuras abaixo com 1, 5, 13 e 25 quadradinhos unitários não sobrepostos.

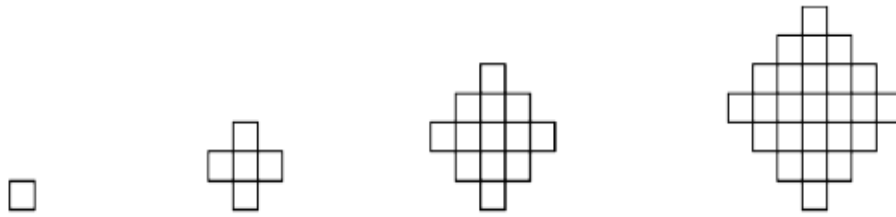


Figura 2.8: Sequência de quadradinhos

Caso o padrão seja mantido:

- quantos quadradinhos unitários haverá na próxima figura (figura 5)?
- qual a fórmula f_n do total de quadradinhos unitários em cada figura?
- quantos quadradinhos unitários haverá na centésima primeira figura?

Questão 6. (Portal OBMEP) “Números triangulares” são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares e definimos como T_n a representação do n -ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante.

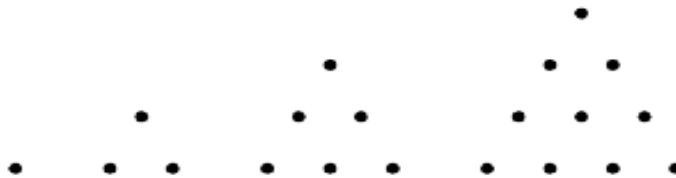


Figura 2.9: Números triangulares

Qual valor de T_{100} ?

Capítulo 3

Indução Matemática

3.1 Os Axiomas de Peano

Para adentrarmos ao estudo sobre indução matemática, faz-se importante conhecer sua base axiomática. O matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), com o objetivo de caracterizar matematicamente a estrutura dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, no sentido de números ordinais, propôs uma lista de axiomas baseados na noção de sucessor de um número natural. Tal lista caracteriza os números naturais \mathbb{N} por meio de 4 axiomas:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. Seja X um subconjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

Este último é conhecido como *Axioma da Indução*, destacando-se por fornecer um mecanismo para que se possa garantir que um dado conjunto $X \subset \mathbb{N}$ inclui, com efeito, todos os elementos de \mathbb{N} a partir de um dado número natural (neste caso, o número 1). O *Axioma da Indução*, conhecido também como *Princípio da Indução* ou *Método da Indução*, é a base para um eficiente método de demonstração de propriedades e também de construção de definições, referentes a números naturais em ambos os casos, como veremos a seguir.

3.1.1 O Princípio da Indução para Demonstrações

A demonstração pelo princípio da indução consiste em provar que uma propriedade $P(n)$, relativa aos números naturais, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ (em geral, pois há outras variáveis do axioma da indução). Isto é, seja $X = \{n \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$, deve-se mostrar que

$P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluindo assim que $X = \mathbb{N}$. Para isso, usa-se o axioma da indução de modo a verificar que $1 \in X$ e a garantir que o sucessor de todo número de X também pertence a X , ou seja, se $P(1)$ é uma proposição verdadeira e $P(n)$ implica em $P(n+1)$, então $P(n)$ é válida para todos os números naturais. O axioma da indução é muitas vezes escrito como uma propriedade (quando costuma ser chamado de Princípio da Indução Finita - PIF), principalmente em livros do ensino básico, de modo a criar uma sequência de passos que visa garantir que uma proposição relativa aos números naturais é válida para todo número natural. Usando a linguagem de propriedades, formula-se-o da seguinte maneira:

Princípio da Indução Finita - PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n , suponhamos que

- i) $P(1)$ é válida;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$, onde $n+1$ é o sucessor de n .

Então, $P(n)$ é válida para qualquer que seja o número natural n .

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.1 (Soma dos naturais ímpares)

Vamos provar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa igualdade que se quer provar é a propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n , na qual devemos provar a validade para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Princípio da Indução Finita, primeiro verificaremos a veracidade de $P(1)$ (chamado de *caso base* da indução), o que se faz de forma imediata pois $P(1) : 1 = 1^2$ é uma proposição verdadeira. Por conseguinte, devemos garantir que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, precisamos provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (chamado de *passo da indução*). Isso é feito admitindo a validade de $P(n)$ e concluindo assim, que $P(n+1)$ também é uma proposição válida. Então temos:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ (Hipótese da indução ou o que se supõe verdade);}$$

$$1 + 3 + 5 \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2 \text{ (Tese da indução ou o que se quer provar).}$$

Para garantir a veracidade do *passo da indução*, façamos o que se segue:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{n^2} + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

mostrando que $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Logo, pelo *Princípio da Indução Finita*, $P(n)$ é uma proposição verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ ■

Nota: Ao se deparar pela primeira vez com uma demonstração por indução matemática, é normal que haja um estranhamento quanto ao seu uso, pois pode parecer que estamos a usar a proposição que queremos provar ($P(n)$) para demonstrá-la, mas não. O *Axioma da Indução* garante, e de forma clara, que se todo número natural que tem a propriedade $P(n)$, a partir do número 1, tiver um sucessor que também tem a propriedade $P(n)$, então todo número natural tem a propriedade $P(n)$, ou seja, não é que estamos considerando $P(n)$ verdadeira para provar $P(n)$, e sim considerando $P(n)$ verdadeira para demonstrar a veracidade da proposição $P(n+1)$ através da implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Perceba também que é desnecessário analisar os outros dois casos em que a implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira (que ocorrem sempre quando $P(n)$ é falsa, não importando o valor lógico de $P(n+1)$), porque o princípio da indução já supõe $P(n)$ verdadeira, ademais, se $P(n)$ for falsa para algum $n \in \mathbb{N}$ não faz sentido continuar com a demonstração.

Uma variante um pouco mais geral do princípio da indução finita, que podemos chamar de *Princípio Geral da Indução*, é usada quando quer-se provar que uma propriedade $P(n)$ relativa aos números naturais é válida para todo natural $n \geq n_0$ em que $n_0 \geq 1$. Enunciaremos-o da seguinte forma:

Princípio Geral da Indução

Dados $n_0 \in \mathbb{N}$ e a propriedade $P(n)$ do número natural n . Suponhamos que:

- i) $P(n_0)$ é verdadeira;
- ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \geq n_0$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Observe que o *Princípio da Indução Finita* é um caso particular desse *Princípio Geral da Indução* quando $n_0 = 1$. Este enunciado em forma de teorema demonstra-se usando o *Axioma da Indução* e considerando o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n_0 + n - 1) \text{ é válida}\}$, para concluir posteriormente que $X = \mathbb{N}$. É verdade que $1 \in X$, já que $n = 1 \Rightarrow P(n_0 + n - 1) = P(n_0)$, que é verdadeira por hipótese. Como em ii) temos também, por hipótese, que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \geq n_0$, isto é, que $n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$ para todo $n \geq n_0$ e, sabendo ainda que $1 \in X$, tem-se pelo *Axioma da Indução* que $X = \mathbb{N}$. Logo, $P(n_0 + n - 1)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, o que equivale a dizer que $P(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$, demonstrando assim o *Princípio Geral da Indução*.

Algumas propriedades relativas aos números naturais requerem uma outra variante do método de demonstração por indução, que chamaremos neste trabalho de *Princípio da Indução Grupal*, usada quando se quer provar que uma propriedade $P(n)$ relativa aos números naturais, cuja definição de cada termo se refere a um grupo de dois ou mais termos anteriores, valha para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal princípio enuncia-se da seguinte forma:

Princípio da Indução Grupal

Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma propriedade relativa aos naturais. Suponhamos que:

- i) $P(1), P(2), P(3), \dots, P(k)$ são verdadeiras;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo $P(n), P(n+1), P(n+2), \dots, P(n+k-1)$ verdadeiras, implicam que $P(n+k)$ também é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para sua demonstração basta considerar o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n), P(n+1), \dots, P(n+k-1) \text{ sejam válidas} \}$ e, por meio do axioma da indução, mostrar que $X = \mathbb{N}$. É certo que $1 \in X$, pois para $n = 1$ a propriedade dos elementos de X deve ser $P(1), P(2), \dots$ e $P(k)$ que, pela hipótese i), são proposições verdadeiras. Como $P(n), P(n+1), P(n+2), \dots, P(n+k-1) \Rightarrow P(n+k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma implicação verdadeira pela hipótese ii), pode-se dizer, equivalentemente, que $n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (para verificar, basta substituir n por $n+1$ na propriedade do conjunto X , ou seja, $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n+1), P(n+2), \dots, P(n+k) \text{ sejam válidas} \}$), portanto, pelo *Axioma da Indução*, $X = \mathbb{N}$. Logo, $P(n), P(n+1), \dots$ e $P(n+k-1)$ são proposições verdadeiras para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é uma proposição verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, demonstrando o *Princípio da Indução Grupal*.

Outra variante para demonstrações por indução é conhecida como *Princípio da Indução Completa* ou *Princípio da Indução Forte*, que é usada quando a definição de cada termo relativa a $P(n)$ baseia-se em todos os termos anteriores, podendo qualquer número natural ser o ponto de partida. Ei-lo:

Princípio da Indução Completa

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Suponhamos que:

- i) $P(n_0)$ é verdadeira;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, se $P(k)$ é verdadeira para todo $n_0 \leq k \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Observe que n_0 pode ser qualquer número natural, incluindo o 0, ou seja, a escolha do n_0 vai depender do contexto do problema em que esse método de demonstração seja aplicado. Para demonstrar esse enunciado usando o Axioma da Indução, basta considerar o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} | P(k + n_0 - 1) \text{ é válida para todo } k \leq n\}$. Temos $1 \in X$, porque $k = 1 \Rightarrow P(k + n_0 - 1) = P(n_0)$, sendo $P(n_0)$ verdadeira pela hipótese i). Pela hipótese ii), sendo $P(k)$ verdadeira para todo $n_0 \leq k \leq n$, temos $P(k) \Rightarrow P(n + 1)$ e, equivalentemente, $n \in X \Rightarrow (n + 1) \in X$. Logo, $P(k + n_0 - 1)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$, acabando por demonstrar o *Princípio da Indução Completa*. Portanto, pelo *Axioma da Indução*, $X = \mathbb{N}$.

O *Princípio da Indução Finita* e suas variantes são derivadas do *Axioma da Indução*, ou seja, podem ser facilmente demonstradas com base neste axioma, como foi feito em linhas anteriores. Tais variantes, como você deve ter notado, são apenas "ajustes" que se fazem ao *Princípio da Indução Finita* para que este seja aplicado mais facilmente em determinados problemas. O *Princípio da Indução* é um só, conhecido como o quarto axioma de Peano. Na seção 2.1.3 serão mostradas algumas de suas aplicações, em que as resoluções irão requerer diferentes formas do *Princípio da Indução*.

3.1.2 O Princípio da Indução para Construção de Definições

Para construirmos uma definição usando o mecanismo da indução, precisamos garantir que esta não irá gerar paradoxos e, para isso ocorrer, devemos seguir o modelo do *Axioma da Indução*. Sendo $a(n)$ um atributo relativo ao número natural n , é necessário definirmos $a(1)$ e estabelecermos como $a(n + 1)$ pode ser obtido por meio de $a(n)$, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Feito isso, o axioma da indução garante que o atributo $a(n)$ está definido para todo $n \in \mathbb{N}$. Definições construídas dessa forma também são chamadas de definições por recorrência, pois dado um termo inicial, os demais são obtidos pelo que o precede. Nos livros de ensino médio, como em [6], algumas definições seguem esse modelo. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo (Potência de expoente natural)

Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n , de base a e expoente n , é definida como o produto de n fatores iguais a a . Definimos ainda

$$\begin{cases} a^1 = a; \\ a^{n+1} = a \cdot a^n. \end{cases}$$

Observe que a definição acima segue o modelo do *Axioma da Indução*, ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a potência a^n está definida. Note também que a partir dessa definição, podemos demonstrar as propriedades usuais das potências de expoente natural e base real não nula.

Exemplo (Progressão Aritmética)

Uma progressão aritmética é uma sequência de termos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ que segue uma determinada regra de formação. Essa regra é a chamada definição por indução ou recorrência, e se dá da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_1 = a; \\ a_{n+1} = a_n + r. \end{cases}$$

Onde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ e r (razão da progressão) é uma constante real que representa a diferença entre cada termo e seu anterior. Desse modo, uma PA é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do anterior com uma constante r dada. Através dessa definição é possível demonstrar todas as propriedades usuais das *progressões aritméticas*.

3.1.3 Aplicações do Princípio da Indução

Nesta seção veremos alguns exemplos e aplicações bem interessantes, que visam servir de motivação aos alunos e professores no ensino médio que estão iniciando o estudo sobre o princípio da indução.

• Soma dos n primeiros números naturais

$$\text{Mostrar que } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração:

$$\text{Seja } P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{i) } P(1) \text{ é verdadeira, pois } 1 = \frac{1(1+2)}{2};$$

ii) Provemos agora que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ou seja, que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Para isso, vamos partir da hipótese de indução (que é $P(n)$) e através de uma manipulação algébrica, concluir que $P(n+1)$ (tese da indução) é uma proposição verdadeira. Temos então:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Note que a manipulação algébrica necessária foi o acréscimo, aos dois membros da equação, do próximo termo da sequência: $(n+1)$.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Portanto, podemos concluir que

$$P(n+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

é uma proposição verdadeira. Logo, pelo *Princípio da Indução Finita*, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

• **Soma dos n primeiros naturais quadrados perfeitos**

Mostrar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Demonstração:

Seja $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$;

ii) Provemos agora que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, isto é, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}.$$

Para tal, vamos partir da hipótese de indução, ou seja, do que se supões verdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Observe que foi acrescentado o próximo termo da sequência de quadrados perfeitos $(n+1)^2$ aos dois membros da equação. Desenvolvendo agora o segundo membro e manipulando-o algebricamente para o devido fim, temos:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$\frac{(n+1)[n(2n+1) + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}.$$

Lembre-se que em uma equação do segundo grau podemos escrever $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes reais dessa equação. Portanto:

$$\frac{(n+1)[2(n+2)(n+3/2)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}.$$

O que nos permite concluir que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}.$$

Portanto $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Logo, pelo *Princípio da Indução Finita*, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

• Soma dos n primeiros naturais cubos perfeitos

Mostrar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

Demonstração:

$$\text{Seja } P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

$$\text{i) } P(1) \text{ é verdadeira, pois } 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2 = 1$$

ii) Supondo $P(n)$ verdadeira, temos:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \Rightarrow \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3. \end{aligned}$$

Desenvolvendo agora o segundo membro dessa equação:

$$\begin{aligned} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Portanto, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Logo, pelo *Princípio da Indução Finita*, $P(n)$ é uma proposição verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Ao estudar essa sequência de problemas é normal indagar-se sobre qual expressão representará a soma das n primeiras potências naturais de expoente 4, ou até mesmo de um expoente natural qualquer. Normal também seria perguntar-se de onde vêm essas expressões que, em vários livros didáticos, nos são postas prontas para demonstrarmos por indução. Mais detalhes sobre esses questionamentos serão abordados no capítulo seguinte. Por hora, continuaremos a analisar mais aplicações interessantes a respeito do *princípio da indução*.

• Número de diagonais de um polígono convexo

Mostrar que o número de diagonais de um polígono convexo é expresso pela fórmula $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, onde d_n é o número de diagonais e n representa o número de lados do polígono convexo.

Demonstração:

Primeiramente, vamos definir *polígono convexo* e *diagonal* de um polígono convexo.

Definição 3.1 Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Dizemos que A_1, A_2, \dots, A_n é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n-1$, a reta $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j (neste caso, $i \neq j \neq i+1$ e $j \in \mathbb{N}$), mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.

Definição 3.2 Uma diagonal de um polígono convexo é qualquer um dos segmentos $A_i A_j$ que não seja um lado do mesmo (quando i e j não são consecutivos ou não são extremos da sequência (A_n)).

Podemos perceber que como o número de diagonais d_n trata-se de um número natural (maior que ou igual a zero), a fórmula só tem validade para $n \geq 3$, pois não existem polígonos com menos de 3 lados. Isto quer dizer que precisamos provar a validade dessa fórmula para todo natural $n \geq 3$, ou seja, vamos usar o *Princípio Geral da Indução*, que estuda a validade de uma proposição relativa aos números naturais a partir de um dado número natural n_0 (neste caso $n_0 = 3$).

Seja $P(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2}, n \geq 3$.

i) $P(3)$ é verdadeira, pois $d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$ é o número de diagonais de um triângulo.

ii) Suponha que o número de diagonais de todo polígono convexo de n lados, $n \geq 3$, é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, isto é, admitamos $P(n)$ verdadeira.

Considere um polígono convexo, arbitrário, $P_{n+1} : A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$, com $n+1$ lados, $n \geq 3$, e vértices $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$, como na Figura 3.1.

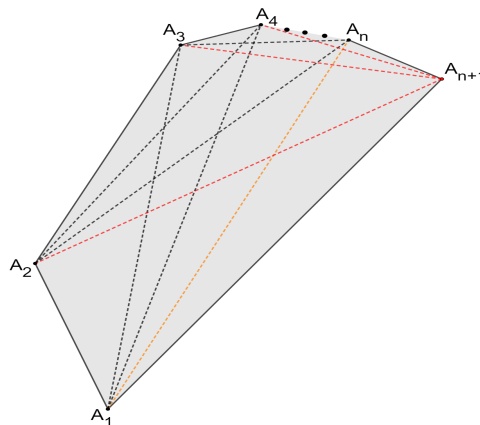


Figura 3.1: Diagonais

Devemos mostrar que

$$P(n+1) = d_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2} \text{ é verdadeira.}$$

Analisando P_{n+1} , podemos dizer que:

- como P_{n+1} é convexo, o segmento A_1A_n está contido em P_{n+1} e é, pela Definição 3.2, sua diagonal;
- conforme a Definição 3.1, a diagonal A_1A_n o divide em dois polígonos convexos: o triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ e o polígono $A_1A_2, A_3 \dots A_n$.
- suas diagonais são de um dentre três tipos: (a) A_1A_n ; (b) diagonais de $A_1A_2, A_3 \dots A_n$; (c) diagonais A_iA_{k+1} , para $2 \leq i \leq n-1$.
- o número de diagonais do tipo (c) é $(n+1) - 3 = n-2$, pois unindo o vértice A_{n+1} aos n vértices restantes $A_1A_2, A_3 \dots A_n$ obtemos n segmentos e, destes, dois são lados (A_nA_{n+1} e A_1A_{n+1}) e os $n-2$ restantes são diagonais;
- pela hipótese de indução, o número de diagonais do tipo (b) é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Portanto, o número de diagonais de P_{n+1} é igual a

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1$$

$$d_{n+1} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

$$d_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio Geral da Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 3$

■

• Sequência de Fibonacci

A sequência $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ é chamada de *sequência de Fibonacci*, em homenagem ao apelido do matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1240). Em seu livro *Liber Abaci*, escrito em 1202, Fibonacci, embora não o tenha descoberto, apresenta o problema dos coelhos, oriundo da observação da reprodução de um grupo de coelhos. A sequência

de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos, aparecendo também em configurações biológicas, como na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone do abacaxi ou no desenrolar da samambaia, como mostra [19]. Segue o problema: suponha que um casal de coelhos demore dois meses para procriar. A partir daí, a cada mês produz um novo casal de coelhos. Começando no mês 1 com um único casal, mostre por indução que o número de casal de coelhos no mês n é

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Demonstração:

Os dois primeiros termos da sequência são $F_1 = F_2 = 1$, pois até o segundo mês o primeiro casal ainda não se reproduziu. No terceiro mês, temos $F_3 = 2$, que corresponde ao casal original e ao primeiro casal de filhotes que ele gerou. No quarto mês, temos $F_4 = 3$, pois o casal original gera mais um casal embora o primeiro casal de filhotes gerados ainda não tenha procriado, ou seja, forma-se a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$. Vejamos com detalhes na figura 3.2 a seguir.

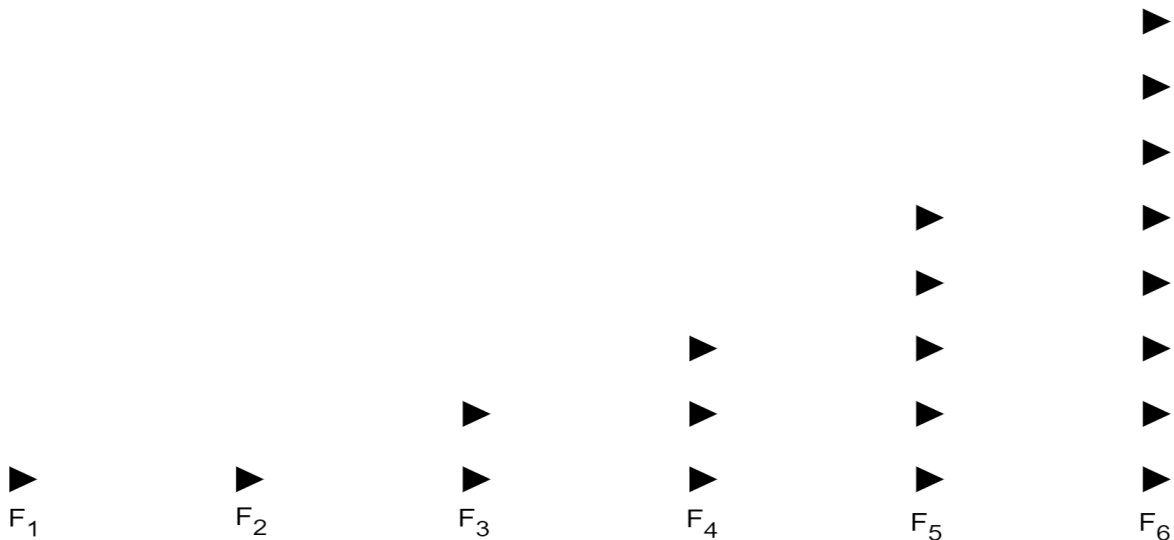


Figura 3.2: Sequência de Fibonacci

Note que em cada mês $(n + 2)$, estão presentes os casais do mês anterior $(n + 1)$ com o acréscimo dos novos casais gerados, que por sua vez, só podem ter sido gerados pelos casais presentes dois meses atrás, ou seja, no mês (n) . Portanto, podemos escrever um termo da sequência em função dos seus dois anteriores, isto é, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Nesse caso não cabe o uso do *PIF*, pois não há como mostrar o passo da indução $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, ou

seja, considerando $P(n) : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ verdadeira não é possível concluir que $P(n+1) : F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ também seja verdadeira, tendo em vista que precisamos garantir ainda que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Portanto, usaremos o *Princípio da Indução Grupal*, pois a definição da sequência cujo termo geral queremos provar refere-se a um grupo de dois termos anteriores desta sequência.

Seja $Q(n) : P(n)$ e $P(n+1)$ valem, onde $P(n) : F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

i) $Q(1)$ é verdadeira, pois $P(1) : F_1 = 1$ e $P(2) : F_2 = 1$ são verdadeiras.

ii) Supondo $Q(n)$ verdadeira, provemos agora que $Q(n+1)$ também o é. Ao supor $Q(n)$ verdadeira, temos $P(n)$ e $P(n+1)$ também verdadeiras, ou seja,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \text{ e } F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, temos:

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Portanto, $Q(n+1) : P(n+1)$ e $P(n+2)$ também é uma proposição verdadeira, isto é, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Logo, pelo *Princípio da Indução Grupal*,

$$P(n) : F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \text{ é verdadeira para todo } n \in \mathbb{N}.$$

■

Observação 3.1 A passagem feita acima de

$$\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ para } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

pode parecer um pouco estranha e passar a impressão de um "coelho tirado da cartola". Para contornar isso, é interessante que se use o princípio da regressão ou reversão, que consiste em resolver um problema "de trás pra frente", ou seja, como queremos mostrar que

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}},$$

ao usarmos a relação $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ e nos depararmos com

$$F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}},$$

já podemos começar a pensar em como manipular algebricamente a expressão

$$\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ para obtermos } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Para isso, basta desenvolver a expressão na qual se quer chegar:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Perceba que aqui se fez o caminho de volta, para facilitar o caminho de ida. Essa estratégia é muito interessante para o aprendizado do aluno, pois enriquece seu repertório de métodos de solução de problemas e desmistifica os horrores da abstração em algumas manipulações algébricas.

Observação 3.2 A obtenção da fórmula para o termo geral da sequência de Fibonacci pode ser obtida detalhadamente em [20]. O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180\dots$ é conhecido como número de ouro ou também razão áurea, sendo conhecida desde a antiguidade. Os egípcios utilizavam o número de ouro na construção de pirâmides, sendo cada bloco da pirâmide 1,618 vezes maior que o bloco do nível acima. A razão áurea também foi usada por artistas e arquitetos com o objetivo de obter harmonia, beleza e perfeição, como por exemplo, na pintura *Monalisa* do famoso pintor Leonardo Da Vinci, ou na construção do Paternon, feita no século V a.C. pelo arquiteto e escultor grego Fídias (490 - 430 a.C.). A história do enigmático número de ouro é muito vasta e curiosa, não cabendo ao objetivo deste trabalho. Mais detalhes sobre a razão áurea e como ela se relaciona com a sequência de Fibonacci podem ser encontradas em [20].

• Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como produto de números primos.

Demonstração:

Seja $P(n) : \forall n \geq 2$, ou n é primo ou um produto de fatores primos.

- i) Temos $P(2)$ verdadeira, pois 2 é um número primo.
- ii) Para todo $n \geq 2$, supondo $P(k)$ verdadeira para todo $2 \leq k \leq n$, devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira também.

Tomemos agora o número $n+1$. Se $n+1$ é primo, não há nada o que demonstrar. Se $n+1$ não é primo, então ele é composto e pode ser escrito como $n+1 = a \cdot b$, onde $2 \leq a \leq n$ e $2 \leq b \leq n$, isto é, para todo $2 \leq a, b \leq n$, a hipótese de indução garante que os números a e b ou são primos ou podem ser escritos como produto de fatores primos (este fato deixa claro que PIF não é suficiente, pois precisamos do passo da indução para todos os números menores que n). Sendo assim, como $n+1 = a \cdot b$, o número $n+1$ também pode ser escrito como produto de números primos. A demonstração da unicidade da escrita pode ser obtida com detalhes em [5].

• Princípio da Boa Ordenação - PBO

O *Princípio da Boa Ordenação* diz que todo subconjunto X , não vazio, de \mathbb{N} ($X \subset \mathbb{N}$), possui um menor elemento. Este princípio, juntamente com os *Axiomas de Peano*, caracteriza os números inteiros e constitui uma propriedade exclusiva dos números naturais, pois um subconjunto de \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou de \mathbb{R} , não necessariamente possui um menor elemento. Em [5] podemos ver uma importante aplicação deste princípio na demonstração do algoritmo da divisão de Euclides, ao mostrar a existência e unicidade do quociente e do resto em uma divisão de números inteiros. Podemos e vamos demonstrar o *Princípio da Boa Ordenação* através do *Princípio da Indução Completa*.

Demonstração:

Para demonstrar o PBO, vamos mostrar que um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ que não possua um menor elemento é necessariamente vazio, isto é, que seu complementar X^c é o próprio \mathbb{N} . Aqui devemos usar o *Princípio da Indução Completa*, pois ao considerarmos $P(n) : n \in X^c$, sua validade para cada termo (maior que 1) vai depender de todos os anteriores.

Seja $Q(n) : P(k)$ válida para todo $1 \leq k \leq n$, onde $P(k) : k \in X^c$.

i) Temos $Q(1)$ verdadeira, ou seja, $P(1) : 1 \in X^c$ é verdadeira, pois se $1 \in X$ este seria seu menor elemento, porém lembre-se que queremos provar que um subconjunto de \mathbb{N} que não possui menor elemento deve ser necessariamente vazio.

ii) Supondo $Q(n)$ verdadeira, tem-se $P(k)$ é verdadeira para todo $1 \leq k \leq n$, isto é, $k \notin X$ para todo $1 \leq k \leq n$. Porém, o próximo termo é $(n+1)$, que por sua vez não pode pertencer a X porque senão seria seu menor elemento. Portanto, $(n+1) \in X^c$, o que nos mostra que $P(k)$ é verdadeira para todo $1 \leq k \leq n+1$, isto é, $Q(n+1)$ é também verdadeira. Desse modo, $Q(n)$ é uma proposição verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, implicando que $P(n)$ também é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, pelo *Princípio da Indução Completa*, todo subconjunto de \mathbb{N} que não possui um menor elemento é vazio, ou equivalentemente, todo subconjunto não vazio de \mathbb{N} possui um menor elemento.

Uma observação interessante a se fazer é que o *Princípio da Boa Ordenação - PBO* equivale ao *Princípio da indução finita - PIF*, quer dizer, além de podermos demonstrar o PBO tomando como hipótese o PIF, podemos também demonstrar o PIF admitindo como verdade (como hipótese) o PBO. Para tal, precisamos de um resultado auxiliar que garanta que entre dois números naturais consecutivos não há nenhum outro número natural.

Lema 3.1 Se $n \in \mathbb{N}$, não existe natural p tal que $n < p < n + 1$.

Demonstração.

Vamos supor que exista um natural p tal que $n < p < n + 1$. Desse modo, temos $p = n + a$ e $n + 1 = p + b$ com a e b números naturais, porém isso implica que $a + b = 1$, o que é um absurdo, haja vista que $a \geq 1$, $b \geq 1$ e $a + b \geq 2$. Logo, entre dois números naturais consecutivos não há nenhum outro número natural. ■

Teorema 3.1 O Princípio da Indução Finita e o Princípio da Boa Ordenação são equivalentes.

Demonstração.

(a)(PIF \Rightarrow PBO) Seja $A \subset \mathbb{N}$ não vazio um conjunto qualquer, vamos provar que A possui um menor elemento tomando o PIF como hipótese. Se $1 \in A$, o número 1 será seu menor elemento e não há mais o que demonstrar. Suponha que $1 \notin A$ e considere os conjuntos $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e $X = \{n \in \mathbb{N} | I_n \subset \mathbb{N} - A\}$, ou seja, $1 \in X$ e portanto $X \neq \emptyset$. Podemos observar, já que estamos considerando o PIF como hipótese, que existe algum $n \in X$ tal que $(n + 1) \notin X$, pois caso contrário, $X = \mathbb{N}$ e $A = \emptyset$, o que é um absurdo, portanto $(n + 1) \in A$. Suponha agora que $(n + 1)$ não seja o menor elemento de A , isto é, existe um natural $p \in A$ tal que $p < n + 1$, mas isso é um absurdo, pois $p < n + 1 \Rightarrow p \leq n$ já que o Lema 3.1 garante que entre n e $n + 1$ não há número natural, implicando que $p \in X$. Logo, A possui $n + 1$ como menor elemento. ■

(b)(PBO \Rightarrow PIF) Seja $B \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in B$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \in B \Rightarrow (n + 1) \in B$ (perceba que aqui foi enunciado o PIF em relação ao conjunto B). Queremos provar que $B = \mathbb{N}$ e, para isso, vamos supor que $B \neq \mathbb{N}$. Assim sendo, existe um conjunto $A \neq \emptyset$ tal que $A = \mathbb{N} - B$. É certo que $1 \notin A$, pois pela hipótese do PIF $1 \in B$ e, como $A = \mathbb{N} - B$, os elementos de B são todos diferentes dos que estão em A . Pelo PBO, existe $n_0 \in A$ que é o seu menor elemento e $n_0 > 1$, logo existe $m = n_0 - 1$, onde $m \notin A$ que implica em $m \in B$. Mas temos pela hipótese do PIF que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \in B \Rightarrow (n + 1) \in B$, ou seja, $m + 1 = n_0 \in B$, o que é um absurdo pois $n_0 \in A = \mathbb{N} - B$. Portanto a hipótese inicial de que $B \neq \mathbb{N}$ é falsa. Logo, $B = \mathbb{N}$ e o PIF está demonstrado. ■

Capítulo 4

Sequências e Somação por partes

4.1 Sequências

4.1.1 Definição (Sequência)

Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real x_n .

Representa-se uma sequência por (x_1, x_2, x_3, \dots) ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou apenas (x_n) , para indicar que x_n é o n -ésimo termo da sequência. É importante notar que na representação de uma sequência os elementos são ordenados de acordo com o índice (n). Não deve-se confundir, por exemplo, a sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ com o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$, pois em um conjunto não interessa a ordem dos elementos, enquanto que na sequência sim.

As sequências matemáticas possuem uma *Lei de Formação*, que pode ser classificada de três formas diferentes, são elas:

- **Fórmula recursiva ou de recorrência**

Consiste em especificar um ou mais termos iniciais, juntamente com uma expressão que nos permite calcular cada termo em função dos (ou recorrendo aos) termos anteriores. A definição dos termos da sequência de Fibonacci vista no capítulo anterior é um exemplo de fórmula recursiva ou de recorrência, onde os dois primeiros termos da sequência são $F_1 = F_2 = 1$ e a definição de cada termo é dada pela fórmula de recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- **Fórmula posicional**

Consiste em uma expressão que relacione cada termo da sequência com sua posição, ou seja, é uma fórmula que expressa x_n em função de n . O termo geral de uma progressão aritmética é um exemplo de fórmula posicional, isto é, $a_n = a_1 + (n - 1)r$ relaciona o termo geral a_n como sua posição n nesta progressão aritmética.

• Propriedade dos termos

Embora uma propriedade não seja suficiente para descrever uma sequência, pois esta requer uma ordem, acaba por descrever apenas um conjunto de termos. Sendo $P(n)$: n é primo e, colocando os números que têm essa propriedade em ordem crescente para só assim termos uma sequência, seus termos são $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$. É importante saber que não existe fórmula de recorrência que nos forneça os termos dessa sequência, bem como também não existe fórmula posicional para tal, como afirma [6].

Há muitas sequências que merecem notoriedade a nível de ensino médio, porém serão destacadas e detalhadas neste trabalho apenas as progressões aritméticas (PA) nos seus variados graus, mais especificamente as PAs de primeira e segunda ordem.

4.1.2 Definição (Progressão Aritmética)

Uma progressão aritmética é uma sequência de números reais definida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a; \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + r. \end{array} \right. ;$$

onde a e r são reais dados.

4.1.3 Termo Geral de uma PA

O termo geral de uma progressão aritmética é uma fórmula posicional, isto é, ela relaciona um termo qualquer da progressão com sua posição na sequência. Com um procedimento simples e fazendo o uso da definição, vamos deduzir tal fórmula. De fato:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$$

...

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Perceba que dado um termo qualquer de uma progressão aritmética (a_n), este pode ser obtido pela soma do primeiro termo (a_1) com uma quantidade certa de razões (r). Portanto, o termo geral de uma progressão aritmética é expresso por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, que é um polinômio em n de grau 1, caso $r \neq 0$ (se $r = 0$, tem-se uma progressão estacionária). Reciprocamente, toda sequência cujo n -ésimo termo (termo geral) é dado por um polinômio de grau 1 em n , é

uma progressão aritmética. De fato, se $x_n = an + b$, então (x_n) é uma progressão aritmética de razão $r = a$ e $x_1 = a + b$.

Vamos agora demonstrar a fórmula do termo geral de uma PA por indução. Seja $P(n) : a_n = a_1 + (n - 1)r$ uma propriedade relativa aos números naturais em uma progressão aritmética (a_n) de razão r . Temos:

i) $P(1)$ é verdadeira, já que $a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1$;

ii) Supondo $P(n) : a_n = a_1 + (n - 1)r$ verdadeira, temos que provar que $P(n + 1) : a_{n+1} = a_1 + (n)r$ também o é. Pela definição de PA sabemos que $a_{n+1} = a_n + r$, portanto, pela hipótese de indução, $a_{n+1} = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr$. Logo, $P(n + 1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo *Princípio da Indução Finita*, o termo geral de uma PA (a_n) de razão r é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para todo $n \geq 1$.

■

4.1.4 Soma dos termos de uma PA

A soma dos termos de uma progressão aritmética é expressa por um polinômio de grau 2. Seja S_n a soma dos n primeiros termos dessa progressão, temos:

$$(I) S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$(II) S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando as duas equações membro a membro e observando que a soma dos termos equidistantes dos extremos são iguais, isto é, que as somas da forma $a_q + a_{n-q+1}$, com $q \in \mathbb{N}$ e $q \leq n$, são todas iguais (existindo n somas), obtemos:

$$2S_n = \overbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}^{n \text{ somas}} \Leftrightarrow$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Portanto, a soma dos termos de uma PA é expressa por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Observação 4.1 $a_q + a_{n-q+1} = a_1 + (q-1)r + a_1 + (n-q)r = a_1 + \overbrace{a_1 + (n-1)r}^{a_n} = a_1 + a_n$,
para todo número natural $q \leq n$.

Observação 4.2 temos

$$S(n) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{(2a_1 + r \cdot n - r)n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + (a_1 - \frac{r}{2})n,$$

ou seja, se (a_n) é uma progressão aritmética, então $S(n)$ é um polinômio de grau 2, sem o termo independente, na variável n , quando $r \neq 0$ (caso $r = 0$, S_n será um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente). Reciprocamente, toda sequência cuja soma dos seus n primeiros termos se expressa por um polinômio de grau 2, sem termo independente, é uma PA. De fato, $S(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (x_n) em que $(r/2) = a$ e $x_1 - (r/2) = b$, ou seja, $r = 2a$ e $x_1 = a + b$.

Vamos agora demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma PA por indução. Seja

$$P(n) : S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

uma propriedade relativa aos números naturais em uma progressão aritmética (a_n) e cuja soma dos termos é S_n . Temos:

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $S_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = a_1$;

ii) Supondo $P(n)$ verdadeira, temos que provar que

$$P(n+1) : S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2} \text{ também é um a proposição verdadeira.}$$

Sabemos que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ e, pela hipótese de indução, tem-se:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1} - r)n}{2} + a_{n+1} = \\ &= \frac{na_1 + na_{n+1} - rn + 2a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})n - rn + 2a_1 + 2nr}{2} = \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1})n + a_1 + a_1 + rn}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})n + a_1 + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo *Princípio da Indução Finita*, a soma dos n primeiros termos de uma PA (a_n) de razão r , é expressa por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.



4.1.5 Progressões aritméticas de ordem superior

Primeiramente, vamos definir o chamado *operador diferença* (Δ) para uma sequência (a_n) , que expressa-se por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Note que a partir dessa definição, pode-se concluir imediatamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante.

Progressão aritmética de ordem 2 ou ordem superior

Uma *progressão aritmética de segunda ordem* é uma sequência (a_n) na qual a sequência $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é uma progressão aritmética não estacionária, ou seja, de ordem 1. De forma geral, uma progressão aritmética de ordem k , com $k > 2$, é uma sequência cujas diferenças entre cada termo e o termo anterior ($\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$) formam uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.

Veamos agora uma tabela que mostra, em relação a uma sequência (a_n) , os operadores diferença (Δa_n), ($\Delta^2 a_n = \Delta \Delta a_n$), ($\Delta^3 a_n = \Delta \Delta^2 a_n$), etc. O termo de ordem n da sequência (a_n) é expresso por $a_n = n^3 - n$ (polinômio de grau 3).

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$
0	0	0	6	6
1	0	6	12	6
2	6	18	18	6
3	24	36	24	6
4	60	60	30	□
5	120	90	□	
6	210	□		
7	□			

Observando a sequência (a_n) , temos:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = [(n+1)^3 - (n+1)] - (n^3 - n) \therefore \Delta a_n = 3n^2 + 3n \text{ (grau 2)}$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) - (3n^2 + 3n) \therefore \Delta^2 a_n = 6n + 6 \text{ (grau 1)}$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = [6(n+1) + 6] - (6n + 6) \therefore \Delta^3 a_n = 6 \text{ (constante)}$$

Note que $\Delta^3 a_n$ é uma constante, implicando que $\Delta^2 a_n$ é uma progressão aritmética, Δa_n é uma progressão aritmética de segunda ordem e a_n é uma progressão aritmética de terceira ordem.

A relação entre a soma dos termos de uma PA e sua ordem é notável quando se considera uma sequência cujo termo de ordem n é expresso por $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, que é a soma dos termos da PA (a_n) de ordem p , isto é, $(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$. Ao aplicarmos o operador diferença a (S_n) , obtemos $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ e, como (a_n) é uma PA de ordem p , pela definição de progressões aritméticas de ordem superior, a sequência (S_n) é uma PA de ordem $p + 1$.

Uma importante relação entre a sequência $(\Delta a_n) = (\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n)$ e a soma de seus termos $(\sum_{k=1}^n \Delta a_k)$, é conhecida como *teorema fundamental da somação*, mostrando-se bastante eficiente para o cálculo de somas. Vejamos este teorema.

Teorema 4.1 (Somação) $\sum_{k=1}^n \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$

Demonstração. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta a_k &= \Delta a_1 + \dots + \Delta a_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \Delta a_k = a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

■

A ordem das progressões aritméticas e o grau dos polinômios que representam seus termos gerais estão intimamente ligadas. Para o caso das progressões aritméticas de segunda ordem e polinômios do segundo grau, temos o que se segue.

Teorema 4.2 *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n , do segundo grau, é uma progressão aritmética de segunda ordem e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a_n expressa-se por um polinômio de segundo grau em n .*

Demonstração. De fato, se $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, temos $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c = 2an + (a+b)$, que é do primeiro grau em n , isto é, pela seção 4.1.3 sabemos que (Δa_n) é uma progressão aritmética não estacionária. No entanto, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, (Δa_n) é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e $\sum_{k=1}^n \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$ é um polinômio do segundo grau em n , ou seja, implicando que a_n é também um polinômio do segundo grau em n .

■

Para demonstrarmos o caso geral, de progressões aritméticas de ordem p , precisamos de dois resultados importantes.

Teorema 4.3 $1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \sum_{k=1}^n k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$.

Demonstração.

Como a propriedade que se quer provar é referente aos números naturais em p , deve-se aplicar indução sobre p . Para $p = 1$, o teorema já foi provado nas seções 2.1.3 e 3.1.4. Supondo agora que o teorema seja válido para $p \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$, deve-se provar que o mesmo é válido para $p = s + 1$, isto é, se $1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \sum_{k=1}^n k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$, para todo $p \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$, devemos mostrar que $\sum_{k=1}^n k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s + 2$. Observe que $(k + 1)^{s+2} = k^{s+2} + (s + 2)k^{s+1} + F(k)$, onde $F(k)$ representa o polinômio formado pelos termos restantes e tem grau s em k . Temos, então,

$$\sum_{k=1}^n (k + 1)^{s+2} = \sum_{k=1}^n k^{s+2} + (s + 2) \sum_{k=1}^n k^{s+1} + \sum_{k=1}^n F(k),$$

onde, pela hipótese de indução, $\sum_{k=1}^n F(k)$ é um polinômio $P_{s+1}(n)$ de grau $s + 1$ em n . Observe ainda que

$$\sum_{k=1}^n (k + 1)^{s+2} = 2^{s+2} + 3^{s+2} + \dots + n^{s+2} + (n + 1)^{s+2} \text{ e } \sum_{k=1}^n k^{s+2} = 1^{s+2} + 2^{s+2} + \dots + n^{s+2},$$

portanto, eliminando os termos comuns nos dois primeiros somatórios, obtemos

$$(n + 1)^{s+2} = 1 + (s + 2) \sum_{k=1}^n k^{s+1} + \sum_{k=1}^n F(k) \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^{s+1} = \frac{(n + 1)^{s+2} - 1 - P_{s+1}(n)}{s + 2}.$$

Logo, $\sum_{k=1}^n k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s + 2$ em n .



Corolário 4.4 (4.3) Se $F(n)$ é um polinômio de grau p , então $\sum_{k=1}^n F(k)$ é um polinômio de grau $p + 1$ em n .

Demonstração.

Por hipótese, temos $F(n) = \alpha_1 n^p + \alpha_2 n^{p-1} + \alpha_3 n^{p-2} + \dots + \alpha_p n + c$, com $\alpha_1 \neq 0$, α_i e c constantes reais, com $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$. Aplicando o somatório sobre $F(n)$, obtemos

$$\sum_{k=1}^n F(k) = \alpha_1 \sum_{k=1}^n k^p + \alpha_2 \sum_{k=1}^n k^{p-1} + \alpha_3 \sum_{k=1}^n k^{p-2} + \dots + \alpha_p \sum_{k=1}^n k + nc,$$

onde $\alpha_1 \sum_{k=1}^n k^p$, pelo teorema anterior, tem grau $p + 1$, enquanto os demais somatórios possuem grau menor que $p + 1$. Logo, $\sum_{k=1}^n F(k)$ tem grau $p + 1$. ■

Agora temos o suficiente para demonstrarmos o caso geral da relação entre a ordem das progressões aritméticas e o grau dos polinômios que representam seus termos gerais.

Teorema 4.5 (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p ($p \geq 2$) se, e somente se, a_n é um polinômio de grau p em n .

Demonstração.

Novamente devemos aplicar indução sobre p . Para $p = 1$ e $p = 2$, o teorema já foi provado. Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in \{1, 2, 3, \dots, s\}$. Devemos provar agora que ele também é válido para $p = s + 1$. Sendo (a_n) uma progressão aritmética de grau $s + 1$, (Δa_n) é uma progressão aritmética de grau s e, pela hipótese de indução, Δa_n é um polinômio de grau s em n . Portanto $\sum_{k=1}^n \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$ é, pelo corolário anterior, um polinômio de grau $s + 1$, nos permitindo concluir que a_n é um polinômio de grau $s + 1$. Por outro lado, se a_n é um polinômio de grau $s + 1$ em n , Δa_n é um polinômio de grau s em n , cuja verificação se dá sem dificuldades como se segue:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_1 n^{s+1} + \alpha_2 n^s + \alpha_3 n^{s-1} + \dots + \alpha_{s+1} n + c \\ a_{n+1} &= \alpha_1 (n+1)^{s+1} + \alpha_2 (n+1)^s + \alpha_3 (n+1)^{s-1} + \dots + \alpha_{s+1} (n+1) + c \\ \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n = \underbrace{\alpha_1 [(n+1)^{s+1} - n^{s+1}]}_{\text{grau } s} + \underbrace{\alpha_2 [(n+1)^s - n^s]}_{\text{grau } s-1} + \dots + \alpha_{s+1}. \end{aligned}$$

Perceba que em $(n+1)^{s+1} - n^{s+1}$ ocorrerá o cancelamento do termo comum n^{s+1} , bem como em $(n+1)^s - n^s$ serão eliminados os termos comuns n^s e assim por diante. Logo, pela hipótese de indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s , isto é, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$. ■

4.2 Somação por partes

Terminamos este capítulo com a *fórmula da somação por partes* e algumas de suas aplicações. Seja

$$\begin{aligned}\Delta(a_k b_k) &= a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1} \Delta b_k + b_k \Delta a_k \Rightarrow \\ a_{k+1} \Delta b_k &= \Delta(a_k b_k) - b_k \Delta a_k.\end{aligned}$$

Aplicando somatório aos dois membros dessa equação, obtemos a fórmula de somação por partes:

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = \sum_{k=1}^n \Delta(a_k b_k) - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k.$$

Usando o *Teorema Fundamental da Somação* em $\sum_{k=1}^n \Delta(a_k b_k)$, obtemos:

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k.$$

Com esse recurso, podemos agora determinar os polinômios que expressam o termo geral de alguns somatórios, como os que têm o formato dos três primeiros exemplos vistos na seção 2.1.3, que geralmente aparecem já prontos em livros didáticos como exercícios para serem provados pelo princípio da indução.

• Soma dos n primeiros números naturais

$$\text{Determinar } P(n) = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Solução.

Por mais que já conheçamos um método bem eficiente para o cálculo da soma dos termos de uma PA, se faz interessante resolver esse problema usando a fórmula de somação por partes, para nos habituarmos com seu uso.

Consideremos $a_{k+1} = k$ e $b_k = k$, o que nos dá $\Delta a_k = \Delta b_k = 1$. Aplicando a fórmula de somação por partes, obtemos

$$\sum_{k=1}^n a_{k+1} \Delta b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^n b_k \Delta a_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n k = n(n+1) - 0 \cdot 1 - \sum_{k=1}^n k \Rightarrow$$

$$2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Logo, $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ é um polinômio do segundo grau em n que expressa a soma dos n primeiros números naturais. ■

O próximo exemplo já não é tão simples para se deduzir o polinômio procurado sem o uso da fórmula de somação por partes.

• **Soma dos n primeiros naturais quadrados perfeitos**

Determinar $P(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

Solução.

Considere $a_{k+1} = k^2$ ($a_1 = 0$ e $\Delta a_k = 2k - 1$) e $b_k = k$ ($b_1 = 1$ e $\Delta b_k = 1$). Aplicando a fórmula da somação por partes, temos

$$\sum_{k=1}^n k^2 \cdot 1 = n^2(n+1) - 0 \cdot 1 - \sum_{k=1}^n k \cdot (2k-1) = n^2(n+1) - 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \Rightarrow$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Logo, a soma dos n primeiros naturais quadrados perfeitos é $P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, que é um polinômio de grau 3. ■

• **Soma dos n primeiros naturais cubos perfeitos**

Determinar $P(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

Solução.

Considere $a_{k+1} = k^3$ ($a_1 = 0$ e $\Delta a_k = 3k^2 - 3k + 1$) e $b_k = k$ ($b_1 = 1$ e $\Delta b_k = 1$). Aplicando a fórmula da somação por partes, temos

$$\sum_{k=1}^n k^3 \cdot 1 = n^3(n+1) - 0 \cdot 1 - \sum_{k=1}^n k \cdot (3k^2 - 3k + 1) = n^3(n+1) - 3 \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \Rightarrow$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^3(n+1) + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

$$\text{Logo, } P(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

■

• Soma das n primeiras potências naturais de expoente 4

$$\text{Determinar } P(n) = \sum_{k=1}^n k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4.$$

Solução.

Considere $a_{k+1} = k^4$ ($a_1 = 0$ e $\Delta a_k = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$) e $b_k = k$ ($b_1 = 1$ e $\Delta b_k = 1$). Aplicando a fórmula da somação por partes, temos

$$\sum_{k=1}^n k^4 = n^4(n+1) - \sum_{k=1}^n k(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = n^4(n+1) - 4 \sum_{k=1}^n k^4 + 6 \sum_{k=1}^n k^3 - 4 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \Rightarrow$$

$$5 \sum_{k=1}^n k^4 = n^4(n+1) + 6 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \therefore$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n+1)(6n^2 + 6n - 2)}{30}.$$

$$\text{Logo, } P(n) = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n+1)(6n^2 + 6n - 2)}{30}.$$

■

Capítulo 5

Funções e Progressões Aritméticas

No dia a dia é muito comum nos depararmos com grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais ou, de modo geral, grandezas que variam uma em relação à outra da mesma forma sob uma dada medida. Numa corrida de táxi por exemplo, onde o preço a ser pago está em função da distância percorrida com um valor fixo inicial (bandeirada), uma variação de x km na distância percorrida sempre representará uma única variação no preço a pagar, pois a função que relaciona o valor a ser pago com a distância percorrida é uma função afim. Isto quer dizer que a cada x km rodado(s), o acréscimo no preço da corrida será sempre o mesmo, ou seja, as grandezas distância e preço estão variando segundo *progressões aritméticas*. Nesse exemplo está intuída uma relação entre funções afim e progressões aritméticas. Neste capítulo trataremos da relação entre função afim e progressão aritmética de primeira ordem, função quadrática e progressão aritmética de segunda ordem e algumas discussões sobre este último tipo de sequência.

5.1 Caracterização das funções afim

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Embora em algumas situações fique claro que o modelo matemático a ser usado é uma função afim, como no exemplo do táxi, em que se tem $f(x) = ax + b$ onde x é a distância percorrida, $f(x)$ é o preço a pagar, b é a bandeirada e a é a taxa por quilômetro rodado, nem todo problema é tão explícito assim. Para entender o que caracteriza uma função afim, vejamos a seguinte situação.

Em uma sapataria, o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala na qual em vez de centímetros, estavam marados os números ...36, 37, 38,... . Um fato importante nessa escala é que os números estavam igualmente espaçados, ou seja, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que a acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do

sapato. Dito de outro modo: se um certo pé precisar de crescer h centímetros para passar do tamanho 33 para 34, precisará crescer os mesmos h centímetros para passar de 38 para 39. A função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim? Para responder a essa pergunta precisamos dos dois seguintes teoremas.

Teorema 5.1 (Proporcionalidade) *seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona (crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Encontra-se em [3], na seção 5.3 sobre função linear.

Teorema 5.2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (ou só cresce ou só decresce, por todo o domínio). Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h , mas não de x , então f é uma função afim.*

Demonstração.

Sem perda de generalidade, vamos supor que a função f seja crescente. Então, é fácil verificar que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = 0$. Ademais, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Logo, pela terceira afirmação do Teorema da Proporcionalidade, φ é uma função linear, isto é, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b , resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A recíproca é óbvia e de fácil verificação. ■

De posse desses resultados e de volta à situação do vendedor na sapataria, podemos agora concluir que a função que associa a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim, ou seja, $f(x) = ax + b$. Para determinarmos os coeficientes a e b da função afim, basta conhecer $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para dois valores diferentes quaisquer x_1 e x_2 . Se para $x_1 = 20$, $x_2 = 28$ temos $f(x_1) = 32$, $f(x_2) = 42$. A partir daí, calcula-se os coeficientes $a = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ e $b = y_1 - ax_1$ chegando à fórmula

$$f(x) = \frac{5x + 28}{4},$$

que dá o número do sapato de uma pessoa em função do comprimento do seu pé em centímetros.

Uma característica importantíssima da função afim, que também a caracteriza, é sua relação com progressões aritméticas, que será enunciada em forma de teorema.

Teorema 5.3 *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona que associa a cada x real um $f(x) \in \mathbb{R}$ e $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ uma progressão aritmética. A função f é afim se, e somente se, $y_i = f(x_i)$, com $i = 1, 2, 3, \dots$, for uma progressão aritmética, para toda progressão aritmética x_n .*

Demonstração.

Sendo f uma função afim, temos

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah,$$

que é uma constante, isto é, a sequência (y_i) é uma progressão aritmética. Dessa forma, se tivermos uma reta não-vertical (gráfico de uma função afim) em \mathbb{R} e tomarmos sobre ela os pontos $(1, y_1), (2, y_2), \dots, (i, y_i), \dots$ cujas abscissas são os números naturais $1, 2, \dots, i, \dots$, as ordenadas $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$ desses pontos formam uma progressão aritmética.

Reciprocamente, se uma função monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots$, então a nova função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, transforma qualquer progressão aritmética noutra progressão aritmética, tendo a propriedade $g(0) = 0$. Note que a escolha de $g(x) = f(x) - f(0)$ sugere que tenhamos que mostrar que $g(x)$ é uma função linear, para que $f(x) = g(x) + f(0)$ seja uma função afim. Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, os números $-x, 0, x$ formam uma progressão aritmética, logo o mesmo ocorre com os números $g(-x), 0, g(x)$. Mas $\frac{g(-x) + g(x)}{2} = 0$ (aqui se vê a vantagem de termos $g(0) = 0$), isto é, $g(-x) = -g(x)$. Agora consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números $0, x, 2x, \dots, nx$ formam uma progressão aritmética, o mesmo se dando com suas imagens $0, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$. A razão desta progressão pode ser obtida tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo, logo esta razão é $g(x)$. Segue-se então que $g(nx) = n \cdot g(x)$. Finalmente, se n é um inteiro negativo, temos $-n \in \mathbb{N}$, logo $g(nx) = -g(-nx) = -(-n \cdot g(x)) = n \cdot g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, de acordo com a primeira afirmação do teorema da proporcionalidade. Pelo *Teorema da proporcionalidade* (devidamente detalhado em [3]), segue-se que g é linear, ou seja, $g(x) = ax$, portanto, pondo $f(0) = b$ (uma constante), temos $f(x) = g(x) + f(0) \Rightarrow f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar. ■

Essa relação entre função afim e progressão aritmética, além de muito importante, é bem útil quando se quer caracterizar uma função que representa uma certa situação matemática, bastando, portanto, verificar se a função que relaciona essas duas grandezas está a associar duas progressões aritméticas, ou seja, se as duas grandezas relacionadas apresentam valores correspondentes em progressão aritmética, como no exemplo da corrida de táxi ou do vendedor na sapataria. Ocorrido isso, pode-se concluir, pelo Teorema 5.3, que a função analisada é uma função afim.

Nos teoremas dessa seção, fez-se a hipótese de que a função fosse monótona. O conceito de monotonicidade poderia ser substituído pelo de continuidade, ou seja, poderia-se supor que a função fosse contínua. Para o contexto do ensino médio, principalmente no início desta etapa, quando se estuda sobre função afim, é mais interessante o conceito de monotonicidade em vez de continuidade, pois este último conceito não é usualmente tratado nesta fase, enquanto que “crescente” e “decrecente” são noções bem mais elementares, que não dependem da ideia de limite.

5.2 Caracterização das funções quadráticas

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A caracterização se dará por meio da característica das funções quadráticas de transformar progressões aritméticas de primeira ordem em progressões aritméticas de segunda ordem. Podemos fazer uma verificação simples dessa característica. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária e $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ é uma progressão aritmética qualquer então a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ dos valores $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$, etc. goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3, \dots$ formam uma progressão aritmética. Mais precisamente, se $x_{i+1} - x_i = r$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$ então $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$, pois

$$\begin{aligned} d_{i+1} - d_i &= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = \\ &= [ax_{i+2}^2 + bx_{i+2} + c - (ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c)] - [ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c - (ax_i^2 + bx_i + c)] = \\ &= [a(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2) + b(x_{i+2} - x_{i+1})] - [a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + b(x_{i+1} - x_i)] = \\ &= [a(x_{i+2} + x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+1}) + b(x_{i+2} - x_{i+1})] - [a(x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) + b(x_{i+1} - x_i)] = \\ &= (x_{i+2} - x_{i+1})[a(x_{i+2} + x_{i+1}) + b] - (x_{i+1} - x_i)[a(x_{i+1} + x_i) + b] = \\ &= r \cdot [a(x_{i+2} + x_{i+1}) + b] - r \cdot [a(x_{i+1} + x_i) + b] = \\ &= r \cdot a(x_{i+2} - x_i) = r \cdot a \cdot 2r = 2ar^2. \end{aligned}$$

Essa característica constitui uma propriedade exclusiva das funções quadráticas e também é o que nos dirá se o modelo matemático adequado para uma determinada situação será uma função quadrática.

No caso do movimento uniformemente acelerado, se considerarmos a queda livre de um corpo, sujeito apenas à ação da gravidade, pode-se verificar experimentalmente que, marcando a posição do corpo em intervalos iguais e sucessivos de tempo (de segundo em segundo, por exemplo), a partir do início da queda, as distâncias percorridas em cada intervalo de um segundo vão crescendo, e formam uma progressão aritmética de razão g , onde $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração da gravidade, ou seja, na sequência formada pelos instantes t em segundos ($t = 1, 2, 3, \dots$), que é uma progressão aritmética, cada termo corresponde a uma posição (altura h), que por sua vez, essas alturas h formam uma sequência que descreve uma progressão aritmética de segunda ordem, como podemos observar na Figura 5.1 (extraída de [3]). Como será demonstrado mais adiante, a função que faz corresponder as grandezas tempo e distância envolvidas nesse experimento é uma função quadrática.

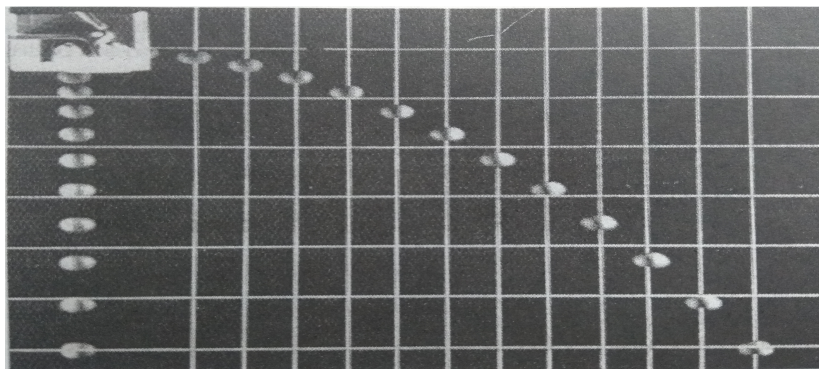


Figura 5.1: Movimento uniformemente variado

Antes de enunciarmos o teorema da caracterização das funções quadráticas, precisaremos de alguns resultados em mãos. Na seção anterior foi observado que o conceito de monotonicidade poderia ser substituído por continuidade. Como uma função quadrática nunca pode ser monótona, nos termos do teorema de caracterização que será apresentado posteriormente, teremos que trabalhar com a hipótese de continuidade em vez de monotonicidade. Será usado o conhecimento de que uma função quadrática é contínua e que se duas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$ para todo racional r então $f(x) = g(x)$ para todo x real (para uma demonstração desses fatos, consulte [16], no capítulo sobre continuidade de funções).

Pelo Teorema 5.3, uma progressão aritmética é a restrição de uma função afim aos números naturais, isto é, se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ é uma PA. de razão r então a igualdade $x_n = x_1 + (n - 1)r$ pode ser escrita como $x_n = an + b$, onde $a = r$ e $b = x_1 - r$, pois sabemos também, do capítulo anterior, que o n -ésimo termo (termo geral) de uma progressão aritmética de primeira ordem é um polinômio do primeiro grau em n . Logo, a função afim $f(x) = ax + b$,

quando restrita aos números naturais, fornece os termos $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$ da PA. De modo análogo, como sabemos da seção 4.1.3, se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, existem reais a, b, c tais que $y_n = an^2 + bn + c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois o n -ésimo (termo geral) de uma PA de ordem 2 é um polinômio de grau 2 em n e, reciprocamente, se $y_n = an^2 + bn + c$ é um polinômio (restrito aos naturais nesse caso) de grau 2 em n , então (y_n) é uma PA de ordem 2, ou seja, a restrição da função quadrática aos números naturais nos fornece uma progressão aritmética de segunda ordem.

Teorema 5.4 (*Caracterização das Funções Quadráticas*) *A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \dots, y_n = f(x_n), \dots$ não degenerada (aquela em que as diferenças sucessivas formam uma PA com razão não nula).*

Demonstração.

Como foi dito no início desta seção: se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , e $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ é uma progressão aritmética qualquer então a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ dos valores $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$, etc. formam uma progressão aritmética de segunda ordem, ou seja, as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3, \dots$ determinam uma PA de primeira ordem. Com efeito, se $x_{i+1} - x_i = r$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$ então

$$\begin{aligned} d_{i+1} - d_i &= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = r \cdot [a(x_{i+2} + x_{i+1}) + b] - r \cdot [a(x_{i+1} - x_i) + b] = \\ &= r \cdot a(x_{i+2} - x_i) = r \cdot a \cdot 2r = 2ar^2. \end{aligned}$$

Portanto, as diferenças sucessivas $d_{i+1} - d_i$ são constantes e iguais a $2ar^2$, ou seja, a sequência (d_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem com razão igual a $2ar^2$. Reciprocamente, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda PA não-constante numa PA de segunda ordem não degenerada. Usando o mesmo recurso na demonstração da caracterização das funções afins, temos a função g tal que $g(x) = f(x) - f(0)$, que possui as mesmas propriedades de f e mais a propriedade $g(0) = 0$. Primeiramente vamos mostrar que $g(x)$, restrita aos números naturais, é expressa por um polinômio do segundo grau. Para isso, considere a progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ e veja que os valores $g(1), g(2), g(3), \dots, g(n), \dots$ formam uma PA de segunda ordem não-degenerada. Logo existem constantes $a \neq 0$ e b tais que

$$g(n) = an^2 + bn$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (sem termo independente pois $g(0) = 0$). Em seguida, mostraremos que $g(x)$, restrita aos números racionais positivos, é expressa por um polinômio do segundo grau. Desse modo, fixemos arbitrariamente um número $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a progressão aritmética $(1/p), (2/p), \dots, (n/p), \dots$. Novamente, de modo análogo a quando g estava restrita aos naturais, concluímos que existem $a' \neq 0$ e b' tais que

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} an^2 + bn &= g(n) = g\left(\frac{n}{p} \cdot p\right) = a'(np)^2 + b'(np) = (a'p^2)n^2 + (b'p)n \Rightarrow \\ an^2 + bn &= (a'p^2)n^2 + (b'p)n. \end{aligned}$$

Portanto as funções quadráticas $[ax^2 + bx]$ e $[(a'p^2)x^2 + (b'p)x]$ coincidem para todo $x \in \mathbb{N}$. Lembre-se que isto quer dizer que os coeficientes dessas funções devem ser iguais, ou seja, $a = a'p^2$ e $b = b'p$, implicando que $a' = a/p^2$ e $b' = b/p$. Logo, para quaisquer números naturais n e p vale:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{p}\right) &= a'n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right) \Rightarrow \\ g\left(\frac{n}{p}\right) &= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right). \end{aligned}$$

Por último, devemos mostrar que $g(x)$ é expressa por um polinômio, em \mathbb{R} , de grau 2. Vemos então que as funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$ para todo número racional positivo $r = n/p$. Portanto, $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real positivo x . De modo análogo, considerando a PA $-1, -2, -3, \dots$, pode-se concluir que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x \leq 0$. Logo, pondo $f(0) = c$, temos $f(x) = g(x) + c$, isto é,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

De posse desses resultados, podemos fazer uma observação importante quanto ao termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem. Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $y_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como a restrição de f aos naturais, ou seja, tal restrição nos fornece os termos da progressão aritmética de segunda ordem $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$. As diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, \dots, d_n = y_{n+1} - y_n, \dots$ formam uma PA de primeira ordem, cujo primeiro termo é $d_1 = y_2 - y_1$ e cuja razão chamaremos de r . Portanto, seu n -ésimo termo é

$$d_n = d_1 + (n-1)r \Leftrightarrow$$

$$y_{n+1} - y_n = d_1 + (n-1)r.$$

Temos então:

$$y_2 = y_1 + d_1 + 0 \cdot r$$

$$y_3 = y_2 + d_1 + r$$

$$y_4 = y_3 + d_1 + 2r$$

...

$$y_{n+1} = y_n + d_1 + (n-1)r.$$

Somando membro a membro essas equações, obtemos:

$$y_{n+1} = y_1 + nd_1 + \frac{n(n-1)r}{2} \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = \frac{r}{2}n^2 + (d_1 - \frac{r}{2})n + y_1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como essa igualdade é também verdadeira quando $n = 0$, temos:

$$y_n = (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r + y_1 = \frac{r}{2}n^2 + (d_1 - \frac{3r}{2})n + r - d_1 + y_1 \Rightarrow$$

$$y_n = an^2 + bn + c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com $a = r/2$, $b = d_1 - 3r/2$ e $c = r - d_1 + y_1$. Esta igualdade representa a determinação do termo geral de uma progressão aritmética de ordem 2, que será objeto de estudo da Seção 5.3, sendo construída por meio de somatórios.

De volta ao caso do movimento uniformemente acelerado, ao considerarmos um corpo em queda livre, sua posição no instante t é dada pela ordenada $f(t)$. E como vimos nesta seção, a função que caracteriza esse modelo matemático é a quadrática, ou seja,

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Analisando esta função vemos que $f(0) = c$, ou seja, c é a posição inicial do corpo. Sabe-se que o quociente

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo do percurso}}$$

chama-se velocidade média do corpo no intervalo $[t, t + h]$, onde se verifica sem dificuldades que é igual a $2at + ha + b$. Se tomarmos h cada vez menor, este valor se aproxima de $2at + b$, o que chamamos de velocidade instantânea ($v(t)$) do corpo no instante t , isto é, $v(t) = 2at + b$. Quando $t = 0$ temos $v(0) = b$, por isso chamamos b de velocidade inicial. Sabe-se também que o quociente

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{\text{variação da velocidade}}{\text{intervalo de tempo}}$$

chama-se aceleração (α) do corpo no instante t , que podemos verificar facilmente que se trata de uma constante, ou seja, $\alpha = 2a$ é a taxa de variação da velocidade que, por ser constante, o movimento recebe o nome de uniformemente variado. Portanto, a função que nos dá a posição $f(t)$ do corpo no instante t é

$$f(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + bt + c$$

onde c é a posição inicial, b é a velocidade inicial e α é a aceleração. No caso da queda livre de um corpo que parte do repouso ($b = 0$), teremos

$$f(t) = A - \frac{1}{2}gt^2$$

onde A é a sua posição inicial e g é a sua aceleração (que no caso é a da gravidade).

Essa relação entre progressões aritméticas de segunda ordem e funções quadráticas pode ser explorada no ensino médio por meio do conteúdo de Movimento Uniformemente Variado (MUV), pois os alunos poderão verificar, experimentalmente de preferência, a relação entre PA de primeira ordem e PA de segunda ordem por meio do registro dos dados do experimento em uma tabela de valores. Para em seguida verificar que o modelo matemático que associa esses dois tipos de progressões e ao mesmo tempo caracteriza o movimento uniformemente variado é uma função quadrática. Ao explorar o MUV de um ponto que desloca-se num plano ou no espaço, não mais sendo retilíneo, o aluno poderá verificar também que a trajetória do corpo descreve uma parábola, que é o gráfico de uma função quadrática.

5.3 Progressões Aritméticas de Ordem 2

5.3.1 Termo Geral de uma PA de segunda ordem

Seja (a_n) uma progressão aritmética de ordem 2. Sendo $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, sabemos que (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem $2 - 1 = 1$ associada a (a_n) . Fazendo $\Delta a_n = b_n$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + b_1 \\
a_3 &= a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2 \\
a_4 &= a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 \\
a_5 &= a_4 + b_4 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\
&\dots \\
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k.
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (5.1)$$

Note que $\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}$ e que $b_{n-1} = b_1 + (n-2)r$, pois (b_n) trata-se de uma PA de ordem 1 com razão r . Dito isso, segue-se:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2} = a_1 + \frac{(b_1 + b_1 + (n-2)r)(n-1)}{2} \Rightarrow \\
a_n &= a_1 + \frac{2b_1(n-1) + (n-1)(n-2)r}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2} \quad (5.2)$$

Poderíamos também chegar ao termo geral mais rapidamente usando o *teorema fundamental da somação* que diz que $\sum_{k=1}^n \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$, isto é, $\sum_{k=1}^n b_k = a_{n+1} - a_1$, ou seja:

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^n b_k \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + \frac{(b_1 + b_n)n}{2} \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + \frac{[2b_1 + (n-1)r]n}{2}.$$

Logo,

$$a_{n+1} = \frac{r}{2}n^2 + (b_1 - \frac{r}{2})n + a_1 \quad (5.3)$$

Tais fórmulas não devem, nem de longe, serem ensinadas a alunos do ensino médio quando se está ministrando o conteúdo de progressões, pois isso obscurece as ideias gerais

e acaba por confundir o aluno. No caso de PA's de 2ª ordem é melhor que o aluno tenha em mente a ideia central que relaciona seu termo geral com o somatório dos termos da PA de ordem 1 associada, isto é, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$. Porém é importante que o professor tenha conhecimento das mesmas para que este possa satisfazer a curiosidade daqueles alunos que mais se interessam pelo aprofundamento em determinados temas da matemática, mostrando-lhes a complexidade de determinar o termo geral de uma PA de ordem maior que 1, pois o termo geral de uma PA de ordem p é expresso por um polinômio de grau p e o somatório dos termos de uma PA de ordem p é expresso por um polinômio de grau $p + 1$.

5.3.2 Soma dos Termos de uma PA de segunda ordem

Considerando a notação usada na seção anterior, vamos escrever novamente cada termo de (a_n) relacionando-o com o somatório dos termos da PA associada (b_n) .

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + b_1 \\ a_3 &= a_1 + b_1 + b_2 \\ a_4 &= a_1 + b_1 + b_2 + b_3 \\ a_5 &= a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ &\dots \\ a_n &= a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{n-1} \end{aligned}$$

Somando verticalmente, termo a termo, as n equações, obtemos:

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_1 + \overbrace{(n-1)b_1 + (n-2)b_2 + \dots + [n-(n-2)]b_{n-2} + [n-(n-1)]b_{n-1}}^*$$

Desenvolvendo (*), temos:

$$\begin{aligned} nb_1 + nb_2 + \dots + nb_{n-2} + nb_{n-1} - [b_1 + 2b_2 + \dots + (n-2)b_{n-2} + (n-1)b_{n-1}] &= \\ \frac{n(n-1)(b_1 + b_{n-1})}{2} - [b_1 + 2b_2 + \dots + (n-2)b_{n-2} + (n-1)b_{n-1}] &= \\ \frac{n(n-1)(b_1 + b_1 + (n-2)r)}{2} - [b_1 + 2b_2 + \dots + (n-2)b_{n-2} + (n-1)b_{n-1}] &= \\ b_1n(n-1) + \frac{r}{2}n(n-1)(n-2) - \underbrace{[b_1 + 2b_2 + \dots + (n-2)b_{n-2} + (n-1)b_{n-1}]}_{**} & \end{aligned}$$

Desenvolvendo agora (**):

$$b_1 + 2(b_1 + r) + 3(b_1 + 2r) + \dots + (n-2)[b_1 + (n-3)r] + (n-1)[b_1 + (n-2)r] =$$

$$\begin{aligned}
& b_1 + 2b_1 + \dots + (n-2)b_1 + (n-1)b_1 + 2r + 2 \cdot 3r + 3 \cdot 4r + \dots + (n-2)(n-1)r = \\
& b_1(1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)) + 2r + 2 \cdot 3r + 3 \cdot 4r + \dots + (n-2)(n-1)r = \\
& b_1 \frac{n(n-1)}{2} + 2r + 2 \cdot 3r + 3 \cdot 4r + \dots + (n-2)(n-1)r = \\
& b_1 \frac{n(n-1)}{2} + \underbrace{[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-2)(n-1)]}_{***} r
\end{aligned}$$

Note que (***) pode ser escrito como $\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k \cdot \alpha_{k+1}$, onde $\alpha_k = k$. Dessa forma, podemos escrever:

$$\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k \cdot \alpha_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-2} k \cdot (k+1) = \sum_{k=1}^{n-2} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n-2} k^2 + \sum_{k=1}^{n-2} k.$$

O somatório $\sum_{k=1}^{n-2} k^2$ já é nosso conhecido pelo teorema da somação por partes do capítulo anterior e $\sum_{k=1}^{n-2} k$ é uma simples soma dos termos de uma PA, portanto:

$$\sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k \cdot \alpha_{k+1} = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{2}{6}n(n-2)(n-1).$$

Agora, finalmente, usando (***), (**) e (*), temos:

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_1 + b_1 n(n-1) + \frac{r}{2} n(n-1)(n-2) - b_1 \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2}{6} rn(n-1)(n-2).$$

Logo, a soma dos termos de uma PA (a_n) de ordem 2 é:

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} r \tag{5.4}$$

5.4 Números Poligonais

No Capítulo 2 já há uma apanhado histórico do surgimento dos número poligonais. Nesta seção trataremos das suas propriedades e do modo como se pode abordar este tema no ensino médio. Primeiramente vamos definir o que é um número poligonal.

Definição 5.1 *Chama-se número poligonal, a quantidade de pontos usadas para construir uma figura formada pela sobreposição sucessiva de polígonos regulares de mesmo número de lados e com quantidades de pontos em cada lado, aumentada de uma unidade em razão do polígono imediatamente anterior e de modo que cada polígono sobreposto tenha dois lados coincidentes com todos os antecessores e os pontos sobre estes lados também coincidam.*

Vejamos novamente as figuras para um melhor entendimento da definição.

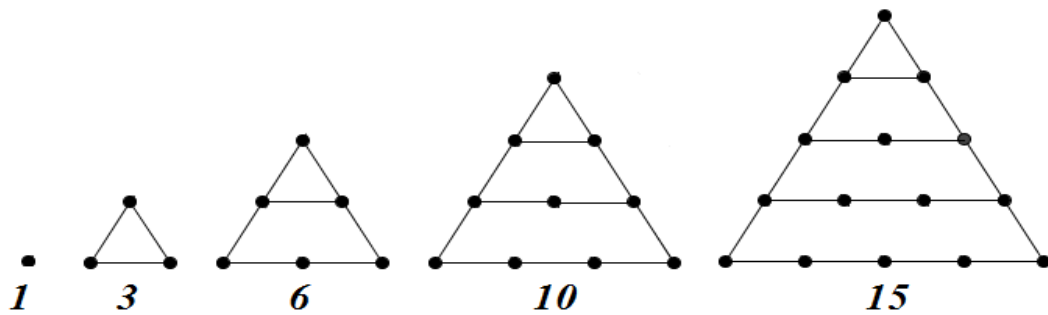


Figura 5.2: Números triangulares

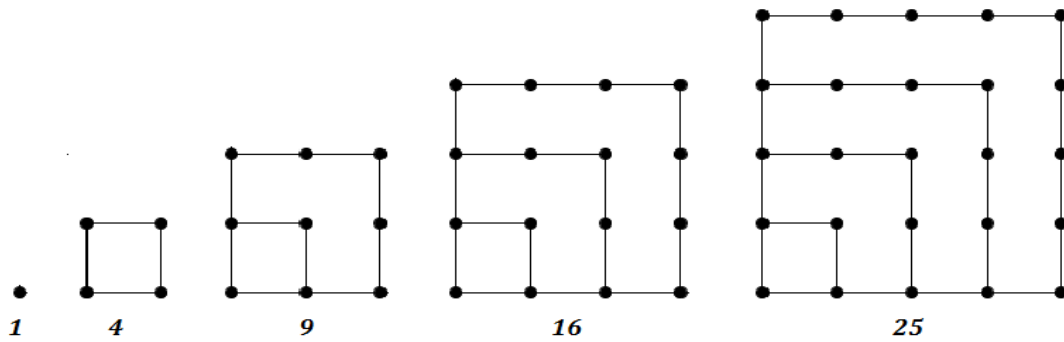


Figura 5.3: Números quadrados

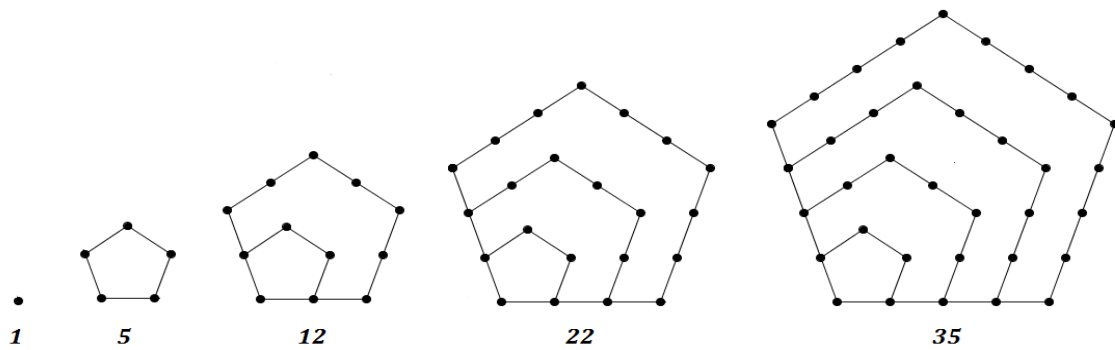


Figura 5.4: Números pentagonais

A sucessão de números em cada sequência sugere uma progressão aritmética de segunda ordem, pois considerando (T_n) como a sequência de números triangulares, (Q_n) como a sequência de números quadrados e (P_n) como a sequência de números pentagonais, temos

$$(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$$

$$(Q_n) = (1, 4, 9, 16, 25, \dots)$$

$$(P_n) = (1, 5, 12, 22, 35, \dots)$$

Caso essas sequências forem realmente progressões aritméticas de segunda ordem, poderemos determinar a quantidade de pontos em qualquer figura de uma dessas sequências, haja vista que já conhecemos a expressão do termo geral por uma PA de ordem 2 da seção anterior. Para mostrarmos que essas sequências são progressões aritméticas de segunda ordem faremos o uso do pensamento recursivo, mas antes, vamos analisar padrões importantes contidos nelas. Sabendo que as sequências são classificadas de acordo com o polígono do qual se originou, nota-se em cada uma delas:

- A primeira configuração dos pontos é formada por um único ponto. Portanto, independentemente da figura, o número 1 sempre será o primeiro termo da sequência de números poligonais, ou seja, o número 1 é ao mesmo tempo triangular, quadrado, pentagonal, n-agonal.

- A segunda figura é formada pelo número de pontos correspondentes à quantidade de vértices (ou lados) do polígono que nomeia a sequência, tendo sempre 2 pontos por lado.

- A quantidade de pontos é sempre a mesma em todos os lados de cada figura, pois pela definição os polígonos formados são regulares.

- A partir da terceira figura, cada polígono cresce “aproveitando” alguns pontos da figura antecedente. Em particular, todos os pontos de dois lados adjacentes de uma dada figura pertencem à figura subsequente.

- Considerando Q_i como sendo a quantidade de pontos da i – ésima figura de n lados, esta possui i pontos em cada um dos n lados, o que nos dá $(i \cdot n - n)$ pontos periféricos (sobre os lados do polígono em questão), pois devemos subtrair os n pontos contados duas vezes (que estão sobre os vértices).

- Dois lados adjacentes de uma i – ésima figura qualquer somam $(2i - 1)$ pontos, pois cada lado tem i pontos com o ponto sobre o vértice sendo comum a esses dois lados.

Agora temos informações suficientes para determinarmos, por meio da demonstração do seguinte teorema, se as sequências em questão são progressões aritméticas de segunda ordem.

Teorema 5.5 *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, o número de vértices do polígono que dá origem à sequência de números poligonais. Seja ainda Q_i a quantidade de pontos do i – ésimo n – ágono. Se (Q_i) é a sequência do número de pontos que formam o polígono de n vértices, então (Q_i) é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Demonstração.

Inicialmente, devemos notar que o termo Q_i , para $i \geq 2$, é expresso pelo número de pontos periféricos $(i \cdot n - n)$, adicionado ao número de pontos da figura anterior, que é Q_{i-1} , menos o número de pontos dos lados adjacentes de Q_{i-1} que coincidem com Q_i , que é $(i - 1)2 - 1$. Portanto, temos a seguinte recorrência:

$$Q_i = in - n + Q_{i-1} - [(i-1)2 - 1] \Leftrightarrow$$

$$Q_i = Q_{i-1} + (i-1)(n-2) + 1.$$

Essa recorrência linear de primeira ordem pode ser resolvida sem grandes dificuldades, porém, como este trabalho não aborda detalhadamente o tema de recorrências lineares, não vamos por este caminho. Seguindo, para mostrar que (Q_i) é uma progressão aritmética de segunda ordem, façamos

$$Q_i - Q_{i-1} = (n-2)i + 3 - n,$$

ou seja, as diferenças sucessivas $Q_i - Q_{i-1}$ formam uma sequência cujo termo geral é justamente o polinômio $(n-2)i + 3 - n$, que é do primeiro grau em i . Logo, pela definição de progressões aritméticas de ordem superior e pelo Teorema 4.5, (Q_i) é uma PA de ordem 2. ■

Observe que a equação $Q_i - Q_{i-1} = (n-2)i + 3 - n$, para todo natural $i \geq 2$, equivale a $Q_{i+1} - Q_i = (n-2)i + 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Pondo $Q_{i+1} - Q_i = b_i$, temos $b_i = (n-2)i + 1$, ou seja, $b_1 = n - 1$, $b_2 = 2n - 3$ e a razão da PA (b_n) é $r = b_2 - b_1 = n - 2$. Associando à fórmula do termo geral de uma PA de ordem 2, temos

$$\begin{aligned} Q_{i+1} &= \frac{r}{2}i^2 + (b_1 - \frac{r}{2})i + Q_1 \Leftrightarrow \\ Q_{i+1} &= \frac{(n-2)}{2}i^2 + \left(n-1 - \frac{(n-2)}{2}\right)i + 1 \Leftrightarrow \\ Q_{i+1} &= \frac{(i+1)[i(n-2) + 2]}{2} \Leftrightarrow \\ Q_i &= \frac{i[(i-1)(n-2) + 2]}{2}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Podemos agora determinar o termo geral de qualquer sequência de números poligonais. Para os números Decagonais D_i ($n = 10$), por exemplo, teríamos

$$D_i = \frac{i[(i-1)8 + 2]}{2},$$

ou seja, $(D_i) = (1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, \dots)$.

Este tema sobre números poligonais pode ser apresentado aos alunos do ensino médio de modo que estes possam, através da análise de cada sequência, conjecturar que são progressões aritméticas de segunda ordem, para que então possam aplicar o conhecimento obtido, no final da seção 5.3.1, de que no caso de progressões aritméticas de ordem 2 se relaciona seu termo geral com o somatório dos termos da PA de ordem 1 associada, isto é, $Q_i = Q_1 + \sum_{k=1}^{i-1} b_k$. Mais detalhes encontram-se no Apêndice B.

Capítulo 6

Conclusões

O ensino da matemática torna-se bem menos monótono e muito mais interessante quando se é mostrado ao aluno o *contexto histórico* de um determinado problema, como surgiu e quais os métodos foram usados para solucioná-lo. Importante também é a aplicabilidade do que se estuda em matemática, pois o aprendizado é mais efetivo quando há um meio prático de aplicação do conteúdo estudado, buscando sempre o contexto social do estudante.

Apesar das demonstrações matemáticas não serem o principal objetivo das competências da BNCC a serem alcançadas no ensino médio, o *Princípio da Indução Finita* permite ao aluno do ensino médio um “salto” no amadurecimento matemático, pois através dele pode-se demonstrar muitas propriedades relativas aos números naturais e também entender o conceito de definição por indução ou recorrência. Desse modo, as afirmações matemáticas passam a ser mais questionadas por eles, fazendo com que busquem meios de demonstrá-las.

Depois da análise sobre *progressões aritméticas* feita neste trabalho, constata-se que este tema é um excelente campo para despertar a criatividade do aluno, desde que não seja ministrado de forma a reproduzir fórmulas sem que se entenda o contexto do problema. Se aliado ao conceito de indução matemática, permite-nos ter mais rigor ao demonstrar as propriedades usuais das progressões aritméticas, bem como entender sua definição.

A *fórmula da somação por partes* mostra-nos uma outra perspectiva sobre a obtenção do termo geral de determinados somatórios que geralmente vêm postos prontos para serem demonstrados por indução, satisfazendo assim a curiosidade e despertando a criatividade do alunado. A interdisciplinaridade é também necessária para dar mais significado aos conteúdos estudados, como exemplo, a relação entre as progressões aritméticas de primeira ordem e o movimento retilíneo uniforme, ou a relação das progressões aritméticas de segunda ordem com o movimento uniformemente variado.

As *progressões aritméticas de ordem superior* têm o papel de ampliar a percepção na regularidade de sucessão entre os termos de uma sequência, ficando mais difícil determinar essa regularidade (padrão na sucessão dos termos) quanto maior for a ordem da progressão aritmética. Ao analisar em particular as progressões aritméticas de ordem 2, o professor en-

contra um meio de instigar a criatividade dos seus alunos ao indagar sobre como determinar o termo geral e a soma dos termos dessa progressão, ou seja, o aluno curioso se sujeitará a ser criativo e a criar meios para a solução de tal problema.

A *resolução de problemas* tem um papel importante na formação matemática (ou de qualquer outra disciplina escolar) do estudante, pois o momento de solucionar situações-problema desenvolve a sua autonomia. Ao tentar resolver problemas matemáticos o aluno se submete a um estado de abstração e concentração, permitindo assim que ele possa usar seu conhecimento adquirido e sua criatividade de forma efetiva e satisfatória para solucionar tal problema.

Referências Bibliográficas

- [1] MORGADO, A. C.; *Matemática Discreta*, 1^a ed., Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009, 204 p. (Coleção PROFMAT)
- [2] LIMA, E. L., Pinto Carvalho, P. C., Wagner, E., Morgado, A. C.; *A Matemática do Ensino Médio vol. 2*, 6^a ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, 372 p.
- [3] LIMA, E. L., Pinto Carvalho, P. C., Wagner, E., Morgado, A. C.; *A Matemática do Ensino Médio vol.1*, 10^a ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012, 280 p.
- [4] MUNIZ NETO, A. C.; *Fundamentos de Cálculo*, 1^a ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015, pp 429–447, 577p. (Coleção PROFMAT)
- [5] HEFEZ, A.; *Aritmética*, 2^a ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016, 298 p. (Coleção PROFMAT)
- [6] IEZZI, G., Muramaki, C.; *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 1*, 8^a ed., São Paulo: Atual, 2004, 374 p.
- [7] LIMA, Valéria S.; *Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações*. UNIMEP, 35 p.
- [8] BOYER, C. B.; *História da Matemática*, 3a ed., São Paulo: Blucher, 2012.
- [9] SILVA, Israel Carley da; *Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no ensino médio*. UNB-PROFMAT, Brasília, 2015, 85 p.
- [10] ROSA, Marcos Antônio; *A importância das relações de recorrência para melhoria do ensino-aprendizagem da matemática discreta*. UNICAMP-PROFMAT, Campinas, São Paulo, 2017.
- [11] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; *A conquista da matemática: 9^o ano: ensino fundamental: anos finais*, 4^a ed., São Paulo: FTD, 2018.

- [12] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. 46 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 15 Ago. 2019.
- [13] BRASIL. *Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+)*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 15 Ago. 2019.
- [14] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 Ago. 2019.
- [15] OBMEP. *Portal do Saber: Caderno de exercícios*. Disponível em <<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/65wgrgbib3k8s.pdf>>. Acesso em: 16 Ago. 2019.
- [16] LIMA, Elon Lages; *Curso de Análise vol. 1*, 7^a ed., Rio de Janeiro: IMPA, CNPq.
- [17] MOHNSAN, Julio Cesar; *As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas*. FURG - PROFMAT, 2014.
- [18] MUNIZ NETO, A. C.; *Geometria*, 1^a ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013, 442 p. (Coleção PROFMAT)
- [19] LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros; *Sequências de Fibonacci e a razão Áurea*. UFRN-PROFMAT, Natal, Rio Grande do Norte, 2016.
- [20] SILVA, Reginaldo Leoncio; *A sequência de Fibonacci e o número de ouro*. UESB-PROFMAT, Vitória da Conquista, Bahia, 2015.
- [21] ALENCAR, E. S. de; FLEITH, D. de S. *Criatividade: múltiplas perspectivas*. Brasília: UnB, 2003.

Apêndice A

Resolução das questões do ENEM e da OBMEP

Neste apêndice mostraremos resoluções para as questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) propostas na seção 2.3.

Primeiramente, baseando-se em [11], teceremos comentários sobre o papel do professor e da avaliação no sentido de resolução de questões. É aceitável dizer que a Matemática, em suas variadas abordagens, procura descrever e produzir uma “leitura de mundo”. Ela, em sua abordagem escolar, caracteriza-se pelas formas de compreender e resolver as situações-problemas, os exercícios e as atividades por meio da quantificação, da mediação, da estimativa, da representação no espaço, do reconhecimento de formas e propriedades, da observação e da manipulação de regularidades e padrões. Um dos principais papéis do professor é possibilitar o acesso a essas diferentes abordagens Matemáticas e dar suporte para que os alunos consigam adquirir habilidades e conhecimentos a fim de (res)significar a Matemática experimentada em suas práticas sociais, bem como reconhecer a beleza da Matemática em si.

O processo de avaliação está presente em todo o trabalho no qual a aprendizagem escolar está envolvida - seja na sala de aula, nas atividades extraclasse, seja nas conquistas pessoais dos alunos, etc. . Um ponto importante para avaliar a aprendizagem dos alunos é a análise das soluções propostas por eles na tentativa de resolver situações-problema. Muitas vezes, a forma como produzem algo demonstra o que não compreenderam e possibilita ao professor intervir adequadamente, agindo de maneira eficaz para atender às necessidades reais dos alunos. E um importante meio para isso é aplicação de questões que exigem mais da criatividade do aluno, com o nível adequado à sua realidade, como por exemplo, as conhecidas questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Questão 1. (ENEM - 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

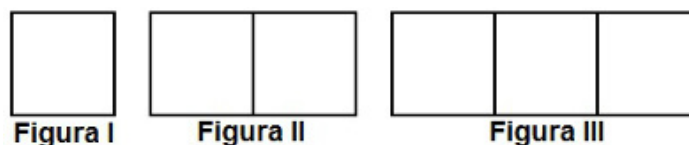


Figura A.1: Sequência de canudos

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

Solução.

Um recurso importante na resolução de questões é a construção de tabelas. Vamos construir uma tabela que relacione o número de quadrados ao número de palitos em cada figura.

Número de quadrados	Número de palitos
1	4
2	7
3	10
4	13

Podemos perceber uma regularidade na sequência de número de canudos, com acréscimos sucessivos de 3 unidades, ou seja, que a cada quadrado adicionado são também adicionados 3 novos canudos (pois um lado do quadrado adicionado é o mesmo do quadrado anterior a ele) em vez de 4. Temos então uma progressão aritmética (x_n) com $x_1 = 4$ (número de quadrados na figura $n = 1$) e razão $r = 3$, ou seja, o termo geral dessa PA é $x_n = 4 + (n - 1)3 \Rightarrow x_n = 3n + 1$ que nos dará a quantidade de canudos x_n da $n - ésima$ figura em função da quantidade de quadrados n . Portanto, usando os termos do enunciado da questão, temos $C = 3Q + 1$.

Observação A.1 Uma forma alternativa de resolução se daria por estabelecer uma relação de recorrência entre a ordem da figura (que também nos dá a quantidade de quadrados da mesma) e o número de palitos. Sendo x_n a quantidade de palitos na $n - ésima$ figura, que contém n quadrados, então temos $x_n = x_{n-1} + 3$ com $x_1 = 4$.

Questão 2. (ENEM - 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Figura A.2: Produção de arroz

Calcule a quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 .

Solução.

Analisando a tabela, nota-se que os dados estão variando segundo uma progressão aritmética de razão $r = 1,25$, ou seja, para calcularmos a quantidade total de arroz que se espera produzir de 2012 até 2021, precisamos somar os números da projeção de 2012 até 2021. Considerando a progressão aritmética $(a_n) = (50,25; 51,50; 52,75; 54; \dots)$ em que $a_1 = 50,25$ e $a_{10} = 50,25 + (10 - 1) \cdot 1,25 = 61,50$ é número da produção de arroz esperada em 2021, temos a soma de seus termos:

$$S_{10} = \frac{(50,25 + 61,50)10}{2} = 558,75$$

Logo, a quantidade de arroz que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 é igual a 588,75 toneladas.

Questão 3. (ENEM - 2013) Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um chip, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse chip armazene, em sua memória, no máximo 9,5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados. Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

Solução.

Analisando o acréscimo de distância diária, a partir do segundo dia, percebemos uma progressão aritmética (x_n) cujo primeiro termo é $x_1 = 300$, que é o que ele deve correr no dia $n = 1$, e a razão é $r = 200$. Como o chip só armazena 9500 m de corrida/caminhada, a soma de n termos dessa progressão aritmética deve ser menor que ou igual a 9500, ou seja, a soma das distâncias percorridas nos dias de treino deve ser menor que ou igual a 9500 metros, então:

$$S_n = \frac{(300 + a_n)n}{2} \leq 9500 \Rightarrow \frac{[300 + 300 + (n - 1)200]n}{2} \leq 9500 \Rightarrow$$
$$200n^2 + 400n \leq 19000 \Rightarrow n^2 + 2n - 95 \leq 0 \Rightarrow$$
$$n(n + 2) \leq 95$$

Como $n \in \mathbb{N}$, é fácil verificar que $n \leq 8$. Portanto o número máximo de dias inteiros consecutivos que esse chip armazenará a quilometragem será $n = 8$ dias.

Questão 4. (Portal OBMEP) A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para formar um castelo de 10 andares?



Figura A.3: Castelos de cartas

Solução.

Considerando c_n a quantidade de cartas necessárias para montar n andares, temos:

$$\begin{aligned} c_1 &= 2; \\ c_2 &= 7; \\ c_3 &= 15; \\ c_4 &= 26. \end{aligned}$$

A sequência (c_n) nos sugere uma progressão aritmética de segunda ordem, pois as diferenças sucessivas $d_n = c_{n+1} - c_n$ nos fornecem uma PA de primeira ordem $d_1 = 5, d_2 = 8, d_3 = 11, \dots$. Para confirmarmos isso, vamos estabelecer uma recorrência com os termos da sequência (c_n) a partir da análise da sucessão de figuras. O número p_n de pares de cartas em pé acrescentadas a cada novo andar (n) é, em uma unidade, maior que o do anterior, isto é, (p_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem com $p_1 = 1$ e razão 1, enquanto que o número de cartas horizontais acrescentada a cada novo andar é igual a $p_n - 1$. Portanto, temos a seguinte recorrência:

$$c_n = c_{n-1} + 2 \cdot p_n + p_n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $p_n = 1 + (n - 1) \cdot 1$, temos ainda:

$$c_{n+1} = c_n + 3n + 2$$

Fazendo $c_{n+1} - c_n = 3n + 2$ obtemos as diferenças sucessivas $d_n = c_{n+1} - c_n$ e como $d_n = 3n + 2$ é um polinômio de grau 1, então (c_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem. Desse modo, pelo comentário feito no final da seção 5.3.1, temos o termo geral de (c_n) :

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k.$$

Como (d_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem, temos:

$$c_n = 2 + \frac{(3n+4)(n-1)}{2}$$

Sendo assim, para formar um castelo de 10 andares, precisaremos de

$$c_{10} = 2 + \frac{(3 \cdot 10 + 4)9}{2} = 155 \text{ cartas,}$$

isto é, precisaremos de no mínimo 3 baralhos de 52 cartas ($3 \cdot 52 = 156$).

Questão 5. (Portal OBMEP) Considere as figuras abaixo com 1, 5, 13 e 25 quadradinhos unitários não sobrepostos.

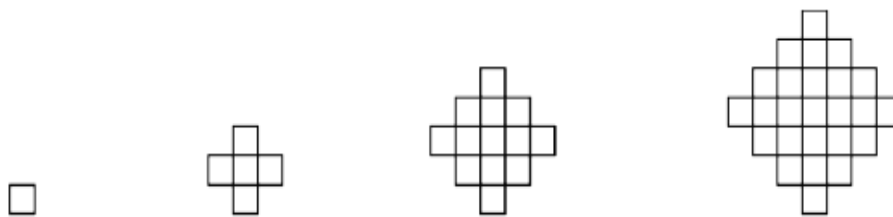


Figura A.4: Sequência de quadradinhos

Caso o padrão seja mantido:

- quantos quadradinhos unitários haverá na próxima figura (figura 5)?
- qual a fórmula q_n do total de quadradinhos unitários em cada figura?
- quantos quadradinhos unitários haverá na centésima primeira figura?

Solução.

Pela a sucessão de figuras, observamos que o número de quadradinhos unitários de uma figura é obtida pela figura anterior mais um acréscimo de quadradinhos aos lados fazendo com que a dimensão da nova lateral seja uma unidade maior que a anterior. Note que esse acréscimo de quadradinhos unitários nas laterais da $n - ésima$ figura mostra que temos n quadradinhos em cada lateral, ou seja, tal acréscimo pode ser expresso por $4n - 4$ (tomando o cuidado de não contar duas vezes os quadradinhos dos cantos). Sendo (q_n) o número de quadradinhos unitários da $n - ésima$ figura, temos a seguinte recorrência

$$q_{n+1} = q_n + 4(n + 1) - 4$$

$$q_{n+1} = q_n + 4n$$

Portanto, as diferenças sucessivas $d_n = q_{n+1} - q_n = 4n$ são expressas por um polinômio do primeiro grau, isto é, a sequência (q_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem e a sequência (d_n) é uma PA de ordem 1 associada a (q_n) . Então, temos

$$q_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \Rightarrow q_n = 1 + \frac{4n(n-1)}{2} \Rightarrow q_n = 2n(n-1) + 1.$$

Dessa forma, com a fórmula $q_n = 2n(n-1) + 1$ responde-se facilmente aos itens a), b) e c) desta questão.

Questão 6. (Portal OBMEP) “Números triangulares” são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares e definimos como T_i a representação do i – *ésimo* número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante.

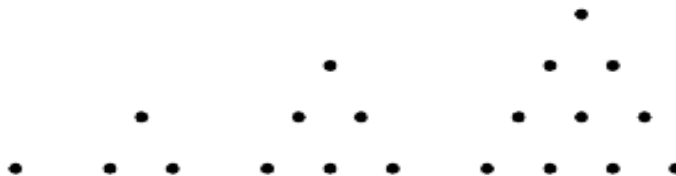


Figura A.5: Números triangulares

Qual valor de T_{100} ?

Solução.

Sabemos do Teorema 5.5 que, considerando T_i como o número de pontos da i – *ésima* figura, a recorrência associada aos números triangulares é

$$T_{i+1} = T_i + i,$$

nos permitindo concluir que (T_i) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Da seção 5.4 sabemos também que

$$T_i = \frac{i(i+1)}{2}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$T_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Apêndice B

Trabalhando Números Poligonais no Ensino Médio

Sejam os números Triangulares como na sucessão de figuras abaixo.

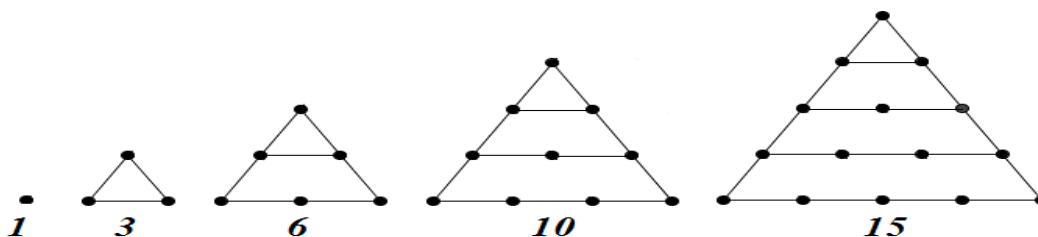


Figura B.1: Números triangulares

Os alunos devem perceber que as diferenças sucessivas $3 - 1$, $6 - 3$, $10 - 6$, e $15 - 10$ formam uma progressão aritmética de primeira ordem $(b_n) = (2, 3, 4, 5, \dots)$ e que por isso, ao suporem (o melhor seria que percebessem a lei de recorrência envolvida, como na demonstração do Teorema 5.5) que este comportamento se mantenha, afirmar que os números triangulares formam uma progressão aritmética de segunda ordem $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$. Agora, através da análise feita para se chegar na equação (5.1), os alunos poderão determinar qualquer número triangular na sequência, pois temos conhecidos $a_1 = 1$, $b_{n-1} = 2 + (n - 1 - 1) \cdot 1 = n$ e também a soma $\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{(2+n)(n-1)}{2}$ (pois (b_n) trata-se de uma PA de primeira ordem, que aqui está associada à PA de segunda ordem (a_n)), isto é, temos

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

em que, após uma simples manipulação algébrica, obtemos

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

que é a expressão geral para o n –ésimo número triangular. Analogamente podem ser trabalhados os outros números poligonais.

Podemos também proceder usando a relação vista no Capítulo 4 entre progressões aritméticas de segunda ordem e funções quadráticas. Sabemos do Teorema 4.5 que o termo geral da PA de ordem dois $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$ é um polinômio de grau dois em n , ou seja, $a_n = \alpha n^2 + \beta n + c$, com $\alpha \neq 0$, β e c constantes reais. Do Capítulo 6 de [3], sabemos que são necessários 3 valores distintos de n para que determinemos o polinômio $a_n = \alpha n^2 + \beta n + c$. Como já conhecemos os termos iniciais da sequência (a_n) , usaremos os três primeiros.

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta + c; \\ 3 = 4\alpha + 2\beta + c; \\ 6 = 9\alpha + 3\beta + c. \end{cases}$$

Ao solucionar este sistema obtemos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e $c = 0$. Logo,

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}.$$