UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Padrões, Conjecturas e algumas Curiosidades sobre Determinantes

Marília de Souza Sales

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Agosto/2020

S163p Sales, Marília de Souza.
Padrões, conjecturas e algumas Curiosidades sobre determinantes / Marília de Souza Sales. - Campina Grande, 2020.
91 f.: il. Color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".
Referências.

1. Ensino Médio - Matemática. 2. Padrões. 3. Matrizes. 4. Determinantes. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. III. Título.

CDU 373.5:51(043)
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS CRB-15/93

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Padrões, Conjecturas e algumas Curiosidades sobre Determinantes

por

Marília de Souza Sales †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Padrões, Conjecturas e algumas Curiosidades sobre Determinantes

por

Marília de Souza Sales

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer - UFCG

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

agosto/2020

Dedicatória

À minha amada mãe, Maria do Socorro de Souza Sales que sempre está ao meu lado.

Agradecimentos

À Deus que durante toda a caminhada desse curso capacitou-me para vencer todos os desafios.

À minha família que esteve ao meu lado em todos os momentos, mesmo naqueles mais difícies.

Ao meu orientador Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros pela orientação, dedicação, amizade, cuidado na realização deste trabalho e pela paciência que demonstrou comigo nos momentos mais angustiantes.

À banca organizadora, composta pelos professores Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro (UFPB) e Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer (UFCG) pelas valiosas sugestões que melhoram signitivamente este trabalho.

À todos os meus amigos da Turma 2018 que unidos obtemos sucesso em todas as etapas do mestrado, enfrentando as dificuldades, ajudando uns aos outros sempre que necessário, pois sem estes, a caminhada seria amarga, em especial a minha amiga e irmã Lucielma.

Ao corpo docente que compõe o Profmat, por todo conhecimento compartilhado.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa, fundamental para o suporte à pesquisa e conclusão do Mestrado Profissional de Matemática.

Resumo

A presente pesquisa nasceu da necessidade de ofertar novas abordagens pedagógicas que venha desenvolver o pensamento matemático no estudo de determinantes no Ensino Médio, visando o protagonismo estudantil na aprendizagem da Matemática. Diante disso, a investigação matemática, com o auxílio do Maxima, permitiu criar atividades por meio da análise de padrões com determinantes de matrizes, formulação de conjecturas, generalizações e demonstrações de algumas proposições matemáticas utilizando apenas as propriedades deste objeto de estudo. Neste trabalho também é apresentado a demonstração do Teorema Elementar de Laplace e o Teorema de Laplace Generalizado para determinantes. Com base nessas propriedades, construímos algoritmos alternativos, por meio de fórmulas recursivas, para o cálculo de determinantes de matrizes tridiagonais e comparamos sua performance em função do número de operações aritméticas.

Palavras Chaves: Padrões. Matrizes. Determinantes.

Abstract

This research was born from the need to offer new pedagogical approaches that will develop mathematical thinking in the study of Determinants in High School, aiming at student leadership in learning mathematics. Therefore, the mathematical investigation, with the help of Maxima, allowed to create activities through the analysis of patterns with determinants of matrices, formulation of conjectures, generalizations and demonstrations of some mathematical propositions using only the properties of this object of study. This term paper also presents the demonstration of the Laplace Elementary Theorem and the Generalized Laplace Theorem for determinants. Based on these properties we build alternative algorithms using recursive formulas for calculating determinants of tridiagonal matrices and compare their performance as a function of the number of arithmetic operations.

Keywords: Pattern. Matrices. Determinants.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No cenário educacional brasileiro, o ensino matemático é predominantemente voltado para a repetição de exercícios e exposição de métodos e regras, como se esses passos por si só fossem suficientes para desenvolver o pensamento matemático. Segundo Lima (2007, p.157), "a presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral, é como se a matemática se resumisse a ela". Durante o Ensino Médio, a presença de elaboração e demonstrações de conjecturas é geralmente escassa, predominando as abordagens, as conjecturas e os teoremas aceitos sem nenhuma demonstração.

Ministro o assunto de determinantes de matrizes na rede pública há cerca de 7 anos e a experiência em sala de aula tem me levado a algumas inquietações, a exemplo: de que forma poderíamos introduzir a definição, explorar as propriedades e desenvolver algoritmos para o cálculo de determinantes de matrizes, sem inibir a criatividade?

Nesse contexto, discorremos sobre algumas estratégias metodológicas evidenciadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para ensinar e favorecer a aprendizagem sobre determinantes de matrizes, ressaltando a sua definição, explorando suas propriedades de maneira criativa e reconstruindo alguns conceitos que foram perdidos ao longo da história.

Dentro das estratégias metodológicas, abordamos no trabalho a investigação matemática e a resolução de problemas. Também discorremos sobre o uso do computador em sala de aula, como suporte para exploração e validação de alguns resultados envolvendo este objeto de estudo. Com efeito, o computador por ser versátil, permitir a interação dinâmica de objetos e até mesmo a manipulação de expressões simbólicas, pode ser utilizado de modo experimental e testar numericamente a validade de certas propriedades matemáticas como aponta Elon Lima, pesquisador do Instituto de Matemática (IMPA).

> "Na matemática em geral (sem adjetivos), o computador contribuiu para divulgar e expandir o uso experimental, que consiste em constatar, mediante verificações numéricas ou gráficas, a validez de uma conjectura numa grande quantidade de casos particulares, a fim de adquirir a certeza moral" (Lima, 2007, p.168).

No presente trabalho, temos como objetivos trabalhar a definição de determinantes de matrizes, a partir do conceito de permutação, explorar suas propriedades; realizar cálculos de determinantes de algumas matrizes especiais; resgatar e reconstruir o Teorema de Laplace Generalizado; elaborar atividades voltadas à análise de padrões, generalizações, formulação de conjecturas, refutação ou demonstrações de propriedades no estudo deste objeto matemático; apresentar um algoritmo para o cálculo de determinantes de matrizes tridiagonais e estabelecer uma relação entre o determinante e os *menores* de ordem $n-2$ de uma matriz real de dimensão n.

Enquanto educadora, matemática e pesquisadora, as nossas inquietações consistem em pensar não apenas como poderiam ser desenvolvidos esses exemplos, mas em também inserir as contribuições da investigação matemática, da resolução de problemas e da informática como suporte para o desenvolvimento do protagonismo estudantil na aprendizagem da Matemática. Para tanto, tomamos com suporte teórico: Lima (2007), Ponte (2009), Giraldo (2012) e alguns documentos normativos como PCN's (1997) e BNCC (2018).

Assim, a proposta deste trabalho é relevante uma vez que, através das investigações, podemos estabelecer relações entre objetos matemáticos conhecidos ou ainda desconhecidos pelos alunos da rede Básica de Educação. Esperamos que a proposta deste material didático relacionado a determinantes de matrizes possa servir de orientação para o professor, possibilitando o desenvolvimento da pesquisa na Educação Básica, conduzindo o estudante ao encontro da Matemática genuína.

Estruturalmente, nosso trabalho está organizado em 6 (seis) capítulos, incluindo a Introdução (Capítulo 1) e a Conclusão (Capítulo 6). São eles:

- **Capítulo 2**: abordamos as orientações dos PCN's e da BNCC sobre as contribuições da abordagem de padrões na Educação Básica, dentro da perspectiva da investigação matemática e resolução de problemas com o suporte do computador.

- **Capítulo 3**: apresentamos a definição de determinantes a partir do conceito de permutação, algumas reflexões sobre a definição desse objeto de conhecimento presente nos livros didáticos do Ensino Médio, alguns exemplos de atividades envolvendo análise de padrões com determinantes de matrizes, com algumas orientações pedagógicas que julgamos viáveis à exploração desses exemplos na sala de aula. Além disso, apresentamos também a demonstração do Teorema Elementar de Laplace.

- **Capítulo 4**: abordamos conceitos relacionados aos *menores* de uma matriz, algumas curiosidades, o Teorema Generalizado de Laplace e dois algoritmos para o cálculo de matrizes tridiagonais a partir da aplicação do Desenvolvimento Elementar e Generalizado de Laplace.

- **Capítulo 5**: exibimos uma relação entre o determinante e os *menores* de uma matriz, uma demonstração computacional para um caso particular e alguns exemplos numéricos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Elaborar exemplos de atividades envolvendo a análise de padrões e propriedades de determinantes de matrizes, que possam auxiliar os professores no desenvolvimento de pesquisas na Teoria dos Determinantes na Educação Básica.

Para alcançar o objetivo geral, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

1.1.2 Objetivos específicos

- Apresentar as contribuições da investigação matemática, da resolução de problemas e dos recursos computacionais no processo de ensino aprendizagem da Matemática;
- Criar atividades com determinantes de matrizes que permitam ao educador explorar padrões e estabelecer conjecturas, levando em conta apenas as propriedades de determinantes, os pensamentos matemático e computacional, itens tão necessários para a ampla formação de uma postura criativa, lógica e dedutiva;
- Utilizar o Maxima como ferramenta para subsidiar as investigações de padrões, generalizações, validações ou refutações das conjecturas;
- Estabelecer algumas propriedades dos determinantes de matrizes a partir de observação e conjecturas;
- Apresentar uma demonstração do Teorema Elementar de Laplace e resgatar o Teorema de Laplace Generalizado;
- Incentivar a produção e redescoberta de conhecimentos matemáticos na Educação Básica.

1.2 Metodologia

A metodologia da pesquisa seguirá uma abordagem qualitativa, dividida em alguns momentos:

- Levantamento bibliográfico, para compreender os benefícios da investigação matemática, da resolução de problemas, dos recursos computacionais e aprofundar o conhecimento sobre determinantes e suas propriedades, bem como os métodos disponíveis na literatura brasileira e estrangeira para o cálculo de determinantes;
- Desenvolvimento de um estudo em determinantes de matrizes que apresentam padrões;

- Reflexão acerca de como é definido determinantes de matrizes nos livros didáticos;
- Identificação de padrões matemáticos envolvendo determinantes de matrizes especiais, com o auxílio do Maxima;
- Formulação, verificação, refinamento ou demonstração das possíveis conjecturas;
- Elaboração de exemplos de atividades, envolvendo a análise de determinantes de matrizes com padrões numéricos e algébricos, para alunos da segunda série do Ensino Médio, no viés da investigação matemática, da resolução de problemas com o suporte do Maxima;
- Reconstrução do Teorema de Laplace;
- Aplicar os Teoremas Elementar e Generalizado de Laplace para a elaboração de um algoritmo para o cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal, comparando suas performances quanto ao número de operações aritméticas;
- Estabelecimento de uma relação entre o determinante e os menores de ordem $n-2$ de uma matriz real de dimensão n, extendendo o resultado obtido em Oliveira (2019).

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Neste capítulo, são abordadas algumas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre a importância dos padrões, regularidades e da formulação de conjecturas no desenvolvimento das habilidades e competências esperadas para o Ensino Médio, na perspectiva da investigação matemática, da resolução de problemas e do uso do computador na sala de aula.

2.1 Padrões

A palavra "padrão" perpassa vários contextos, não sendo uma palavra puramente matemática, uma vez que ela é transversal aos mais diversos campos, seja nas artes, seja na natureza, nas suas diversas formas: padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimentos, padrões de comportamentos. De forma mais global, a palavra "padrão" está presente na Matemática em todas as suas áreas, envolvendo os mais diversos objetos na Geometria, Teoria dos Números, Álgebra, entre outros.

Assim, nesta seção, discutimos sua definição, alguns apontamentos das potencialidades do estudo dos padrões na Educação Básica no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos e quais as competências podem ser desenvolvidas nos estudantes a partir da exploração de padrões na sala de aula.

Como podemos definir o que é padrão? Lima (2007) propõe que a conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, porém, definir padrões é complicado, pelo fato de não ser uma noção puramente matemática. Para Vale e Barbosa (2009), "tal definição apenas poderia servir para usar como critério para decidir se um dado objeto é ou não é um padrão"; enquanto para Lopes (2012, p.4), podemos compreender padrão como uma "disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades". Mesmo com essas dialéticas das definições, é senso comum entre os matemáticos que a Matemática é a ciência dos padrões, usada para explicar comportamentos e prever fenômenos naturais que seguem um determinado padrão.

É importante destacar que padrão está relacionado à repetição e às regularidades nos diz respeito ao que é comum a todos os objetos em um dado conjunto/grupo. O Conselho Nacional dos Professores de Matemática (CNPM), nas Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática, aponta que a exploração de padrões e regularidades favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com o CNPM (2007), as competências relacionadas aos padrões favorecem:

- Resolver problemas;
- Compreender conceitos e relações importantes;
- Investigar relações entre quantidades (variáveis) num padrão;
- Generalizar padrões através do uso de palavras ou variáveis;
- Continuar e relacionar.

Dentro dessa perspectiva, os padrões podem ser trabalhados desde os anos iniciais da Educação Básica, como apontam os PCN's. Os referenciais nacionais comuns ao processo educativo sugerem a abordagem de padrões na unidade temática Álgebra desde os primeiros ciclos, uma vez que a percepção de padrões e regularidades favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico [1].

Nos 2º e 3º anos do Ensino Fundamental, os PCN's observam que atividades envolvendo padrões sejam voltadas à: "identificação de regularidade na série numérica para nomear, ler e escrever números menos frequentes". É importante observar que esse tipo de atividade também é sugerida para os 4º e 5º anos, porém com a finalidade de ampliar a formulação de hipóteses. Nesse sentido, "por exemplo, percebem que algumas regras, propriedades, padrões, que identificam nos números que lhe são mais familiares, também vale para números maiores" (BRASIL, 1997a, p.55).

Como podemos observar, nos 2º e 3º anos, essas atividades se configuram dentro do bloco Números e Operações e sendo exploradas através das identificações. Porém, nos 4º e 5º anos, as generalizações desses padrões são estimuladas a serem expressas através da observação e experimentação.

Por outro lado, nos 6º e 7º anos, os padrões estão incluídos na unidade temática Álgebra e Funções e sua exploração ocorre durante a abordagem de sequência numérica. Assim,

> "[...] é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximação sucessivas, a natureza das representações algébricas" (BRASIL, 1997a, p.68).

[1] Segundo BRASIL (2018) - é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

Desse modo, explorar atividades que estejam direcionadas a padrões nessa etapa visa a identificação da regra matemática que permite calcular o próximo termo de uma sequência recursiva ou não, no qual é utilizada a linguagem algébrica ou símbolos geométricos para expressar regularidades. Dentro dos objetivos esperados para o ensino fundamental, temos:

> "Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas" (BRASIL, 1997a, p.37).

Para os 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, os PCN's trazem como orientações didáticas:

> "É interessante também propor situações que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-lo simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades" (Brasil, 1997a, p.117).

No Ensino Médio, as atividades envolvendo a identificação de regularidades e generalizações de padrões são apontadas para desenvolver o domínio de um saber/fazer Matemática e de um saber/pensar matemático. Segundo os PCNEM (BRASIL, 2000b, p.41), "esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalizações de padrões [...]".

Essas orientações evindenciam a abordagem de atividades que envolvam a identificação de padrões, a formulação, testes e refinamentos de conjecturas, ao incentivo de generalizações de resultados nas diversas áreas da Matemática.

2.2 Abordagem dos padrões nas perspectivas da BNCC

No Ensino Fundamental, esse documento propõe que, desde os primeiros anos da fase escolar, os estudantes tenham noções de padrões, para que eles sejam capazes de identificá-los e analisar as regularidades, além de constatar que existem os padrões comuns à diferentes sequências, assim como construir noções de propriedades entre números e operações, com a finalidade de desenvolver as habilidades relacionadas à observação, identificação, generalização e dedução, na investigação de sequências com padrões repetitivos e recursivos, fortalecendo as ideias sobre o ensino de padrões na Educação Básica, sugeridos pelo PCN. Nesta seção, apresentamos algumas orientações da BNCC a respeito do ensino de padrões ao longo das etapas da Educação Básica.

A BNCC, documento normativo que define as aprendizagens essenciais, traz consigo as competências que nortearam a produção dos currículos municipais e estaduais, assim como o trabalho das escolas e dos professores ao longo de todas as etapa da Educação Básica. Visando às necessidades do século XXI, as competências, de acordo com a BNCC, envolvem a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas, socioemocionais), atitudes e valores para uma formação para a vida. A partir disso, as competências devem ser desenvolvidas ao longo da vida escolar através de todos os componentes curriculares, contemplando o desenvolvimento de 10 competências gerais[2]:

> “...cada área do conhecimento estabelece competências específicas, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dos noves anos. Essas competências explicitam como as dez competências gerais se expressam nessas áreas[...]. Para assegurar, o desenvolvimento das competências específicas de cada área, é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais” (BRASIL, 2018, p.28)

É importante salientar que as competências se desenvolvem lentamente, de forma progressiva, quando se propõe ao indivíduo o enfrentamento de situações inéditas e complexas.

De acordo com a BNCC, o trabalho com padrões não deve se resumir apenas a observar e identificar, é necessário promover atividades que os alunos produzam, chequem e elaborem hipóteses, generalizem e deduzam. Como as Competências se desenvolvem progressivamente nos anos finais do Ensino Fundamental, temos nas unidades temáticas da Álgebra, as seguintes Habilidades:

- Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência;
- Classificar sequências em recursivas e não recursivas reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas Artes e na Literatura;
- Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas;
- Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes;
- Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figura não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes;

[2] Ver apêndice A

- Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Notemos que as habilidades mencionadas acima estão direcionadas a identificar padrões e regularidades, a elaborar, possivelmente, conjecturas e demonstrações. Assim, a BNCC recomenda que, a partir de trabalhos no campo da Álgebra, deve-se incentivar e propor, sempre que possível, uma etapa de generalização, na qual os estudantes tenham a oportunidade de levantar hipóteses e investigar possíveis explicações para construir regras e propriedades.

No Ensino Médio, Brasil (2018) propõe a consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental e o desenvolvimento de 5 (cinco) competências específicas que a área da Matemática e suas Tecnologias devem proporcionar aos estudantes. São elas:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais - como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros - mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática;

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico, estatístico; computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Para desenvolver o tema de determinantes de matrizes por meio da exploração de padrões, abordamos dois processos matemáticos, identificados na BNCC como metodologias: Investigação Matemática e Resolução de Problemas.

2.3 Investigação Matemática

Na quinta competência, específica da componente curricular de Matemática no Ensino Médio, notamos um forte indício da investigação como estratégia metodológica para ensinar e aprender Matemática. Mas, o que é investigação matemática? A própria palavra "investigar" nos remete ao conceito de descobrir, construir, relacionando à aprendizagem ao ato de fazer o próprio conhecimento, através das observações dos objetos ou outros em análise, assim como nos afirmam Ponte, Hélia e Brocardo (2006, p. 13), quando dizem que "para muitos matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades".

Brocardo (2001) define investigação como uma atividade que envolve três processos: explorações de possibilidades, formulação de conjecturas e procura de argumentos que validem as descobertas realizadas. Ela é adotada como metodologia, por ser algo dinâmico, que estimula no estudante a capacidade de pensar e fazer Matemática, através de problemas abertos, de modo a permitir aos alunos as realizações de observações. Isso porque, enquanto investigam padrões, regularidades e propriedades matemáticas, novos conhecimentos podem ser descobertos ou reformulados. Vale ressaltar que nesse tipo de atividade o estudante é direcionado a elaborar hipóteses e tentar comprová-las. Desta forma, a investigação matemática, na visão de Ponte, Brocardo e Hélia (2006), "envolve, naturalmente conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é o paradigma de conjectura-teste-demonstração".

Com base em Ponte, Hélia e Brocardo (2006, p. 21), a realização da investigação matemática envolve quatro momentos principais: Reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões; Formulação de conjecturas; Realização de testes e o eventual refinamento; Argumentação, a demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Nessa perspectiva, percebemos os processos adotados para a produção de novos resultados matemáticos, os quais podem ser levados aos estudantes da Educação Básica através das investigações como tarefas matemáticas, permitindo-os conhecer quais os passos para a produção e validação de novos conhecimentos matemáticos. Nesse tipo de atividade, adotamos ideias defendidas por Brocardo (2001), visto que:

> "Parte-se do inicial como o objetivo de compreender a situação proposta que envolve análise e organização de dados, os alunos devem formular questões que orientem as suas explorações da situação proposta. Depois, deveriam seguir um ciclo de formulação de teste e refinamento de conjecturas. Finalmente, procurar argumentos que validassem as conjecturas que resistem a sucessivos testes" (BROCARDO, 2001, p.125).

Como vemos, o aluno é direcionado a formular suas questões com base na situação que lhe é apresentada. Como em todos os momentos da execução das tarefas, o acompanhamento do professor é essencial, tanto no ponto de partida – ao dar suporte na autonomia do entendimento do que significa investigar, principalmente quando os alunos não têm experiência – quanto durante todo o processo, o qual perpassa a formulação de conjecturas, acompanhamento das evoluções na execução das investigações e compreensão da conjectura.

2.3.1 Por que demonstrar uma conjectura?

Para Lima (2007), "a nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez de autoridade". Essa autoridade muitas vezes é disfarçada pela expressão "é regra", quando os estudantes questionam o porquê de certos resultados apresentados na Educação Básica como verdade absoluta. Mesmo com inovações no ensino da Matemática, são escassas as práticas educativas que fornecem condições e estímulos aos estudantes a demonstrarem, ou encontrarem um contraexemplo, para um determinado resultado afirmado. Lamentavelmente, "a grande maioria dos estudantes brasileiros sai da escola, depois de onze anos de estudo, sem jamais ter visto uma demonstração" (LIMA, 2007, p.158).

No que se refere ao processo de formulação e demonstração de uma conjectura, o episódio é semelhante. Adotamos, neste trabalho, o conceito de conjectura defendido por Morais Filho (2016, p.138), o qual estabelece que se trata de "uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validação ou de um contraexemplo para garantir que ela não é válida".

Brocardo (2001) recomenda alguns cuidados sobre o processo de gestação das conjecturas, visto que, para ele, "formular uma conjectura não corresponde a adivinhar. Antes de o fazer é necessário aprofundar a compreensão da situação que se explora e conseguir imaginar uma generalização a partir de exemplos significativos". Assim, durante esse processo, recomenda-se que sejam observados exemplos particulares pois, quando os alunos vão adquirindo experiências, o processo de refutação e reformulação ocorre naturalmente. Defendemos a inserção dessas práticas no Ensino Médio haja vista que os PCN's e PCNEM apontam para uma argumentação algébrica ou geométrica capaz de convencer os alunos dos resultados observados, para a promoção de concepção por parte do estudante de que apenas a formulação e verificação das conjecturas não comprovam um resultado matemático, sendo necessária a justificativa através de argumentos que garantam a sua veracidade - o que chamamos de uma demonstração.

Demonstrar ou apresentar um contraexemplo para um determinado resultado matemático afirmado está ao alcance dos estudantes da Educação Básica. Esse processo é recomendado pela BNCC:

> "Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplo para refutá-la e quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos não "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições" (BRASIL, 2018, p. 540).

Galbraith (1981, p.40, apud TINOCO E NASSER, 2003) afirma que para desenvolver a argumentação em sala de aula é necessário:

- Entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares;
- Reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
- Utilizar uma cadeia de inferência a fim de se convencer do resultado a ser alcançado;
- Reconhecer a arbitrariedade de propriedades de uma definição;
- Ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento.

Dentro das funções de uma demonstração, a mais usual é a validação de resultados. Para promover o desenvolvimento da argumentação e a compreensão da Matemática, adotamos neste trabalho investigações/problemas/atividades que abordam estratégias que exploram as habilidades de argumentação apontadas por Tinoco e Nasser (2003). Entre elas, temos:

> "O mesmo problema é sugerido a ser proposto tanto a estudantes que aprenderam o conteúdo matemático correspondente, quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de evitar o excesso de algebrismos; o computador será recomendado para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa; sendo verdade (ou não), é recomendado que os estudantes justifiquem, ou apresentem um contraexemplo" (TINOCO e NASSER, 2003. p.10).

No Capítulo 3, são sugeridas atividades com enfoque experimental, baseadas nas estratégias de Abordagem da Investigação e da Resolução de Problemas - com o auxílio do computador.

2.4 Resolução de Problemas

O ponto principal para a ocorrência de uma investigação matemática é o problema, geralmente aberto. Uma das formas possíveis de diferenciá-los é através dos enunciados, visto que, no problema, ele "indica o que é dado e o que é pedido" (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p. 26); enquanto na investigação, os enunciados direcionam os estudantes a formularem as questões, as conjecturas, assim como a realizarem provas e refutações a partir de uma situação dada. Segundo Medeiros (2001):

> "Um problema aberto tem por objetivo permitir que o aluno desenvolva um processo de resolução de problemas que nós chamaremos "processo científico", ou seja, onde o aluno desenvolverá a capacidade de tentar, supor, testar e provar o que for proposto como solução para o problema, implicando uma oposição aos problemas fechados" (MEDEIROS, 2001, p.34).

Alguns autores como Medeiros (2001) e Onuchic (2014) apontam a resolução de problemas como " motor para a produção de novos conhecimentos matemáticos". Porém, em alguns casos, um problema é confundido com um exercício que tem a função de praticar um algoritmo previamente explorado, distanciando-se da essência de problema.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), "um problema é uma questão para qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua solução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido"; enquanto para Onuchic (2014), "para que uma atividade se constitua, de fato, como um problema, o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução". Corroborando os apontamentos de Irma Saiz (1996), Medeiros (2001) ressalta que o problema precisa ser desafiador para o aluno, não podendo ser resolvido por meio de procedimentos padronizados. Assim, problema é qualquer situação em que os estudantes não possuem um método de resposta já estabelecido, requerendo a superação de obstáculos e exigindo dos alunos a alocação de conhecimentos anteriores, a fim de estabelecer a resposta ou atingir o objetivo final. O que dá sentido ao problema é a resistência da situação que obriga o sujeito a refletir, adaptar, modificar ou perceber uma dificuldade: uma determinada situação que pode provocar desconforto.

Nesse processo matemático, mobilizamos três formas de realizar a abordagem no ambiente escolar, como destaca Onuchic (2014): o ensino sobre resolução de problemas, que consiste na Exploração da Resolução de Problema como objeto de conhecimento; o ensino para a Resolução de Problemas, o qual é proposto como aplicação dos conteúdos estudados e, por fim, o ensino através da Resolução de Problemas, a partir do qual a resolução de problemas e a aprendizagem da matemática são desenvolvidas paralelamente. Medeiros (2001) afirma que o ensino para a Resolução de Problemas não proporciona um aproveitamento esperado na exploração da atividade, enquanto para Onuchic (2014) o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas é a mais indicada com as recomendações dos PCN's.

Podemos supor que essa metodologia surgiu no contexto educacional "pelo fato da necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimentos e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem, colocando-o como protagonista de seu processo de construção de conhecimentos" (ONUCHIC, 2014, p.40). Ela é apontada com um dos principais motivos que justificam o ensino da Matemática na Educação Básica. Sendo recomendada pela BNCC como objeto de ensino e estratégia: "a resolução de problema é potencialmente rica para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático". Além disso, é vista como meta no ensino da Matemática, pois a BNCC sugere que seus conceitos, técnicas e procedimentos sejam trabalhados antes de propor que os estudantes resolvam problemas. De acordo com os PCN's, tem-se que:

> “A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas[..]”. (BRASIL, 1997a, p.40).

Sobre a sua aplicação na sala de aula e o processo de resolução de problemas, Polya (1995) sugere quatro fases: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano; retrospecto da resolução. Essas etapas indicam que o estudante precisa compreender o problema, analisar a situação fragmentando o problema para relacionar as informações, identificar o que é relevante ou não, mobilizar conhecimentos e perseverar na resolução. Corroborando às ideias de Polya (1995), Onunchi (2014) sugere que os problemas sejam organizados respeitando as seguintes etapas: proposição do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução de problemas, observação e incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária, busca de consenso, formalização do conteúdo, proposição e resolução de novos problemas.

Diante dessas recomendações, percebemos quais os comportamentos que devem ser desempenhados pelo professor ao conduzir as etapas de resolução, a partir afirmações de Onunchi (2014),

> “O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários, mas ainda as ações são realizadas, essencialmente, pelos estudantes[...]. O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos[...] o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções[...]”. (ONUNCHI, 2014, p.45 e 46).

Dentro dessas perspectivas, destacamos algumas ações pedagógicas que auxiliam os estudantes na resolução: socialização das estratégias usadas; incentivo e valorização dos registros, sejam esquemas, escritas e tabelas; trabalhos em pequenos grupos; relacionar o problema a outros já resolvidos (problema correlato), monitorar através de várias verificações ao longo do caminho, percebendo se as estratégias estão dando certo e validá-las.

Nas propostas de atividades sugeridas neste trabalho, a exploração de problemas, além da temática central determinantes de matrizes, abre possibilidade de novas reflexões e correlação a outros conceitos, tais como a ideia de sequência, o uso do Princípio de Indução ou a própria ressignificação do conhecimento através da operacionalização das propriedades dos objetos matemáticos. Para isso, propusemos problemas direcionados, que supõem a dialética destacada por Piaget, *pensamento-ação*, diferentemente de uma tarefa simples de manipulações de fórmulas a serem constadas pelos alunos.

2.5 O uso do computador no cenário educacional.

A chegada da informática no final da década de 70 trouxe novas áreas e potencialidades para o cenário educacional, mas também temores que vão desde a aprendizagem dos estudantes, até a função do professor diante do campo educacional. Para Borba e Penteado (2001),

> "Um deles era que o aluno iria só apertar teclas e obedecer a orientação dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas[...]. Nesse sentido, se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência" (BORBA, PENTEADO, 2001, p.11).

Esse tipo de discurso é comumente utilizado como justificativa para a não utilização do computador na escola, mesmo algumas possuindo infraestrutura e materiais adequados. Isso significa que a utilização desses recursos para a realização de exercícios pode favorecer a prática de memorizações e repetições, contribuindo não apenas para a rejeição da informática, mas também para fortalecer paradigmas em relação à Matemática, a exemplo da falácia de que a Matemática é composta de procedimentos mecânicos.

Nessa abordagem, a ferramenta tecnológica se tornaria um "enfeite" em sala de aula. Mas, como poderíamos modificar essa situação? Quais aspectos devemos considerar para o uso inteligente do computador? Sabemos que a docência envolve vários elementos, como destaca Borba e Penteado (2001), pois:

> "Nela estão envolvida propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina que se ensina, as leis que estruturam o funcionamento da escola, os alunos, seus pais, a direção, a supervisão, os educadores de professores, os colegas de professores, os pesquisadores, entre outros" (BORBA, PENTEADO, 2001, p.54).

Dentre esses elementos, Giraldo (2012) ressalta que "a proposta pedagógica deve se orientar por objetivos e competências a serem adquiridas pelo estudante", afim de favorecer momentos com o uso da tecnologia para que o estudante crie, pense e manipule. Para isso, o professor deve estabelecer a finalidade educacional, considerar o cenário pedagógico e qual o seu papel nesse episódio. Tudo isso parece ser uma possibilidade para que o computador seja um aliado no processo de ensino e aprendizagem, visto que ele não determina o sucesso da prática pedagógica.

Deste modo, é necessário sair da zona de conforto, conforme afirmam Borba e Penteado

(2001), “onde quase tudo é conhecido, previsível e controlado”- em termos práticos é preciso conhecer o software, realizar experimentações, vivenciar possíveis riscos e erros e inserir no seu vocabulário termos do campo da informática, para que os benefícios provocados pelo uso do computador possam fazer parte do cotidiano escolar.

Nessa perspectiva, o computador pode auxiliar a construção do conhecimento quando for usado como receptor de informações fornecidas pelo estudante. Segundo Lima (2007):

> “Na Matemática em geral (sem adjetivos), o computador contribuiu para divulgar e expandir o uso experimental que consiste em constatar, mediante verificações numéricas ou gráficas, a validez de uma conjectura numa grande quantidade de casos particulares, a fim de adquirir a certeza moral.” (LIMA, 2007, p.168).

Segundo Giraldo (2012, p.231.), “a incorporação de tecnologias computacionais no ensino de Matemática possibilita novas abordagens, em alguns casos revelando aspectos dos conceitos matemáticos que não poderiam ser ensinados por meio de recursos convencionais”. Assim, o uso desse tipo de tecnologia subsidia a realização de atividades essenciais para o desenvolvimento e formação da aprendizagem Matemática, tais como a identificação de padrões, elaboração de conjecturas, fazer experimentos e avaliar ou reavaliar os resultados, propor generalizações e em certos casos estabelecer suas demonstrações.

Diante das reflexões levantadas no parágrafo anterior, trazemos à baila o seguinte questionamento: Quais os benefícios do uso do computador nas aulas de Matemática? A fim de buscarmos respostas, consultamos os documentos oficiais PCN’s e os PCNEM’s, referências para uma educação de qualidade tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio. Assim, os PCN’s do Ensino Fundamental afirmam que:

> “O computador como uma das possibilidades para fazer matemática na sala de aula: como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, seja pela sua destacada presença na sociedade moderna, seja pelas possibilidades de sua aplicação nesse processo” (BRASIL, 1997a, p.35).

Enquanto os Parâmentos Curriculares do Ensino Médio (PCNEM’s) destacam as funções da Matemática aliadas à tecnologia, Brasil (2000b, p.41) afirma que “aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático”. Dessa forma, tais documentos validam o uso dessa ferramenta para estabelecer/desenvolver novas relações entre objetos da matemática.

Neste trabalho, utilizamos e recomendamos o uso do computador na sala para a exploração das propriedades de determinantes e da formulação de conjecturas elaboradas a partir de algumas matrizes especiais, visto que o computador permite ao aluno passar mais tempo na validação do pensamento, em detrimento do tempo gasto no processo de algebrização.

2.5.1 Maxima

O *Maxima*[3] é um software capaz de operar e simplificar expressões algébricas, trigonométricas, efetuar cálculos com matrizes, números complexos, construir representações gráficas, fatorar polinômios, entre outros. Além disso, é acessível às escolas, pelo fato de ser gratuito e compatível com os principais sistemas operacionais, como *Linux* e *Windows*. Entre os seus vários recursos, destacamos as expressões simbólicas que utilizamos para calcular determinantes de matrizes. Nessa subseção, apresentamos os recursos básicos para representar matrizes e o cálculo de Determinantes dentro do ambiente do *Maxima.*

No *Maxima*, os comandos são digitados diretamente na linha de comando. A finalização de cada bloco de comando ocorre através das teclas *Shift + Enter* ou *Ctrl + Enter*; e as linhas indicadas por (*%i*) e (*%o*) representam entrada e saída de dados.

Os comandos para definir uma matriz são: *matrix([linha 1], [linha 2], ...)*, onde se inserem as linhas entre colchetes (caso 1); *gemmatrix (função, quant.de linhas, quant. de colunas)*, que produz uma matriz cuja ordem e a lei de formação são dadas (caso 2); e *entermatrix (quant. de linhas, quant.de colunas)* comando que gera a matriz a partir do fornecimento de todas as suas entradas à medida que são solicitadas (caso 3).

Caso 2.1 *Matriz fornecida pelo usuário, especificando suas linhas diretamente na linha de comando:*

$(\%i1)A : matrix([1,a,a],[1,b,a],[1,a,b]);$

$$(\%o1)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{bmatrix}$$

Caso 2.2 *Matriz definida por uma lei de formação.*

$(\%i2)\ \ b[i,j] := i\hat{}j;$

$(\%o2)\ \ b_{i,j} = i^j;$

$(\%i3)\ \ B\ :\ genmatrix(b,4,4);$

[3]http://maxima.sourceforge.net/

$$(\%o3)\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}$$

Caso 2.3 *Para construir a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *utilizando o entermatrix, faremos uso das seguintes ferramentas.*
$(\%i4)\ \ M : entermatrix(2,3);$
Row 1 column 1: 2;
Row 1 column 2: 3;
Row 1 column 3: 4;
Row 2 column 1: 3;
Row 2 column 2: 4;
Row 2 column 3: 5;

$$(\%o4)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Nos casos 2.1 e 2.3, podemos explorar a localização dos elementos de uma matriz, permitindo o estudante diferenciar linhas e colunas. Nas duas últimas edições do Enem[4], foram contempladas questões envolvendo a identificação dos elementos das matrizes, as diferentes representações e operações entre números reais, como podemos ver nas questões 1 e 2 a seguir. Vejamos algumas questões do Enem que justificam a abordagem de atividades que envolvam a localização dos elementos de uma matriz.

1. (ENEM[5] - 2019. pg.18.) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

[4]Exame Nacional do Ensino Médio
[5]Retirada do caderno de questões cinza da edição 2019 - aplicação regular

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) segunda-feira.

b) terça-feira.

c) quarta-feira.

d) quinta-feira.

e) sexta-feira.

2. (ENEM[6] - 2018. pg.25.) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos.

   Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos $(1,2,3,4,5)$ em um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de reais, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco:

   a) 1.

   b) 2.

   c) 3.

   d) 4

   e) 5.

Para efetuar o cálculo do determinante de uma dada matriz, utilizando o recurso computacional adotado neste trabalho, executamos o comando: *determinant(M)$*, sendo M uma matriz previamente construída.

Podemos operar com determinantes de matrizes cujos elementos são símbolos, efetuar divisões e fatorações de expressões definidas por determinantes. Para tanto, recomendamos

[6] Retirada do caderno de questões amarelo da edição 2019 - 1ª aplicação, questão 164.

que o professor explore com os alunos, numa aula prévia, alguns comandos, tais como *factor, expand, ratsimp* que podem ajudar nas atividades propostas. Por exemplo:

(% i1) A : matrix([a,1,b],[1,b,-1],[1,a,b]);

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & b & -1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i2) detA:determinant(A);

$$a\left(b^2+a\right)+(a-b)\,b-b-1 \tag{detA}$$

(% i3) expand(detA);

$$a\,b^2-b^2+ab-b+a^2-1 \tag{\% o3}$$

(% i4) factor(%o3);

$$(a-1)\left(b^2+b+a+1\right) \tag{\% o4}$$

Para a utilização de outros comandos do *Maxima*, sugerimos a leitura do texto **Maxima: um programa para as aulas de Matemática**[7].

Conforme Andrade (2015), o uso do Maxima em sala de aula pode auxiliar na resolução de problemas. De acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio, a implantação desse tipo de software favorece a caracterização do pensar matematicamente, uma vez que "os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas" (BRASIL, 2008c, p.88).

[7]Texto, escrito por Lenimar Nunes Andrade professor da UFPB, contém notas das suas aulas da disciplina do Profmat Recursos Computacionais na UFPB. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/lenimar/textos/maxprofmat.pdf. Acesso em: 10 de jan. de 2020

Capítulo 3

Determinantes

Foi através de problemas, como calcular o valor das incógnitas de um sistema linear de n equações com n incógnitas, que a Teoria dos Determinantes germinou, através de Leibniz na Alemanha e Seki Kowa[1], no Japão no final do século XVII. Em 1750, a teoria foi reinventada por Cramer[2]. Nesse capítulo, abordaremos a definição de determinante de uma matriz quadrada a partir do conceito de permutação, algumas reflexões das definições apresentadas nos livros didáticos e os apontamentos direcionados para a manipulação das propriedades dos determinantes.

3.1 Algumas reflexões sobre abordagem de Determinantes

No currículo do Ensino Médio, deparamos-nos com a noção de determinantes de forma mecanizada, sem nenhuma preocupação com suas propriedades ou aplicações. Ocorre predominante na 2ª série, muitas vezes de forma breve e ineficiente é apresentada a definição. Nessa etapa da Educação Básica, frequentemente o estudante se depara com dúvidas, que não são sanadas, ocasionando a mecanização e desestimulando o estudante acerca do objeto em estudo.

Na BNCC aparece como sendo um dos objetos de conhecimento da unidade temática de Álgebra e Funções, tendo como objetivo o desenvolvimento do pensamento e raciocínio algébrico, bem como, fazer generalizações, buscar, identificar e relacionar padrões. Porém, sua abordagem em sala de aula é voltada geralmente para manipulações de regras e algoritmos específicos, onde quase ou nenhuma ênfase é dada às suas propriedades, privilegiando apenas as regras de memorização e apresentação de algoritmos para o cálculo de determinantes, porém sem a compreensão do sentido e o procedimento utilizado.

No que diz respeito à definição de determinantes, alguns exemplares instrutivos adotados

[1]Foi o primeiro matemático a estudar Determinantes em 1683, considerado o maior matemático Japonês do século XVII, desenvolveu o estudo de determinantes a partir de sistemas lineares.

[2]Matemático Suiço que desenvolveu um algoritmo para resolver sistemas lineares a partir do conceito de determinantes.

na Educação Básica expõe da seguinte forma: a toda matriz quadrada, associa-se um número real chamado de determinante. Porém, não apresentam de que forma ocorre essa associação. À ótica dessa definição, são reveladas, no cotidiano escolar, várias regras para o cálculo do determinante de matrizes de ordens específicas, sem considerar as propriedades que este objeto possui e caracterizam.

Sabemos que o determinante possui muitas aplicações, entre elas caracterizar um conjunto de três pontos colineares e, por sua vez, oferecer uma maneira alternativa para a obtenção da equação reta que passa por dois pontos dados. Além disso, o determinante também pode ser utilizado para o cálculo de área de figuras planas e o cálculo de volume de alguns sólidos geométricos, sendo, portanto, um conteúdo riquíssimo do ponto de vista educacional.

Entretanto, a despeito deste objeto matemático favorecer o desenvolvimento de outros conteúdos no Ensino Médio, ele não provoca afinidades nos estudantes pelo fato de envolver, além de cálculos cansativos, atividades que requerem, na maioria das vezes, apenas a aplicação de regras, desestimulando o interesse do discente. Não obstante, sabemos que a definição de determinantes, no caso geral, envolve muitos símbolos, o que pode provocar dificuldade na compreensão desse objeto matemático, principalmente para os estudantes que estão desenvolvendo o pensamento algébrico.

Por conseguinte, Serrão (1959), Sonnino e Mirshawkra (1965?) e Tatit (1950?) definem o determinante de uma matriz real A, denotado por $|A|$, como a soma de todas as parcelas constituídas de produto de n elementos de uma matriz de ordem n. Para tanto, toma-se o produto dos elementos da diagonal principal $a_{1,1} \cdot a_{2,2} \dots a_{n-1,n-1} \cdot a_{n,n}$ como base dos termos, fixa-se os primeiros índices e substitui os segundos por uma permutação destes, atribuindo a este produto o sinal de $+$ ou de $-$, conforme a paridade de inversões da permutação obtida no conjunto dos segundos índice, cuja definição, necessária à formulação do conceito, será apresentada a seguir.

Definição 3.1 *Dados n objetos distintos* $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. *Chamaremos de* **permutação** *cada ordenação dos n objetos distintos.*

Por exemplo, para os objetos a, b e c existem seis ordenações possíveis: (a,b,c), (a,c,b), (c,b,a), (c,a,b), (b,a,c) e (b,c,a). Para o caso geral, com n objetos, temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, e assim por diante, até que tenhamos um único modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Assim, o número de modos de ordenar n objetos distintos, é:

$$n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

Definição 3.2 *Dada uma permutação dos inteiros* 1 , 2 , $\cdots$, *n, existe uma* **inversão** *quando um inteiro precede outro menor que ele.*

Na Tabela 3.2 abaixo, a primeira coluna apresenta uma permutação qualquer enquanto a segunda coluna fornece o número total de inversões dessa permutação.

Tabela 3.1: Exemplo de número de inversões numa permutação.

Permutação	Nº de Inversões
(1, 2, 3)	0
(3, 2, 1)	3
(1, 4, 2, 3)	2
(4, 3, 1, 2)	5

A partir dessas definições, podemos fazer a dedução para o cálculo de determinante de matrizes de ordem 2 e 3. Julgamos que a forma apresentada é acessível para ser exposta e reconstruída na sala de aula do Ensino Médio. Apesar de ser totalmente algébrico é bem básico, pois para entendê-la basta que o aluno esteja familiarizado com permutação, inversão e paridade de números naturais.

Consideremos, inicialmente, a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$, de ordem 2. Pela definição de determinante apresentada anteriormente, $|A|$ consiste de uma soma de $2! = 2$ parcelas, a saber, $\alpha_1 = a_{1,1}a_{2,2}$, $\alpha_2 = a_{1,2}a_{2,1}$; agora, com relação aos segundos índices das parcelas dos produtos que definem α_1 e α_2, não há inversão na primeira parcela (ou seja, o número de inversões que α_1 subentende é zero) e há uma inversão na segunda (uma inversão associada à permutação $(2,1)$). Assim,

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,2}.$$

Agora, considere $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$, uma matriz de ordem 3. Neste caso, teremos $3! = 6$ parcelas, cujas seis permutações possíveis para o segundo índice e seus respectivos números de inversão são apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 3.2: Permutações do conjunto $\{1,2,3\}$ e suas inverões.

Permutação	Nº de Inversões
(1, 2, 3)	0
(1, 3, 2)	1
(2, 1, 3)	1
(2, 3, 1)	2
(3, 1, 2)	2
(3, 2, 1)	3

Portanto, o determinante da matriz A de ordem 3, é expresso por:

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

Assim, de modo geral, o determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{i,j}]_{nxn}$ é dada pela definição a seguir:

Definição 3.3 *Dada uma matriz real $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ de ordem n, definimos o determinante de A, denotado por* $\mathbf{det(A)}$ *ou* $|\mathbf{A}|$*, o número*

$$|A| = \sum_{p} (-1)^{v(j)} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \dots a_{n-1,j_{n-1}} a_{n,j_n},$$

onde $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ é uma permutação dos números $1, 2, \dots, n$, o número $v(j)$ denota a quantidade de inversões da permutação j e p representa o número total de permutações possíveis sobre os números $1, 2, \dots, n$.

A partir da definição, podemos fazer algumas observações:

- Sendo A uma matriz de ordem n, um determinante contém $n!$ parcelas;
- Se a permutação $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ tem um número par de inversões, o coeficiente $(-1)^{v(j)}$ da parcela correspondente na somatória terá sinal positivo; caso contrário, negativo;
- Em cada parcela da somatória, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um e apenas um elemento da coluna da matriz.

Através de uma reordenação conveniente das parcelas, mostra-se que também é possível reescrever o determinante de A por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{p} (-1)^{v(j)} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n}. \tag{3.1}$$

Vale ressaltar que a definição de determinante exposta anteriormente não é presente nos livros didáticos.

3.2 Propriedades dos Determinantes

Nesta seção apresentamos algumas propriedades dos determinantes que são decorrentes de sua definição. Por meio delas, em alguns casos, é possível reduzir a quantidade de operações utilizadas no cálculo do determinantes.

(i) O determinante de uma matriz triangular inferior (ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Demonstração. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que A seja uma matriz triangular inferior, isto é, se $i < j$ então $a_{ij} = 0$. Pela definição de determinante,

$$|A| = \sum_{p}(-1)^{v(j)}a_{1,j_1}a_{2,j_2}...a_{n,j_n}.$$

Note que, nas $n!$ parcelas no desenvolvimento do determinante, a única parcela possivelmente não nula é $a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$, enquanto todas as outras parcelas são nulas.

Com efeito, cada parcela no determinante de A é da forma: $a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$. Observe, inicialmente, o primeiro elemento a_{1,j_1}. Como $j_1 \geq 1$, temos dois casos a considerar: $j_1 = 1$ ou $j_1 > 1$.

No segundo caso, $a_{1,j_1} = 0$ pelo fato de A ser uma matriz triangular inferior, logo, o termo $a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$, para $j_1 > 1$ será necessariamente nulo.

Observe agora as parcelas da forma $a_{1,1}a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$ e analise o elemento a_{2,j_2}. Como $j_1, j_2, \cdots, j_n$ é uma permutação dos elementos $1, 2, \cdots, n$, e tendo em vista que $j_1 = 1$, temos que $j_2 \geq 2$. Se $j_2 > 2$, teremos $a_{2,j_2} = 0$.

A mesma análise aplicada aos demais elementos $a_{3,j_3}, \ldots, a_{n,j_n}$ irá mostrar que a única parcela que é possivelmente diferente de zero no desenvolvimento de $|A|$ é:

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n-1,n-1} \cdot a_{n,n}. \blacksquare$$

ii) Se uma matriz quadrada A possui uma linha ou coluna cujos elementos são todos nulos, então $|A| = 0$.

Demonstração.

Note que cada parcela do desenvolvimento do determinante tem um único elemento de cada linha (e cada coluna), por conseguinte a expressão de cada parcela como produto de fatores de n elementos sempre possuirá um dos fatores (elementos) nulo. Portanto, todas as parcelas são iguais a 0 e a soma que define o determinante é nula.

iii) Se uma linha ou coluna de uma matriz quadrada de A, for multiplicada por um escalar k, então o determinante ficará multiplicado por este escalar.

Demonstração. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$, uma matriz real de ordem n. Vamos provar a afirmação considerando a matriz B obtida a partir de A pelo produto da primeira coluna de A por k. Os outros casos são tratados de forma análoga. Assim,

$$B = \begin{bmatrix} k \cdot b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ k \cdot b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix};$$

em símbolos:

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{se} \quad i \in \{1,2,3,\cdots,n\} \ \text{ e } \ j \in \{2,3,...,n\}; \\ k \cdot a_{i,1} & \text{se} \quad i \in \{1,2,3,\cdots,n\}. \end{cases}$$

Pela definição, temos que o determinante de B é:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_p (-1)^{v(j)} (k \cdot b_{1,j_1}) b_{2,j_2} \cdots b_{n,j_n} \\ &= k \sum_p (-1)^{v(j)} b_{1,j_1} b_{2,j_2} \cdots b_{n,j_n} \\ &= k \cdot |A|. \blacksquare \end{aligned}$$

iv) Um determinante muda de sinal quando se troca a posição de duas linhas ou colunas paralelas.

Demonstração.

Seja $A = [a_{i,j}]$ uma matriz quadrada real de dimensão n. Suponha, sem perda de generalidade, que $1 \leq k < l \leq n$ e considere a matriz $B = [b_{i,j}]$ obtida de A, permutando a $k-$ésima linha com a $l-$ésima linha da matriz A. Dessa forma:

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}; & \text{se} \quad i \neq k \ \text{ e } \ i \neq l, \\ a_{k,j}; & \text{se} \quad i = l, \\ a_{l,j}; & \text{se} \quad i = k. \end{cases}$$

Por definição,

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_p (-1)^{v(j)} b_{1,j_1} \cdot b_{2,j_2} \cdots b_{k,j_k} \cdots b_{l,j_l} \cdots b_{n,j_n} \\ &= \sum_p (-1)^{v(j)} a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdots a_{l,j_l} \cdots a_{k,j_k} \cdots a_{n,j_n}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, considere a permutação $j = (j_1, \cdots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_{l-1}, j_l, j_{l+1}, \ldots, j_n)$ dos números $1, 2, \ldots, n$. Sejam, α, β e γ, respectivamente, o número de inversões da permutação j em relação às $k-1$ primeiras posições, o número de inversões da permutação j com relação às posições compreendidas entre os índices k e l, e o número de inversões da permutação j com relação as $n-l$ últimas posições. Por conseguinte, o número de inversões da permutação j é

$$v(j) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Permutando-se o $k-$ésimo termo com o $l-$ésimo termo da permutação j, obtemos a permutação $s = (s_1, \ldots, s_n)$, que pode ser descrita por

$$s_i = \begin{cases} j_i & \text{se} \quad i < k \;\text{ ou }\; i > l \\ j_k & \text{se} \quad i = l \\ j_l & \text{se} \quad i = k, \end{cases}$$

ou seja,

$$s = (j_1, \cdots, j_{k-1}, j_l, j_{k+1}, \ldots, j_{l-1}, j_k, j_{l+1}, \ldots, j_n),$$

De modo análogo, considere $\alpha^{'}, \beta^{'}$ e $\gamma^{'}$ o número de inversões da permutação s nas $k-1$ primeiras posições, o número de inversões da permutação s nas posições compreendidas entre os índices k e l, e o número de inversões da permutação s nas $n-l$ últimas posições. Como as permutações s e j coincidem nos $k-1$ primeiros termos e nos $n-l$ últimos termos, segue que $\alpha^{'} = \alpha$ e $\gamma^{'} = \gamma$. Porém, o número de inversões da permutação s compreendidas entre os índices k e l é alterada pelo posicionamento de apenas dois de seus elementos $s_k = j_l$ e $s_l = j_k$. Portanto, β e $\beta^{'}$ diferem apenas pela contagem do número de inversões com relação a estes dois elementos.

Suponha que $j_k < j_l$, isto é, entre estes elementos não há inversão. Neste caso, $s_k = j_l > j_k = s_j$, o que corresponde a uma inversão entre esses elementos na permutação s. Se $j_k > j_l$, então entre estes elementos conta-se uma inversão na permutação j, mas $s_k = j_l < j_k = s_j$, o que corresponderia a nenhuma inversão entre esses elementos na permutação s. Assim, ao passar da permutação j para a permutação s há sempre uma acréscimo ou um decréscimo de uma unidade no número de inversões. Seja a a quantidade de termos j_ℓ tais que $j_k > j_\ell$, com $k < \ell < l$, então teremos $l-k-a$ termos s_ℓ na permutação s tais que $s_l = j_k < s_\ell = j_\ell$, com $k < \ell < l$. Do mesmo modo, se b é a quantidade de termos j_ℓ tais que $j_l < j_\ell$, com $k < \ell < l$, então teremos $l-k-b$ termos s_ℓ na permutação s tais que $s_k = j_l > s_\ell = j_\ell$, com $k < \ell < l$. Por conseguinte,

$$\beta^{'} - \beta = 2 \cdot (l-k) \pm 1.$$

E assim,

$$\begin{aligned} v(s) &= \alpha^{'} + \beta^{'} + \gamma^{'} = \alpha + (\beta + 2(l-k) \pm 1) + \gamma \\ . &= v(j) + 2(l-q) \pm 1. \end{aligned}$$

Consequentemente,
$$(-1)^{v(j)} = -(-1)^{v(s)}$$
e podemos reescrever (3.2) como:
$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{p}(-1)^{v(j)}a_{1,j_1}\cdot a_{2,j_2}\cdots a_{l,j_l}\cdots a_{k,j_k}\cdots a_{n,j_n} \\
&= \sum_{p}-(-1)^{v(s)}a_{1,s_1}\cdot a_{2,s_2}\cdots a_{l,s_k}\cdots a_{k,s_l}\cdots a_{n,s_n} \\
. &= -|A|.\blacksquare
\end{aligned}$$

v) O determinante não se altera se somarmos a uma fila outra fila multiplicada por uma constante.

Demonstração.

Considere que a matriz B, formada de A, de modo que a *i_ésima* linha de B corresponde a *i_ésima* linha de A adicionada a k vezes a *j_ésima* linha de A. Então,
$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{\pi}(-1)^{v(j)}b_{1,j_1}\cdots(b_{i,j_i})\cdots a_{n,j_n} \\
&= \sum_{\pi}(-1)^{v(j)}a_{1,j_1}\cdots(a_{i,j_i}+ka_{j,j_i})\cdots a_{n,j_n} \\
&= \sum_{\pi}(-1)^{v(j)}a_{1,j_1}\cdots a_{i,j_i}\cdots a_{n,j_n}+k\cdot\sum_{\pi}(-1)^{v(j)}a_{1,j_1}\cdots a_{j,j_j}\cdots a_{n,j_n} \\
&= |A|+k|A'|,
\end{aligned}$$

onde $A^{'}$ é a matriz obtida de A, substituindo a i-ésima linha de A pela j-ésima linha de A. Como $A^{'}$ possui duas linhas iguais, seu determinante é zero. Assim, $|B| = |A|.\blacksquare$

A título de ilustração:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1}+k\cdot a_{1,1} & a_{2,2}+k\cdot a_{1,2} & \cdots & a_{2,n}+k\cdot a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + k\cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Note que k está multiplicando uma matriz cujo determinante é zero.

Na próxima seção, faremos a apresentação e demonstração do Teorema Elementar de Laplace, que não é fornecida nos livros didáticos da Educação Básica, muito menos do ensino superior, e sua abordagem se restringe as verificações para matrizes de ordem 3 e 4 ou enunciadas como propriedade.

3.3 Desenvolvimento Elementar de Laplace

Para efeito de facilitar o entendimento da demonstração do Teorema de Laplace, versão linhas ou colunas, dados os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ vamos denotar por:

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{i-1} \cdot \hat{a}_i \cdot a_{i+1} \dots a_{n-1} \cdot a_n$$

o produto dos $n-1$ elementos a_k com $k \neq i$, isto é,

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{i-1} \cdot \hat{a}_i \cdot a_{i+1} \dots a_{n-1} \cdot a_n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_k$$

Por exemplo, considerando apenas três elementos a_1, a_2 e a_3, representamos por

$$a_1 \cdot \hat{a}_2 \cdot a_3$$

o produto $a_1 \cdot a_3$.

Definição 3.4 *Seja $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ uma matriz de ordem n. Dizemos que M é uma* **submatriz própria** *de A, se existem subconjuntos $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ e $J = \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tais que*

$$M = [a_{i,j}], \quad com \;\; i \in I, j \in J,$$

onde, $k \neq n$ ou $\ell \neq n$.

Definição 3.5 *Seja $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ uma matriz de ordem n. Dizemos que M é uma* **submatriz principal** *de A, se existe um subconjunto $I = \{1, 2, \dots, k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que*

$$M = [a_{i,j}], \quad com \;\; i \in I, j \in I,$$

onde, $k \leq n$.

Por exemplo, são submatrizes principais da matriz $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$, com $n \geq 3$:

$$M = [a_{1,1}] \qquad M = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Definição 3.6 *Seja $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ uma matriz de ordem n. Chamamos de* **menor** *a qualquer determinante de uma submatriz própria de A.*

Definição 3.7 *Seja $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ uma matriz de ordem n. Chamamos de* **menor principal** *a qualquer determinante de uma submatriz principal própria de A.*

Neste caso, quando nos referimos a um menor Δ de uma matriz A, está implícito a existência de uma submatriz própria M, de A, cujo determinante é Δ.

Definição 3.8 *Seja $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ uma matriz de ordem n. Fixado o elemento $a_{i,j}$ de A, denotaremos por $M_{i,k}$ a submatriz própria de A obtida pela eliminação da $i-$ésima linha e k_{-}ésima coluna de A. O* **complemento algébrico ou cofator** *$\Delta^c_{i,k}$ de $a_{i,k}$ é definido por:*

$$\Delta^c_{i,k} = (-1)^{i+k} \cdot |M_{i,k}|$$

Teorema 3.1 (Teorema Elementar de Laplace) *Dada uma matriz real $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ de ordem n, tem-se*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot \Delta^c_{i,k}.$$

A demonstração do Teorema 3.1 é uma tradução livre e adaptada da demonstração encontrada em Anna e Vincenzo (2012).

Demonstração.

Fixe, inicialmente, os índices i,k. Seja $b_{h,l}$ um elemento da matriz $M_{i,k}$. Logo, $b_{h,l}$ é um elemento da matriz A com $h \neq i$ e $l \neq k$.

Utilizando a definição de determinante da submatriz $M_{i,k}$ e observando que $b_{h,l}$ é um elemento da matriz A, conforme observado acima, podemos escrever:

$$|M_{i,k}| = \sum_{\pi'} (-1)^{v(r)} a_{1,r_1} a_{2,r_2} \dots a_{i-1,r_{i-1}} \hat{a}_{i,k} a_{i+1,r_i} \dots a_{n-1,r_{n-2}} a_{n,r_{n-1}}, \tag{3.3}$$

onde $r = (r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ é uma permutação dos elementos do conjunto $\{1,2,\dots,n\}/\{k\}, v(r)$ o número de inversões da permutação r e π' representa o número total de permutações possíveis.

Defina o número

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} |M_{i,j}| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi'} (-1)^{i+k+v(r)} a_{1,r_1} a_{2,r_2} \dots a_{i-1,r_{i-1}} a_{i,k} a_{i+1,r_i} \dots a_{n-1,r_{n-2}} a_{n,r_{n-1}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nosso objeto será então demonstrar que $S(A) = |A|$. Com efeito, primeiramente observemos que cada termo na igualdade (3.4) é um produto de n elementos da matriz A, contendo um e somente um elemento de cada linha e um e somente um elemento de cada coluna da matriz A.

Observe ainda que, sendo $r = (r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ uma permutação dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}/\{k\}$, então $s = (s_1, \ldots, s_n)$ definida por:

$$s_l = \begin{cases} r_l, & \text{se} \quad l < i-1 \\ k, & \text{se} \quad l = i \\ r_{l-1}, & \text{se} \quad l > i, \end{cases}$$

é uma permutação dos números $1, 2, \ldots, n$. Mais precisamente, $s = (r_1, \ldots, r_{i-1}, k, r_i, \ldots, r_{n-1})$ e $s_i = k$.

Note que a inserção do elemento k na i-ésima posição da permutação s não altera o número de inversões $v(r)$ que os elementos de s, diferentes de $s_i = k$, formam entre si. Assim, além de $v(r)$ inversões, percebidas da permutação r, para computar o número de inversões da permutação s temos que considerar o número α de inversões dos elementos de s à esquerda de s_i com relação a k e o número β de inversões dos elementos de s à direita de s_i com relação a k. Matematicamente, temos:

$$v(s) = \alpha + \beta + v(r),$$

onde

(i) α é a cardinalidade do conjunto $\{l : s_l > k = s_i \quad \text{e} \quad l < i\}$,

(ii) β é a cardinalidade do conjunto $\{l : s_l < k = s_i \quad \text{e} \quad l > i\}$.

Denotando por γ a cardinalidade do conjunto $\{l : s_l < k \quad \text{e} \quad l < i\}$, teremos as igualdades:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= i - 1 \\ \beta + \gamma &= k - 1. \end{aligned}$$

Destas igualdades resulta que,

$$\alpha + \beta + 2(\gamma + 1) = i + k.$$

Portanto,

$$(-1)^{\alpha+\beta} = (-1)^{\alpha+\beta+2(\gamma+1)} = (-1)^{i+k}. \tag{3.5}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
S(A) &= \sum_{\pi'}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k+v(r)}a_{1,r_1}a_{2,r_2}\ldots a_{i-1,r_{i-1}}a_{i,k}a_{i+1,r_i}\ldots a_{n-1,r_{n-2}}a_{n,r_{n-1}}\\
&= \sum_{\pi'}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\alpha+\beta+v(r)}a_{1,r_1}a_{2,r_2}\ldots a_{i-1,r_{i-1}}a_{i,k}a_{i+1,r_i}\ldots a_{n-1,r_{n-2}}a_{n,r_{n-1}}\\
&= \sum_{\pi'}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{v(s)}a_{1,s_1}a_{2,s_2}\ldots a_{i-1,s_{i-1}}a_{i,s_i}a_{i+1,s_{i+1}}\ldots a_{n-1,s_{n-1}}a_{n,s_n}\\
&= \sum_{\pi}(-1)^{v(s)}a_{1,s_1}a_{2,s_2}\ldots a_{n-1,s_{n-1}}a_{n,s_n}.
\end{aligned}
$$

Ora, o lado direito da última igualdade é exatamente o determinante da matriz A, concluindo a demonstração.$\blacksquare$

Vejamos alguns exemplos:

Dada a matriz, $C_n = [c_{i,j}]_{n\times n}$ definida por:

$$
c_{i,j} = \begin{cases} a, & \text{se} \quad i = j \\ b, & \text{se} \quad i-j=1 \ ou \ i=1 \ e \ j=n \\ 0, & \text{caso adverso} \quad . \end{cases}
$$

Vamos calcular o determinante da matriz para $n = 3$ e $n = 4$.

Para $n = 3$, temos:

$$
|C_3| = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix}.
$$

Aplicando o Teorema Elementar de Laplace na segunda linha da matriz C, temos que:

$$
|C_3| = b\cdot\Delta^c_{2,1} + a\cdot\Delta^c_{2,2} + 0\cdot\Delta^c_{2,3},
$$

sendo $\Delta^c_{2,1}$, $\Delta^c_{2,2}$ e $\Delta^c_{2,3}$ os complementos algébricos dos elementos $c_{2,1} = b$, $c_{2,2} = a$, $c_{2,3} = 0$, respectivamente.

Aplicando a definição de determinante de uma matriz, temos que:

$$
\Delta^c_{2,1} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & b \\ b & a \end{vmatrix} = b^2.
$$

$$
\Delta^c_{2,2} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2.
$$

Assim,

$$|C_3| = b \cdot b^2 + a \cdot a^2 = b^3 + a^3.$$

Agora, vamos obter o determinante da matriz para $n = 4$. Consideremos a matriz C_4 dada por:

$$|C_4| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

Escolhendo a primeira linha para aplicar o Teorema Elementar de Laplace, segue que:

$$|C_4| = a \cdot \Delta^c_{1,1} + 0 \cdot \Delta^c_{1,2} + 0 \cdot \Delta^c_{1,3} + b \cdot \Delta^c_{1,4},$$

sendo $\Delta^c_{1,1}$, $\Delta^c_{1,2}$, $\Delta^c_{1,3}$, $\Delta^c_{1,4}$ os complementos algébricos dos elementos $c_{1,1} = a$, $c_{1,2} = 0$, $c_{1,3} = 0$ e $c_{1,4} = b$.

Portanto,

$$|C_4| = a \cdot \Delta^c_{1,1} + b \cdot \Delta^c_{1,4},$$

e

$$\Delta^c_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3 \quad \text{e} \quad \Delta^c_{1,4} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -b^3.$$

Concluímos que:

$$|C_4| = a \cdot a^3 + b \cdot (-b^4) = a^4 - b^4.$$

3.4 Sugestões de exemplos envolvendo padrões e determinantes

Nesta seção, sugerimos alguns exemplos envolvendo padrões com determinantes, com os objetivos de estabelecer fórmulas para obter determinantes de algumas matrizes particulares e abrir horizontes para novas manipulações das propriedades deste objeto. Através da investigação e da experimentação, o estudante tem a oportunidade de vivenciar alguns processos de produção de conhecimentos matemáticos. Sugerimos que seja utilizado, o software *Maxima* de manipulação algébrica, para realizar verificações e refinamentos das possíveis conjecturas intuitivamente estabelecidas. Vale destacar que "o papel fundamental do computador é o de motivar conjecturas e indicar caminhos para a solução do problema e para a generalização desta solução[...]" (GIRALDO, 2012, p.44).

Por meio da observação dos resultados, padrões e regularidades percebidos, o estudante é estimulado a utilizar as propriedades para demonstrar casos particulares, se possível o caso geral, ou apresentar um contraexemplo para refutar uma conjectura. Ressaltamos que o estudo foi desenvolvido inicialmente por Oliveira (2019), no trabalho intitulado **Investigações com o Maxima no Cálculo com Determinantes**.

Inicialmente, os exemplos de atividades envolvem padrões, nos quais os resultados dos determinantes se configuram como elementos de uma sequência. Através dele, é possível estabelecer uma fórmula para a obtenção do determinante. A exploração desses exemplos pode ser proposta após o estudo dos conceitos e das propriedades deste objeto, tendo em vista que, para demonstrar as possíveis conjecturas, utilizamos algumas particularidades que são recorrentes da definição.

Destacamos que, nas atividades propostas, os estudantes devam ser estimulados a utilizar resultados auxiliares para resolver novos problemas. Recomendamos ainda, que o professor direcione os discentes a construir as matrizes no Maxima (nessa situação, espera-se que eles percebam que a disposição dos elementos na matriz também apresenta regularidades e padrões). Assim, sugerimos que o docente acompanhe os alunos em todas as etapas da investigação e da resolução de problemas, como vimos na Seção 2.4.

A fim de despertar novas abordagens na sala de aula, envolvendo a definição e propriedades de determinantes, aconselhamos a utilização de problemas que favoreçam a produção de novos conhecimentos matemáticos nessa temática. Por conseguinte, recomendamos que, durante as etapas que compõem a resolução, o estudante possa ser direcionado a conhecer ferramentas na comprovação de novos resultados e no desenvolvimento da quinta competência específica de Matemática no Ensino Médio.

3.4.1 Exemplos

Exemplo 3.1 *Seja a matriz* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *definida por* $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i \neq j \\ a, & se\ i = j \end{cases}$
Quais seriam os valores dos determinantes para $a \in \{0,1\}$ *para as matrizes de ordem* $2,3,4$ *e* 5*? O que se percebe nestes resultados? Agora, o que aconteceria se* $a \in \{2,3,4\}$*?*

Essa atividade é interessante para motivar os alunos a estabelecerem conjecturas e a realizarem alguns testes. A demonstração pode ser realizada pelo professor no quadro com a participação dos estudantes. Para isso, os questionamentos apontados no enunciado do exemplo devem direcionar o estudante a perceber que, no caso $a = 0$, o determinante é igual à ordem da matriz menos uma unidade, variando o sinal conforme a paridade da ordem da matriz. Podemos representar esses resultados em uma tabela para facilitar a observação desses números e identificação dos padrões.

Tabela 3.3: Resultado do determinante, em função do valor de a.

n	$a=0$	$a=2$	$a=3$
2	1	3	8
3	-2	4	20
4	3	5	48
5	-4	6	112

Fonte: Elaborada pela autora

Nesta etapa da investigação, para cada valor de a, os estudantes podem estabelecer conjecturas distintas. O professor pode estimular os alunos a realizar algumas verificações no Maxima e justificá-las, mediando através das propriedades. Possíveis conjecturas podem surgir para casos de $a \in \{0,2,3\}$, sendo:

$$\begin{aligned}
a=0 &\quad \Rightarrow \quad |A_n| = (n-1)\cdot(-1)^{n-1}.\\
a=2 &\quad \Rightarrow \quad |A_n| = (n+1).\\
a=3 &\quad \Rightarrow \quad |A_n| = 2^{n-1}(n+2).
\end{aligned}$$

Para os dois primeiros casos, classificamos de fácil percepção a identificação dos padrões. Para $a=3$, é possível que os estudantes apresentem dificuldades: para superá-las, sugerirmos que o professor estimule os estudantes a rescrever cada resultado obtido como um produto de fatores primos, a fim de estabelecer relações com as potências do número 2. Note que, para cada caso particular do valor de a, temos conjecturas distintas. Para o caso geral, recomendamos que seja realizado pelo professor, pois, para alguns estudantes, o processo de demonstração é desconhecido.

Ressaltamos que, embora o estudante utilize o Maxima para obter os resultados em função de a e da ordem da matriz, a utilização das propriedades para justificar os resultados fornecidos pelo *software* é essencial na realização de algumas demonstrações. Através dele, podemos confirmar uma conjectura ou um teorema para casos particulares, contudo o *software* não é capaz de fazer uma demonstração. Nessas propostas de atividades, priorizamos o tempo de estudo do estudante na validação do pensamento, em detrimento ao tempo gasto no processo de algebrização.

Discussão de possíveis resultados para o caso geral:

Para $n=1$,

$$|A| = a.$$

Para $n=2$,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(a-1).$$

Para $n=3$, temos:

$$\begin{aligned}
|A_3| &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a+2 & a+2 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2)\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a+2)\cdot \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)\cdot(a-1)^2.
\end{aligned}$$

Vale ressaltar que aplicamos as propriedades (iii) e (i) dos determinantes citadas na Seção 3.2. Embora essa opção envolva manipulações com várias propriedades, ela é viável pois os algoritmos realizados também apresentam regularidades, fundamentais para a demonstração e a obtenção do determinante de uma matriz no caso geral.

Algumas relações podem ser identificadas pelo estudante através de uma pergunta norteadora realizada pelo professor, tal qual: Existe alguma relação entre o expoente do fator $(a-1)$ e a ordem da matriz?

A partir dos resultados acima, podemos observar que existem padrões, em função da ordem da matriz e os elementos "a'' da diagonal, nos direcionando a formular a seguinte conjectura:

Conjectura 3.2

$$|A_n| = (a-1)^{n-1}\cdot(a+n-1).$$

Para validar a conjectura, faremos a demonstração.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & a & 1 \\ a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 & a+n-1 \end{vmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} (a+n-1)\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{(3)}{=} (a+n-1)\begin{vmatrix} a-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{(4)}{=} (a+n-1)\cdot\underbrace{(a-1)\cdot(a-1)\cdot(a-1)\cdots(a-1)}_{n-1} \\
&= (a-1)^{n-1}\cdot(a+n-1).\blacksquare
\end{aligned}
$$

Onde foram realizadas as seguintes operações nas igualdades acima:

1. Substituimos a *n_ésima* linha por $L_1+L_2+\cdots+L_n$, isto é: $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$.

2. Utilizamos o fato que ao multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

3. Substituimos as colunas, por $C_j \leftarrow C_j - C_n$, $j \in \{1,2,3,...,n-1\}$.

4. Usamos o fato de que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Nesse exemplo, o professor pode realizar alguns apontamentos, com a intenção de direcionar o estudante a discutir se as conjecturas realizadas para o caso geral e para os casos particulares são equivalentes ou não.

Exemplo 3.2 *Utilize o Maxima para obter o determinante da matriz abaixo, considerando os casos de ordem* 3, 4 *e* 5, *descreva se existe algum padrão observado.*

$$B = [b_{ij}]_{n\times n} \; tal \; que \; b_{ij} = \begin{cases} b, \; se \; i = j \; e \; i \neq 1 \\ 1, \; caso \; adverso \end{cases}$$

Nesse exemplo, alguns questionamentos podem ser levantados pelo professor, tais como: é possível justificar esses resultados? Esse padrão vale para qualquer valor de n, sendo n, a ordem da matriz? Justifique sua resposta.

Antes da abordagem para o caso geral, sugerimos que o problema seja explorado com os valores $b = 2, \; b = 3, \; b = 4$, etc, contemplando a etapa de investigação de possibilidades, para as matrizes de ordem 3, 4 e 5. Abaixo, temos os resultados dos determinantes, para cada caso particular.

$$b = 2 \Rightarrow |B| = 1^{n-1}.$$

$$b = 3 \Rightarrow |B| = 2^{n-1}.$$

$$b = 4 \Rightarrow |B| = 3^{n-1}.$$

Com base nessa regularidade, o professor poderia questionar: se substituirmos $2, \; 3$ ou 4 por outro valor, digamos b, os alunos seriam capazes de calcular $|B|$ rapidamente? Quando a turma estabelecer a conexão $(b-1)^{n-1} = |B|$, o professor pode convidá-la para designar uma prova. Através dos casos iniciais, podemos instituir a construção da demonstração.

Vejamos:

Para $n = 2$,

$$|B| \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1.$$

Para $n = 3$, note que:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-1 & 1 \\ 1 & 0 & b-1 \end{vmatrix} = (b-1)^2.$$

Para $n = 4$,

$$
\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b-1 \end{vmatrix} \\
&= (b-1)^3.
\end{aligned}
$$

Nos casos $n = 3$ e $n = 4$, utilizamos operações elementares por meio das propriedades básicas dos determinantes, cujos algoritmos conservam o determinante da matriz, tais como **v** e **i** citadas na Seção 3.2. Essas operações foram utilizadas para os casos particulares e geral.

A partir dos resultados obtidos, formulamos a seguinte conjectura:

Conjectura 3.3

$$|B_n| = (b-1)^{n-1}.$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
|B_n| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & b & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & & \vdots & b & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & b \end{vmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots & b-1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b-1 \end{vmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} \underbrace{(b-1)\cdot(b-1)\dots(b-1)}_{n-1} = (b-1)^{n-1},
\end{aligned}
$$

onde, na igualdade (1), executamos a operação elementar $C_j \leftarrow C_j - C_1$, para cada coluna $C_j,\ j \in \{2,3,4,...,n\}$, enquanto na igualdade 2 usamos a propriedade referente ao determinante de uma matriz triangular.■

Outra possibilidade de explorar essa atividade seria questionar aos estudantes o que aconteceria com o resultado desse determinante se na matriz do Exemplo 3.2 , substituisse 1(um) por outro, digamos $x \in \mathbb{R}$.

Observamos alguns resultados. Para $n = 2$, decorre da definição de determinantes que:

$$|B_2| = b \cdot x - x^2 = x \cdot (b-x).$$

Para $n = 3$, note que:

$$\begin{aligned}
|B_3| &= \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & b & x \\ x & x & b \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & x \\ x & x & b \end{vmatrix} \\
&= x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & b-x & 0 \\ x & 0 & b-x \end{vmatrix} = x \cdot (b-x)^2.
\end{aligned}$$

Diante desses resultados, é possível prever os demais, nos quais o valor de cada determinante comporta-se como elemento de uma sequência recursiva. Assim, podemos estabelecer a seguinte conjectura.

Conjectura 3.4

$$|B_n| = x \cdot (b-x)^{n-1}.$$

Para provar a conjectura, o professor pode motivar os alunos a usarem o resultado anterior como auxiliar.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
|B_n| &= \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & x \\ x & b & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \vdots & b & x \\ x & x & \cdots & x & b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & b & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \vdots & b & x \\ x & x & \cdots & x & b \end{vmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & b-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & \vdots & b-x & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 & b-x \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} x \cdot \underbrace{(b-1) \cdot (b-1) \ldots (b-1)}_{n-1} \\
&= x \cdot (b-x)^{n-1},
\end{aligned}$$

adotamos, nas igualdades acima, o fato de x se o fator comum na primeira linha e as mesmas operações elementares desenvolvidas na demonstração da conjectura anterior garantirem a conservação do resultado do determinante.■

Exemplo 3.3 *Podemos afirmar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & & \vdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) = (n-1)!?$$

Justifique sua resposta.

Nesta atividade, temos um problema fechado. O estudante é direcionado a realizar uma demonstração. Caso apresente dificuldade na realização da atividade, o problema poderá ser explorado para casos particulares, digamos $n = 4$ e $n = 5$. Nesta etapa, a elaboração da lei de formação torna-se essencial, pois o estudante só poderá construir a matriz no Maxima através dos comandos **matrix** e **geramatrix**, quando determinar a lei de formação. O desafio consiste em perceber não apenas a regularidade no determinante e estabelecer conjectura, mas em escolher quais propriedades devem ser exploradas nas operações elementares para provar a conjectura.

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) = (n-1)!$$

Exemplo 3.4 *Considere a matriz* $C_n = [c_{ij}]_{n \times n}$ *definida por:*

$$c_{ij} = \begin{cases} a, & se \quad i = j \\ b, & se \quad i - j = 1 \quad ou \quad i = 1 \quad e \quad j = n \\ 0, & \quad caso \ \ adverso \end{cases}$$

Para obter o determinante da matriz C de ordem 3, 4 *e* 5 *utilize o Maxima. Registre o resultado do determinante e observe os expoentes de a e b. Consegue detectar alguma relação? Registre a sua conjectura e procure justificá-la.*

Neste exemplo, o estudante pode perceber que o determinante de cada matriz pode ser calculado da seguinte maneira: o determinante da matriz C_n, representado por $|C_n|$, será a e b elevado à ordem da matriz, com uma oscilação de sinais entre a primeira e segunda parcela, onde a e b são os elementos diferentes de zero que compõem a matriz e $n > 1$ a sua ordem. A variação desse sinal está relacionada à paridade da ordem da matriz. Representamos esses valores na Tabela 3.4, para melhor compreensão do leitor.

Tabela 3.4: resultado do determinante

ordem da matriz (n)	2	3	4	5
resultado do determinante	$a^2 - b^2$	$a^3 + b^3$	$a^4 - b^4$	$a^5 + b^5$

Fonte: Elaborada pela autora

Observe que, para ordens pares, o determinante da matriz pode ser generalizado através da expressão $a^n - b^n$ e sendo n ímpar teremos $a^n + b^n$. Dentro dessa proposta, após os estudantes identificarem um padrão e formularem as conjecturas de acordo com a paridade da ordem da matriz, é viável que os alunos a elaborem, independente da paridade. Uma representação para essa conjectura é:

$$|C_n| = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

Caso os alunos apresentem dificuldades para demonstrar as possíveis conjecturas, o professor, juntamente com os alunos, podem realizar tentativas no quadro para a demonstração para $n = 3$ e $n = 4$, verificando e refinando as conjecturas. Para a demonstração do caso geral, utilizamos o Teorema Elementar de Laplace na primeira linha e o fato do determinante de uma matriz triangular ser igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Conjectura 3.5 $|C_n| = a^n + (-1)^{n+1} b^n$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
|C_n| &= \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} b \cdot \begin{vmatrix} b & a & \cdots & 0 & b \\ 0 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} \\
&= a \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots b)}_{n-1} \\
&= a^n + (-1)^{n+1} \cdot b^n. \blacksquare
\end{aligned}$$

Observações:

Ao aplicar o desenvolvimento de Laplace na primeira linha, teremos n determinantes de ordem $n-1$. Note que a primeira e a última matriz são triangulares, o que justifica a expressão para seus determinantes.

Outra exploração consiste em atribuir alguns valores para a e b, tais como $a = 0$ e $b \neq 0$; $b = 0$ e $a \neq 0$ e $a = b = 0$. Nesta etapa, o professor pode avaliar se os alunos compreenderam o significado da demonstração do caso geral.

Todos os exemplos anteriores estimulam a formulação de conjecturas e demonstrações das proposições, utilizando recursos tecnológicos para subsidiar as investigações, as verificações e o refinamento das hipóteses, conforme sugere a quinta competência específica de Matemática da BNCC no Ensino Médio. Destacamos nessa atividade as seguintes habilidades: utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência são ou não equivalentes; identificar a regularidade de uma sequência numérica e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permite indica os números seguintes.

Dentre os comandos do Maxima, para realizar essa atividade, sugerimos que sejam trabalhados com antecedência atividades que envolvam os comandos **matrix**, **determinant**,**expand**, **factor** e **ratsimp**. Dessa forma, os alunos poderão obter os determinantes em função dos elementos da matriz, expandir suas expressões, se necessário fatorá-las para que possam fazer anotações e sugerir as suas conjecturas.

Capítulo 4

Generalização do Teorema de Laplace

Neste capítulo apresentaremos, e reproduziremos com algumas adaptações, a demonstração de alguns resultados ausentes nos livros Clássicos de Álgebra Linear à respeito do Teorema de Laplace. De início queríamos estender o Teorema Elementar de Laplace para duas linhas, após uma pesquisa bibliográfica identificamos em livros e artigos a generalização desse resultado.

4.1 Curiosidade no Teorema de Laplace

Nesta seção apresentamos uma curiosidade relacionada ao Teorema Elementar de Laplace. A ideia surge naturalmente através da expressão do determinante quando é aplicado o Teorema Elementar de Laplace. Com efeito, no Teorema de Elementar de Laplace, obtemos o determinante de uma matriz fixando uma linha (ou coluna) e somando os produtos desses elementos com seus respectivos complementos algébricos. Observe, entretanto, que esses complementos algébricos, consistem dos determinantes de matrizes formados pelos elementos das outras $n-1$ linhas (ou colunas). Com um pequeno ajuste, vemos que a expressão do determinante pode, então, ser compreendida escolhendo $n-1$ linha ao invés de uma.

A pergunta que fica é: E se nós escolhessemos duas linhas? e três linhas?, o resultado ainda seria o mesmo? Vamos analisar alguns casos para responder a estas indagações.

Considere a matriz A de ordem 4,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Caso 4.1 *Aplicando o Teorema de Laplace na 1^a linha, temos que:*

$$|A| = a_{1,1} \cdot \Delta^c_{1,1} + a_{1,2} \cdot \Delta^c_{1,2} + a_{1,3} \cdot \Delta^c_{1,3} + a_{1,4} \cdot \Delta^c_{1,4}. \tag{4.1}$$

Sendo $\Delta^c_{1,1}, \Delta^c_{1,2}, \Delta_{1,3}v$ e $\Delta^c_{1,4}$, os complementos algébricos de $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{1,3}$ e $a_{1,4}$, respectivamente.

Isto é,

$$\begin{aligned}
\Delta^c_{1,1} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}. \\
\Delta^c_{1,2} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^c_{1,3} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}. \\
\Delta^c_{1,4} &= (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|A| = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,4}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{1,1}.\left[a_{2,2}\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \right] - \\
&- a_{1,2}.\left[a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} \right] + \\
&+ a_{1,3}.\left[a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} \right] - \\
&- a_{1,4}.\left[a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} - a_{2,2}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} + a_{2,4}\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes temos que:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

A última igualdade nos mostra o determinante de A expandido em termos de produtos de dois determinantes de submatrizes quadradas; uma delas formada a partir de elementos das duas primeiras linhas e a segunda, das duas últimas linhas de A. A verificação de que podemos escolher quaisquer duas linhas da matriz A para desenvolver o determinante dessa matriz será apresentada na próxima Seção.

4.2 Menor, Complemento Algébrico e um estudo de caso.

Na Seção 3.3, exploramos a definição de complemento algébrico (cofator) de um elemento de uma matriz real $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Abordamos nesta seção o estudo da generalização desse conceito para qualquer submatriz própria de A. Através dessas definições e de alguns resultados associados, foi possível realizar a demonstração do Teorema de Laplace Generalizado.

Definição 4.1 (Complemento Algébrico) *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz real. Sejam* $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *e* $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ *subconjuntos próprios de* $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$*. Considere a submatriz* $A_{I,J}$ *definida por*

$$A_{I,J} = [a_{i,j}]_{k\times k}, \quad com \;\; i \in I \;\; e \;\; j \in J.$$

Sejam $I^{'} = \{s_1, \ldots, s_{n-k}\} = I_n \backslash I$ *e* $J^{'} = \{r_1, \ldots, r_{n-k}\} = I_n \backslash J$*.*

(a) O **menor** *associado a submatriz* $A_{I,J}$ *será denotado por* $\Delta_{I,J} = |A_{I,J}|$*.*

(b) O **menor complementar** *associado a submatriz* $A_{I,J}$ *é por definição o número* $\Delta_{I^{'},J^{'}} = |M_{I,J}|$*, onde* $M_{I,J}$ *é a submatriz de A eliminando-se as linhas e colunas de A que compõe a matriz* $|A_{I,J}|$*.*

(c) O **complemento algébrico** *da submatriz* $A_{I,J}$ *é o número*

$$\Delta^c_{I,J} = (-1)^{s_1+\ldots s_{n-k}+r_1+\cdots+r_{n-k}}|M_{I,J}| = (-1)^{s_1+\ldots s_{n-k}+r_1+\cdots+r_{n-k}}\Delta_{I^{'},J^{'}}.$$

Portanto, o complemento algébrico de uma submatriz $\overline{A}$ de A é o menor associado a submatriz M de A, obtida de A eliminando as linhas e colunas de A que compõe a matriz $\overline{A}$, multiplicado por um sinal.

Observe ainda que, $i_1 + \cdots + i_p + s_1 + \cdots + s_{n-p} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \overline{n}$. Da mesma forma $j_1 + \cdots + j_p + r_1 + \cdots + r_{n-p} = 1 + 2 + \cdots + n = \overline{n}$. Logo,

$$\begin{aligned} (-1)^{(s_1+\ldots s_{n-k})+(r_1+\cdots+r_{n-k})} &= (-1)^{[\overline{n}-(i_1+\ldots i_k)]+[\overline{n}-(j_1+\cdots+j_k)]} && (4.2)\\ &= (-1)^{2\overline{n}-(i_1+\ldots i_k+j_1+\cdots+j_k)}. && (4.3) \end{aligned}$$

Segue daí, que

$$\begin{aligned}(-1)^{(s_1+\ldots s_{n-k})+(r_1+\cdots+r_{n-k})} &= (-1)^{2\overline{n}-(i_1+\ldots i_k+j_1+\cdots+j_k)}\\ &= \frac{(-1)^{2\overline{n}}}{(-1)^{i_1+\ldots i_k+j_1+\cdots+j_k}}\\ &= \frac{1}{(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}}\\ &= (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}.\end{aligned}$$

Ou seja, o **complemento algébrico** da submatriz $A_{I,J}$ também pode ser expresso como

$$\Delta^c_{I,J} = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}|M_{I,J}| = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\Delta_{I',J'}.$$

Note ainda que, se $I=\{i\}$ e $J=\{j\}$, com $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. A matriz $A_{I,J}$ consistirá de um único elemento $a_{i,j}$. Neste caso, o complemento algébrico de $A_{I,J}$ será o complemento algébrico de $a_{i,j}$. Com efeito, por definição, temos

$$\Delta^c_{I,J} = (-1)^{\sum_{k\in I'}k+\sum_{\ell\in J'}\ell}\cdot|M_{I,J}| = (-1)^{i+j}|M_{i,j}|,$$

que por sua vez coincide com a Definição 3.8 apresentada na Seção 3.3.

Exemplo 4.1 *Sejam* $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4}\end{bmatrix}$ *e* $I=\{1,3\}, J=\{2,3\}$ *Assim,*

$$A_{I,J} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{bmatrix},$$

então $I'=\{2,4\}$, $J'=\{1,4\}$ *e complemento algébrico da submatriz* $A_{I,J}$ *é*

$$\Delta^c_{I,J} = (-1)^{2+4+1+4}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,4}\\ a_{4,1} & a_{4,4}\end{vmatrix}.$$

Note, no Exemplo 4.1 acima, que aquela submatriz não é a única submatriz extraída de A de ordem 2. Perceba que podemos determinar a quantidade de submatrizes de ordem 2, escolhendo 2 linhas e 2 colunas da matriz A. Arbitrariamente, temos $C^2_4 = 6$ maneiras diferentes para escolher dois objetos dentre 4 objetos listados. Logo, temos seis maneiras distintas de escolher dois linhas (colunas) das quatro linhas (colunas) da matriz A. O que implica em $36 = 6\cdot 6$ submatrizes de A de ordem dois.

Tendo n linhas e n colunas, para obtermos uma submatriz de ordem p, com $p<n$ devemos escolher as p linhas e p colunas, porém podemos fazer isso de C^p_n modos diversos.

Deste modo, a quantidade de menores de ordem p, extraídos de matriz de ordem n é $(C_n^p)^2$.

Vimos, na Seção 4.1, que é possível reescrever o determinante de uma matriz de ordem 4, através de seis produtos de determinantes de submatrizes de ordem 2. A partir dos objetos matemáticos definidos anteriormente, notamos que em cada produto tínhamos um menor multiplicado pelo complementar algébrico da respectiva submatriz no qual, as duas primeiras linhas estão fixas e as colunas são permutadas. A partir dessa observação, surgiu o questionamento se é possível aplicar este desenvolvimento, para duas linhas ou mais quaisquer.

Listando as seis possibilidades, para escolher 2 entre 4 linhas em da matriz A, temos: **primeira e segunda linhas; primeira e terceira linhas; primeira e quarta linhas; segunda e terceira linhas; segunda e quarta linhas** e finalmente **terceira e quarta linhas**. Vamos aprofundar a compreensão, através da análise de cada uma dessas possibilidades.

1. **Caso** $I = \{1, 2\}$.

   Abaixo destacamos a primeira e segunda linhas da matriz A para facilitar a compreensão.
$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix}$$

   A partir dela, obtemos seis menores de ordem 2, a saber:

$$\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{1,4} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{2,4} = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{3,4} = \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix}.$$

   Agora, vamos obter os complementos algébricos associados a cada menor $\Delta_{s,k}$, que denotaremos de $\Delta_{s,k}^c$.

$$\Delta_{1,2}^c = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{1,3}^c = (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} \quad \Delta_{1,4}^c = (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{2,3}^c = (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{2,4}^c = (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{3,4}^c = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}.$$

Multiplicando cada menor pelo seu respectivo complemento algébrico, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De modo análogo ao Caso I, obtemos as seguintes igualdade nos demais casos, onde somamos os produtos dos menores com seus respectivos complementos algébricos associados.

2. **Caso II:** $I = \{1,3\}$.

$$\begin{aligned} x_2 &= -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3. **Caso III:** $I = \{1,4\}$.

$$\begin{aligned} x_3 &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,4} \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4. **Caso IV:** $I = \{2,3\}$.

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \\
&- \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. **Caso V:** $I = \{2,4\}$.

$$
\begin{aligned}
x_5 &= -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} - \\
&- \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,4} \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

6. **Caso VI:** $I = \{3,4\}$.

$$
\begin{aligned}
x_6 &= \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} - \\
&- \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,2} & a_{3,2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Expandido os determinantes em cada caso, citados anteriormente, e comparando com os resultados encontrados com o determinante de A, concluímos que todos são iguais.

Para o produto de cada menor pelo seu complemento algébrico correspondente, sugerimos que seja realizado através do Máxima, uma vez que a proposta é comprovar a validade da possível conjectura. Omitimos a resolução para não deixar o texto cansativo para o leitor.

Analisamos anteriormente, a aplicação do Teorema de Laplace para duas linhas. Agora, consideraremos a escolha de três linhas. Neste caso, teremos $C_4^3 = 4$ possibilidades.

Para estudo de caso, escolheremos as três últimas linhas. Os demais casos são tratados de forma semelhante. De acordo com a conjectura estabelecida anteriormente teremos a soma do produto de 4 menores pelos seus respectivos complementos algébricos associados. Nessa situação teremos menores de ordem 3 e menores complementares associados de ordem 1.

Assim, seja

$$
\begin{aligned}
X \;=\; & \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+4+1+2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,4} \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+4+1+2+4} \begin{vmatrix} a_{1,3} \end{vmatrix} + \\
+ & \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+4+1+3+4} \begin{vmatrix} a_{1,2} \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+4+2+3+4} \begin{vmatrix} a_{1,1} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resolvendo as potências e os determinantes das submatrizes de ordem 1, acima, podemos reescrever o resultado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
X \;=\; & -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \cdot a_{1,4} + \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot a_{1,3} - \\
& -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot a_{1,2} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot a_{1,1} \\
=\; & a_{1,1}\Delta_{1,1} + a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{1,3}\Delta_{1,3} + a_{1,4}\Delta_{1,4} \\
=\; & |A|.
\end{aligned}
$$

Então, numa matriz de ordem 4, escolhendo três linhas, recaímos no caso de uma linha. Portanto, no caso de uma matriz de ordem 4, podemos desenvolver o seu determinante fixando uma linha, duas linhas ou três linha dessa matriz e computando a soma dos produtos de todas as possíveis submatrizes de ordem 1, 2 ou 3, respectivamente, cujos elementos correpondem a estas linhas fixas, com seus complementos algébricos associados.

A partir desse resultado, iniciamos o processo de investigação. A princípio, na literatura brasileira atual, o Teorema de Laplace é válido para uma fila (linha ou coluna), mas, com esse novo resultado, notamos que é possível estender para p filas de uma matriz quadrada, sendo $n > p$ e n a ordem da matriz. Buscamos em vários livros e artigos uma possível extensão do Teorema de Laplace e o localizamos em livros, compreendidos entre 1948 à 1978, que apresentavam recortes sobre a generalização desse teorema. Entre os livros pesquisados, destacamos:

- Exercícios e Problemas de Álgebra (1959), vol. 1 do autor Alberto Numes Serrão. Encontramos um exercício sobre o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 4, cuja resolução se deduz a seis determinantes de ordem 2.

- Ciclo *II*, de Michel Tello, 1972, encontramos o Teorema de Laplace, não restrito a uma fila, com respectiva demonstração e exercícios.

- No Livro Teoria Elementar dos Determinantes, F. A Lacaz Netto, 1943, faz referência a dois teorema de Laplace: o Elementar e o Generalizado.

Como vimos, o Teorema de Laplace funcionou para $1,2$ ou 3 linhas de uma matriz de ordem 4. Vamos ilustrar alguns casos para matrizes de ordem 5, no intuito de compara os resultados, mas também para ajustar a notação que facilitará o entendimento e a escrita da demonstração do resultado geral.

Para tanto, considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix},.$$

Perceba que podemos escolher 2 entre as 5 linhas, de $C_5^2 = 10$ maneiras distintas. Enquanto há $C_5^3 = 10$ maneiras possíveis para escolher três linhas distintas.

Inicialmente, considere que são escolhidas **a primeira e a segunda linhas** de A. Desta forma, destacamos a seguinte submatriz:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \end{bmatrix}$$

No que segue, vamos denotar por $\Delta(A;(r,p),(s,k))$ a expressão que representa o menor de ordem 2, associado a submatriz de A formada pelas linhas r e p, e pelas colunas s e k. Esta notação será mais conveniente para o propósito do texto. Da mesma forma, vamos considerar $\Delta^c(A;(r,p),(s,k)$ o complementar algébrico associado a $\Delta(A;(r,p),(s,k))$.

Por exemplo, tomando $r = 1$; $p = 2$, $s = 3$ e $k = 4$, temos:

$$\Delta(A;(1,2),(3,4)) = \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix}.$$

Note que o complementar algébrico associado, $\Delta^c(A;(1,2),(3,4))$, será de ordem $5-2=3$ e é dado por

$$\Delta^c(A;(1,2),(3,4)) = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3}. \end{vmatrix}.$$

A partir dessas notações, podemos escrever que:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \Delta(A;(1,2),(1,2)\cdot\Delta^c(A;(1,2),(1,2))+\Delta(A;(1,2),(1,3))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(1,3))+\\
&+ \Delta(A;(1,2),(1,4))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(1,4))+\Delta(A;(1,2),(1,5))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(1,5))+\\
&+ \Delta(A;(1,2),(2,3))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(2,3))+\Delta(A;(1,2),(2,4))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(2,5))+\\
&+ \Delta(A;(1,2),(3,4))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(3,5))+\Delta(A;(1,2),(4,5))\cdot\Delta^c(A;(1,2),(4,5)).
\end{aligned}
$$

Ao fixarmos três linhas, a expressão que representa os menores de ordem 3, será $\Delta(A;(r,p,t),(s,k,l))$ e $\Delta^c(A;(r,p,t),(s,k,l))$ o seu complementar algébrico associado.

Por exemolo, escolhendo a **terceira, quarta e quinta** linhas da matriz A, destacamos a seguinte submatriz:

$$
\begin{bmatrix}
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5}\\
a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5}\\
a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5}
\end{bmatrix}
$$

Considerando $s=3$, $k=4$ e $l=5$, temos que:

$$
\Delta(A;(3,4,5),(3,4,5)) = \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5}\\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5}\\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5}\end{vmatrix},
$$

$$
\Delta^c(A;(3,4,5),(3,4,5)) = (-1)^{3+4+5+3+4+5}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}.
$$

Seguindo esta notação, é possível verificar que:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \Delta(A;(3,4,5),(1,2,3)\cdot\Delta^c(A;(3,4,5)(1,2,3))+\Delta(A;(3,4,5),(1,2,4))\cdot\Delta^c(A;(3,4,5),(1,2,4))+\\
&+ \Delta(A;(3,4,5),(1,2,5))\cdot\Delta^c(A;(3,4,5),(1,2,5))+\Delta(A;(3,4,5),(1,3,4))\cdot\Delta^c(A;(3,4,5),(1,3,4))+\\
&+ \Delta(A;(3,4,5),(1,3,5))\cdot\Delta^c(A;(3,4,5),(1,3,5))+\Delta(A;(3,4,5),(2,3,4))\cdot+\Delta^c(A;(3,4,5),(2,3,4))+\\
&+ \Delta(A;(3,4,5),(2,3,5))\cdot\Delta^c(A;(3,4,5),(2,3,5))+\Delta(A;(3,4,5),(2,4,5))\cdot\Delta^c(A;(3,4,5),(2,4,5))+\\
&+ \Delta(A;(3,4,5),(3,4,5))\Delta^c(A;(3,4,5),(3,4,5)).
\end{aligned}
$$

Para a demonstração do resultado para as matrizes de ordem 5, tomando duas linhas ou três linhas, teríamos que analisar 10 casos, para quatro linhas, teríamos 5 casos. Vale destacar que analisar para duas linhas, não precisaríamos analisar para três linhas, pois, uma vez nessa situação, se o menor é de ordem 2, o seu complementar algébrico é de ordem 3 e se o menor é de ordem 3, o seu complementar algébrico é de ordem 2. Raciocínio análogo para uma linha e quatro linhas.

4.3 Teorema de Laplace Generalizado

Nessa seção, reproduziremos a demonstração do Teorema de Laplace Generalizado, extraído e adaptado do livro Teoria Elementar dos Determinantes de Lacaz Netto (1943).

Teorema 4.1 *Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz real de ordem n, o determinante de A é igual à soma dos produtos dos menores de ordem p, com $n > p$, extraídos de p linhas (ou colunas) paralelas, multiplicados pelos seus respectivos complementos algébricos associados.*

Para demonstrar este teorema provaremos:

- O número de parcelas que obtemos aplicando-se o Teorema de Laplace Generalizado a uma matriz A de ordem n é igual ao número de parcelas, segundo a definição de determinante;
- Qualquer parcela do desenvolvimento de A, segundo o Teorema de Laplace é uma parcela do determinante, conforme a sua definição.

Demonstração.

Considere a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n e $p < n$. Seja P a submatriz de A formada pelas linhas $s_1, s_2, \cdots, s_p$ de A, isto é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} a_{s_1,1} & a_{s_1,2} & \cdots & a_{s_1,n} \\ a_{s_2,1} & a_{s_2,2} & \cdots & a_{s_2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s_p,1} & a_{s_p,2} & \cdots & a_{s_p,n} \end{bmatrix}$$

onde, s_1, s_2,$\cdots$, s_p, são números distintos quaisquer tirados dentre os números 1, 2, 3,$\cdots$, n.

Note que, da matriz P, podemos extrair C_n^p menores de ordem p, tirados das p linhas fixadas. Cada um desses determinantes é uma soma de $p!$ parcelas; o complemento algébrico associado a um desses menores é o produto de um menor de ordem $n-p$ por ± 1 e, portanto, consiste de uma soma de $(n-p)!$ parcelas. O número total de parcelas da soma de todos os produtos dos menores pelo seu complementos algébricos associados será:

$$C_n^p \cdot p! \cdot (n-p)! = \frac{n!}{p!(n-p)!} p!(n-p)! = n!.$$

Assim, o número de parcelas que obtemos, aplicando-se o Teorema de Laplace Generalizado, é igual ao número de parcelas segundo a definição de determinante.

Agora, vamos provar que um produto de um menor de A por seu complemento algébrico associado é uma parte do desenvolvimento de A.

Para simplificar a exposição vamos considerar o seguinte menor:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{vmatrix},$$

formado pelos elementos comuns às p primeiras linhas e às p primeiras colunas de P. Representado por Δ^c o complemento algébrico de Δ, podemos escrever

$$\Delta^c = \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & a_{p+1,p+2} & \cdots & a_{p+1,n} \\ a_{p+2,p+1} & a_{p+2,p+2} & \cdots & a_{p+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,p+1} & a_{n,p+2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Uma parcela do produto $\Delta \cdot \Delta^c$ pode ser representado por:

$$(-1)^{s'} \cdot a_{1,s_1} a_{2,s_2} \cdots a_{p,s_p} (-1)^{s''} a_{p+1,s_{p+1}} a_{p+2,s_{p+2}} \cdots a_{n,s_n}, \tag{4.4}$$

onde,

- $(s_1, s_2, \cdots, s_p)$ é uma permutação dos números $1, 2, \cdots, p$, sendo s' o seu respectivo número de inversões em relação à permutação principal $(1, 2, \cdots, p)$.
- $(s_{p+1}, s_{p+2}, \cdots, s_n)$ é uma permutação dos números $p+1, p+2, \cdots, n$ sendo s'' o seu respectivo número de inversões em relação à permutação principal $(p+1, p+2, \cdots, n)$.

Observe que

$$j = (s_1, s_2, \cdots, s_p, s_{p+1}, s_{p+2}, \cdots, s_n)$$

é uma permutação dos números $1, 2, \cdots, p-1, p, p+1, \cdots, n$ e que o número de inversões da permutação j é dado por

$$v(j) = s' + s''.$$

Com efeito, isso ocorre uma vez que os números s_1, s_2, $\cdots$, s_p (todos menores ou iguais a p) não formam inversões com quaisquer dos números s_{p+1}, s_{p+2}, $\cdots$, s_n (todos maiores que p). Então, a parcela genérica de $\Delta \cdot \Delta^c$ é idêntica a:

$$(-1)^{s'+s''} a_{1,s_1} a_{2,s_2} \cdots a_{p,s_p} a_{p+1,s_{p+1}} a_{p+2,s_{p+2}} \cdots a_{n,s_n}.$$

Consideremos, agora, o caso geral. Seja, então:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{s_1,r_1} & a_{s_1,r_2} & \cdots & a_{s_1,r_p} \\ a_{s_2,r_1} & a_{s_2,r_2} & \cdots & a_{s_2,r_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s_p,r_1} & a_{s_p,r_2} & \cdots & a_{s_p,r_p} \end{vmatrix}$$

Sendo $(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_p)$ e $(s_1,\ s_2,\ \cdots\ ,\ s_p)$ p números distintos quaisquer tirados dos números 1, 2, $\cdots$, n. Permutamos, em A, a linha s_1 sucessivamente com as $s_1 - 1$ linhas precedentes, a linha s_2 sucessivamente com as $s_2 - 2$ linhas precedentes, etc, e finalmente a linha s_p com as $s_p - p$ linhas precedentes. Façamos , a seguir, o mesmo com as colunas, r_1, $r_2, \cdots, r_p$.

Obtemos, assim, um novo determinante $|B|$, do qual Δ é o menor de ordem p formado pelos elementos comuns das p primeiras linhas e das p primeiras colunas. Pois, uma vez trocada as posições das linhas/colunas, o determinante troca de sinal, onde o número de permutações definem o sinal desse determinante.

Como realizamos $(s_1 - 1 + s_2 - 2 + \cdots + s_p - p + r_1 - 1 + r_2 - 2 + \cdots + r_p - p)$ permutações. Temos:

$$|B| = (-1)^{s_1-1+s_2-2+\cdots+s_p-p+r_1-1+r_2-2+\ldots r_p} \cdot |A|.$$

Mas,

$$\begin{aligned} & s_1 - 1 + s_2 - 2 + \cdots + s_p - p + r_1 - 1 + r_2 - 2 + \cdots + r_p - p = \\ = \ & s_1 + s_2 + \cdots + s_p + r_1 + r_2 + \cdots + r_p + 2(-1 - 2 - \cdots - p) \\ = \ & (s_1 + s_2 + \cdots + s_p + r_1 + r_2 + \cdots + r_p) - p \cdot (1 + p). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que a expressão $-p \cdot (1 + p)$ é um número par da forma $2 \cdot t$, com $t \in \mathbb{Z}_-$. Assim,

$$|B| = (-1)^{r_1+r_2+\ldots r_p+s_1+s_2+\cdots+s_p} \cdot |A|.$$

Em virtude da primeira parte desta demonstração, denotaremos de Δ^c o complemento algébrico de Δ em B, portanto, o produto:

$$(-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_p+s_1+s_2+\cdots+s_p} \cdot \Delta \cdot \Delta^c,$$

faz parte do desenvolvimento de $|A|$. Como:

$$(-1)^{r_1+r_2+\ldots+r_p+s_1+s_2+\cdots+s_p} \cdot \Delta^c,$$

é o complemento algébrico de Δ em A, fica demonstrado o teorema.■

4.4 Aplicação do Teorema de Laplace Generalizado

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de aplicações de determinantes que justificam a sua abordagem na Educação Básica. A partir do Teorema Elementar e Generalizado de Laplace apresentamos dois algoritmos para se obter o determinante de matrizes tridiagonais, sendo um deles aplicando o desenvolvimento de Laplace relativo a uma linha e outro relativo a duas linhas. Finalizamos a seção, comparando a performance dos algoritmos utilizando como métrica o número de operações executados em cada algoritmo.

4.4.1 Exemplos de atividades envolvendo aplicações de Determinantes

Sabemos que determinante é utilizado para desenvolver outros conceitos de Matemática no Ensino Médio, através de sua aplicação direta tais como: na determinação de equações de retas, verificação de alinhamentos de três pontos, no cálculos de áreas de triângulos, dentre outras aplicações. Nesta seção abordaremos alguns exemplos, que exploram esses efeitos e favorecem a abordagem de novas práticas inovadoras.

1. (Giovanni Júnior e Bonjorno, p.599, adaptado) Para medir a área de uma fazenda de forma triangular um agrimensor, utilizando um sistema de localização por satélite, encontrou como vértices desses triângulos os pontos $A(2,1)$, $B(3,5)$ e $C(7,4)$ do plano cartesiano, com as medidas em km. Qual a área dessa fazenda, em km^2 ?

2. (Paiva, p. 136) No íncio de uma estrada, ou seja, no quilômetro zero, um motorista encheu o tanque de combustível de seu carro. Ao passar pelos marcos quilométricos 80 km e 142 km dessa estrada, os volumes de combustível no tanque do automóvel eram de 47 L e $39,25$ L, respectivamente. Supondo que o volume V de combustível no tanque, em litro, tenha variado linearmente com a distância percorrida d, em quilômetro, responda aos itens a seguir:

   a) Obtenha a equação que expressa V em função de d.
   b) Qual é a capacidade do tanque desse automóvel, em litro?
   c) Se a estrada tem 220 km de comprimento, qual era o seu volume de combustível no tanque quando o automóvel deixou a estrada?

3. (Giovanni Júnior e Bonjorno, p.573) Determine o valor de a para que os pontos $A(2,1)$, $B(-3,-1)$ e $C(a+1,2)$ sejam colineares.

4.4.2 Um algoritmo para obter o determinante das matrizes tridiagonais

Nesta subseção apresentamos uma fórmula recursiva para obter o determinante de uma matriz tridiagonal de ordem n, aplicando o Teorema Elementar de Laplace e o Teorema de

Laplace Generalizado. A fórmula é obtida por observação direta do Teorema de Laplace. Finalizamos esta seção comparando o número de operações aritméticas em cada algoritmo.

4.4.2.1 Cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal pelo Teorema Elementar de Laplace.

Para efeito de acompanhamento e construção da fórmula, vamos aplicar o Teorema Elementar de Laplace para obter o determinante de uma matriz tridiagonal de ordens $3,4$ *e* 5. Finalmente, desenvolvemos o determinante por este Teorema para o caso geral. Detonando por Δ_k o determinante da submatriz principal[1] de A de ordem k. Nos casos abaixo, desenvolvemos o determinante de cada submatriz principal pelo Teorema de Laplace relativo à última linha e negligenciamos as parcelas nulas.

Caso 4.2 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

teremos que :

$$\Delta_3 = -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{3,3} \cdot \Delta_2.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (-1)^{3+2}a_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{3,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \\ &= -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{3,3}(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) \\ &= -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{3,3} \cdot \Delta_2 \end{aligned}$$

Caso 4.3 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix},$$

teremos que:

$$\Delta_4 = -a_{3,4}a_{4,3} \cdot \Delta_2 + a_{4,4} \cdot \Delta_3.$$

[1] Dada uma matriz real A de ordem n, qualquer sua submatriz quadrada cuja diagonal figurar da diagonal principal de A é denominada submatriz principal

De fato, perceba que:

$$
\begin{aligned}
\Delta_4 &= (-1)^{4+3} a_{4,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} a_{4,4} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&= -a_{3,4} a_{4,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + a_{4,4} \cdot \Delta_3 \\
&= -a_{3,4} a_{4,3} \cdot \Delta_2 + a_{4,4} \cdot \Delta_3
\end{aligned}
$$

Caso 4.4 *Considere a matriz*

$$
A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}.
$$

Novamente, aplicando o Teorema Elementar de Laplace na quinta linha, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta_5 &= (-1)^{5+4} a_{5,4} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,5} \end{vmatrix} + (-1)^{5+5} a_{5,5} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\
&= -a_{5,4} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,5} \end{vmatrix} + a_{5,5} \cdot \Delta_4 \\
&= -a_{4,5} a_{5,4} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{5,5} \cdot \Delta_4 \\
&= -a_{4,5} a_{5,4} \cdot \Delta_3 + a_{5,5} \cdot \Delta_4.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\Delta_5 = -a_{4,5} a_{5,4} \cdot \Delta_3 + a_{5,5} \cdot \Delta_4.
$$

Os casos anteriores mostram uma relação entre o determinante de ordem n e os determinantes menores de ordem $n-1$ e $n-2$. No que segue, para simplificar a notação, vamos escrever A_k para representar a submatriz principal de A de ordem k e $\mathbf{0}$ para representar uma matriz nula de ordem apropriada para a notação fazer sentido.

Caso 4.5 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-3} & a_{n-3,n-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ \mathbf{0} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \mathbf{0} & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$$\Delta_n = -a_{n-1,n}a_{n,n-1} \cdot \Delta_{n-2} + a_{n,n} \cdot \Delta_{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= (-1)^{n+(n-1)}a_{n,n-1} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & a_{n-3,n-2} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & 0 \\ \mathbf{0} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + (-1)^{n+n}a_{n,n} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & a_{n-3,n-2} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ \mathbf{0} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \\
&= -a_{n-1,n}a_{n,n-1} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} + a_{n,n} \cdot \Delta_{n-1} \\
&= -a_{n-1,n}a_{n,n-1} \cdot \Delta_{n-2} + a_{n,n} \cdot \Delta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Algoritmo 1 *Cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal de ordem $n \geq 3$.*

(Passo 1.) $\Delta_1 = a_{1,1}$.

(Passo 2.) $\Delta_2 = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

(Passo 3.) Para $k = 3, 4, \ldots n$

$$\Delta_k = -a_{n-1,n}a_{n,n-1} \cdot \Delta_{n-2} + a_{n,n} \cdot \Delta_{n-1}$$

Observe que, no Passo 2 do algoritmo acima, são necessários dois produtos e uma subtração, portanto 3 operações aritméticas. No Passo 3, para cada $k, k = 3, \ldots, n$, temos 3 produtos e 1 subtração, portanto 4 operações. Portanto, para o cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal de ordem $n = 3$, esse algoritmo utiliza 7 operações e se $n > 3$, este algoritmo utiliza:

$$\begin{aligned}
\textbf{número total de operações aritméticas} &= 3 + \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4 + 4}_{n-2} \\
&= 3 + 4 \cdot (n-2) \\
&= 4n - 5.
\end{aligned}$$

4.4.2.2 Cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal pelo Teorema de Laplace Generalizado

Para efeito de acompanhamento e construção da fórmula, vamos aplicar o Teorema de Laplace Generalizado (T. L. G) para obter o determinante de uma matriz tridiagonal de ordens $3, 4$ *e* 5. Finalmente, desenvolvemos o determinante pelo T.L.G. para uma matriz de ordem n. Denotando por Δ_k o determinante da submatriz principal de A ordem k e aplicando o Teorema de Laplace a partir das últimas duas linhas e analisando os casos abaixo teremos:

Caso 4.1 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (-1)^{5+1+2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ 0 & a_{3,2} \end{vmatrix} \cdot 0 + (-1)^{5+1+3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot a_{1,2} + (-1)^{5+2+3}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot a_{1,1} \\ &= -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) \cdot \Delta_1. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Delta_3 = -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) \cdot \Delta_1.$$

Caso 4.2 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Para $k = 4$, temos:

$$\Delta_4 = -a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4} \cdot \Delta_1 + (a_{3,3}a_{4,4} - a_{3,4}a_{4,3}) \cdot \Delta_2.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (-1)^{3+4+2+4}\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ 0 & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} + (-1)^{3+4+3+4}\begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \\ &= -a_{3,2}a_{4,4}\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} + (a_{3,3}a_{4,4} - a_{3,4}a_{4,3}) \cdot \Delta_2 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\Delta_4 = -a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4} \cdot \Delta_1 + (a_{3,3}a_{4,4} - a_{3,4}a_{4,3}) \cdot \Delta_2.$$

Caso 4.3 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}.$$

Para $k = 5$, temos que:

$$\Delta_5 = -a_{3,4}a_{4,3}a_{5,5} \cdot \Delta_2 + (a_{4,4}a_{5,5} - a_{4,5}a_{5,4}) \cdot \Delta_3.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= (-1)^{9+3+5} \begin{vmatrix} a_{4,3} & a_{4,5} \\ 0 & a_{5,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} + (-1)^{9+4+5} \begin{vmatrix} a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= -a_{4,3}a_{5,5} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} - (a_{4,4}a_{5,5} - a_{4,5}a_{5,4}) \cdot \Delta_3. \end{aligned}$$

Finalmente, Aplicando o Teorema Elementar de Laplace na terceira coluna da matriz em destaque, na primeira parcela da última igualdade, teremos o desejado, ou seja,

$$\Delta_5 = -a_{3,4}a_{4,3}a_{5,5} \cdot \Delta_2 + (a_{4,4}a_{5,5} - a_{4,5}a_{5,4}) \cdot \Delta_3.$$

Os casos anteriores mostram uma relação entre o determinante de ordem n e os determinantes menores de ordem $n-2$ e $n-3$. No que segue, para simplificar a notação, vamos escrever A_k para representar a submatriz principal de A de ordem k e $\mathbf{0}$ para representar uma matriz nula de ordem apropriada para a notação fazer sentido.

Caso 4.4 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-3} & a_{n-3,n-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ \mathbf{0} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \mathbf{0} & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Denotando por Δ_k o determinante da submatriz principal de A ordem k, tem-se

$$\Delta_n = -a_{n-1,n-2}a_{n-2,n-1}a_{n,n} \cdot \Delta_{n-3} + (a_{n-1,n-1}a_{n,n} - a_{n-1,n}a_{n,n-1}) \cdot \Delta_{n-2}.$$

Com efeito, aplicando o Teorema de Laplace relativo às últimas duas linhas e desconsiderando as parcelas nulas, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta_n &= (-1)^{(4n-3)} \begin{vmatrix} a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-1} \end{vmatrix} + \\
& (-1)^{4n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & a_{n-3,n-2} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \\
&= a_{n-1,n-2}a_{n,n} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & \mathbf{0} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-1} \end{vmatrix} - (a_{n-1,n-1}a_{n,n} - a_{n-1,n}a_{n,n-1}) \cdot \Delta_{n-2} \\
. &= a_{n-1,n-2}a_{n,n} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-3} & a_{n-3,n-2} \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-1} \end{vmatrix} - (a_{n-1,n-1}a_{n,n} - a_{n-1,n}a_{n,n-1}) \cdot \Delta_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que todos os números das formas $4n-3$ são ímpares e aplicando o desenvolvimento de Laplace na última coluna da matriz em destaque, na primeira parcela da última igualdade, teremos o desejado, ou seja:

$$\Delta_n = -a_{n-2,n-1}a_{n-1,n-2}a_{n,n} \cdot \Delta_{n-3} + (a_{n-1,n-1}a_{n,n} - a_{n-1,n}a_{n,n-1}) \cdot \Delta_{n-2}.$$

Algoritmo 2 *Cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal de ordem $n \geq 3$.*

(Passo 1.) $\Delta_1 = a_{1,1}$.

(Passo 2.) $\Delta_2 = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

(Passo 3.) $\Delta_0 = 1$ *(apenas para $n = 3$)*

(Passo 4.) Para $k = 3, 4, \dots n-2$

$$\Delta_k = a_{k-2,k-1}a_{k-1,k-2}a_{k,k} \cdot \Delta_{k-3} - (a_{k-1,k-1}a_{k,k} - a_{k-1,k}a_{k,k-1}) \cdot \Delta_{k-2}$$

(Passo 5.) $\Delta_n = a_{n-2,n-1}a_{n-1,n-2}a_{n,n} \cdot \Delta_{n-3} - (a_{n-1,n-1}a_{n,n} - a_{n-1,n}a_{n,n-1}) \cdot \Delta_{n-2}$.

Observe que, no Passo 2 do algoritmo acima, são necessários dois produtos e uma subtração, portanto 3 operações aritméticas. No Passo 4, para cada $k, k = 3, \dots, n$, temos 6 produtos e 2 subtrações, portanto 8 operações. Portanto, para o cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal de ordem $n = 3$, esse algoritmo utiliza 11 operações e se $n > 3$, esse algoritmo utiliza

$$
\begin{aligned}
\textbf{número total de operações aritméticas} &= 3 + \underbrace{8 + 8 + \cdots + 8 + 8}_{n-3} \\
&= 3 + 8 \cdot (n-3) \\
&= 8n - 21.
\end{aligned}
$$

4.4.3 Considerações

Dentre os algoritmos apresentados nas subseções 4.4.2.1 e 4.4.2.2, vemos que para matrizes de ordem 4, ambos os algoritmos apresentam o mesmo número de operações aritmética $(11 = 8 \cdot (4) - 21 = 4 \cdot (4) - 5)$. Por outro lado, se n é um número natural maior do que 4, é mais vantajoso aplicar o algoritmo da seção 4.4.2.1, obtido aplicando o determinante pelo desenvolvimento de Laplace relativo a uma única linha, uma vez que

$$\begin{aligned} n > 4 \quad &\Rightarrow \quad 4n > 16 \\ &\Rightarrow \quad 8n > 4n + 16 \\ &\Rightarrow \quad 8n - 21 > 4n - 5 \end{aligned}$$

isto é, o número de operações aritméticas usando o Algoritmo 1 é menor do que o procedimento definido pelo Algoritmo 2.

Outro ponto que gostaríamos de destacar é o fato de que ambas as abordagens permitirem a observação de relações, estabelecimento de recorrências, cujas construções foram obtidas pela observação de exemplos mais simples, depois conjecturadas as relações e finalmente estabelecidos os algoritmos. Tais procedimentos não usam nada mais do que as propriedades e conceitos simples de determinantes e estruturas básicas do pensamento computacional tão cobrado na prova do PISA.

Nesta perspectiva, sua construção pode favorecer a aprendizagem ativa do próprio aluno, além de permitir o trabalho com linguagens computacionais.

Capítulo 5

Os menores determinantes e a relação com o método alternativo para o cálculo do determinante

5.1 Introdução

Neste capítulo, mostramos uma curiosidade em relação à possìvel extensão do método alternativo para o cálculo do determinante apresentado em Oliveira (2019). A construção e a validade do resultado apresentado abaixo reforça a apropriação da aprendizagem. Portanto, não obstante, valorizamos mais as relações matemáticas discutidas, consolidadas e generalizadas, considerando-as um profícuo debate sobre a gênese da aprendizagem matemática.

5.2 Uma Relação entre Determinantes.

Dados $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ para representar o conjunto dos números naturais compreendidos entre 1 e n; e $A = [a_{ij}]$ uma matriz real de ordem n. Sejam $I, J \subset I_n$, com $n-1$ elementos distintos, ordenados de forma crescente. Para cada par (I, J), como definido anteriormente, defina a seguinte submatriz:

$$M_{I,I} = [(a_{ij})]_{i \in I, j \in I}$$

Por exemplo, se $I = \{1, 2, ..., n-1\}$, $J = \{2, ..., n\}$ então,

$$M_{I,J} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Proposição 5.1 *Sejam $I,J,H \subset I_n$, com $n-1$ elementos distintos, ordenado de forma crescente e considere $K = I \cap J \cap H$. Então, vale a fórmula:*

$$|A|^2 \cdot |M_{K,K}| = \begin{vmatrix} |M_{I,I}| & |M_{I,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{J,I}| & |M_{J,J}| & |M_{J,H}| \\ |M_{H,I}| & |M_{H,J}| & |M_{H,H}| \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

Demonstração:

Primeiramente, vamos observar alguns fatos. Além disso, no que segue, vamos denotar a cardinalidade do conjunto I pela notação $\#(I)$. Assim, por exemplo, $\#(I_n) = n$.

Afirmação 1 *A cardinalidade do conjunto $I \cap J$ é $n-2$.*

Com efeito, sendo $I,J \subset I_n$ e $\#(I_n) = n$, temos $\#(I \cup J) \leq n$. Além disso,

$$\begin{aligned} \#(I \cap J) &= \#(I) + \#(J) - \#(I \cup J) \Rightarrow \\ \#(I \cap J) &\geq (n-1) + (n-1) - n \Rightarrow \\ \#(I \cap J) &\geq n-2. \end{aligned}$$

Porém, como os conjuntos I e J são distintos e $\#(I) = \#(J) = n-1$ segue-se que $\#(I \cap J) \leq n-2$, de onde segue a igualdade.

Afirmação 2 *A cardinalidade do conjunto $I \cap J \cap H$ é $n-3$.*

Com efeito, sendo $I,\ J,\ H \subset I_n$ e $\#(I_n) = n$, temos $\#(I \cup J \cup H) \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned} \#(I \cap J \cap H) &= \#(I \cup J \cup H) + \#(I \cap J) + \#(I \cap H) + \#(J \cap H) - \#(I) - \#(J) - \#(H) \Rightarrow \\ \#(I \cap J \cap H) &\geq n + (n-2) + (n-2) + (n-2) - (n-1) - (n-1) - (n-1) \Rightarrow \\ \#(I \cap J \cap H) &\geq n-3 \Rightarrow \end{aligned}$$

Porém, como os conjuntos $I \cap J, I \cap H$ e $J \cap H$ são distintos dois a dois, com $\#(I \cap J) = \#(J \cap H) = \#(I \cap H) = n-2$ segue-se que $\#(I \cap J \cap H) \leq n-3$, de onde segue a igualdade.

Definição 5.1 *Sejam $I,\ J,\ H$ subconjuntos de I_n, tais que $\#(I) = \#(J) = \#(H) = n-1$. Definimos a forma $S(I,J,H)$ ao determinante da matriz*

$$\begin{bmatrix} |M_{I,I}| & |M_{I,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{J,I}| & |M_{J,J}| & |M_{J,H}| \\ |M_{H,I}| & |M_{H,J}| & |M_{H,H}| \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$S(I,J,H) = \begin{vmatrix} |M_{I,I}| & |M_{I,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{J,I}| & |M_{J,J}| & |M_{J,H}| \\ |M_{H,I}| & |M_{H,J}| & |M_{H,H}| \end{vmatrix}.$$

Afirmação 3 *A forma S é simétrica em cada coordenada, isto é,*

$$S(I,J,H) = S(I,H,J) = S(J,I,H) = S(J,H,I) = S(H,I,J) = S(H,J,I).$$

A verificação dessa afirmação é uma aplicação direta das propriedades de determinantes, uma vez que $S(J,I,H)$ é obtida de $S(I,J,H)$ pela troca de duas linhas e duas colunas. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} S(I,J,H) &= \begin{vmatrix} |M_{I,I}| & |M_{I,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{J,I}| & |M_{J,J}| & |M_{J,H}| \\ |M_{H,I}| & |M_{H,J}| & |M_{H,H}| \end{vmatrix} \\ &= (-1)\begin{vmatrix} |M_{J,I}| & |M_{J,J}| & |M_{J,H}| \\ |M_{I,I}| & |M_{I,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{H,I}| & |M_{H,J}| & |M_{H,H}| \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1)\begin{vmatrix} |M_{J,J}| & |M_{J,I}| & |M_{J,H}| \\ |M_{I,J}| & |M_{I,I}| & |M_{I,H}| \\ |M_{H,J}| & |M_{H,I}| & |M_{H,H}| \end{vmatrix} \\ &= S(J,I,H). \end{aligned}$$

Finalmente, com essa notação, temos o Teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em detalhes em Oliveira (2019). No que segue, dada a matriz real $A = [a_{ij}]$ de ordem n, escrevemos M_{ij} para designar o **menor** da matriz A associados aos índices i e j. Ou seja, $M_{i,j} = det(A_{i,j})$, onde $A_{i,j}$ é a submatriz de A, removendo-se a i-ésima linha e j-ésima coluna de A.

Teorema 5.2 *Seja M a matriz de menores de uma matriz quadrada A de ordem n. Para cada submatriz quadrada de ordem k; $M_k = [M_{ij}]$, de M, definimos δ_k como o determinante da submatriz de A de ordem $(n-k)$, tomando os complementos das posições de linha/coluna que foram usadas em M_k, e $1 \leq k \leq n$. Isto é:*

$$\delta_k = |(a_{pq})|, \quad 1 \leq p,q; \quad p \neq i, q \neq j.$$

Então, vale a seguinte relação:

$$|M_k| = |A|^{k-1}\delta_k. \tag{5.2}$$

Finalmente, para demonstrar o nosso resultado, considere os conjuntos I, J, $H \subset I_n$, com $n-1$ elementos distintos, ordenados de forma crescente, seja $K = I \cap J \cap H$. Considere

$i_0 \in I_n \backslash I$, $j_0 \in I_n \backslash J$ e $k_0 \in I_n \backslash H$. Observe que:

$$\begin{array}{ccc} |M_{I,I}| = M_{i_0,i_0} & |M_{I,J}| = M_{i_0,j_0} & |M_{I,H}| = M_{i_0,k_0} \\ |M_{J,I}| = M_{j_0,i_0} & |M_{J,J}| = M_{j_0,j_0} & |M_{J,H}| = M_{j_0,k_0} \\ |M_{H,I}| = M_{k_0,i_0} & |M_{H,J}| = M_{k_0,j_0} & |M_{H,H}| = M_{k_0,k_0} \end{array}$$

Além disso, $M_{K,K}$ é a submatriz de A retirando-se as linhas e colunas i_0, j_0 e k_0, ou seja, $|M_{K,K}| = \delta_3$. Aplicando o Teorema 5.2, temos

$$\begin{array}{rcl} |A|^{3-1} \cdot \delta_3 & = & |M_3| \Rightarrow \\ |A|^2 \cdot |M_{K,K}| & = & \begin{vmatrix} M_{i_0,i_0} & M_{i_0,j_0} & M_{i_0,k_0} \\ M_{j_0,i_0} & M_{j_0,j_0} & M_{j_0,k_0} \\ M_{k_0,i_0} & M_{k_0,j_0} & M_{k_0,k_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |M_{I,I}| & |M_{I,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{J,I}| & |M_{J,J}| & |M_{I,H}| \\ |M_{H,I}| & |M_{H,J}| & |M_{H,H}| \end{vmatrix}, \end{array}$$

o que demonstra o nosso resultado.

5.3 Uma demonstração computacional do caso $n = 4$ com o Máxima

Nesta seção, mostramos como podemos utilizar o software Maxima para comprovar o resultado anunciado nas últimas seções para o caso $n = 4$. Os demais casos devem ser tratados de forma similar. O objetivo é apresentar o potencial da tecnologia na pesquisa de Matemática, mas também enaltecer a necessidade da linguagem própria da Matemática para comprovar resultados mais gerais, o que seria impossível apenas com o uso de inteligência artificial, por exemplo.

Considere a matriz real A de dimensão 4, como abaixo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, notemos que existem $C_4^3 = 4$ subconjuntos distintos de 3, elementos do conjunto $I_4 = \{1,2,3,4\}$.. Com efeito, esses conjuntos são

$$I_1 = \{1,2,3\}, I_2 = \{1,2,4\}, I_3 = \{1,3,4\}, I_4 = \{2,3,4\}.$$

Necessitamos escolher 3 destes conjuntos, distintos dois a dois, para verificarmos o resultado, o pode ser feito pelo princípio da contagem, de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modos. Porém vimos na Seção 5.2 que a forma S, definida na afirmação 3, é simétrica. Assim, para validar o Teorema, para o caso $n = 4$, serão necessários checar apenas $\frac{24}{6} = 4$ casos. A saber, devemos verificar o Teorema para $n = 4$ em cada um dos seguintes casos:

Caso (1). $I = I_1, J = I_2$ e $H = I_3$.

Caso (2). $I = I_1, J = I_2$ e $H = I_4$.

Caso (3). $I = I_1, J = I_3$ e $H = I_4$.

Caso (4). $I = I_2, J = I_3$ e $H = I_4$.

Para demonstrar o resultado, definiremos a diferença $Val = |A|^2 \cdot |M_{K,K}| - S(I,J,K)$. Se essa diferença é zero para todos os quatro casos tratados, teremos estabelecido o nosso resultado.

Caso 5.1 *Neste caso teremos* $I = I_1 = \{1,2,3\}, J = I_2 = \{1,2,4\}, H = I_3 = \{1,3,4\}$ *e* $K = \{1\}$.

(% i1) *A : matrix([a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44]);*

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i2) *deta : determinant(A)$;*

(% i4) *MII = matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]);*
detMII : determinant(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]))$

$$MII = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \tag{% o3}$$

(% i6) *MIJ = matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a31,a32,a34]);*
detMIJ:determinant(matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a31,a32,a34]))$;

$$MIJ = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a21 & a22 & a24 \\ a31 & a32 & a34 \end{pmatrix} \tag{% o5}$$

(% i8) *MIH = matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a31,a33,a34]);*
detMIH: determinant(matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a31,a33,a34]))$;

$$MIH = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \end{pmatrix} \tag{% o7}$$

(% i10) *MJI = matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a41,a42,a43]);*
detMJI:determinant(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a41,a42,a43]))$;

$$MJI = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o9}$$

(% i12) *MJJ = matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a41,a42,a44]);*
detMJJ:determinant(matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a41,a42,a44]))$;

$$MJJ = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a21 & a22 & a24 \\ a41 & a42 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o11}$$

(% i14) *MJH = matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a41,a43,a44]);*
detMJH:determinant(matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a41,a43,a44]))$;

$$MJH = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a21 & a23 & a24 \\ a41 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o13}$$

(% i16) *MHI = matrix([a11,a12,a13],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]);*
detMHI:determinant(matrix([a11,a12,a13],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]))$;

$$MHI = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o15}$$

(% i18) *MHJ = matrix([a11,a12,a14],[a31,a32,a34],[a41,a42,a44]);*
detMHJ:determinant(matrix([a11,a12,a14],[a31,a32,a34],[a41,a42,a44]))$;

$$MHJ = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a31 & a32 & a34 \\ a41 & a42 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o17}$$

(% i20) *MHH = matrix([a11,a13,a14],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]);*
detMHH: determinant(matrix([a11,a13,a14],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]))$;

$$MHH = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o19}$$

(% i21) *detM: determinant(matrix([detMII,detMIJ,detMIH],[detMJI,detMJJ,detMJH],[detMHI,detMHJ,detMHH]))$;*

(% i22) *MKK : [a11];*

$$[a11] \tag{MKK}$$

(% i23) *detmkk : a11;*

$$a11 \tag{detmkk}$$

(% i24)

*Val : expand(deta*deta*detmkk - detM);*

$$0 \tag{Val}$$

Caso 5.2 *Neste caso teremos* $I = I_1 = \{1,2,3\}, J = I_2 = \{1,2,4\}, H = I_4 = \{2,3,4\}$ *e* $K = \{2\}$.

(% i1) *A : matrix([a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44]);*

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i2) *deta : determinant(A)$;*

(% i4) *MII = matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]);*
detMII : determinant(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]))$

$$MII = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \tag{\% o3}$$

(% i6) *MIJ = matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a31,a32,a34]);*
detMIJ:determinant(matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a31,a32,a34]))$;

$$MIJ = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a21 & a22 & a24 \\ a31 & a32 & a34 \end{pmatrix} \tag{\% o5}$$

(% i8) *MIH = matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a32,a33,a34]);*
detMIH: determinant(matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a32,a33,a34]))$;

$$MIH = \begin{pmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \end{pmatrix} \tag{\% o7}$$

(% i10) *MJI = matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a41,a42,a43]);*
detMJI:determinant(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a41,a42,a43]))$;

$$MJI = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o9}$$

(% i12) *MJJ = matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a41,a42,a44]);*
detMJJ:determinant(matrix([a11,a12,a14],[a21,a22,a24],[a41,a42,a44]))$;

$$MJJ = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a21 & a22 & a24 \\ a41 & a42 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o11}$$

(% i14) *MJH = matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a42,a43,a44]);*
detMJH:determinant(matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a42,a43,a44]))$;

$$MJH = \begin{pmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a22 & a23 & a24 \\ a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o13}$$

(% i16) *MHI = matrix([a21,a22,a23],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]);*
detMHI:determinant(matrix([a21,a22,a23],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]))$;

$$MHI = \begin{pmatrix} a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o15}$$

(% i18) *MHJ = matrix([a21,a22,a24],[a31,a32,a34],[a41,a42,a44]);*
detMHJ:determinant(matrix([a21,a22,a24],[a31,a32,a34],[a41,a42,a44]))$;

$$MHJ = \begin{pmatrix} a21 & a22 & a24 \\ a31 & a32 & a34 \\ a41 & a42 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o17}$$

(% i20) *MHH = matrix([a22,a23,a24],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]);*
detMHH: determinant(matrix([a22,a23,a24],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]))$;

$$MHH = \begin{pmatrix} a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o19)$$

(% i21) *detM:determinant(matrix([detMII,detMIJ,detMIH],[detMJI,detMJJ,detMJH],[detMHI,detMHJ,detMHH]))$;*

(% i22) *MKK : [a22];*

$$[a22] \qquad \text{(MKK)}$$

(% i23) *detmkk : a22;*

$$a22 \qquad \text{(detmkk)}$$

(% i24) *Val : expand(deta*deta*detmkk - detM);*

$$0 \qquad \text{(Val)}$$

Caso 5.3 *Neste caso teremos* $I = I_1 = \{1,2,3\}, J = I_3 = \{1,3,4\}, H = I_4 = \{2,3,4\}$ *e* $K = \{3\}$.

(% i1) *A : matrix([a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44];*

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \qquad (A)$$

(% i2) *deta : determinant(A)$;*

(% i4) *MII = matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]);*
detMII : determinant(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]))$

$$MII = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o3)$$

(% i6) *MIJ = matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a31,a33,a34]);*
detMIJ:determinant(matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a31,a33,a34]))$;

$$MIJ = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \end{pmatrix} \tag{\% o5}$$

(% i8) *MIH = matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a32,a33,a34]);*
detMIH: determinant(matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a32,a33,a34]))$;

$$MIH = \begin{pmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \end{pmatrix} \tag{\% o7}$$

(% i10) *MJI = matrix([a11,a12,a13],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]);*
detMJI:determinant(matrix([a11,a12,a13],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]))$;

$$MJI = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o9}$$

(% i12) *MJJ = matrix([a11,a13,a14],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]);*
detMJJ:determinant(matrix([a11,a13,a14],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]))$;

$$MJJ = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o11}$$

(% i14) *MJH = matrix([a12,a13,a14],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]);*
detMJH:determinant(matrix([a12,a13,a14],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]))$;

$$MJH = \begin{pmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o13}$$

(% i16) *MHI = matrix([a21,a22,a23],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]);*
detMHI:determinant(matrix([a21,a22,a23],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]))$;

$$MHI = \begin{pmatrix} a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o15}$$

(% i18) *MHJ = matrix([a21,a23,a24],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]);*
detMHJ:determinant(matrix([a21,a23,a24],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]))$;

$$MHJ = \begin{pmatrix} a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o17)$$

(% i20) *MHH = matrix([a22,a23,a24],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]);*
detMHH: determinant(matrix([a22,a23,a24],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]))$;

$$MHH = \begin{pmatrix} a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o19)$$

(% i21) *detM : determinant(matrix([detMII,detMIJ,detMIH],[detMJI,detMJJ,detMJH],[detMHI,detMHJ,detMHH]))$;*

(% i22) *MKK : [a33];*

$$[a33] \qquad (\text{MKK})$$

(% i23) *detmkk : a33;*

$$a33 \qquad (\text{detmkk})$$

(% i24) *Val : expand(deta*deta*detmkk - detM);*

$$0 \qquad (\text{Val})$$

Caso 5.4 *Neste caso teremos* $I = I_2 = \{1,2,4\}, J = I_3 = \{1,3,4\}, H = I_4 = \{2,3,4\}$ *e* $K = \{4\}$.

(% i1) *A : matrix([a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44]);*

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \qquad (\text{A})$$

(% i2) *deta : determinant(A)$;*

(% i4) *MII = matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]);*
detMII : determinant(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]))$

$$MII = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o3})$$

(% i6) *MIJ = matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a31,a33,a34]);*
detMIJ:determinant(matrix([a11,a13,a14],[a21,a23,a24],[a31,a33,a34]))$;

$$MIJ = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o5})$$

(% i8) *MIH = matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a32,a33,a34]);*
detMIH: determinant(matrix([a12,a13,a14],[a22,a23,a24],[a32,a33,a34]))$;

$$MIH = \begin{pmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o7})$$

(% i10) *MJI = matrix([a11,a12,a13],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]);*
detMJI:determinant(matrix([a11,a12,a13],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]))$;

$$MJI = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o9})$$

(% i12) *MJJ = matrix([a11,a13,a14],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]);*
detMJJ:determinant(matrix([a11,a13,a14],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]))$;

$$MJJ = \begin{pmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o11})$$

(% i14) *MJH = matrix([a12,a13,a14],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]);*
detMJH:determinant(matrix([a12,a13,a14],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]))$;

$$MJH = \begin{pmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o13})$$

(% i16) *MHI = matrix([a21,a22,a23],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]);*
detMHI:determinant(matrix([a21,a22,a23],[a31,a32,a33],[a41,a42,a43]))$;

$$MHI = \begin{pmatrix} a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{pmatrix} \tag{\% o15}$$

(% i18) *MHJ = matrix([a21,a23,a24],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]);*
detMHJ:determinant(matrix([a21,a23,a24],[a31,a33,a34],[a41,a43,a44]))$;

$$MHJ = \begin{pmatrix} a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o17}$$

(% i20) *MHH = matrix([a22,a23,a24],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]);*
detMHH: determinant(matrix([a22,a23,a24],[a32,a33,a34],[a42,a43,a44]))$;

$$MHH = \begin{pmatrix} a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} \tag{\% o19}$$

(% i21) *detM : determinant(matrix([detMII,detMIJ,detMIH],[detMJI,detMJJ,detMJH],[detMHI,detMHJ,detMHH]))$;*

(% i22) *MKK : [a33];*

$$[a33] \tag{MKK}$$

(% i23) *detmkk : a33;*

$$a33 \tag{detmkk}$$

(% i24) *Val : expand(deta*deta*detmkk - detM);*

$$0 \tag{Val}$$

Observando o valor da variável Val em cada um dos casos, notamos que este valor coincide e é igual a zero, verificando o Teorema para o caso $n = 4$. Finalizamos esta seção, observando que seriam necessários 10 casos para provar o mesmo teorema no caso para $n = 5$ e 20 casos para o caso $n = 6$. Seria um desperdício de tempo em cada uma das análises de casos. Ainda bem que a linguagem matemática pode ser utilizada para condensar todos os casos numa única demonstração. Mas, destacamos o mérito de alguns resultados surgirem na sua formulação mais simples, necessitando ser demonstrado e só depois generalizado.

5.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos numéricos, do método apresentado na seção anterior, que através de uma relação entre os determinantes é possível encontramos o módulo do determinante.

Para isto devemos, calcular 9 menores de ordem $n-1$, um menor de ordem $n-3$ e um determinante de matriz de ordem 3. Embora não seja possível obter o sinal do determinante diretamente, destacamos que ele é vantajoso, não no aspecto na quantidade de operações aritméticas, tendo em vista que, podemos fazer uso de um software para realizar o cálculo, mas no sentido da quantidade de menores para construir o resultado. Vejamos, tomando uma matriz de ordem 12. Pelo Teorema Elementar de Laplace, teríamos que calcular 12 determinantes de submatrizes de ordem 11, por outro lado, através dessa relação teríamos 9 determinantes de ordem 11, um de ordem 9 e outro de ordem 3, totalizando 11. Observe que essa quantidade é constante para todas as matrizes de ordem $n>3$. Assim, essa relação é vantajosa para matrizes de ordem $n>11$.

A título de ilustração e utilizando o *Maxima*, exploraremos dois exemplos numéricos, para matrizes de ordem $n=4$ e $n=5$.

Usando $I=I_1=\{1,2,3\}$, $J=I_3=\{1,3,4\}$, $H=I_4=\{2,3,4\}$ e $K=\{3\}$.

(% i1) $A: matrix([-1,1,2,5],[0,1,-1,-5],[5,0,4,7],[-1,3,-2,-13]);$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & -2 & -13 \end{bmatrix} \tag{A}$$

(% i2) $deta: determinant(A)\$;$

(% i4) $MII = matrix([-1,1,2],[0,1,-1],[5,0,4]);$
$detMII: determinant(matrix([-1,1,2],[0,1,-1],[5,0,4]))\$$

$$MII = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{\% o3}$$

(% i6) $MIJ = matrix([-1,2,5],[0,-1,-5],[5,4,7]);$
$detMIJ: determinant(matrix([-1,2,5],[0,-1,-5],[5,4,7]))\$;$

$$MIJ = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} \tag{\% o5}$$

(% i8) $MIH = matrix([1,2,5],[1,-1,-5],[0,4,7]);$
$detMIH : determinant(matrix([1,2,5],[1,-1,-5],[0,4,7]))\$;$

$$MIH = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad (\%\ o7)$$

(% i10) $MJI = matrix([-1,2,5],[0,-1,-5],[5,4,7]);$
$detMJI : determinant(matrix([-1,2,5],[0,-1,-5],[5,4,7]))\$;$

$$MJI = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad (\%\ o9)$$

(% i12) $MJJ = matrix([-1,2,5],[5,4,7],[-1,-2,-13]);$
$detMJJ : determinant(matrix([-1,2,5],[5,4,7],[-1,-2,-13]))\$;$

$$MJJ = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -13 \end{bmatrix} \qquad (\%\ o11)$$

(% i14) $MJH = matrix([1,2,5],[0,4,7],[3,-2,-13]);$
$detMJH : determinant(matrix([1,2,5],[0,4,7],[3,-2,-13]))\$;$

$$MJH = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & -13 \end{bmatrix} \qquad (\%\ o13)$$

(% i16) $MHI = matrix([0,1,-1],[5,0,4],[-1,3,-2]);$
$detMHI : determinant(matrix([0,1,-1],[5,0,4],[-1,3,-2]))\$;$

$$MHI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o15)$$

(% i18) MHJ = matrix([0, −1, −5],[5,4,7],[−1, −2, −13]);
detMHJ:determinant(matrix([0, −1, −5],[5,4,7],[−1, −2, −13]))$;

$$MHJ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -13 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o17)$$

(% i20) $MHH = matrix([1,-1,-5],[0,4,7],[3,-2,-13]);$
$detMHH : determinant(matrix([1,-1,-5],[0,4,7],[3,-2,-13]))\$;$

$$MHH = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix} \qquad (\%\ o19)$$

(% i21) $detM : determinant(matrix([detMII, detMIJ, detMIH],[detMJI, detMJJ, detMJH],[detMHI, detMHJ, detMHH]))\$;$

(% i22) $MKK : [4];$

$$[4] \qquad (\text{MKK})$$

(% i23) $detmkk : 4;$

$$4 \qquad (\text{detmkk})$$

(%i24) $deta^2 : detM/detmkk;$

$$1444 \qquad (deta^2)$$

Como visto acima, a relação entre determinantes permite encontrar o quadrado do determinante da matriz A. Fazendo $|A| = x$, temos que:

$$x^2 = 1444 \Leftrightarrow x = \pm 38 \Rightarrow x = 38 \quad \text{ou} \quad x = -38.$$

Agora, consideremos $n = 5$. Usando $I = \{1,2,3,4\}$, $J = I_3 = \{1,3,4\}$, $H = I_4 = \{2,3,4\}$ e $K = \{3\}$.

(%i1) $A : matrix([1,2,3,4,5],[1,1,2,3,4],[1,7,1,2,3],[1,7,7,1,2],[1,7,7,7,2]);$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\text{A})$$

(%i2) $deta : determinant(A)\$;$

(% i4) $MII = matrix([1,2,3,4],[1,1,2,3],[1,7,1,2],[1,7,7,1]);$
$detMII : determinant(matrix([1,2,3,4],[1,1,2,3],[1,7,1,2],[1,7,7,1]))\$$

$$MII = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad (\%\ o3)$$

(% i6) $MIJ = matrix([1,2,4,5],[1,1,3,4],[1,7,2,3],[1,7,1,2]);$
$detMIJ : determinant(matrix([1,2,4,5],[1,1,3,4],[1,7,2,3],[1,7,1,2]))\$;$

$$MIJ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\%\ o5)$$

(% i8) MIH = matrix([2,3,4,5],[1,2,3,4],[7,1,2,3], [7,7,1,2]);
detMIH: determinant(matrix([2,3,4,5],[1,2,3,4],[7,1,2,3], [7,7,1,2]))$;

$$MIH = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\%\ o7)$$

(% i10) MJI = matrix([1,2,3,4],[1,1,2,3],[1,7,7,1], [1,7,7,7]);
detMJI:determinant(matrix([1,2,3,4],[1,1,2,3],[1,7,7,1], [1,7,7,7]))$;

$$MJI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad (\%\ o9)$$

(% i12) MJJ = matrix([1,2,4,5],[1,1,3,4],[1,7,1,2],[1,7,7,2]);
detMJJ:determinant(matrix([1,2,4,5],[1,1,3,4],[1,7,1,2],[1,7,7,2]))$;

$$MJJ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (\%\ o11)$$

(% i14) MJH = matrix([2,3,4,5],[1,2,3,4],[7,7,1,2],[7,7,7,2]);
detMJH:determinant(matrix([2,3,4,5],[1,2,3,4],[7,7,1,2],[7,7,7,2]))$;

$$MJH = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \tag{\% o13}$$

(% i16) MHI = matrix([1,1,2,3],[1,7,1,2],[1,7,7,1], [1,7,7,7]);
detMHI:determinant(matrix([1,1,2,3],[1,7,1,2],[1,7,7,1], [1,7,7,7]))$;

$$MHI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \tag{\% o15}$$

(% i18) MHJ = matrix([1,1,3,4],[1,7,2,3],[1,7,2,3],[1,7,7,2]);
detMHJ:determinant(matrix([1,1,3,4],[1,7,2,3],[1,7,2,3],[1,7,7,2]))$;

$$MHJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \tag{\% o17}$$

(% i20) MHH = matrix([1,2,3,4,5],[7,1,2,3],[7,7,1,2],[7,7,7,2]);
detMHH: determinant(matrix([1,2,3,4,5],[7,1,2,3],[7,7,1,2],[7,7,7,2]))$;

$$MHH = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \tag{\% o19}$$

(% i21) detM : determinant(matrix([detMII,detMIJ,detMIH],[detMJI,detMJJ,detMJH],[detMHI,detMHJ,detMHH]))$;

(% i22) MKK = matrix([1,3], [7,1]);

$$MKK = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \tag{MKK}$$

(% i23) detmkk : -20;

$$-20 \tag{detmkk}$$

(% i24) $deta^2 : detM/detmkk$

$$289 \qquad \text{(det(A))}$$

Tomando $|A| = y$, temos que:

$$y^2 = 289 \Leftrightarrow y = \pm 17$$

$$y = 17 \; ou \; y = -17.$$

Capítulo 6

Conclusões

A preocupação em oferecer sugestões de atividades diferenciadas para o ensino de Determinantes foi a essência desse trabalho. Nos baseamos nas recomendações sugeridas, tanto pelos documentos normativos, como alguns autores defensores das estratégias metodológicas sugeridas pela BNCC. Durante a pesquisa notamos que a exploração de atividades investigativas, com o uso do Maxima permitem desenvolver manipulações que exige do estudante criatividade e o desenvolvimento da capacidade e raciocinar abstratamente.

O conceito de determinante, dependendo da definição, é difícil para um estudante da Educação Básica pelo fato de envolver muitos símbolos, o que dificulta o entendimento. Mas não podemos esperar que o estudante compreenda o que é um determinante apenas informando que é número real associado a uma matriz quadrada, sem justificar como ocorre essa associação. É necessário inserir abordagem que promovam a reconstruação dos algoritmos utilizados para o cálculo de determinantes. Além disso, adotar práticas que promovam uma interação entre estudantes e os objetos matemáticos, aproximando o discente de um saber/pensar matemático, através de atividades que incentivem a busca de demonstrações, contraexemplos e reflexões de suas descobertas que fazem parte de uma aprendizagem pautada no próprio educando.

O progresso do presente trabalho viabilizou proprostas de atividades que pode favorecer a descoberta ou redescoberta de conhecimentos matemáticos, a criação e análise de conjecturas, além de desenvolver o pensamento algébrico e computacional. Todavia podemos comprovar as limitações da utilização de um *software* no processo formativo, haja vista que com ele podemos realizar a verificação para casos particulares, mas não para o caso geral. Para isto, devemos recorrer às propriedades dos objetos e da linguaguem Matemática para realizar a demonstração das conjecturas.

Através das observações e das pesquisas bibliográficas no aprofundamento do estudo de determinantes, obtivemos uma descoberta inesperada em relação ao Teorema de Laplace, podendo ser aplicado a p linhas/colunas, para matriz de ordem $n > 2$, com $n \in \mathbb{N}$, sendo $p < n$. Com base nesse resultado, foi possível estabelecer dois algoritmos alternativos para o cálculo de matrizes tridiagonais.

É inegável a necessidade de estimular novas práticas que visem o desenvolvimento do pensamento algébrico, o incentivo a demonstração de resultado matemático na Educação Básica, trazendo para o cotidiano escolar uma aprendizagem onde o estudante possa atuar com protagonista e construtor do seu conhecimento. A implantação de atividades investigativas realizadas com ou sem o uso de software, a partir de problemas desafiadores, pode aproximar o estudante a Matemática genuína . Nós professores com o papel de mediadores do conhecimento, não podemos simplesmente repetir práticas que estão enraizadas no cenário educacional, que não favorece o desenvolvimento das habilidades esperadas na Educação Básica. Mas é preciso, sair da zona de conforto, reinventar as nossas práticas, a partir do que é essencial para assegurar um ensino de qualidade.

Referências Bibliográficas

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília. MEC 2018.

BRASIL, **Parâmentros Curriculares Nacionais**. Ensino médio. Ministério da educação, (2000b).

BRASIl.MEC.SEF, **Parâmentros Curriculares Nacionais** (Ensino Fundamental). Brasilia, 1997a.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica,**Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Nnatureza, Matemática e suuas Tecnologias**; Volume 2; Brasília: Ministério da Educação, 2006c.

BOLDRINI, J. at all. **Álgebra Linear**. 3ª Edição. São Paulo. Harper & Row do Brasil.1980.

BORBA, M. de Carvalho; PENTEADO, M. Godoy; **Informática e educação matemática**, (2001). Autêntica. Belo Horizonte.

BROCARDO, Joana; **As investigações na aula de matemática: um projeto curricular no 8º ano**. Tese de Doutorado em Educação.Lisboa: Universidade de Lisboa 2001.

GIRALDO, Victor.; PAULO, Caetano; MATTOS, Francisco; **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**, UFRJ, UFSCar, UERJ/CP2.(2012).

OLIVEIRA, J. S. **Investigações com o Máxima no Cálculo de Determinantes**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Campina Grande : UFCG. 2019.

AVERSA, Vincenzo; DE SIMONE, Anna. **An elementary proof of Laplace's formula on determinants**. International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology. 43:3, 2012. 418-420.

IRMA SAIZ, Cecilia Parra, *org.*. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. 1 ed. Artmed. Porto Alegre. (1996) p. 36 - 47.

LIMA, Elon Lages; **Matemática e Ensino** . SBM. Rio de Janeiro, (2007).

LOPES, Tânia Isabel Duarte; **Regularidades no Ensino Básico**. Dissertação, Faculdade de Ciências e tecnologia, Universidade de Coimbra. 2011.

MEDEIROS, K. Maria; **O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula** . Acesso a Educação Matemática em Revista, Rio de Janeiro, ano 8, n.9 (abril. 2001), p.32-39.

DE MORAIS FILHO, D. C.;**Um convite à Matemática com técnicas de demonstração e notas históricas**, 3^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM,(2016), p.135-139.

NASSER, Lilian.; TINOCO, Lucia A de A.; **Argumentação e Provas no ensino de Matemática**. Projeto Fundão/UFRJ. Rio de Janeiro (2003).

NETTO, F. A. Lacaz; **Teoria Elementar dos Determinantes**. São Paulo: Clássico-Cientifica S/A, 1943 p. 3 - 88.

PAIVA, Manoel; **Matemática**; Volume Único; Moderna. São Paulo (1999). p. 241 - 247.

POLYA, George, **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**; Interciência. Rio de janeiro (1995). p. 1-28.

PONTE, J. Pedro.; BROCARDO, Joana.; OLIVEIRA, HÉLIA .**Investigações matemáticas na sala de aula**, 1ª edição; Autêntica. Belo Horizonte (2006).

PONTE, João Pedro;Branco, Neusa; Matos, Ana.**Álgebra no Ensino Básico**. Portugal: Me,(2009a).

ONUCHIC, Loudes de La Rosa ,*et at.*. **Resolução de Problemas: teoria e Prática**. Paco Editorial. São Paulo (2014). p. 35 - 49.

SERRÃO, Alberto Nunes; **Exercícios e problemas de Álgebra**.V. 1 - Rio de Janeiro: Livro Técnico LTDA, 1958. p. 250 - 292.

SONNINO, Sergio; MIRSHAWKA, Victor **Elementos da Teoria dos Determinantes**. São Paulo: Nobel S.A, 1965?. p. 3 - 20.

TELO, Michel;**Matemática no Segundo Ciclo**. 1972. p. 422 - 442.

TATI, Joaquim Dias; **Análise Combinatória Simples Teoria dos Determinantes Sistemas de Equações Lineares** . São Paulo, 1950 ? p.23 - 46.

VALE, Isabel;BARBOSA, Ana (orgs); **Padrões: Múltiplas Perspectivas e Contextos em Educação Matemática**.Projecto Padrões, 2009. p. 169 - 175

Princípios e Normas do NCTM. Um percurso pela Àlgebra. Disponível em: $< http : //www.apm.pt/files/Conf_{C}angueiro_{L}eitao_{4}87e4d92df2e1.pdf >$

Apêndice A

Neste apêndice, vamos citar as 10 competências gerais, propostas pela Base Nacional Comum, que asseguram no cenário pedagógico, o direito a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes durante as três etapas da Educação Básica.

- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

- Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

- Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

- Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

- Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

- Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta

- Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

- Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza

- Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.