UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Um Estudo Histórico da Evolução do Algoritmo de Multiplicação: da Babilônia à Aritmética de Treviso

Bruno Lopes Oliveira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB
Agosto/2020

S576e Silva, Bruno Lopes Oliveira da.
Um estudo histórico da evolução do algoritmo de multiplicação : da Babilônia à Aritmética de Treviso / Bruno Lopes Oliveira da Silva. - Campina Grande, 2020.
94 f. : il. Color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes.
Referências.

1. Multiplicação. 2. Algoritmo. 3. História da Matemática. I. Fernandes, José de Arimatéia. II. Título.

CDU 51(091)(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO GUSTAVO DINIZ DO NASCIMENTO CRB-15/515

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Um Estudo Histórico da Evolução do Algoritmo de Multiplicação: da Babilônia à Aritmética de Treviso

por

Bruno Lopes Oliveira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

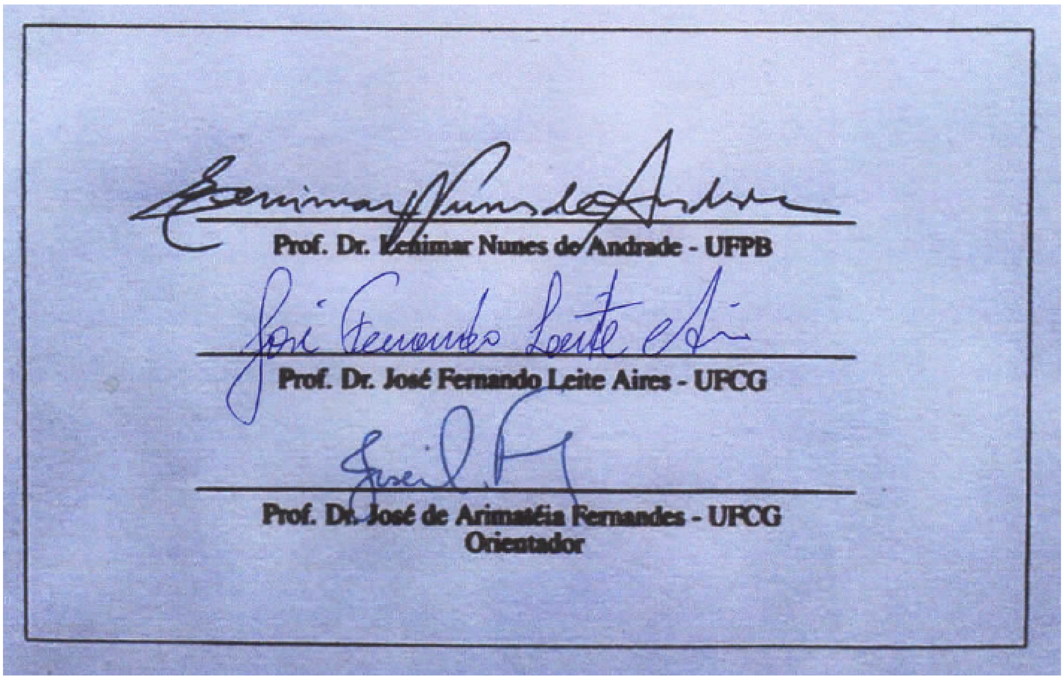
Um Estudo Histórico da Evolução do Algoritmo de Multiplicação: da Babilônia à Aritmética de Treviso

por

Bruno Lopes Oliveira da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2020

Dedicatória

À minha querida mãe Cilene de Oliveira da Silva (in memoriam), cujo empenho em me educar sempre veio em primeiro lugar. Gratidão eterna.

Agradecimentos

À minha esposa e companheira, Pollyana, e à minhas filhas, Sofia e Helena, pelo amor, incentivo, paciência, compreensão e pelos momentos de ausência durante a dedicação ao Mestrado.

Ao Professor José de Arimatéia Fernandes, pela orientação, dedicação, apoio, e principalmente pelo ambiente de harmonia e amizade, e pelos momentos de trocas de experiências tão importantes para minha formação profissional e pessoal.

À UFCG e ao Corpo Docente que participou do Programa PROFMAT e contribuiu imensamente para o engrandecimento e fortalecimento dos meus conhecimentos, em especial, ao Professor Luiz Antônio da Silva Medeiros por toda atenção e ensinamentos durante o curso.

À Banca Examinadora, composta pelos professores Lenimar Nunes de Andrade (UFPB) e José Fernando Leite Aires (UFCG) por toda ajuda e pelas observações que melhoram significativamente esse Trabalho de Conclusão de Curso.

Meu muito obrigado a todos os colegas da turma 2018, especialmente Geraldo Júnior e José Renato pelo companheirismo e amizade, pela ajuda nos estudos e boas conversas em nossas viagens para a UFCG.

Ao Instituto Federal de Pernambuco - Campus Pesqueira, no nome do Professor Valdemir Mariano, e ao Colegiado da Licenciatura em Matemática, no nome do Professor Fernando Emílio Leite de Almeida, pelo apoio durante o tempo de estudos no PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

Este trabalho apresenta técnicas que evidenciam os diversos algoritmos de multiplicação entre números naturais já empregados em algum momento da história da humanidade. Buscaremos, através de uma pesquisa bibliográfica, exibir os processos para efetuar a operação de multiplicação utilizados por diferentes povos, em épocas distintas, destacando suas propriedades e semelhanças com o algoritmo para multiplicar encontrado nos livros didáticos e atualmente ensinado nas escolas da Educação Básica. A motivação para a escolha do tema da pesquisa partiu da curiosidade em saber como os antigos romanos faziam suas operações aritméticas elementares com um sistema de numeração que utilizava letras para representar seus algarismos. Essa curiosidade inicial se estendeu para outras culturas e períodos. Por fim, exibimos em nosso texto algoritmos de multiplicação de seis povos distintos, além de destacar formas diferentes de determinar o produto entre dois naturais na obra Aritmética de Treviso.

Palavras Chaves: Multiplicação. Algoritmo. História da Matemática.

Abstract

This paper aims to present techniques which demonstrate the different multiplication algorithms of natural numbers that have been already used at some time in human history. Through a bibliographical review, we intend to show the processes applied to perform the multiplication operation used by different people, at different times, highlighting their properties and similarities with the multiplication algorithm found in textbooks and which is taught in Basic Education schools nowadays. The motivation for choosing this research topic came from the interest to know how the ancient Romans carried out their elementary arithmetic operations with a system that used letters to represent their numbers. This interest then extended to other cultures and periods of time. To conclude, we present in our paper multiplication algorithms for six different people, in addition to highlighting different ways of determining the product between two natural numbers in the Arithmetic work of Treviso.

Keywords: Multiplication. Algorithm. History of Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Desde a sua origem, o homem percebeu e sentiu a necessidade de quantificar objetos. Em civilizações antigas, como alguns indígenas da América pré-colombiana, houve a premência de "contar". No caso deles, possuíam três palavras para designar os "números" 1, 2 e uma quantidade maior do que 3; são elas, respectivamente, em português: dedo, dedo duplo e muito.

Essa capacidade de "contar" parece ser um fato natural para um simples pastor ou criador de ovelhas; ele possui uma representação mental pictórica de quantidade, mas ainda nenhum conceito de número, que poderia estar associado a traços ou riscos no chão ou em um tronco de árvore.

Certamente a descoberta do número puro, como abstração de um conceito de quantidade é, talvez, o primeiro grande feito científico da humanidade.

E os dedos das mãos surgem naturalmente como um instrumento de contagem, uma vez que estes eram associados aos objetos a serem contados. Não é à toa que a palavra dígito pode significar dedo ou algarismo.

E nesse processo desponta, prontamente, a operação de adição e, consequentemente, a de multiplicação que, nada mais é do que uma adição de parcelas repetidas. Surgem assim as operações aritméticas.

Não à toa, os adeptos de Pitágoras (570 - 495 a. C.), os pitagóricos, elevaram os números à categoria de divindade. O matemático alemão Leopold Kronecker (1823 - 1891 d.C.) teve a ousadia de afirmar: Deus criou os números; todo o resto é trabalho do homem?.

Neste contexto da história dos números, vários sistemas de numeração foram criados por grandes civilizações como os babilônios, egípcios, gregos e romanos. Mas o sistema que de fato sobressaiu-se foi o sistema de numeração posicional Hindu-Arábico, por usar uma base 10 e, possivelmente, estar associado aos dedos das mãos e à praticidade do valor posicional de um número que permite a representação de todos os números com apenas dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

O sistema de numeração romana foi usado na Europa desde a ascensão de Roma ao nível de Império no século I a.C. até praticamente o século XII d.C. quando o matemático italiano Fibonacci introduziu o sistema de numeração Hindu-Arábico na Europa através da sua obra Liber Abaci. Mas, a partir deste ponto, travou-se uma verdadeira batalha entre os algoritmistas que utilizavam o sistema Hindu-Arábico e os abacistas que utilizavam o sistema romano e faziam operações aritméticas nesse sistema utilizando os ábacos. Não é necessário lembrar qual o sistema prevaleceu, mas até o século XVI alguns matemáticos europeus ainda insistiam na utilização do sistema romano de numeração.

Grandes civilizações introduziram sistemas de numeração que foram utilizados por bastante tempo, como os sistemas aditivo egípcio de hieróglifos e o romano, a numeração escrita grega e hebraica, o sistema multiplicativo de ideogramas chineses, mas somente quatro civilizações conseguiram criar e usar com sucesso um sistema posicional de numeração. São eles: o sistema sexagesimal cuneiforme babilônico, o sistema de varas chinês de base dez, o sistema de base vinte dos povos maias e o sistema decimal posicional hindu-arábico.

Evidencia-se imediatamente a grande vantagem desta notação posicional. Não é mais necessário inventar símbolos novos para a "imensidão" de números. Bastam unicamente os nove algarismos de 1 até 9 e mais o zero. A numeração escrita perfeita estava criada.

Mediante um único artifício, a criação do zero, a escrita hindu executa com precisão da indicação da "coisa vaga" na representação do número. Parece tão simples, mas quão alto é o grau de abstração necessário para satisfazer à exigência do caso em que precisamos de um símbolo que revele a ausência de uma casa decimal. A disposição em "casa", da notação hindu, reproduz o princípio do ábaco, reduzido à mais pura essência.

É importante mencionar o grande trabalho feito pelos árabes na propagação do uso do sistema de numeração hindu e a sua consequente introdução na Europa para onde foi levado graças à expansão do Império Islâmico entre os séculos VII e VIII, chegando até a Espanha.

O grande matemático alemão Leibniz (1646 - 1716) criou um sistema de numeração baseado em um único símbolo; chamemos de 1 tal símbolo. Naturalmente, para desfrutar de todas as vantagens de um sistema posicional, ele introduziu um símbolo para a "casa" ausente; o chamaremos de 0. Então estava criado um incrível sistema de numeração binário que, aparentemente era artificial e sem uso prático, mas a história comprovou com o advento do computador que essa era a linguagem mais adequada para a computação eletrônica.

Olhando para trás, vemos que os números se dissociaram dos objetos materiais para iniciar vida própria como objeto abstrato, em um processo demorado, de quase cinco mil anos, até chegar em um sistema de numeração (hindu-arábico) que é uma verdadeira linguagem universal.

O homem aprendeu a contar, uma das maiores façanhas da humanidade, ao lado da domesticação do fogo e da invenção da roda. Mas a criação dos números tem uma outra significação, digna da criação da língua e, de fato, os números se encontram entre os mais antigos, as primitivas palavras do gênero humano. Os povos, um a um, sentiram a necessidade de executar até o fim essa realização e a ela trouxeram contribuições, na medida de suas possibilidades.

Eis-nos possuidores do conceito de número puro e abstrato, isento de materialidade. Estão criadas a numeração falada e escrita internacional.

Diante desse cenário de criação dos números e apropriação do seu conceito abstrato, o domínio das operações aritméticas, com finalidade de facilitar o cotidiano de uma civilização, tem um grande destaque. A multiplicação é uma das quatro operações básicas da Aritmética elementar, que geralmente é definida como uma adição de parcelas repetidas. O domínio desta operação é uma habilidade fundamental para os estudantes que se preparam para uma sociedade cercada de Matemática, uma vez que ela oferece ao aluno uma importante ferramenta na resolução de problemas.

É neste ponto que a História da Matemática pode entrar como um agente diferenciador, uma vez que rememorar diferentes abordagens do processo de multiplicação de antigas culturas pode trazer a reflexão sobre a Matemática natural a esta operação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) reforçam que, a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento [4]. Ainda tomando os PCNs como documento norteador para o ensino de Matemática, podemos citar que um dos princípios que derivam das práticas, pesquisas e estudos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental é que o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente foi construído e que está em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.

O uso de episódios da História da Matemática pode auxiliar para melhores práticas no ensino de Matemática tornando esta disciplina mais atrativa e interessante para os estudantes, motivando-os, enriquecendo as aulas e revelando uma Matemática acessível. Em muitas situações, o recurso da História da Matemática pode esclarecer ideias que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" [5] e, desse modo, contribuir para a construção de uma visão mais crítica do objeto de conhecimento. Além disso vale a pena ressaltar a importância do estudo do algoritmo da multiplicação, não apenas para entender melhor a operação de adição, mas também para permitir um entendimento essencial na operação de divisão.

Como as outras operações aritméticas, a multiplicação já foi realizada por meio de dispositivos diferentes, a depender da civilização e da época que se pesquisa, sendo praticada com pedras ou tabelas, ou ainda não recebendo muita atenção, como no período que tem início com Tales até Pitágoras. Essas formas diferentes de se realizar uma operação Matemática denominaremos de algoritmo, que pode ser entendido como instruções passo a passo, realizadas quase mecanicamente, a fim de se chegar a um resultado desejado. A operação aritmética básica de multiplicação parece ter-se derivado de necessidades econômicas antigas e emergiam naquelas civilizações que dominavam a escrita [16]. O mais antigo registro do uso de um algoritmo foi encontrado num tablete sumério datado de 2500 a.C.

Assim, diante do exposto, no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do PROFMAT - UFCG, apresentaremos uma pesquisa bibliográfica que abordará, sob uma perspectiva histórica, a evolução do algoritmo de multiplicação, passando por diferentes culturas e épocas, desde a Antiga Babilônia, por volta de 3000 a.C. até a publicação do livro Aritmética de Treviso, na Itália, no ano de 1478. Destacamos que motivação para a escolha do tema da pesquisa partiu da curiosidade sobre como os antigos romanos faziam suas operações aritméticas elementares com um sistema de numeração que utilizava letras para representar seus algarismos. Essa curiosidade inicial se estendeu para outras civilizações antigas.

1.1 Objetivos

Neste trabalho iremos apresentar métodos que evidenciam os diversos algoritmos de multiplicação entre números naturais. Buscaremos, através de uma pesquisa bibliográfica, apresentar os processos para efetuar a operação de multiplicação utilizados por diferentes povos, em épocas distintas, destacando suas propriedades e semelhanças com o algoritmo para multiplicar encontrado nos livros didáticos e atualmente ensinado nas escolas da Educação Básica.

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa, destacamos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar breve contextualização histórica dos povos da Antiga Babilônia, do Egito, da Grécia, da China/Japão, da Antiga Roma e dos Árabes;
- Estudar os sistemas de numeração dos povos da Antiga Babilônia, do Egito, da Grécia, da China/Japão, da Antiga Roma e dos Árabes;
- Apresentar a aritmética dos povos da Antiga Babilônia, do Egito, da Grécia, da China, da Antiga Roma e dos Árabes, mas especificamente, a operação de multiplicação entre dois números naturais, por meio de seus respectivos algoritmos.
- Destacar as propriedades e semelhanças de cada método de multiplicar utilizado nas culturas até então estudadas, com o algoritmo encontrado nos livros didáticos e atualmente ensinado nas escolas da Educação Básica.

1.2 Organização

De acordo com o que apresentamos até o momento e pretendendo alcançar os objetivos deste trabalho, nosso texto será assim estruturado:

No capítulo 1: uma introdução que apresentará uma história do surgimento dos números, dos sistemas de numeração e algumas de suas características, além de apresentar o conceito de multiplicação entre números naturais. Destacaremos também o objetivo geral e os objetivos específicos do trabalho, bem como a estrutura de todo o TCC.

No capítulo 2: apresentaremos um breve contexto histórico sobre os povos da Antiga Babilônia. Em seguida, tratamos do sistema de numeração sexagesimal utilizado por essa civilização para, por fim, exibir o algoritmo utilizado para a operação de multiplicação nessa cultura.

No capítulo 3: será apresentado um contexto histórico sobre o povo do Antigo Egito e sua relação com a Matemática. Também destacaremos o seu sistema de numeração decimal com hieróglifos e apresentaremos, com justificativa, o modo como os egípcios faziam a operação de multiplicação.

No capítulo 4: mostraremos o início da ciência na Grécia, destacando o princípio da Filosofia, com Tales de Mileto, e as suas primeiras observações na Astronomia. Passaremos, em seguida, a apresentar a Matemática no sistema de numeração grego e, finalizando o capítulo, exibiremos a forma como a operação de multiplicação era realizada pelos antigos gregos.

No capítulo 5: trataremos sobre o algoritmo de multiplicar utilizado na China. Destacaremos o contexto histórico dessa civilização, suas principais obras matemáticas e o sistema de numeração empregado por esta cultura. Por fim, estudaremos o seu algoritmo de multiplicação.

No capítulo 6: neste capítulo estudaremos o sistema de numeração romano, seus símbolos e buscaremos apresentar a importância do ábaco para esta cultura. Traremos em nosso texto as duas formas como os antigos romanos faziam a operação de multiplicação.

No capítulo 7: apresentaremos os algarismos indu-arábicos e como se deu sua chegada à Europa. Destacaremos o sistema de numeração decimal e a sua chegada na Europa. Em relação à algoritmos de multiplicação, apresentaremos dois métodos usados pelos aritméticos e calculistas hindus. Com a invenção da imprensa, discutiremos sobre uma obra conhecida atualmente como Aritmética de Treviso e o surgimento do nosso algoritmo de multiplicação.

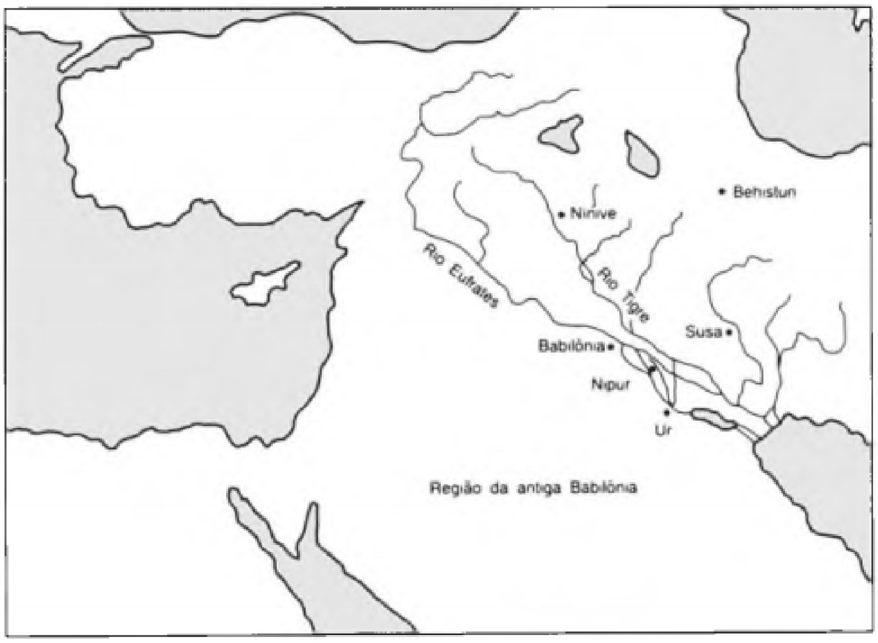
Terminaremos o Trabalho de Conclusão de Curso apresentando as Considerações Finais e as Referências utilizadas para a construção do nosso trabalho.

Capítulo 2

A multiplicação na Babilônia

Ao descrever a matemática babilônica, estaremos nos referindo ao tipo de matemática desenvolvida na antiga Mesopotâmia, nome que os gregos deram ao território situado entre os rios Tigre e Eufrates, região onde atualmente se situam o Iraque, parte do Irã e parte da Síria (observar a Figura 2.1). Foi nesta região que as primeiras sociedades urbanas surgiram e onde, um pouco antes do fim do século IV a.C., surgiu a primeira escrita. Esta grande mudança na organização social teve consequências importantes na história da matemática [2].

Figura 2.1: Região da Mesopotâmia



Fonte: Eves (2007)

Neste capítulo apresentaremos um breve contexto histórico da civilização babilônica, bem como o sistema de numeração adotado pelos povos da antiga Mesopotâmia e, por fim, destacaremos como eram feitas as multiplicações entre dois números naturais nesta cultura. Na construção do nosso texto tomamos como referência os trabalhos de Roque e Carvalho (2012), Morey e Silva (2017), Aaboe (2013), Eves (2007) e Almeida (2011).

2.1 Contexto histórico

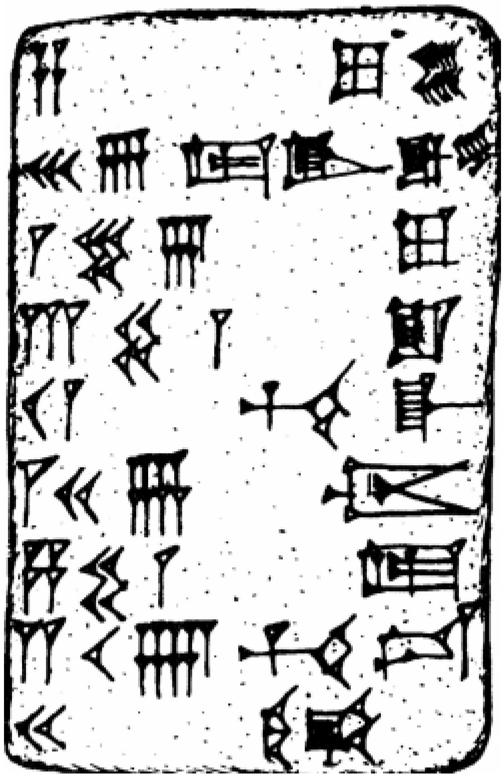
O período de maior importância da antiga Mesopotâmia tem início por volta de 3500 a.C., momento em que pequenos povoamentos urbanos começam a evoluir e, progressivamente, tornam-se grandes cidades, todas elas nas proximidades dos rios Tigre e Eufrates. Estas cidades, que acabam por se organizar em um notável centro social e cultural, não se caracterizaram pela construção de uma unidade política, de forma que predominavam os pequenos Estados que tinham o seu centro político nas cidades.

Povos de diferentes etnias invadiram e ocuparam a Mesopotâmia, destacando-se os Sumérios, por volta de 4000 a.C., e os Acádios, em 2400 a.C..Revoltas e invasões posteriores levaram outros povos - amoritas, cassitas, elamitas, persas e outros - ao poder político em épocas distintas, mas uma uniformidade cultural permaneceu na região, em particular, o uso da escrita *cuneiforme* (em forma de cunha).

Todo tipo de registro, sejam transações comerciais, leis, cartas pessoais, lições escolares e, em particular, operações aritméticas, eram entalhadas, com um estilete, em tábuas (ou tabletes) de barro ainda mole, as quais eram expostas ao Sol para secarem. Essa forma de escrita era menos frágil à ação do tempo quando a comparamos, por exemplo, à escrita em papiros, o que permitiu a descoberta, por meio de escavações, de milhares de tabletes de barro com inscrições.

Há textos matemáticos que datam de uma época próxima a 2100 a.C., último período sumério; um segundo e bastante grande grupo de tabletes datados da Primeira Dinastia Babilônica, a era do rei Hamurabi, até por volta de 1600 a.C.; e um terceiro e generoso suprimento estendendo-se de aproximadamente 600 a.C. a 300 a.C., cobrindo o império neobabilônico do rei Nabucodonosor e as eras persas e selêucida que se surgiram [6].

Figura 2.2: Escrita cuneiforme



Fonte: Ifrah (2010)

Entre todos os tabletes (ou fragmentos destes) descobertos, cerca de 400 foram identificados com conteúdos inteiramente matemáticos. Estes tabletes, que já foram copiados, transcritos e traduzidos, estão guardados em museus e coleções de muitos países [1]. Os problemas que podem ser encontrados nos tabletes matemáticos nos mostram um pouco da vida do povo da Antiga Babilônia. Nestas placas é possível encontrar problemas sobre áreas de terrenos, construção de canais, pesos de pedras, quantidade de cereal produzido e empréstimos, por exemplo.

2.2 O sistema de numeração babilônio

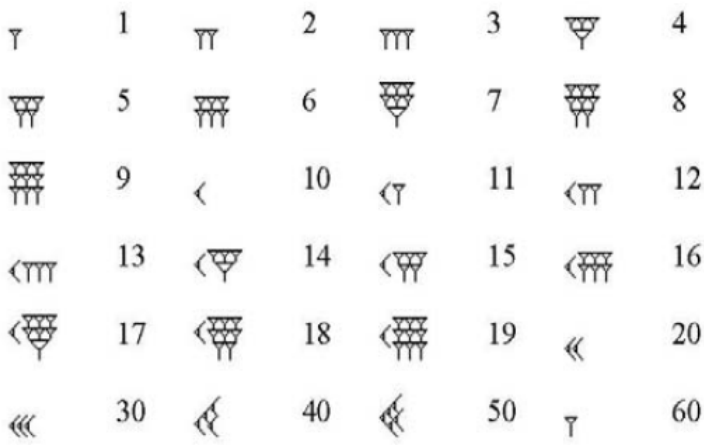
Antes de entender a matemática da Babilônia, em especial, o algoritmo de multiplicação utilizado por esta civilização, precisaremos conhecer o sistema numérico babilônio, uma vez que os algoritmos para as operações aritméticas estão intimamente vinculados com um sistema de numeração, quer seja ele aditivo ou posicional, quer utilize o zero ou não [16].

Os babilônios utilizaram numerosas bases diferentes, com diversos fins práticos. Enfocaremos o sistema de numeração utilizado pelos escribas babilônios que habitaram a Mesopotâmia por volta de 2000 a 1600 a.C., sem fazer referência a épocas anteriores.

A numeração utilizada pelos astrônomos e escribas da Babilônia foi uma das mais extraordinária da antiguidade. O valor de seus algarismos era determinado pela sua posição na escrita dos números, mas, em vez de ser decimal, como o nosso sistema posicional atual, era estruturada na base sexagesimal, o que significa que sessenta unidades em uma determinada ordem são equivalentes a uma unidade de uma ordem imediatamente superior. É bem verdade que os babilônios herdaram este sistema a partir dos Sumérios, mas por que as civilizações antigas escolheram sessenta como base, se conjectura até hoje [12].

No sistema de base sexagesimal, os números de 1 a 59 formavam as unidades simples, ou ainda, unidades de primeira ordem; os múltiplos de sessenta constituíam as unidades de segunda ordem; os múltiplos de 60^2 se faziam corresponder às unidades da terceira ordem e assim, sucessivamente. Este sistema de numeração fazia uso de apenas dois símbolos para construir os números: um pequeno "prego"ou "cravo"vertical, que representava a unidade, e uma "viga"para representar a dezena. A Figura 2.3 nos mostra esses símbolos.

Figura 2.3: Primeiros números - Sistema sexagesimal



Fonte: Roque e Carvalho (2012)

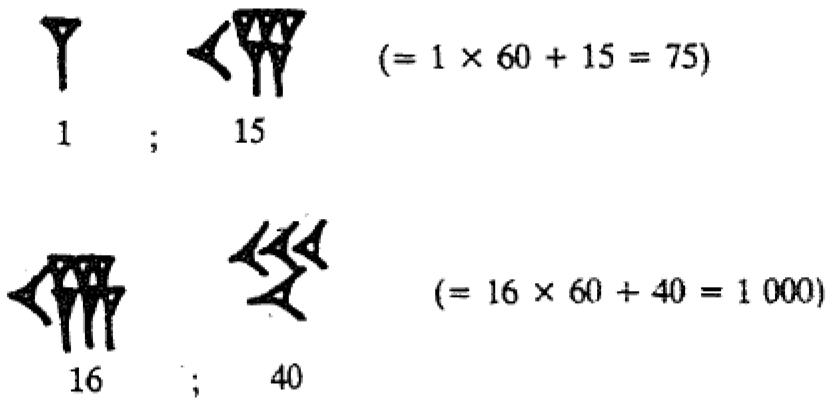
Como podemos verificar a partir da observação da figura acima, o símbolo para o número 1 (um) era repetido para formar os números maiores do que 1 (um), como 2 (dois), 3 (três), e assim por diante até chegar a 10 (dez), representado por um novo símbolo. Este processo aditivo prosseguia até o número 60 (sessenta), quando se voltava a empregar o mesmo símbolo usado para representar o número 1 (um). Ao chegar a $60^2 = 3600$, empregava-se novamente o mesmo símbolo, e assim sucessivamente [15].

Uma grande vantagem do sistema posicional é que poucos símbolos são suficientes para escrever qualquer número. Para que um sistema de numeração seja posicional, inicialmente deve ser estabelecida uma base b. Em notação atual, os símbolos adotados para a base b estabelecida são: 0, 1, 2, ..., $b-1$. Dessa forma, há no sistema b símbolos básicos com os quais qualquer número r poderá ser escrito de forma única: $r =$

$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, onde $0 \leq a_i < b$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Assim, o número r na base b seria representado por $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$.

Com este novo princípio, aliado ao princípio aditivo, números como o 75, ou ainda, $1 \times 60 + 15$, e o 1000, que é igual a $16 \times 60 + 40$, serão escritos, com o sistema de numeração babilônio, respectivamente como:

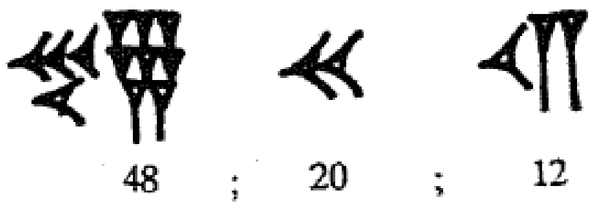
Figura 2.4: Números na notação babilônia



Fonte: Ifrah (2010)

Analogamente, a notação indicada na figura abaixo, no sistema babilônio, representará o número $48 \times 60^2 + 20 \times 60 + 12 = 174.012$.

Figura 2.5: Número 174.012 na notação babilônia

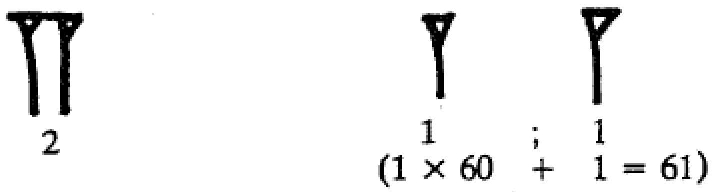


Fonte: Ifrah (2010)

Esse sistema de agrupamento em sessenta unidades está presente na matemática e no nosso dia a dia, bastando lembrar que os graus de uma circunferência corresponde a $360 = 6 \times 60$, ou ainda quando olhamos para as horas em um relógio e percebemos que 1 hora equivale a 60 minutos e que 1 minuto corresponde a 60 segundos. Desta forma, a numeração babilônia era inteiramente análoga ao nosso sistema atual, dele diferindo apenas pela natureza de sua base (sessenta) e pelo modo de formação de seus algarismos [10].

Embora sendo semelhante ao sistema numérico em uso atualmente, o sistema babilônio apresentava o inconveniente de gerar ambiguidade na interpretação dos números, podendo implicar em erros. Por exemplo, a representação do número 2 através de duas cunhas verticais poderia ser confundida com a notação do número 61, ou ainda, o número 3601.

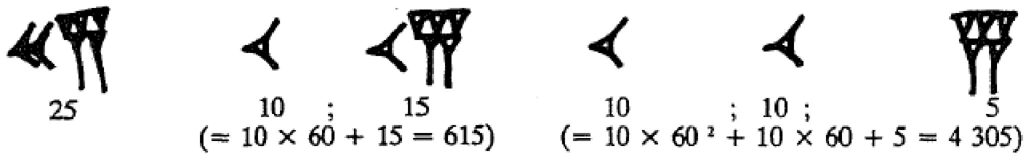
Figura 2.6: Representação do número 2 e do número 61



Fonte: Ifrah (2010)

De maneira semelhante, vejamos a representação do número 25 que poderia ter sua interpretação trocada com a do número 615 ou com a do número 4305:

Figura 2.7: Representação do números 25, 615 e 4305



Fonte: Ifrah (2010)

Na representação do número 2, esse problema pode ser resolvido unindo-se os dois símbolos. Mas como fazer para diferenciar o 1 do 60? E como escrever os números 3601 e 7200, que possuem a mesma escrita no sistema de numeração da Antiga Babilônia? No primeiro caso, procurou-se escrever o 1 e o 60 utilizando símbolos de tamanhos diferentes, mas, a partir da padronização da simbologia da escrita babilônia, e cientes da dificuldade em diferenciar certo conjunto de números, os escribas da antiga Babilônia introduziram um espaço vazio para marcar a passagem de uma ordem sexagesimal para ordem seguinte. Esta solução não poderia ser aplicada ao problema de diferenciar, na escrita, o número 2 do número $120 = 2 \times 60$ ou ainda do número $7200 = 2 \times 60^2$, uma vez que a ideia de um espaço vazio não era estendida à expressão de uma coluna vazia ao final do número.

A dificuldade sobre a ambiguidade na escrita de certos números, descrita anteriormente, e as soluções indicadas para superá-las escondiam, na verdade, uma outra dificuldade, ainda mais fundamental: a ausência do zero. Apenas no século III a.C., com a introdução de dois novos símbolos, foi introduzido o zero ao sistema de numeração babilônio, o zero mais antigo conhecido da história (Figura 2.8), embora que utilizado somente para representar o espaço vazio *interior* de um número [1].

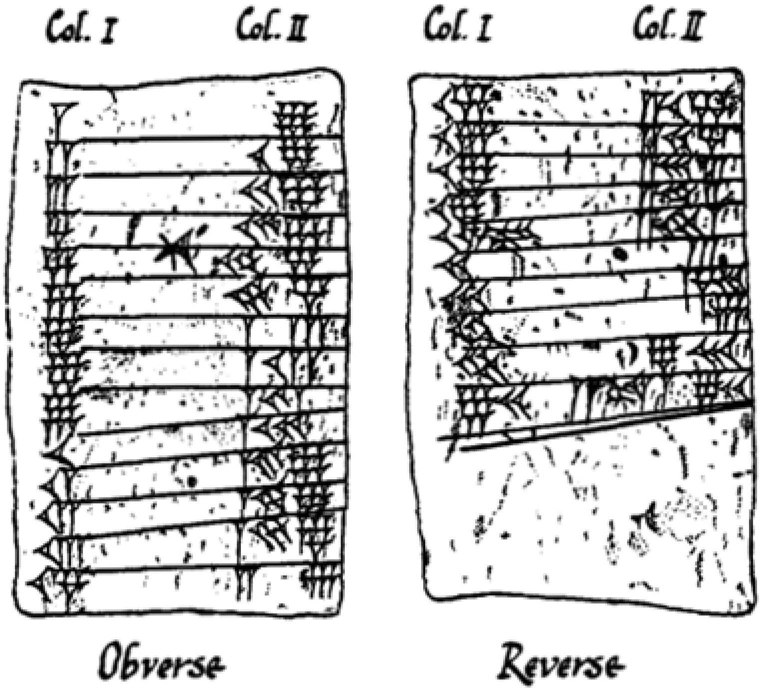
Figura 2.8: O zero babilônio

Fonte: Ifrah (2010)

2.3 As tabelas de multiplicação

Com o sistema de numeração descrito na seção anterior, os babilônios foram capazes de fazer operações aritméticas básicas, da mesma maneira que fazemos atualmente, especialmente em termos de adição, subtração e multiplicação. Uma grande parte dos tabletes com escrita cuneiforme encontrados contém tabelas de recíprocos, de quadrados, de cubos e de multiplicação, de maneira que uma memorização de produtos de dimensão 59×59 era desnecessária. Um exemplo dessas tabelas é mostrado na Figura 2.9:

Figura 2.9: Tabela de multiplicação do 9



Fonte: AAboe (2013)

As tabelas de multiplicação dos babilônios tinham a mesma função das nossas tabuadas. Por usar um sistema de numeração de base sessenta, ficaria difícil, para o povo da antiga Babilônia, a memorização de uma grande quantidade de tabelas, o que vem a reforçar, mesmo para cálculos elementares, a importância dos tabletes, como o indicado na Figura 2.9, para a aritmética da época.

Mesmo com uma base sexagesimal, os babilônios não possuíam tabletes contendo todos os 59×59 produtos [1]. Na verdade, o que as tabelas encontradas nas escavações nos mostram é que, dado um número p, ao qual chamaremos de *número principal*, as multiplicações eram escritas da seguinte forma:

Figura 2.10: Múltiplos de p

1	p
2	$2p$
3	$3p$
⋮	⋮
19	$19p$
20	$20p$
30	$30p$
40	$40p$
50	$50p$

Fonte: Autores

Com tabelas de multiplicação estruturadas como descrito na Figura 2.10, qualquer múltiplo de p pode ser determinado. Para calcular, por exemplo, $28 \times p$, é suficiente somar $20 \times p$ com $8 \times p$, valores tabulados:

$$28p = 20p + 8p = (20 + 8)\,p$$

Para realizar a adição, os babilônios faziam um processo muito semelhante ao utilizado atualmente, com a diferença que a transição para a próxima ordem só acontecia quando a soma era maior do que cinquenta e nove, uma vez que, como já mencionado na seção 2.2, o sistema de numeração adotado era de base sessenta.

Destacamos que em muitas das tabelas de multiplicação a última linha terminava em p^2.

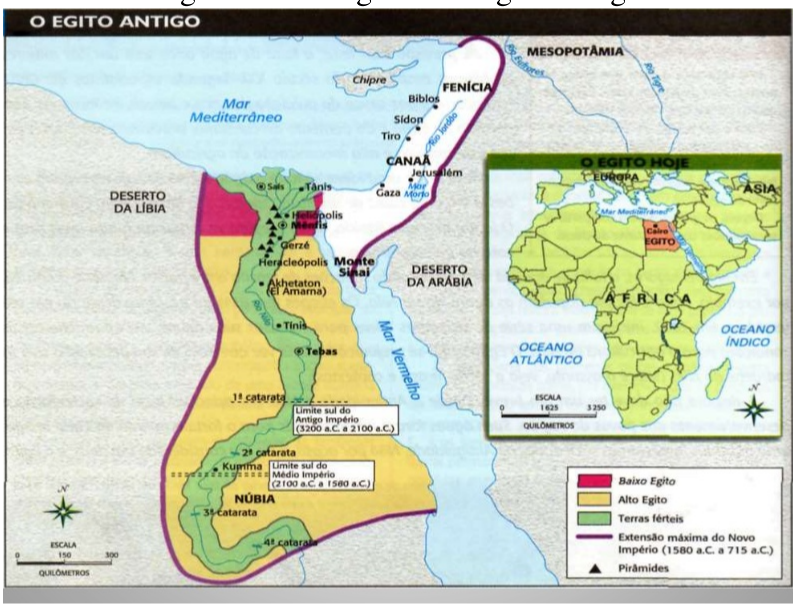
Diante do que expomos em nosso texto e fundamentando-se em autores como Ifrah (2010) e Silva (2003), podemos concluir que a operação aritmética de multiplicação utilizada pelos povos babilônios se assemelha ao modo como multiplicamos atualmente, uma vez que em nossas escolas fazemos uso das tabuadas e, para facilitar operações, usamos com muita frequência, propriedades dos números naturais, como a distributividade em relação à adição.

Capítulo 3

A multiplicação no Egito

O início da história da civilização egípcia (a partir do início do século III a.C.) traz consigo um vasto passado cultural que se confunde com o final da Era neolítica, primórdios do surgimento da agricultura. Escavações realizadas em certos locais de enterros desta época (também chamados de necrópoles ou campos santos), situados em áreas próximas ao Alto Egito e na região do Delta (Figura 3.1), levaram à descobertas de variados objetos decorados com figuras ou ilustrações, que permitiram os historiadores a reconstruir, em linhas gerais, o estado da civilização egípcia.

Figura 3.1: Geografia do Egito Antigo



Fonte: Morey e Silva (2017)

Neste capítulo faremos uma apresentação sucinta do contexto histórico da civilização egípcia. Dissertaremos sobre as fontes matemáticas do Antigo Egito, destacando entre elas, o Papiro de Rhind. Também apresentaremos o sistema de numeração adotado por esta cultura, descrevendo suas propriedades e funcionalidades, tornando possível apresentar o modo como era feita a multiplicação entre dois números naturais por esta cultura, justificando o funcionamento do algoritmo utilizado à época. Neste capítulo, utilizamos como referência os trabalhos de Roque (2012), Boyer (2012), Mendes (2006) e Ifrah (2010).

3.1 Contexto histórico

A origem do que entendemos atualmente por civilização egípcia é um resultado de unificação de diversas cidades existente nas margens do rio Nilo, por volta do ano de 3200 a.C. O Egito formava, então, dois reinos e permaneceu dividido até o dia em que, após uma tentativa de unificar o país por iniciativa de um soberano do sul, o "rei Escorpião" - seu sucessor, Narmer, conseguiu concluir a unificação [11]. Em um primeiro momento após a unificação destas cidades, o governo é fixado na cidade de Tinis, mas a partir da administração do faraó Narmer (3000 a.C.), a nova capital do Egito passar a ser a cidade de Mênfis. Os antigos egípcios passam a ter controle sobre as inundações do rio Nilo e, devido a isto, eles conseguiram desenvolver notavelmente a agricultura, principal atividade econômica. Os egípcios cultivavam trigo, cevada, linho, algodão, legumes, frutas. Cultivavam também o papiro, planta com a qual faziam um papel de boa qualidade [12]. De forma progressiva, vão consolidando um sistema administrativo, social e cultural, o que favorece a criação do sistema hieróglifo de escrita, que vem a colocar os antigos egípcios como uma das grandes civilizações da antiguidade.

Com o surgimento de um sistema administrativo, a sociedade egípcia passa a ser organizada em um sistema hierárquico que posiciona o faraó acima de todos. Abaixo do faraó, um conjunto de pessoas da realeza e um seleto grupo de escribas (ou escrivão) controlavam o Estado. Associado a um sistema de hierarquia, os antigos egípcios acreditavam na vida após a morte, o que leva ao surgimento de cultos religiosos para, em seguida, a construção de grandes templos, onde os sacerdotes tinham a autoridade. Ainda ligado à fé na vida após a morte, o desenvolvimento da engenharia permitiu ao faraó Djoser I (também conhecido por Geser ou Neterket), por volta de 2600 a.C., ordenar a construção da primeira pirâmide da história, a pirâmide de Saqqara. Uma perícia profunda em engenharia é verificada quando se observa que, o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a $1/14000$ e o erro relativo aos ângulos retos dos vértices da base não excede $1/27000$ [6]. Um pouco mais tarde, os faraós Quéops, Quéfren e Miquerinos também entram para a história pela construção das grandes pirâmides do conjunto de Gizé. Essas estruturas eram construídas para servirem de túmulos reais. Com a crença na vida após a morte, a conservação dos corpos seria fundamental, assim, embalsamavam-se os corpos, e os objetos pessoais e valores do dia a dia era, colocados no túmulo para uso após a morte.

Com a dinastia XIX (1295 a.C. - 1186 a.C.), o Egito viveu seu período de maior glória, coincidindo com os governos dos três primeiros faraós da época: Ramsés I, Seti I e Ramsés

II. Também, nesse período, ocorreu o seu declínio, com os últimos faraós: Siptá e Tausserte. Finalmente, no ano de 332 a.C., Alexandre, o Grande, ocupa o Egito. O povo egípcio toma Alexandre como seu libertador e novo faraó.

3.2 O sistema de numeração no Antigo Egito

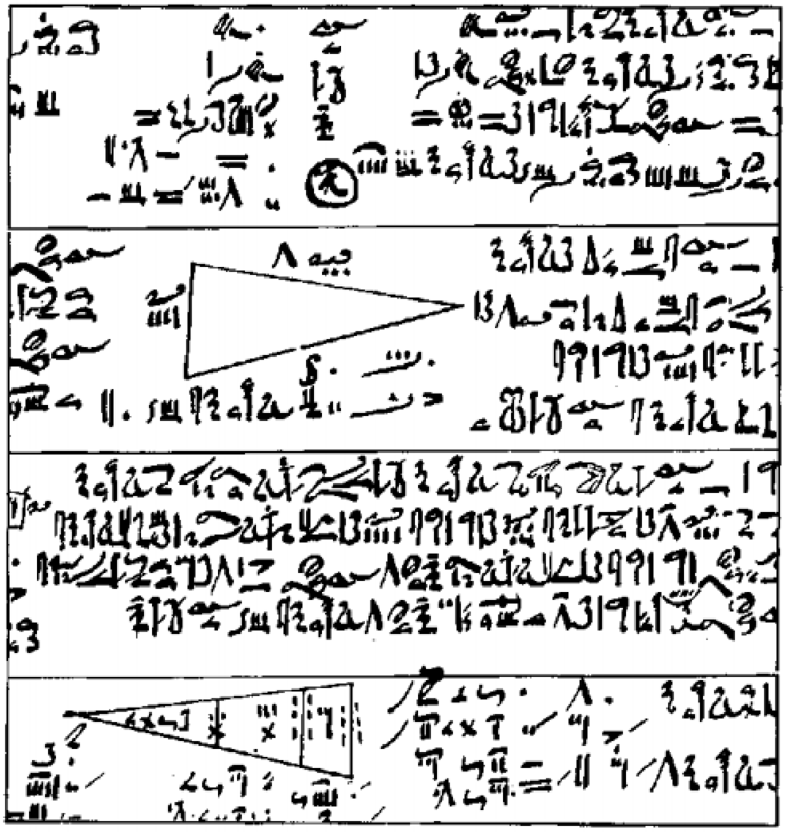
As informações que temos hoje sobre a Matemática praticada pelos antigos egípcios são extraídas de manuscritos em papiros ou pergaminhos, já descobertos naquela região. Como indicamos na Seção 3.1, os egípcios produziam, a partir de uma planta chamada papiro, papel de boa qualidade, leve e flexível, mas frágil e pouco resistente à umidade. Comparando a quantidade de papiros, maior fonte de registro da Matemática egípcia, com os documentos babilônicos, em termos de quantidade, os papiros são muito mais raros. Entre os papiros com maior importância como fonte de pesquisa matemática, podemos destacar dois papiros do Médio Império - papiros de Kahun e de Berlim e dois textos mais longos e um pouco mais recentes - papiro de Rhind e Papiro de Moscou [11]. Assim, trataremos, a seguir, de forma específica, do Papiro de Rhind.

3.2.1 O Papiro de Rhind

Poucos são os documentos que nos revelam a Matemática do Antigo Egito. O Papiro de Rhind (ou de Ahmes) e o Papiro de Golenishchev (ou de Moscou) são dois dos documentos que sobreviveram ao tempo e puderam ser estudados.

No ano de 1855, o advogado e arqueólogo escocês Alexandre Henry Rhind (1833-1863) comprou, na cidade de Luxor, Egito, um rolo de papiro com dimensões aproximadas de 5 metros de comprimento por 0,30 metros de largura. Exceto por uns poucos fragmentos que estão no Brooklyn Museum, este papiro está agora no British Museum, localizado em Londres, Inglaterra, sendo conhecido como papiro de Rhind ou de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. [5]. Quando de sua chegada ao museu britânico, o Papiro de Rhind possuía dimensões menores: era compostos por duas partes, lhe faltando a parte central que, apenas cinco anos mais tarde, foi doada à Sociedade Histórica de Nova York pelo egiptólogo americano Edwin Smith, que o comprou no Egito pensando em estar adquirindo um papiro da área médica. Após a Sociedade Histórica de Nova York perceber do que tratava o papiro recebido, esta fez a doação do papiro para o British Museum, ficando o Papiro de Rhind completo.

Figura 3.2: Uma parte do Papiro de Rhind



Fonte: Eves (2007)

O Papiro de Rhind se tornou a principal fonte do atual conhecimento sobre a Matemática do Antigo Egito. Este papiro é um texto matemático em formato de manual prático. Apresentando 85 problemas, foi copiado em escrita hierática pelo escriba Ahmes, de um trabalho ainda mais antigo, datando de cerca de 2000 a 1800 a.C. Em seus 85 problemas é possível encontrar descrição dos métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, do uso que esta cultura fazia das frações unitárias, do emprego da regra da falsa posição, da solução para o problema de se determinar a área de um círculo, além de muitas aplicações da Matemática a problemas práticos. A seguir apresentamos três problemas que estão no Papiro de Rhind [6]:

1. *Se lhe perguntam o que é* $2/3$ *de* $1/5$*, tome o dobro e o sêxtuplo; esse é* $2/3$ *dele. Deve-se proceder assim para qualquer outra fração.*

2. *Uma quantidade, seus* $2/3$*, seu* $1/2$ *e seu* $1/7$*, somados, valem 33. Qual é a quantidade?*

3. *Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das*

duas menores.

Os trabalhos de Boyer (2012) e Eves (2007) apresentam outros problemas do Papiro de Rhind. Estes problemas abrangem as áreas de Aritmética e Álgebra, com temas de origem prática e alguns de natureza teórica. Também nos mostra todo o esforço dos egípcios para evitar as frações não unitárias, apresentando as tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo $1/n$, sendo essas as únicas utilizadas devido caráter singular da multiplicação egípcia. Da mesma forma, encontramos no Papiro problemas geométricos, muitos deles resultam de fórmulas de cálculo de áreas de terras e volumes de grãos. Já no Papiro de Rhind é possível encontrar uma forma de se calcular a área de um círculo: *a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a* $8/9$ *do diâmetro* [6].

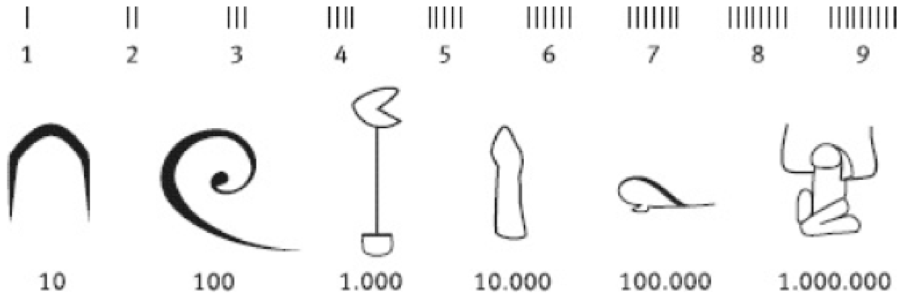
Para o nosso trabalho, em especial, o Papiro de Rhind é de grande importância, uma vez que ele nos mostra como a multiplicação era efetuada no Antigo Egito.

3.2.2 O sistema de numeração hieroglífico egípcio

Como já mencionado, não são muitos os documentos onde é possível encontrar como era estruturada a Matemática egípcia, o que vem a reforçar a importância do Papiro de Rhind, pois, juntamente com a decodificação de inscrições em tumbas e monumentos, a numeração desta antiga civilização foi facilmente decifrada.

O sistema de numeração egípcio já estava desenvolvido antes da unificação do Egito sob o governo de faraós. De fato, por volta de 3000 a.C., esta civilização já se encontra muito avançada, fortemente urbanizada e em ampla expansão. Desde o seu surgimento, o sistema de numeração hieroglífico era baseado no número 10. O número 1 era representado por um traço vertical, e os números seguintes, de 2 a 9, eram obtidos pela soma de um número correspondente de traços verticais. Temos, então, um sistema aditivo e decimal, isto é, as unidades, as dezenas e as centenas eram representadas por sinais diferentes que se repetiam quantas vezes fossem necessárias [11]. O número 10 era representado por uma alça; o 100, uma espiral; 1 mil, a flor de lótus; 10 mil, um dedo; 100 mil, um sapo; e 1 milhão, um deus com as mãos levantadas (figura 3.3).

Figura 3.3: Símbolos do sistema hieróglifo

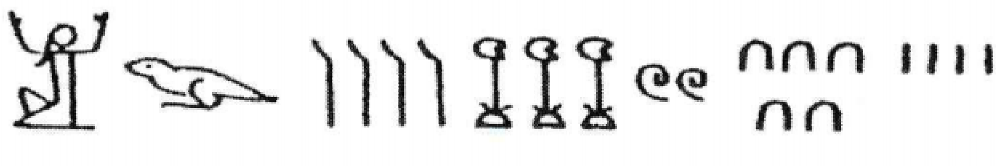


Fonte: Roque (2012)

Os hieróglifos egípcios, como os apresentado na figura 3.3, são quase todos tirados da fauna e da flora da região do Nilo, e os instrumentos e utensílios que esta escrita "copiou" eram utilizados no Egito pelo menos desde o início do quarto milênio antes da nossa era [10].

A convenção para ler e escrever os números é elementar: os números maiores são escritos na frente dos menores e, havendo mais de uma linha de números, devemos partir da linha mais acima. Assim, para escrever um número, basta organizar todos os símbolos obedecendo tal convenção. A soma dos valores resultará no número desejado. A figura 3.4 nos mostra um exemplo de representação no sistema hieróglifo:

Figura 3.4: Representação no sistema hieróglifo



Fonte: Almeida (2011)

Como o sistema é aditivo, a soma de todos os número representados indicará qual é o número apresentado na figura 3.4, em nosso sistema de numeração:

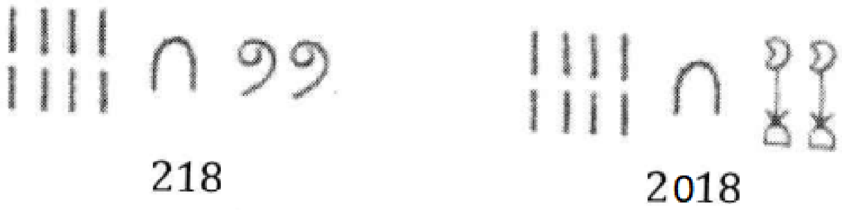
$$1.000.000 + 100.000 + 4 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 1 =$$

$$1.000.000 + 100.000 + 40.000 + 3.000 + 200 + 50 + 4 =$$

$$1.143.254$$

Outra característica desse sistema de numeração é ausência do zero, como podemos destacar nas representações dos números 218 e 2018 (figura 3.5):

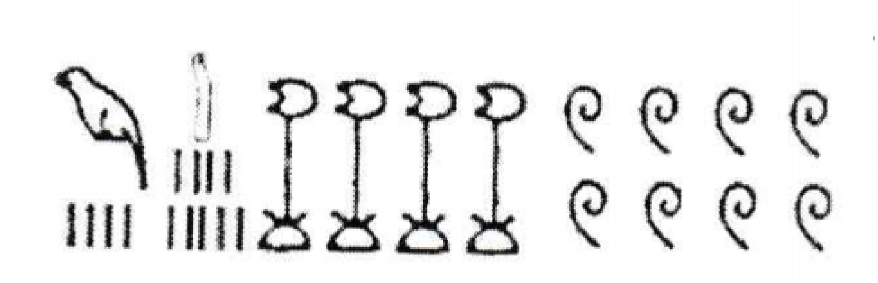
Figura 3.5: Números 218 e 2018 no sistema hieróglifo



Fonte: Almeida (2011)

Do ponto de vista prático, este sistema de numeração revelava algumas dificuldades, pois, por exemplo, o número 9999 necessita, para ser escrito, um total de 36 símbolos diferentes. Entretanto, é possível observar no Papiro de Harris, em exposição no British Museum, um registro de grandes valores fazendo uso, em sua representação, da sobreposição de sinais. Na figura 3.6 destacamos a representação, no sistema de numeração egípcio, do número 494800.

Figura 3.6: Número 494800 no sistema hieróglifo



Fonte: Almeida (2011)

Na figura 3.6 conseguimos perceber a construção do número 494800:

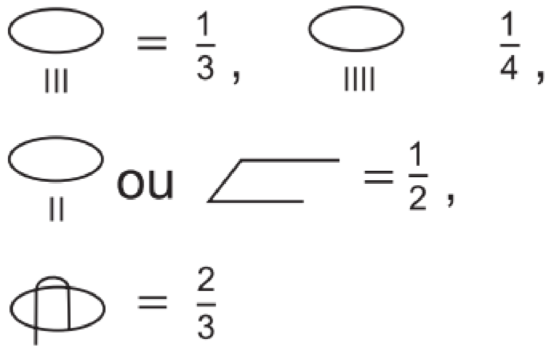
$$100.000 \cdot 4 + 10.000 \cdot 9 + 4800 =$$

$$400.000 + 90.000 + 4800 =$$

$$494.800$$

No sistema de numeração hieróglifo utilizado pelos egípcios, os números fracionários eram representados através de símbolos diferentes daqueles indicados na figura 3.3. Em relação à representação, existiam dois tipos de frações. As frações comuns eram representadas por símbolos próprios, como $1/2$, $2/3$, além de $1/3$ e $1/4$ [14].

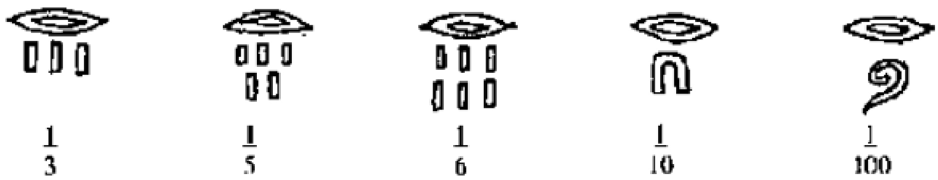
Figura 3.7: Frações



Fonte: Eves (2007)

As outras frações, todas unitárias, ou seja, aquelas com numerador 1, eram obtidas colocando-se um símbolo oval em cima do que hoje chamamos denominador: eram obtidas escrevendo números inteiros com o símbolo oval logo acima.

Figura 3.8: Frações com símbolo oval



Fonte: Ifrah (2010)

3.3 A multiplicação no Antigo Egito

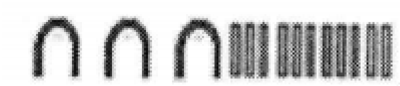
Grande parte dos problemas incluídos nos papiros de Rhind e Moscou são de natureza numérica e de simples resolução, bastando uma soma ou multiplicação para resolvê-los. A operação de adição era resultado direto do sistema de numeração adotado. Para se obter o total de uma soma, bastava agrupar dois números, fazendo, em seguida, as simplificações, quando necessárias. Vejamos a soma de 23 com 18 na figura 3.9 .

Figura 3.9: Adição entre 23 e 18

Fonte: Morey e Silva (2017)

Fazendo a justaposição dos símbolos:

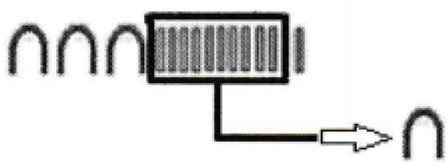
Figura 3.10: Adição entre 23 e 18



Fonte: Morey e Silva (2017)

Como a base do sistema de numeração é decimal, não podemos repetir um mesmo símbolo mais que 9 vezes. Assim:

Figura 3.11: Adição entre 23 e 18



Fonte: Morey e Silva (2017)

Chegando ao resultado final, 41 unidades (figura 3.12).

Figura 3.12: Adição entre 23 e 18

Fonte: Morey e Silva (2017)

A operação de multiplicação era sempre efetuada como uma sequência de duplicações. Vejamos um problema envolvendo a multiplicação encontrado no texto de Ifrah (2010):

Estamos no ano 2000 a.C., na casa de um agricultor de cereais na região de Mânfis. Ao final da colheita, um funcionário do fisco vem controlar o estágio da produção e fixar o montante do imposto anual. Este encarrega alguns trabalhadores de medir o grão por alqueire [1] *e de embalá-lo nos sacos. A colheita ofereceu neste ano dois tipos de trigo: o amido e a espelta, além da cevada comum. Para não se enganar com relação à validade de cereais, os trabalhadores repartem o amido em fileiras de doze sacos, a espelta em fileira de quinze sacos, e a cevada em grupos de dezenove sacos, correspondendo esses grupos respectivamente aos números 128, 84 e 369.*

De acordo com os dados do problema, podemos determinar o número total de sacos de trigo para amido através da multiplicação de 128 por 12. Os antigos egípcios procediam da seguinte forma:

Figura 3.13: Multiplicação entre 128 e 12

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1.536

Fonte: Ifrah (2010)

Percebamos que o multiplicador 12 é escrito na segunda coluna e o número 1 a sua frente, na primeira coluna. Em seguida, faz duplicações sucessivas em cada um dois números até o momento que, no multiplicando (coluna da esquerda) aparece o 128. O valor de 1536, correspondente do 128 na segunda coluna, é o resultado da multiplicação 128×12.

De volta ao problema do agricultor, desejamos, agora, determinar o número de sacos de espelta. Para isso, faremos produto de 84 por 15:

[1] Antiga medida de capacidade

Figura 3.14: Multiplicação entre 84 e 15

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240
32	480
64	960

Fonte: Ifrah (2010)

Novamente, na coluna da direita, colocamos o multiplicador e, na coluna da esquerda, escrevemos o número 1, para, em seguida, fazer as duplicações dos valores nas duas colunas. Desta vez, o multiplicando 84 não aparece na primeira coluna, então prosseguimos com as duplicações até encontramos o maior número contido neste multiplicando; nesse exemplo, o número 64. Para determinar o resultado da multiplicação, deveremos somar valores contidos na coluna da esquerda cujo total seja igual a 84. Na figura essas parcelas estão destacadas com um pequeno traço horizontal e, seus correspondentes na coluna da direita, marcados com uma barra inclinada:

Figura 3.15: Multiplicação entre 84 e 15

	1	15
	2	30
—	4	60/
	8	120
—	16	240/
	32	480
—	64	960/

Fonte: Ifrah (2010)

Ao fazer a soma dos números destacados com o traço horizontal, chegamos ao resultado procurado:

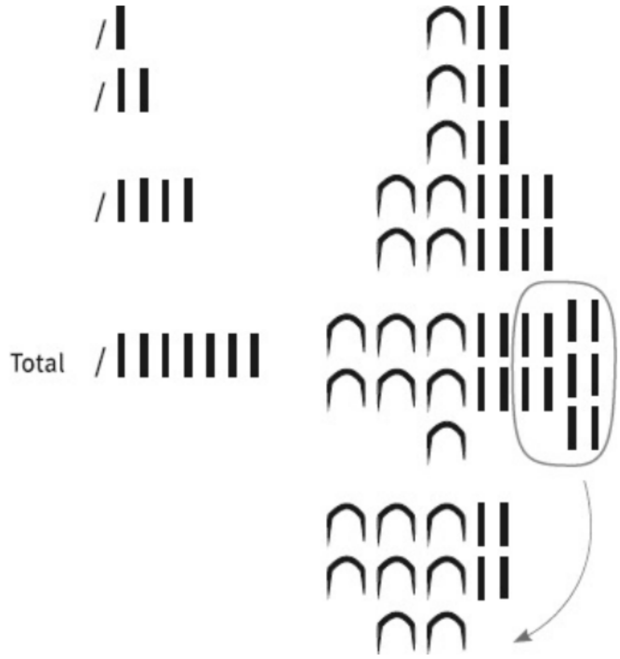
$$84 \times 15 = 15 \times (4 + 16 + 64) = 60 + 240 + 9600 = 1260 \text{ sacos de espelta}$$

Apresentaremos outro problema, dessa vez retirado do texto de Roque (2012). O propósito agora é de mostrar todo o processo de duplicação utilizando os símbolos próprios do sistema de numeração hieróglifo:

Supondo que cada pessoa tenha direito a doze sacos de grãos (convencionando-se um saco de tamanho fixo), a quantos sacos de grãos sete pessoas tem direito?

A figura nos mostra o produto entre os números 12 e 7:

Figura 3.16: Multiplicação entre 12 e 7



Fonte: Roque (2012)

O resultado do problema seria a soma:

$$7 \times 12 = 12 \times (1+2+4) = 12+24+48 = 84 \text{ sacos de grãoes}$$

A multiplicação egípcia é feita por esse algoritmo; é relativamente simples e pode ser feita sem o uso das tábuas de multiplicação. Mas por que o algoritmo utilizado pelos antigos egípcios funciona?

Os problemas retirados dos textos de Ifrah (2010) e Roque (2012), as soluções apresentadas e o algoritmo utilizado nas resoluções, nos levam a observar que um dos fatores é decomposto em uma soma onde cada parcela é uma potência de 2. Quando efetuamos as somas dos valores da coluna correspondente a estas potências, encontramos o valor do produto procurado. A seguir enunciamos um teorema que formalizará nossa observação.

Teorema 3.1 *Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos, denominada* ***representação binária****.*

Apresentaremos uma demonstração para o teorema 3.1 disponível em [17].

Demonstração.

Iniciaremos mostrando a existência da representação, usando indução em n. Temos que $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 1+2$, $4 = 4$, $5 = 4+1$, $6 = 4+2$, $7 = 4+2+1$ e, com isso, o resultado vale para todo $n \leq 7$. Supõe que o resultado vale até um certo $k \geq 7$. Se $k+1$ é uma potência de 2, então está provado. Caso contrário, existe j tal que $2^j < k+1 < 2^{j+1} = 2^j + 2^j$. Logo $k+1-2^j \leq k$ e como qualquer número menor ou igual a k é a soma de potências de 2, segue que existem inteiros não negativos $0 \leq e_0 < e_1 < \cdots < e_l$ tais que $k+1-2^j = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \cdot + 2^{e_l}$. Como $k+1-2^j < 2^j$ segue que $2^{e_0} + 2^{e_1} + \cdots + 2^{e_l} < 2^j$ e assim $e_l < j$. Logo $k+1 = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \ldots 2^{e_l} + 2^j$, com $0 \leq e_0 < e_1 < \cdots < e_l < j$.

Agora provaremos a unicidade da representação. Supõe que a representação é única até um certo k e que $k+1 = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_s}$, com $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_r$ e $0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_s$. Então $2^{a_r} \leq 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_s} \leq 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{b_s} = 2^{b_s+1} - 1$. Logo $2^{a_r} < 2^{b_s+1}$ e assim $a_r \leq b_s$. De maneira análoga podemos mostrar que $b_s \leq a_r$ e, portanto $a_r = b_s$. Usando a hipótese de indução concluímos que $r-1 = s-1$ e que $a_i = b_j$, para $i, j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Portando está provada unicidade.
$\square$

Assim, com o teorema demonstrado e a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação, temos assegurado o funcionamento do algoritmo utilizado pelos antigos egípcios.

Diante do texto apresentado nesse Capítulo 3, considerando as ideias e discussões destacadas nos trabalhos de autores como Roque (2012), Eves (2007) e Ifrah (2010), chegamos a conclusão que a multiplicação utilizada pela civilização do Antigo Egito, mesmo utilizando o processo de duplicação, tem como semelhança ao atual modo de multiplicar, o uso da propriedade distributiva da adição e, faz uso de um resultado importante para a Matemática do presente: todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos.

Capítulo 4

A multiplicação na Grécia

Nos últimos séculos do segundo milênio antes da era cristã, as atividades intelectuais, políticas e econômicas na região do Egito e Mesopotâmia tinham perdido sua vivacidade. Paralelamente ao declínio das culturas dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates, algumas civilizações passam a ganhar destaque, entre elas, os povos hebreus e os gregos. O bronze passa a dar lugar ao ferro na fabricação de armas e novas práticas de guerra são praticadas, trazendo consigo culturas vigorosas ao longo de todo litoral do Mar Mediterrâneo (figura 4.1). Inventou-se o alfabeto e se introduziram as moedas. O comércio foi crescentemente incentivado e se fizeram muitas descobertas geográficas. Ergue-se um novo tipo de civilização [6]. A percepção estática das coisas já não tem mais sentido e, agora, em um ambiente crescente de racionalismo, o homem passa a querer entender o *como* e o *por quê* de tudo o que o cerca.

Figura 4.1: Mapa da colonização grega

Fonte: Almeida (2011)

Apresentaremos, neste capítulo, uma descrição breve do início da ciência na Grécia, incluindo a Matemática. Também apresentaremos o sistema de numeração utilizado por esta civilização, expondo suas propriedades e características, destacando algumas fontes da época, para, em seguida, discorrer sobre a forma como era feita a multiplicação entre dois números naturais por esta cultura, justificando o funcionamento do algoritmo utilizado à época. Neste capítulo, utilizamos como referência os trabalhos de Eves (2007), Boyer (2012), Almeida (2017) e Ifrah (2010).

4.1 O início da ciência na Grécia

Não é simples situar cronologicamente o início do desenvolvimento do raciocínio científico dos antigo gregos. As primeiras referências à conhecimentos de astronomia são encontrados nos épicos poemas de Homero (século VII a.C.), *A Ilíada* e *A Odisséia*. Nesta última obra, por exemplo, Homero narra como *Odisseu* servia-se das constelações de Plêiades, de Boieiro e da Ursa Maior, para navegar. Na mesma época, Hesíodo em sua obra *OS Trabalhos e Os Dias* utiliza as aparições das constelações para marcar o calendário da agricultura grega.

As obras de Homero e Hesíodo citadas se passam em mundos nos quais um Deus, que tem a forma humana e residente no *Monte Olímpio*, intercede na vida dos homens. Assim, todo acontecimento na vida humana é resultado das vontades divinas.

No início do século VI a.C. esse cenário começa a mudar. O surgimento dos primeiros filósofos gregos faz surgir uma cultura que começa a questionar sobre a natureza do nosso mundo. O campo divino passa a dar lugar a teorias racionais, verdadeiras ou não, que foram resultados de análises detalhadas de diferentes fenômenos. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê* [6]. Este movimento de renovação começou a ocorrer na Jônia (atual território da Turquia), onde os gregos, tinham se estabelecido em colônias prósperas comercialmente. Entre os gregos presentes, o primeiro grande nome do qual se tem certeza é Tales de Mileto (624 - 546 a.C).

Historicamente, tudo ligado a Tales é pouco impreciso. Nenhuma grande obra sua sobreviveu ao tempo. Entretanto, as mais antigas referências gregas à história, atribuem a Tales diversas descobertas. Heródoto (485 - 425 a.C.) atribui a Tales a previsão de um eclipse solar que aconteceu no ano de 585 a.C.. O historiador Diógenes Laércio (200 - 250 d.C.) concede a Tales a descoberta da duração de um ano solar. Já Aristóteles refere-se a Tales como o primeiro filósofo a atribuir uma causa material a todas as coisas: Tales considerava que tudo tinha origem na água. Considerações de ordem filosófica influíram no desenvolvimento da matemática grega, especialmente no conceito de número [3].

Em relação à Matemática, Plutarco (46 - 120 d.C.) atesta que Tales foi o responsável em converter a Geometria em uma ciência dedutiva e, através de Diógenes Laércio, sabemos que lhe foi atribuído o fato de calcular a altura da Pirâmide de Queóps, fazendo uso do comprimento de sua sombra. Proclo (410 - 485 d.C.) nas páginas iniciais de seu *Commentary* *on the First Book of Euclid's Elements* (Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides), reconhece que Tales demonstrou os quatro seguintes teoremas [5]:

1. Um círculo é bissectado por um diâmetro.

2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

3. Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.

4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

É, principalmente das observações de Proclo, que vem a designação de Tales como o primeiro matemático.

4.2 O sistema de numeração grego

Uma das maiores contribuições dada pelos gregos para todos os conceitos da Matemática, foi o reconhecimento consciente e a ênfase do fato de que as entidades matemáticas, os números, e as figuras geométricas, eram abstrações, ideias abrigadas pela mente e nitidamente distintas de objetos físicos ou imagens [2].

Ainda em relação aos números, os gregos antigos desenvolveram duas notações diferentes: um mais antigo, conhecido como notação ática; o outro, chamado de sistema jônio, jônico ou alfanumérico.

O primeiro sistema, a notação ática, é composto por seis símbolos e teria sido utilizado desde meados do século V a.C. até o século I a.C.. Cada um dos seis símbolos corresponde a primeira letra do nome de cada número. O número 1 é representado por um traço vertical, constituindo a única situação em que não se recorreu à primeira letra do nome do próprio número o representar.

Figura 4.2: Símbolos no sistema ático

Letra	Inicial de...	Significa...
Γ (pi)	πεντε (pénte)	Cinco
Δ (delta)	Δεκα (déka)	Dez
H (eta)	Ηεκατον (hékaton)	Cem
X (xi)	χιλιοι (chilioi)	Mil
M (mu)	Μυριοι (myrioi)	Dez mil

Fonte: Almeida (2011)

Fazendo uso dos símbolos áticos apresentados na figura 4.2, o número 234 seria representado por:

Figura 4.3: Representação do número 234 no sistema ático

Fonte: Almeida (2011)

Percebamos que, na notação utilizada, é indiferente a ordem em que os símbolos são colocados, pois o valor está ligado aos próprios símbolos e não depende da posição que eles estão na sequência. Dessa forma, para ter o valor representado, bastaria somar os valores que cada um destes símbolos correspondem. De maneira mais geral, na representação ática, foi utilizada a convenção de se ordenar os símbolos por ordem decrescente de valor, da esquerda para a direita. Esta convenção adotada não fez findar uma dificuldade natural deste sistema de base dez e aditivo: para a escrita de alguns números, o uso de muitos caracteres para expressá-los. O número 9999 seria representado por um total de 36 símbolos [2].

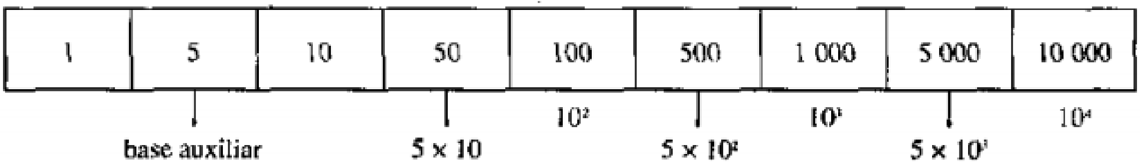
Esta situação foi contornada com a adoção de novos símbolos para os números 50, 500, 5000 e 50000. Os novos caracteres nascem da combinação dos símbolos já utilizados. Apresentamos esses novos símbolos na figura 4.4 :

Figura 4.4: Números 50, 500, 5000 e 50000 no sistema ático

Fonte: Heath (1923)

Assim, esse sistema de numeração atribuía uma representação particular para cada um dos seguintes números:

Figura 4.5: A numeração decimal no sistema ático



Fonte: Ifrah (2010)

O outro sistema de numeração utilizado, como já mencionado, chamado de sistema jônico, provavelmente começou a ser usado a partir do século V a.C. Este sistema faz corresponder um número a cada uma das 24 letras do alfabeto grego e outras três ja obsoletas e de origem no alfabeto fenício: *digamma*, *kopa* e *sampi* - nove letras para os valores inteiros menores que 10, nove para os múltiplos de 10 inferiores a 100 e, outros nove caracteres para os múltiplos de 100 menores que 1000. A figura 4.6 apresenta os símbolos mencionados:

Figura 4.6: A numeração no sistema jônico

Α	Β	Γ	Δ	Ε	F	Ζ	Η	Θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fonte: Boyer (2012)

Após a inclusão de letras minúsculas na Grécia, a relação entre letras e números ficou estabelecida como indicado na figura 4.7:

Figura 4.7: A numeração com letras minúsculas

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fonte: Boyer (2012)

Ainda que o alfabeto grego seja derivado dos povos fenícios, o uso alfanumérico é próprio deste povo. Uma indicação disto é uma inscrição em um documento descoberto nas ruínas do mausoléu de Halicarnasso, datado do século V a.C:

Figura 4.8: Inscrição no mausoléu de Halicarnasso

ΨΝΔ	ΣϘΓ
754	293

Fonte: Heath (1923)

Para representar números maiores que 999, havia duas maneiras de proceder. Na primeira, foi adicionado uma marca (risco ou acento) a letra a fim de escrever as unidades de milhar:

Figura 4.9: Letras com riscos ou acento

͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Fonte: Boyer (2012)

A outra forma, a partir das dezenas de milhar, foi usado uma combinação das letras juntamente ao símbolo *M*. Assim, o número 30000, por exemplo, poderia ser escrito como:

Figura 4.10: Representação do número 30000

$$\Gamma\,\mathrm{M},\ \mathrm{M}\,\Gamma \text{ ou } \overset{\Gamma}{\mathrm{M}}$$

Fonte: Heath (1923)

Conscientes que, através desse sistema, só podiam escrever números até 9.999.999, os gregos desenvolvem novas notações para as potências do símbolo *M* de maneira que qualquer número poderia ser escrito.

As notações gregas primitivas para os inteiros não eram excessivamente incômodas e serviam bem ao seus objetivos [5], mas, ao introduzir símbolos complementares ao seu sistema de numeração, os gregos acabam por dificultar possibilidades operatórias, o que levou os calculadores da época a recorrer à tábuas de cálculos (ou tábuas de contar).

4.3 A multiplicação na Grécia Antiga

Em relação as operações matemáticas fundamentais, os gregos as fizeram de forma muito semelhante como são feitas atualmente. As operações de adição e subtração em um sistema de agrupamentos simples requer apenas a capacidade de contar o número de símbolos de cada espécie e a conversão, a seguir, em unidades de ordem superior. Não é necessária nenhuma memorização de combinações de números [6]. Uma soma e uma subtração no sistema de numeração ático grego podem ser vistas na figura :

Figura 4.11: Adição e subtração na Grécia

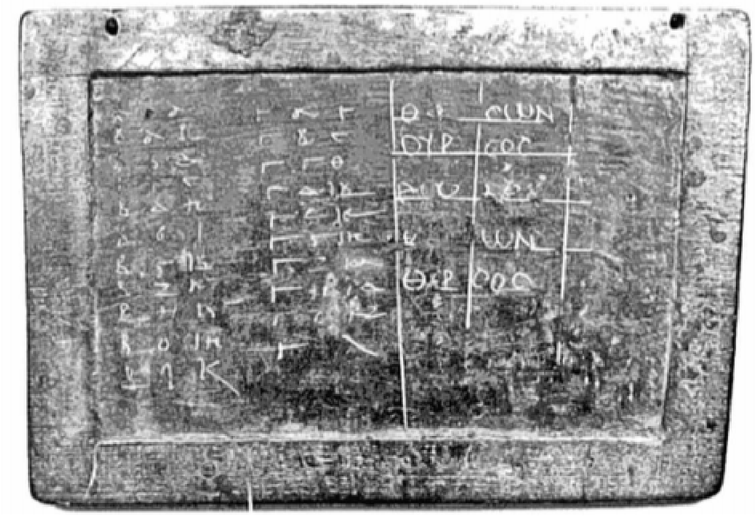
‘ΘΤΚΖ	9.327	$\overset{A}{M}$‘ΑΨΞΓ	11.763
‘ΒΥΛς	2.436	‘ςΩϘΑ	6.891

Fonte: Heath (1923)

Na figura 4.11, em sua primeira coluna, observamos as escritas dos números 9327 e 2436 e, na segunda coluna, é possível perceber o valor 11763, resultado da soma dos dois números da primeira coluna, e o número 6891, resultado da diferença entre os números 9327 e 2436.

Para multiplicar, tal como realizado pelos antigos babilônios, os gregos fizeram uso de tabletes de multiplicação. Um tablete de cera, datado do século II d.C., denominado Add. 334186 (figura 4.12) e hoje localizado no British Museu, Londres - Inglaterra, traz, além de exercícios de separação de sílabas de palavras, tabelas de multiplicação de 2 e de 3, em sua coluna da esquerda. O produto é feito da mesma maneira como calculamos atualmente, com a diferença que os gregos iniciavam a operação pela esquerda e, nós, pela direita.

Figura 4.12: Tablete Add. 334186



Fonte: Heath (1923)

É evidente que o sistema de numeração alfanumérico utilizado pelos gregos implicava em uma grande capacidade de cálculo mental uma vez que, ao ir atribuindo cada um dos resultados intermediários às suas correspondentes letras, eles determinavam o resultado final. Apresentamos, na figura 4.13, um exemplo de multiplicação no sistema alfanumérico:

Figura 4.13: Multiplicação com o sistema alfanumérico

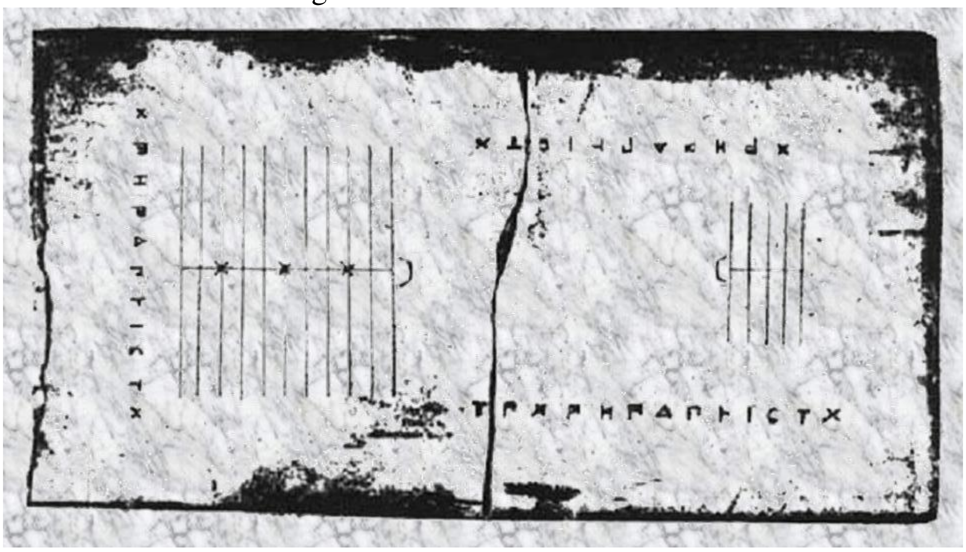
‘Α Τ Ν Α	1.351					
ἐπί ‘Α Τ Ν Α	1.351					
$\overset{P}{M}\ \overset{\Lambda}{M}\ \overset{E}{M}$ ‘Α	1.000.000	300.000	50.000	1.000		
$\overset{\Lambda}{M}\ \overset{\Theta}{M}\ \overset{A}{M}$ ‘Ε Τ	300.000	90.000	15.000	300		
$\overset{E}{M}\ \overset{A}{M}$ ‘Ε ‘Β Φ Ν		50.000	15.000	2.500	50	
‘Α Τ Ν Α			1.000	300	50	1
ὁμοῦ $\overset{P\Pi B}{M}$ ‘Ε Σ Α	*together* : 1.825.201					

Fonte: Heath (1923)

O resultado obtido por meio do algoritmo apresentado na figura 4.13 é alcançado mesmo que a disposição dos números envolvidos fosse outra, uma vez que o sistema de numeração grego é aditivo.

Embora o domínio aritmético dos gregos seja claro, dado seu sistema de numeração, eles também perceberam que o uso do sistema posicional era muito mais vantajoso e, dessa maneira, eles desenvolveram cálculo com ábacos. Este instrumento seria o dispositivo mais antigo de cálculo usado pelo homem, sendo um meio de manipulação numérica por excelência. Um exemplo de ábaco é mostrado na figura 4.14. Este instrumento de cálculo foi encontrado no ano de 1846 na ilha de Salamis. É feito de mármore e possui dimensões de 149 centímetros de comprimento por 76 centímetros de largura e 4,5 centímetros de espessura.

Figura 4.14: Ábaco de Salamis



Fonte: Almeida (2011)

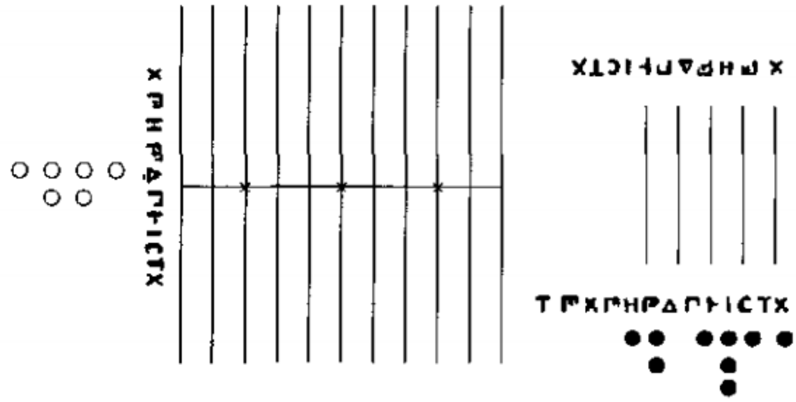
Uma outra forma de multiplicação é mostrada na referência [10], página 428. Apresentamos o exemplo da multiplicação:

Para multiplicar 121 drácmas[2]*, 3 óbolos,* $1/2$ *khalkos por 42, por exemplo, começava-se por colocar no ábaco o multiplicador 42, dispondo as peças correspondentes sob os sinais numéricos apropriados da série à esquerda da mesa. Colocava-se, em seguida, o multiplicando da mesma maneira, dispondo as peças correspondentes (peças pretas) sob as linhas numéricas de uma das séries à direita. Depois, por um jogo sutil de peças, chegava-se ao resultado.*

O exemplo apresentado está ilustrado na figura 4.15

[2] antiga medida de peso para metais

Figura 4.15: Multiplicação com ábaco



Fonte: Ifrah (2010)

Infelizmente, poucos são os registros do ábaco grego, embora eles não devam ter sido muito diferentes desse tipo de tablete, pois as figuras do sistema de numeração romano ainda podem ser vistas gravadas (figura 4.15).

Detalharemos o uso do ábaco romano para a multiplicação no capítulo 6 desse trabalho.

Capítulo 5

A multiplicação na China

A China é uma das civilizações mais antigas, contudo, pouco se sabe sobre sua história devido aos povos da época fazerem seus registros em tiras de bambu, um material perecível que se desgasta com o tempo. Da mesma forma que aconteceu em outras civilizações antigas, os vestígios das primeiras atividades matemáticas estão relacionadas à contagem, medições e pesagem de objetos. Mendes (2006) destaca que a tradição chinesa remota, provavelmente, ao terceiro milênio anterior à era cristã, período de estabelecimento dos primeiros impérios chineses.

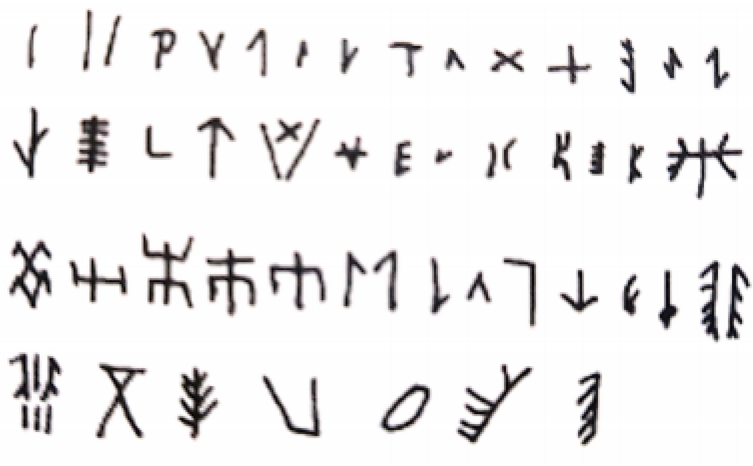
Nesse capítulo apresentaremos como se deu o desenvolvimento da escrita na China, destacando as primeiras inscrições e a simbologia utilizada. O sistema posicional chinês também é apresentado, onde evidenciaremos suas características e a simbologia empregada. Por fim, passaremos a dissertar sobre a aritmética da antiga China, destacando o algoritmo de multiplicação. As fontes para a construção desse capitulo são os trabalhos de Mendes (2006), Almeida (2017), Eves (207) e Ifrah (2010).

5.1 A escrita chinesa

A evolução da escrita chinesa na antiguidade foi construída em três etapas: inscrições em artefatos de cerâmica; inscrições em ossos e conchas; inscrições em bronzes.

O período neolítico na China estendeu-se, aproximadamente, entre 6000 e 2000 a.C.. Artigos em cerâmica eram feitos, principalmente, para armazenamento de alimentos e para cozinhar. Muitas inscrições foram encontradas em peças cerâmicas da cultura Yangshao (5000 - 4000 a.C.) e apresentamos alguns dos símbolos utilizados na figura 5.1.

Figura 5.1: Símbolos da cultura Yangshao



Fonte: Almeida (2017)

O início da escrita na China ocorreu entre 2500 - 2000 a.C., e tem sido vinculado à cultura Liangzhu, do sudeste da China, e também com a cultura Loogshan (3300 - 2200 a.C.), da penísula Shandong. Em Liangzhu, por exemplo, diversos símbolos compostos foram encontrados, podendo ser símbolos religiosos ou nomenclaturas de clãs.

Descobertas arqueológicas em províncias de Henan apontam para o uso de símbolos para representar numerais no VII milênio a.C., algo anterior aos símbolos sumérios. As evidências sobre a escrita foram encontradas em carapaças de tartaruga (figura 5.2), datando de 6600 a 6200 a.C., descobertas no sítio arqueológico de Jiahu. Provavelmente foram empregados em processos divinatórios, semelhantes aos “ossos oraculares” associados ao sítio de Yinxu, da dinastia Shang, posteriores a 1700 a.C., que apresentam um bem desenvolvido sistema de escrita com cerca de 5000 caracteres [3].

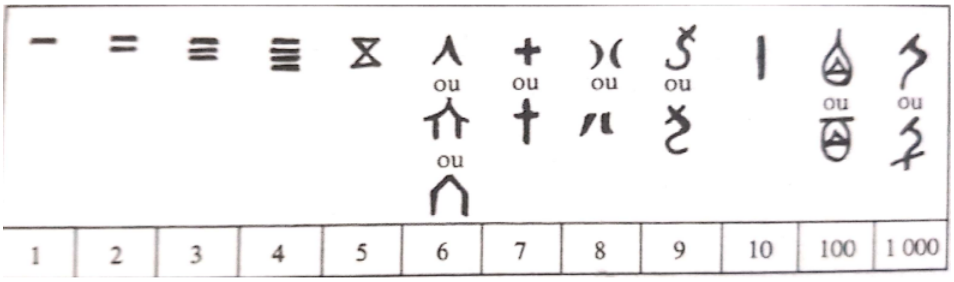
Figura 5.2: Inscrições em carapaças de tartaruga

Fonte: Almeida (2017)

As inscrições oraculares Shang feitas em carapaças de tartarugas ou em escápulas de animais, quase todas tem origem em Yinxu, uma vila agrícola em Anyang - era a capital da Dinastia Shang. A quantidade de ossos ou fragmentos recuperados passam de 1000000 e a diversidade de temas inscritos transitam por campanhas militares, saúde, sacrifícios, viagens, tempo, etc. Alguns eram apenas registros, outros, consultas a deuses e ancestrais.

Uma das carapaças encontradas em Jihau (identificada por M233:15) apresenta linhas horizontais semelhantes aos numerais um e dois das inscrições de Yinxu; em outra carapaça (esta identificada por M387:4) foi identificado símbolos semelhantes ao numeral oito e ao numeral 10. Todos esses símbolos mencionados, foram feitos de forma intencional, não sendo arranhões acidentais ou feitos, por exemplo, por dentes de animais. Detalharemos os numerais e sua organização na seção 5.2.

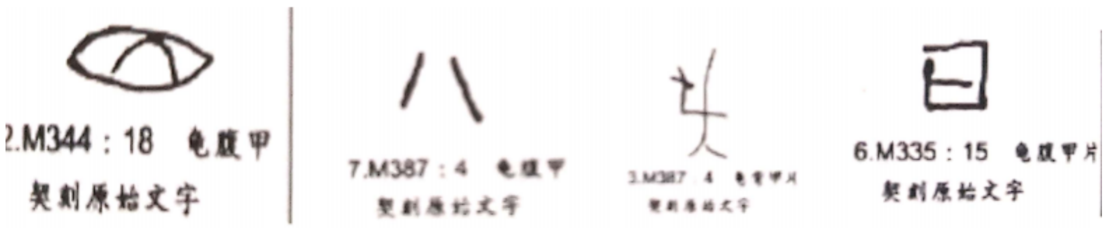
Figura 5.3: Numerais empregados em inscrições oraculares



Fonte: Almeida (2017)

Enquanto que a preocupação com os numerais entre os sumérios antigos parece ter tido origem com questões práticas, os símbolos de Jihau parecem estar conectados com rituais, talvez pertencendo ao modelo onde cultos à divindades extraem seu poder da palavra escrita[3]. Estes símbolos parecem ser os mais antigos e arcaicos numerais já encontrados.

Figura 5.4: Símbolos de Jihau



Fonte: Almeida (2017)

5.2 O sistema de numeração chinês

O impulso em procurar por interferência babilônica ou grega na matemática chinesa é logo desconsiderada quando nos deparamos com o fato que os chineses não fizeram uso de frações sexagesimais. Parece ter havido algum contato entre a Índia e a China, bem como entre a China e o Ocidente, mas os historiadores não estão de acordo quanto à extensão e sentido dos empréstimos.[6].

Ainda na época da dinastia Han (séculos II a.C - III a.C.), os chineses idealizaram um perspicaz sistema de numeração escrita, combinando regularmente, sobre o princípio de posição, barras verticais e horizontais. A base desse sistema era decimal, mas diferentemente do nosso atual sistema de numeração, ele fazia uso de uma representação pictórica, ou ainda, ideográfico, para representar os números. As cinco primeiras unidades eram representadas por uma quantidade correspondente de traços verticais, justapostos (figura 5.5). Do número 6 ao número 9, as representações são feitas com um traço horizontal superposta a uma, duas, três ou quatro barras horizontais (números 6, 7, 8 e 9, respectivamente).

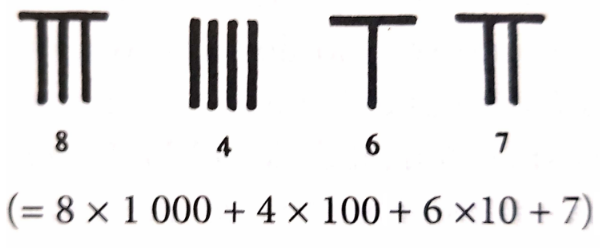
Figura 5.5: Símbolos antigos chineses

Fonte: Ifrah (2010)

Destacamos que, em relação à composição apresentada na figura 5.5 para os números 6, 7, 8 e 9, a barra horizontal tinha um valor simbólico de 5.

Com estes símbolos, os antigos chineses conseguiam escrever números com duas ou mais ordens de unidades usando o princípio posicional. O número 8467, por exemplo, era escrito como indicado na figura 5.6:

Figura 5.6: Escrita do número 8467 na notação de barras



Fonte: Ifrah (2010)

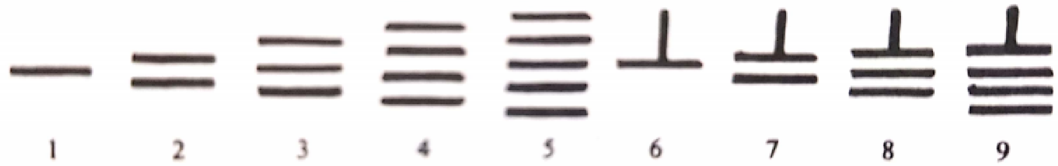
Mas, por mais engenhosa que fosse, esta numeração comportava ainda ambiguidades. Em primeiro lugar, devido ao fato de que seus usuários se limitavam a justapor o mesmo número de barras para a representação das unidades das ordens consecutivas [10] (figura 5.7)

Figura 5.7: Números 434 e 2234 na notação de barras

Fonte: Ifrah (2010)

A solução encontrada para este obstáculo foi a de incorporar ao sistema adotado até o momento, uma segunda notação para unidades simples. Esta nova notação era composta por símbolos análogos aos primeiros, com a diferença que, desta vez, com barras horizontais. Agora as cinco primeiras unidades passam a ser representadas pela mesma quantidade de barras horizontais superpostas e, do número 6 ao número 9, temos uma barra vertical sobre uma, duas, três ou quatro barras verticais, respectivamente (figura 5.8):

Figura 5.8: Barras horizontais



Fonte: Ifrah (2010)

Assim, para bem fazer a distinção entre as diversas ordens de unidades, os chineses antigos passam a alternar os algarismos inicias (figura 5.5) com os novos, apresentados na figura 5.8. Unidades de “casa” ímpar (unidades simples, centenas, dezenas de milhar,...) eram preenchidas com os algorismos das barras verticais e, as unidades de “casa” par (dezenas, milhares, centena de milhar, ...), eram expressas por meio dos algorismos das barras horizontais. Assim, os números 522 e 87941 passaram a ser escritos como pode ser visto na figura 5.9:

Figura 5.9: Nova notação para números chineses

Fonte: Ifrah (2010)

Outra dificuldade característica do sistema de numeração dos chineses era a ausência de um símbolo para representar o zero. Para exemplificar, recorremos a Ifrah (2010), que nos apresenta um texto que retrata uma adivinhação chinesa datada do início da era cristã:

O caractere hai tem por "cabeça" 2 e por "corpo" 6. Baixando o 2 ao nível do corpo, obter-se-á a idade do ancião Kiang-hien.

Na época em que esta adivinhação foi formulada, o símbolo que representava o caractere hai era o indicado na figura 5.10

Figura 5.10: Caractere ahi

Fonte: Ifrah (2010)

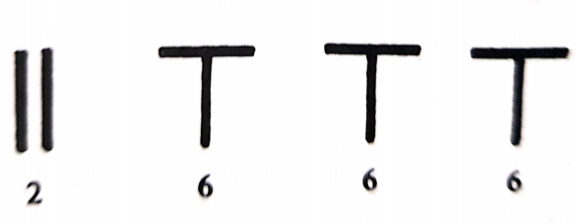
Então, para obter a solução da adivinhação, de acordo com o texto, devemos baixar a "cabeça" ao nível do "corpo". Assim, dispondo verticalmente os dois traços que estavam no alto do caractere hai, temos (figura 5.11):

Figura 5.11: "cabeça" e "corpo" ao mesmo nível

Fonte: Ifrah (2010)

Aproximadamente, temos a representação do número

Figura 5.12: Número 2666?



Fonte: Ifrah (2010)

Pela notação do sistema chines, em sua origem, teríamos que a idade do *ancião Kiang-hien* seria 2666 anos. Essa idade encontrada não pode corresponder a idade de uma pessoa. O que nos leva, então, a supor que o valor de 2666 seria a idade do "ancião" em dias. Aqui também temos uma situação fora do contexto da adivinhação, uma vez que, fazendo a conversão de dias para anos, o "ancião" teria algo próximo de 7 anos e meio.

Este problema, por fim, é resolvido quando tomamos a idade do "ancião" em décadas: *o "ancião" viveu 2666 décadas*, ou ainda, aproximadamente 73 anos. Perceba que 2666 décadas (ou dezenas) corresponde a 26660 dias. Por causa da ausência do zero ficamos especulando sobre a unidade de tempo no problema apresentado.

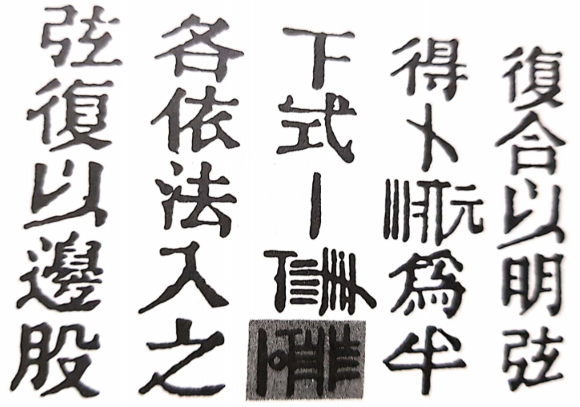
Como na Babilônia, só relativamente tarde é que apareceu um símbolo para uma posição vazia [5]. Combinando sua notação posicional com a "notação por extensão", os chineses antigos passaram a expressar números como 2640, 20064 ou ainda 264000 (figura 5.13):

Figura 5.13: Números 2640, 20064 e 264000 na sistema chinês

Fonte: Ifrah (2010)

Os números apresentados na figura 5.13 foram representados escrevendo algo como "264 dezenas" para 2640, "2 dezenas de milhar (e) 64" para 20064 e "264 milhares" para 264000 [10]. Apenas no século VII d.C. os chineses começam a usar um zero verdadeiro, resolvendo as dificuldades já apresentadas. A figura 5.14 apresenta uma obra publicada em 1248, pelo matemático chinês Li Ye. Na imagem é destacada a representação do número 106929:

Figura 5.14: Destaque do número 106929 com o uso do zero



Fonte: Ifrah (2010)

Um acontecimento interessante ocorrido em 1994 foi a descoberta de um livro de aritmética escrito em tiras de bambu, desenterrado de túmulos que remontam à dinastia de Han (206 a.C - 220 d.C). O trabalho transcrito por volta do século II a.C., é uma coleção de mais de noventa problemas envolvendo, entre outros temas, as quatro operações elementares [6].

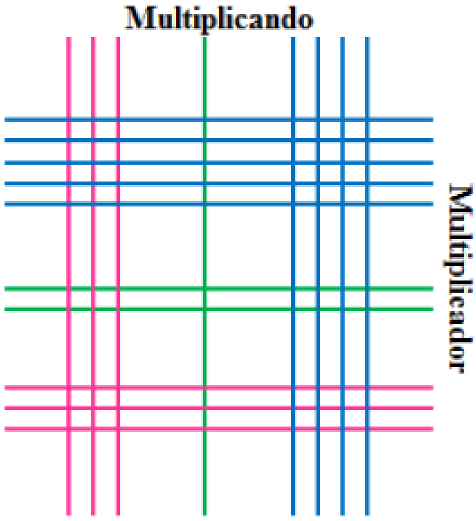
Apresentaremos na seção seguinte a forma como os antigos chineses efetuavam multiplicações.

5.3 A multiplicação na China Antiga

Como descrito na seção 5.2, o sistema de numeração chinês tinha como propriedades, ser decimal, posicional e com representação de seus algarismos feita por barras, verticais e horizontais. Considerando essas características, apresentaremos nessa seção a forma como os chineses realizavam multiplicações entre dois números naturais.

O método era muito prático e fazia uso de varetas de bambus dispostas na horizontal e na vertical, representando, respectivamente, o multiplicador e o multiplicando. Boyer (2012) afirma que o uso das barras sobre uma tábua era tão eficiente que o ábaco ou moldura rígida com fichas móveis sobre arames não foi usado tão cedo quanto se tem suposto em geral. A figura 5.15 apresenta a disposição inicial para a multiplicação entre os números 314 e 523.

Figura 5.15: Multiplicação entre 314 e 523

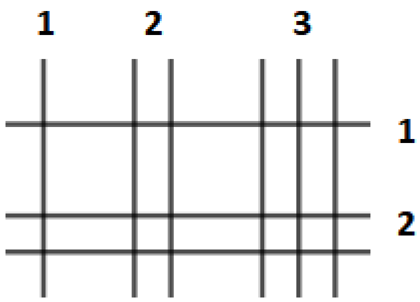


Fonte: Pereira (2017)

Observamos que cada dígito do multiplicador e do multiplicando está representado por um número correspondente de varas de bambu e espaços maiores entre as varetas, tanto na vertical, quanto na horizontal, para separar os bambuns que representam os algarismos das unidades, dezenas, centenas, assim, sucessivamente.

Apresentaremos o algoritmo de multiplicação chines através de dois exemplos. Iniciaremos com a multiplicação entre os números 123 e 12.

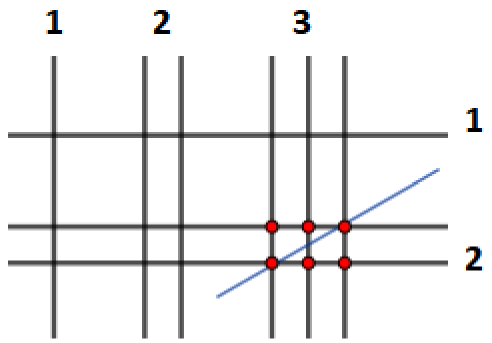
Figura 5.16: Representação do produto 123×12



Fonte: Elaborada pelos autores

Primeiramente, traçamos a diagonal como indicada na figura 5.17, onde destacamos os 6 (3×2) pontos de cruzamentos:

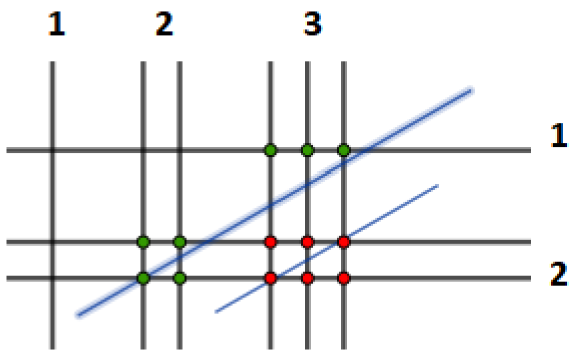
Figura 5.17: Pontos de cruzamento da primeira diagonal



Fonte: Elaborada pelos autores

Em seguida, desenhamos a segunda diagonal para obter os 7 $((3\times1)+(2\times2))$ pontos do cruzamento, como mostrado na figura 5.18:

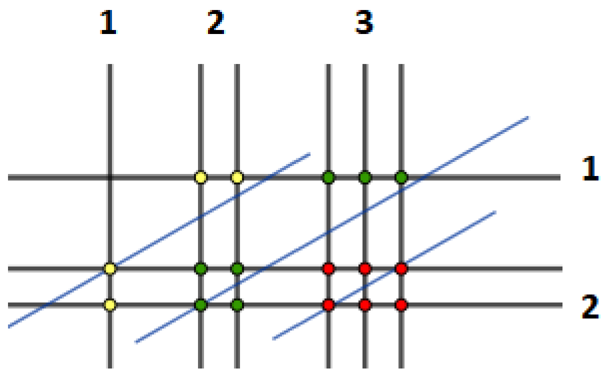
Figura 5.18: Pontos de cruzamento da segunda diagonal



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao traçarmos a terceira diagonal, são contados 4 $((2\times1)+(1\times2))$ pontos de cruzamentos (figura 5.19)

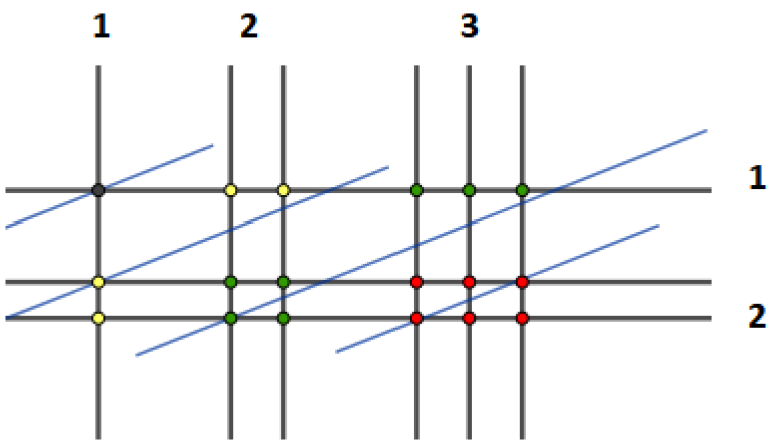
Figura 5.19: Pontos de cruzamento da terceira diagonal



Fonte: Elaborada pelos autores

Desenhando a última diagonal, temos apenas 1 ponto de cruzamento entre os bambus (figura 5.20):

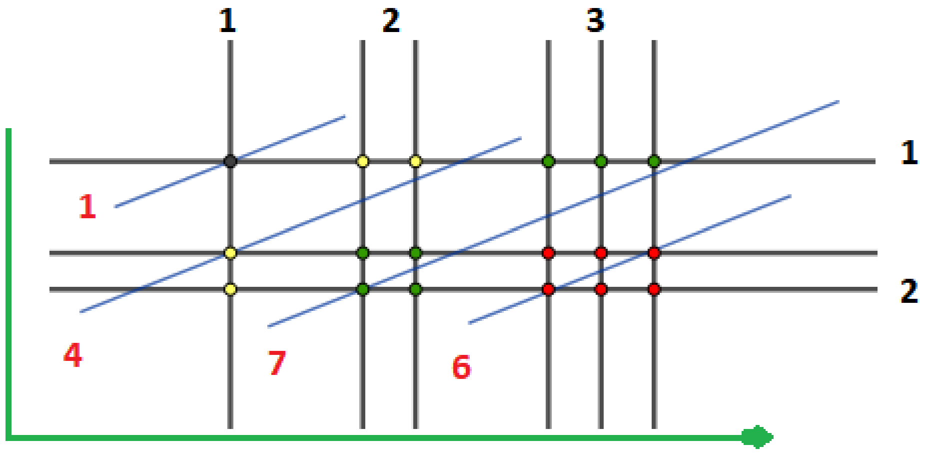
Figura 5.20: Pontos de cruzamento da quarta diagonal



Fonte: Elaborada pelos autores

Feitas todas as diagonais, o resultado da multiplicação entre os números 123 e 12 pode ser conferido na figura 5.21

Figura 5.21: Resultado da multiplicação entre 123 e 12



Fonte: Elaborada pelos autores

Assim, o produto 123×12 é igual a 1476. Em relação ao exemplo apresentado, o algoritmo funciona acertadamente pois:

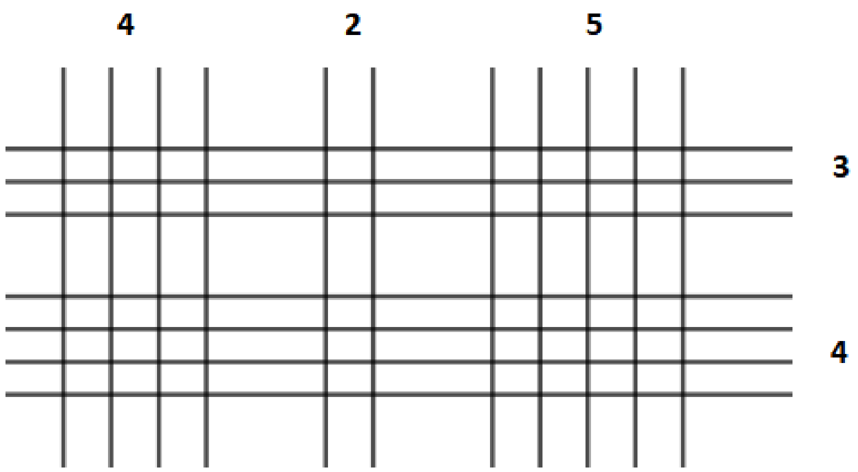
$$123 \times 12 = (1 \times 100 + 2 \times 10 + 3) \times (1 \times 10 + 2)$$

$$= 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 2 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 10 + 3 \times 2$$

$$= 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 7 \times 10 + 6 = 1476.$$

Para nosso segundo exemplo, iremos apresentar a multiplicação entre os números 425 e 34 (figura 5.22).

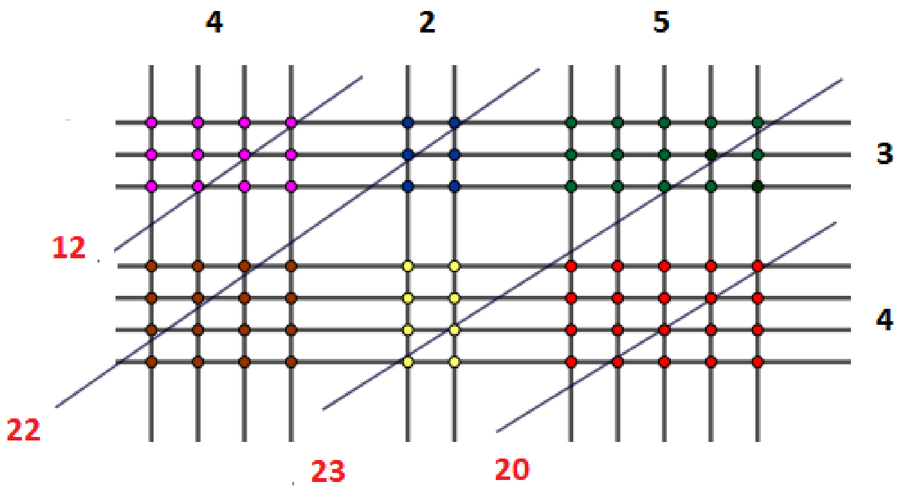
Figura 5.22: Representação do produto 425×34



Fonte: Elaborada pelos autores

Neste exemplo, percebemos que a soma dos pontos em duas diagonais excede nove unidades (figura 5.23):

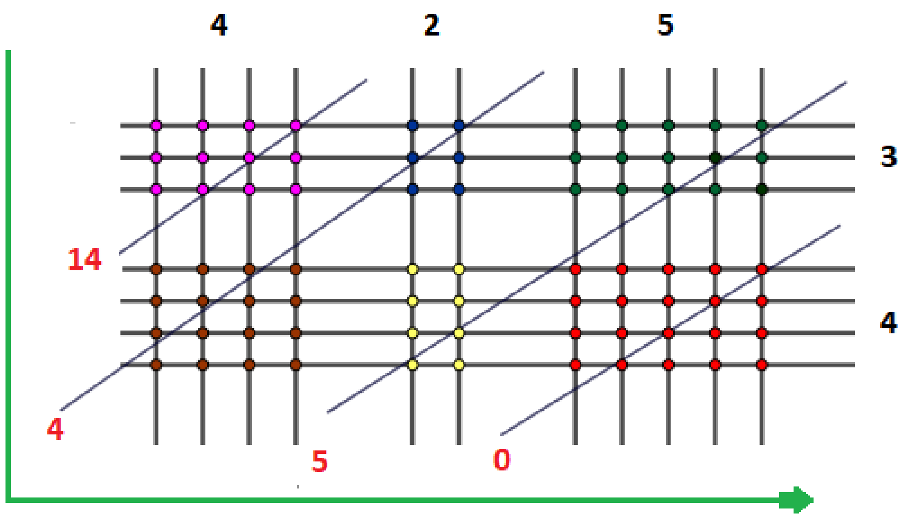
Figura 5.23: Soma dos cruzamentos de pontos



Fonte: Elaborada pelos autores

No algoritmo chinês para a multiplicação, quando a soma da diagonal ultrapassar as nove unidades, então o algarismo que representa a dezena deve ser somado a próxima diagonal, a esquerda (figura 5.24).

Figura 5.24: Resultado da multiplicação entre 425 e 34



Fonte: Elaborada pelos autores

Logo, o produto 425×24 é igual a 14450.

O algoritmo chinês de multiplicação é um simples método de contagem de pontos, entretanto, seu funcionamento é alicerçado em um processo mais elaborado e que trabalha de forma coerente o valor posicional por meio dos agrupamentos das varas de bambu.

Capítulo 6

A multiplicação Romana

O controle da Europa pelo Império Romano desde o primeiro século a.C. até o quinto século d.C. tornou a numeração romana aceita costumeiramente na forma europeia de escrever números por muitos séculos depois, mesmo até o Renascimento. Eles ainda continuam sendo usados em mostradores de relógios e para exibir datas de *copyright* de filmes e programas televisivos, por exemplo. Acrescentamos ainda que a curiosidade dos autores sobre a forma como os antigos romanos faziam sua aritmética, deu origem à pesquisa que resultou nesse trabalho de conclusão de curso do PROFMAT.

Neste capítulo dissertaremos brevemente sobre o histórico e uso do ábaco romano. Apresentaremos o sistema de numeração romano, destacando suas características e simbolismos. Por fim, destacaremos duas formas distintas de algoritmos para multiplicação com números romanos que utilizam o ábaco como ferramenta fundamental. Na escrita desse capítulo, tomamos como referência os trabalhos de Eves (2007), Ibiapina (2017), Mendes (2006) e Ifrah (2010).

6.1 O ábaco romano

Algumas culturas produziram ferramentas e métodos bastante criativos para auxiliar com os cálculos. Um dos mais conhecidos é o ábaco, desenvolvido por volta de 3000 a.C. e que pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânico usado pelo homem [6]. O ábaco teve seu início como uma tábua ou bloco, usado na antiga Babilônia para ordenar números ou escritas, transformando-se, posteriormente, em um tabuleiro com linhas ou canais para pedras ou fichas (contadores), que ali eram colocadas valendo a relação de uma unidade simples para cada contador posto sobre o tabuleiro.

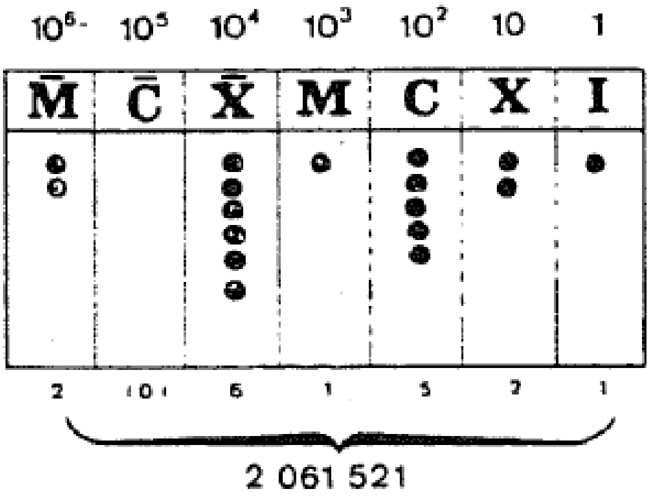
Sendo um dos instrumentos de cálculos mais usados pela humanidade até o surgimento dos algarismos indo-arábicos (tema de estudo no capítulo 7), o ábaco foi utilizado por contadores do Estado para realizar contas nacionais, como por exemplo, recenseamento da população e cobrança de impostos, e também por comerciantes comuns em seus estabelecimentos. Na figura 6.1 é mostrado um operador de ábaco de fichas:

Figura 6.1: Operador de um ábaco de fichas

Fonte: Ibiapina (2017)

Muitas formas de ábaco apareceram em diversos locais do antigo mundo. Os ábacos dos romanos antigos eram divididos em colunas enfileiradas que simbolizavam potências de dez. Iniciando da direita para a esquerda, a primeira coluna era associada às unidades, a seguinte, às dezenas, à terceira, às centenas, a quarta, ao milhar, e assim por diante [10]. A representação de um número era feita colocando-se fichas em quantidades iguais às unidades que havia em cada umas das ordens: três fichas na quarta, duas na terceira, cinco na segunda e quatro na primeira representavam o número 3254, por exemplo. Na figura 6.2 é possível observar o número 2.061.521 simbolizado no ábaco romano:

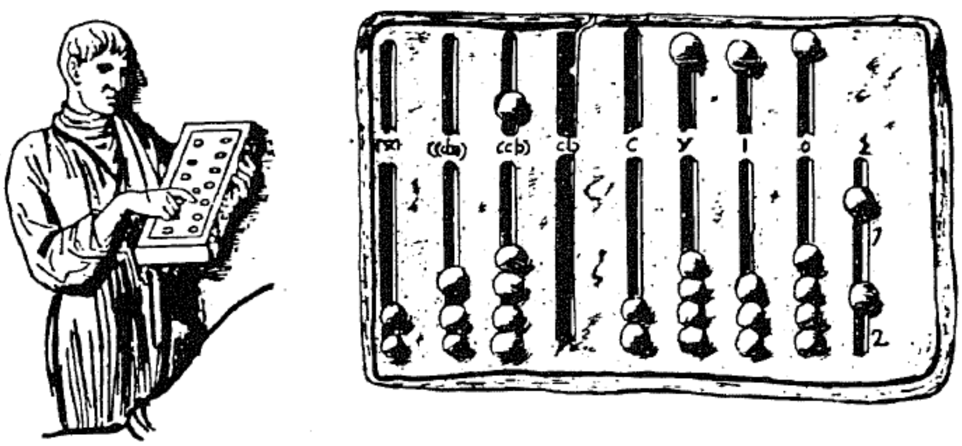
Figura 6.2: Número 2.061.521 simbolizado no ábaco romano



Fonte: Ifrah (2010)

Os romanos também possuíam ábacos portáteis (ou ábaco de bolso). Estes eram construídos por pequenas pranchas de metal, geralmente bronze, com segmentos paralelos por onde pequenas esferas deslizavam. Esses segmentos eram divididos em uma parte inferior com quatro esferas valendo, cada uma, uma unidade da ordem decimal equivalente e, outra superior, com apenas uma esfera de valor cinco vezes maior. A figura 6.3 nos apresenta o ábaco portátil romano:

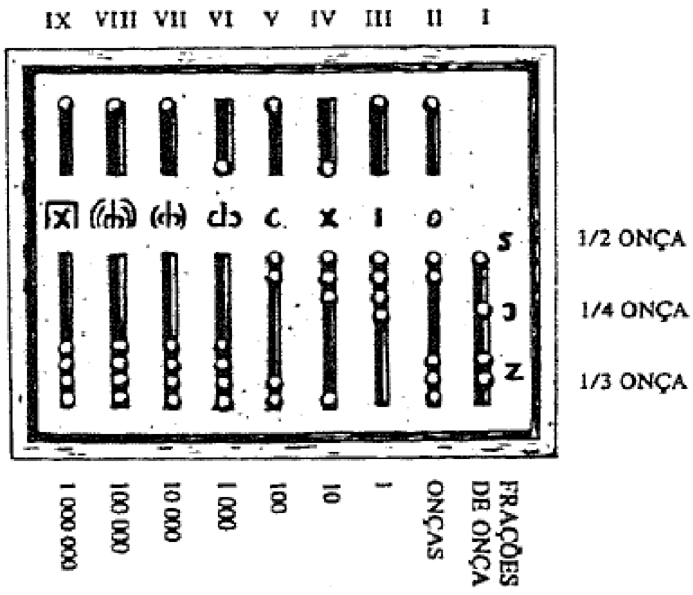
Figura 6.3: Ábaco romano de bolso



Fonte: Ifrah (2010)

Cada um dos segmentos paralelos correspondia a uma ordem decimal, com exceção dos dois primeiros à direita, reservados às frações. Iniciando da direita para a esquerda, o terceiro segmento correspondia às unidades simples, o quarto, às dezenas, o quinto segmento, às centenas e assim por diante.

Figura 6.4: As divisões do ábaco romano de bolso



Fonte: Ifrah (2010)

Assim, as representações numérica eram feitas com certa facilidade. Ifrah (2010) indica que tratava-se, então, de uma calculadora inteiramente análoga a esses contadores mecânicos que ainda têm um papel importante no Extremo Oriente e em certos países do leste, uma vez que, atendendo as regras precisas de manipulação, o ábaco portátil romano permitia aos que sabiam utilizá-lo, a realização rápida e simples de diversas operações aritméticas. Destacamos que, da forma como eram praticadas no ábaco romano tradicional ou no portátil, as operações aritméticas não possuíam muitos pontos em comum com as operações modernas de mesmo nome. A multiplicação, por exemplo, que será apresentada na seção 6.3, reduzia-se à soma de vários produtos parciais ou a uma sequência de duplicações.

6.2 O sistema de numeração romano

A numeração dos antigos romanos, assim como os sistemas de numeração remotos, era regido, principalmente, pelo princípio aditivo, uma vez que seus algarismos eram independentes uns dos outros e sua justaposição resultava, geralmente, na soma dos valores correspondentes. Os símbolos usados para representar os algarismos se destinavam apenas a fazer abreviações para anotar e reter os números, não permitindo a realização de operações aritméticas. É por isto que os contadores romanos sempre recorriam a ábacos de fichas para a prática do cálculo [10].

Como conhecemos atualmente, os símbolos que representam os algarismos romanos estão representados na figura 6.5, juntamente com os valores a que correspondem:

Figura 6.5: Algarismos romanos

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Fonte: Ifrah (2010)

Podemos exemplificar o uso destes símbolos através da figura 6.6, onde é possível observar a decomposição dos números 1626 e 1959:

Figura 6.6: Representação dos números 1626 e 1959 com algarismos romanos

$$\mathrm{MDCXXVI} = 1000 + 500 + 100 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1626$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MCMLIX} &= 1000 + (1000 - 100) + 50 + (10 - 1)\\ &= 1000 + 900 + 50 + 9 = 1959\end{aligned}$$

Fonte: Mendes (2006)

No exemplo da figura 6.6 é possível verificar o uso simultâneo dos princípios aditivo e subtrativo presente no sistema de numeração romano. O princípio subtrativo, segundo o qual um símbolo para uma unidade menor colocado antes de um símbolo para uma maior significa a diferença entre as duas unidades [6], possibilitava a representação, por exemplo, dos números 4, 9, 19, 40, 90, 400 e 900, como ilustrado na figura 6.7:

Figura 6.7: Princípio subtrativo do sistema de numeração romano

IV	(= 5 − 1)	em vez de	**IIII**
IX	(= 10 − 1)	em vez de	**VIIII**
XIX	(= 10 + 10 − 1)	em vez de	**XVIIII**
XL	(= 50 − 10)	em vez de	**XXXX**
XC	(= 100 − 10)	em vez de	**LXXXX**
CD	(= 500 − 100)	em vez de	**CCCC**
CM	(= 1000 − 100)	em vez de	**DCCCC**

Fonte: Ifrah (2010)

Ainda, segundo Ifrah (2010), os antigos romanos atingiram, em poucos séculos, um elevado nível técnico, mas conservaram, durante toda a sua existência, um sistema de numeração inutilmente complicado, não operatório, e que comportava um arcaísmo de pensamento característico.

Com os sistemas aditivo e subtrativo e os sete símbolos apresentados na figura 6.5, os romanos conseguiam escrever números até o 3999, uma vez que, na formação de seus números, os símbolos podem ser repetidos, sucessivamente, até três vezes seguidas, o que permite escrever o três mil. Com os outros símbolos e os sistemas aditivo e subtrativo já mencionados, o 3999 seria escrito como $MMMCMXCIX$. Com o emprego de algumas convenções, novos números começaram a ser escritos. A primeira convenção foi a utilização de uma barra vertical sobre um dos símbolos. Essa ação tornava o valor do símbolo utilizado mil vezes maior. Três exemplos são mostrados na figura 6.8

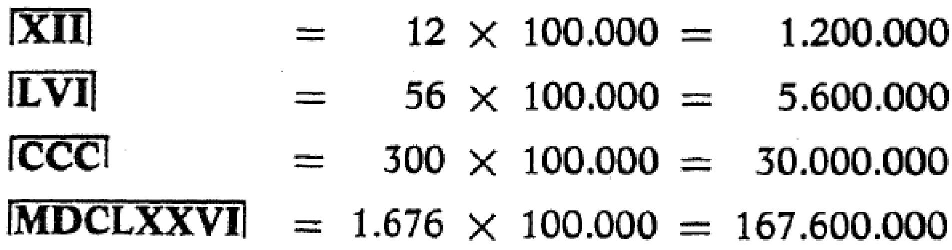
Figura 6.8: Uso de uma barra vertical nos algarismos romanos

$$\overline{\mathrm{V}} = 5 \times 1.000 = 5.000$$
$$\overline{\mathrm{X}} = 10 \times 1.000 = 10.000$$
$$\overline{\mathrm{LXXXII}} = 82 \times 1.000 = 82.000$$

Fonte: Ifrah (2010)

Outra convenção adotada permitia a escrita de números compreendidos entre 100.000 e 500.000.000 e tinha como procedimento "rodear" toda a representação numérica com um tipo de retângulo incompleto. Esta ação tornava o número "rodeado" cem mil vezes maior. Apresentamos na figura 6.9 quatro exemplos:

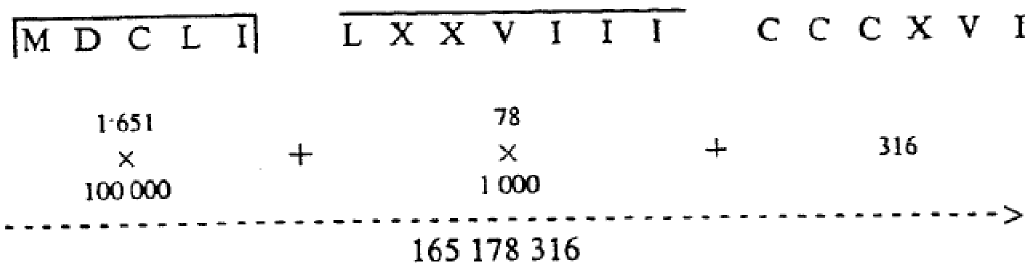
Figura 6.9: Algarismos romanos “rodeados” por um tipo de retângulo



Fonte: Ifrah (2010)

Ao combinar as duas convenções já apresentadas, os antigos romanos conseguiam representar todos os números de 1 a 500.000.000. Outro exemplo das convenções adotadas está indicado na figura 6.10:

Figura 6.10: Representação do número 165.178.316 com algarismos romanos



Fonte: Ifrah (2010)

Por fim, após apresentar o sistema de numeração romano, destacamos que a complexidade e a insuficiência da numeração romana [10], aliados às diferentes convenções utilizadas e ao sistema subtrativo, acabou sendo um obstáculo na sua adoção como um sistema universal de contagem.

6.3 A multiplicação na Antiga Roma

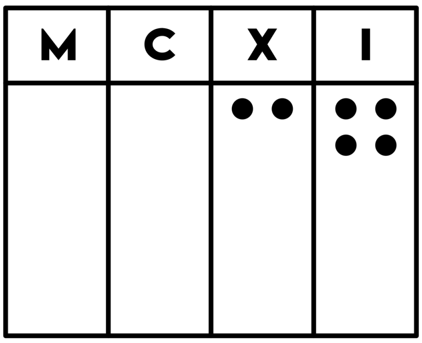
Os algoritmos pensados para as operações aritméticas estão fortemente relacionados a um sistema de numeração. Os algarismos romanos não permitiam que seus usuários fizessem cálculos da forma que hoje realizamos. Esses algarismos se destinavam a fazer abreviações para anotar e reter os números e, por esse motivo, os contadores romanos recorreram a ábacos de fichas para a prática do cálculo.

Os ábacos mais comuns foram tábuas ou pranchas divididos em diversas colunas (ou linhas) paralelas separando as diferentes ordens de numeração. Para representar números ou ainda, fazer operações aritméticas, sobre essas tábuas eram colocadas pedras ou fichas com valor de uma unidade simples, cada uma. No ábaco dos romanos, cada uma das colunas simbolizava uma das potências de 10. Da direita para a esquerda, a primeira coluna era associada às unidades simples; a seguinte, às dezenas; a terceira coluna, às centenas, e assim, sucessivamente.

A multiplicação no ábaco romano era realizada de duas formas diferentes. O primeiro algoritmo utilizava o processo de duplicações sucessivas e o segundo reduzia-se a soma de vários produtos parciais [9]. Apresentaremos, a seguir, os dois algoritmos de multiplicação relacionados ao ábaco romano, destacando suas particularidades e estruturas. Iniciaremos com o algoritmo que faz uso de uma sequência de duplicações para apresentar a multiplicação de 24 por 36:

Começamos representando o multiplicando 24 no ábaco (figura 6.11)

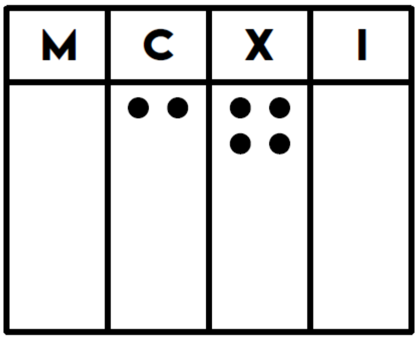
Figura 6.11: Número 24 representado no ábaco



Fonte: Elaborada pelos autores

O Multiplicador 36 pode ser escrito como $30+6$, assim dividiremos a multiplicação em duas partes: uma com o 30 e outra com o 6. Na figura 6.12 observamos o deslocamento de uma coluna à esquerda da representação do número 24. Temos assim 24×10:

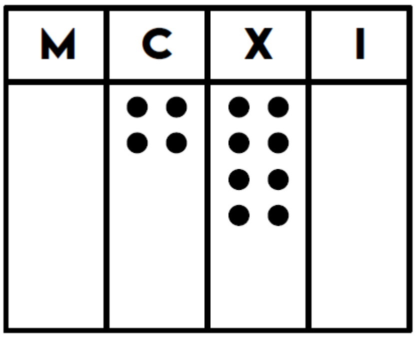
Figura 6.12: Multiplicação de 24 por 10



Fonte: Elaborada pelos autores

Agora é realizado o primeiro dobramento (figura 6.13):

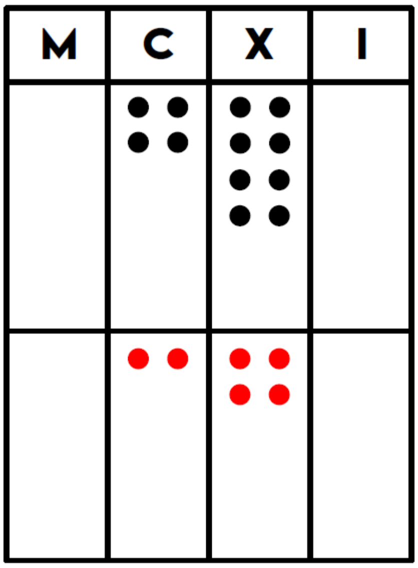
Figura 6.13: Dobramento do número 240



Fonte: Elaborada pelos autores

Até o momento, temos o produto $24 \times 10 \times 2 = 24 \times 20$. Se outro dobramento fosse realizado, passaríamos a ter o produto $24 \times 20 \times 2 = 24 \times 40$, e o teríamos o multiplicado maior que 36, o que não é o que desejamos. Assim, ao resultado obtido na figura 6.13, somaremos o primeiro deslocamento à esquerda feito (figura 6.12):

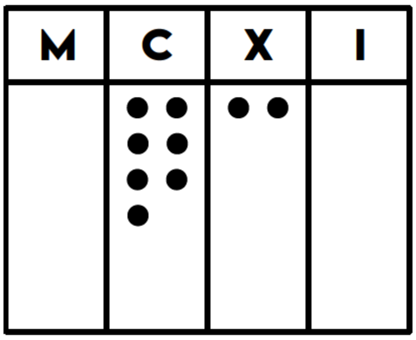
Figura 6.14: Soma do número 480 com o 240



Fonte: Elaborada pelos autores

O resultado da soma é apresentado na figura 6.15:

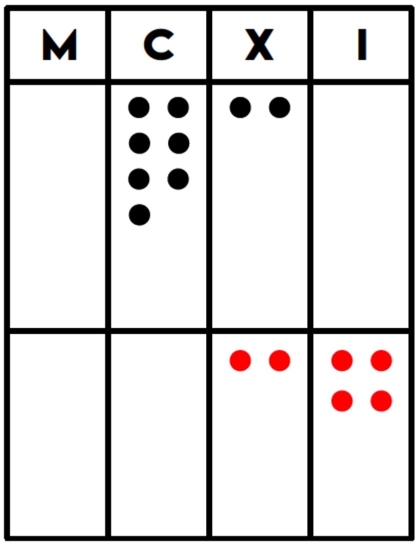
Figura 6.15: Resultado da soma entre 480 e 240



Fonte: Elaborada pelos autores

O valor de 720 apresentado na figura 6.15 deve ser entendido como $24 \times 20 + 24 \times 10 = 24 \times (20 + 10) = 24 \times 30$, o que conclui a primeira parte da multiplicação. Passaremos à segunda etapa, ou seja, a multiplicação pelo número 6. Começamos acrescentando, abaixo do resultado já alcançado (figura 6.15), uma nova linha, de onde daremos continuidade ao algoritmo (figura 6.16).

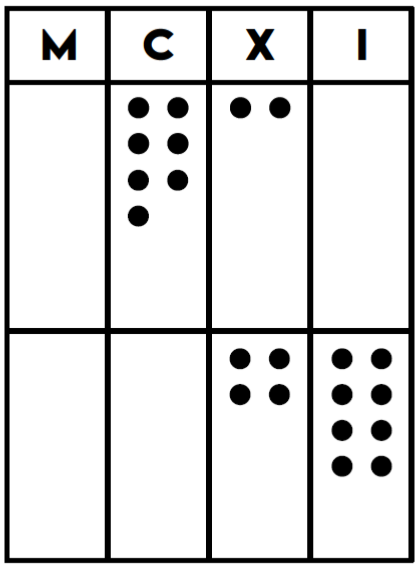
Figura 6.16: Nova linha representando o número 24



Fonte: Elaborada pelos autores

Partindo da nova situação apresentada na figura 6.16, faremos o primeiro dobramento, ficando com o resultado que indicamos na figura

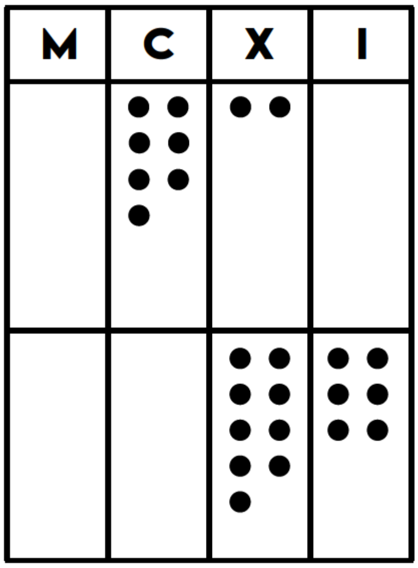
Figura 6.17: Dobramento do número 24



Fonte: Elaborada pelos autores

Agora temos o produto $24 \times 30 + 24 \times 2 = 24 \times (30 + 2) = 24 \times 32$. O multiplicador 32 ainda é menor que o desejado, o que permite fazer outro dobramento (figura 6.18):

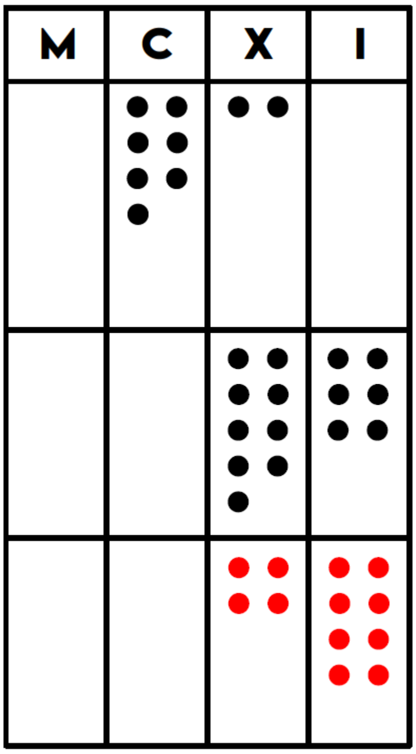
Figura 6.18: Dobramento do número 48



Fonte: Elaborada pelos autores

Com o dobramento apresentado na figura 6.18, estamos na seguinte etapa da multiplicação: $24 \times 30 + 24 \times 2 \times 2 = 24 \times 30 + 24 \times 4 = 24 \times (30 + 4) = 24 \times 34$. Não podemos fazer outro dobramento, uma vez que $2 \times 2 \times 2 = 8$ e ficaríamos com 24×38, assim, devemos acrescentar, ao resultado já obtido, duas parcelas do multiplicando 24 através de uma nova linha no ábaco, como indicado na figura 6.19:

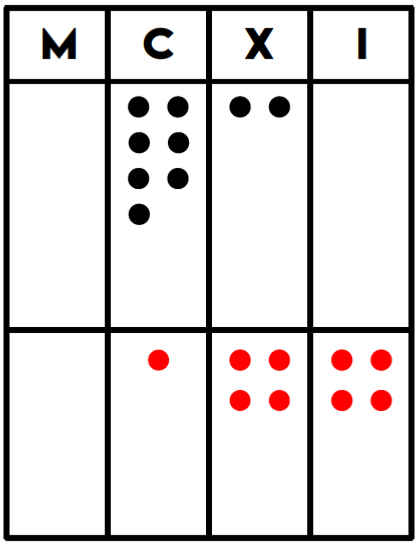
Figura 6.19: Soma do número 96 com o 48



Fonte: Elaborada pelos autores

A escolha da parcela 48 foi devido ao fato de precisarmos de mais duas unidades no multiplicador 34, conseguido na última etapa realizada do algoritmo (figura 6.18). Dessa forma, ao multiplicarmos 24 por essas duas unidades, chegamos ao valor de 48 usado na figura 6.19. O resultado da adição é apresentado na figura 6.20:

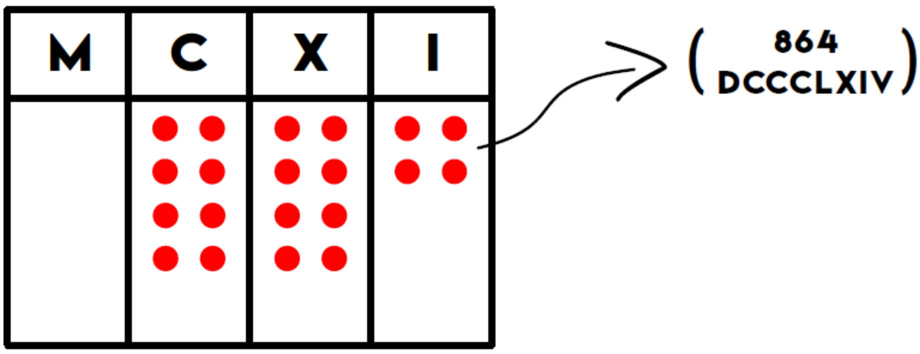
Figura 6.20: Resultado da soma entre 96 e 48



Fonte: Elaborada pelos autores

Por fim, para obter o resultado da multiplicação entre os números 24 e 36, devemos somar as "fichas" da linha de cima com as "fichas" da linha de baixo do ábaco representado na figura 6.20. A soma $720+144=864$ está indicada na figura 6.21:

Figura 6.21: Resultado da multiplicação entre 24 e 36

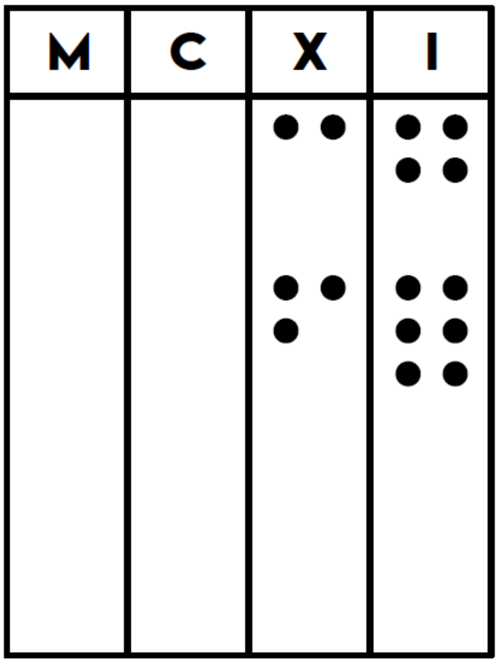


Fonte: Elaborada pelos autores

O segundo algoritmo de multiplicação é também conhecido pelo nome de *multiplicação pelas ordens numéricas mais altas*. O procedimento é muito semelhante ao método que utilizamos para fazer multiplicação atualmente, porém começa-se pelas ordens numéricas mais altas. Neste método, as fichas em cada parte de uma coluna de um fator são multiplicadas pelas fichas em cada parte de cada coluna do outro fator [9]. Vejamos, então, a multiplicação de 24 por 36 segundo esse algoritmo.

Iniciamos com a representação dos números 24 e 36 no ábaco (figura 6.22):

Figura 6.22: Multiplicação entre 24 e 36

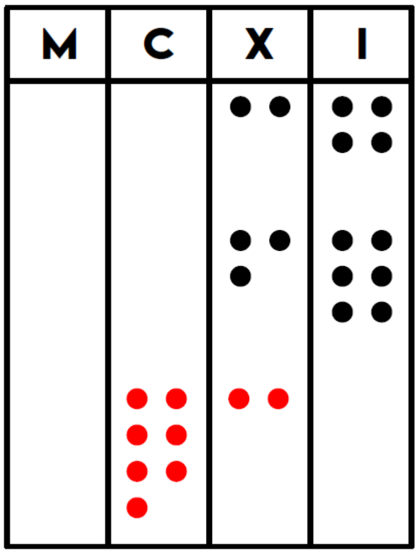


Fonte: Elaborada pelos autores

Pelo fato da multiplicação ter início pelas ordens mais altas, é necessário definir uma regra que determine onde são colocados os *produtos parciais*. A regra utilizada por este algoritmo indica que, *ao multiplicarmos as fichas de uma coluna a pelas fichas de uma coluna b, as unidades deste produto serão colocadas na coluna* $a+b-1$, onde as colunas são numeradas iniciando-se pelas unidades simples. Esta é válida para este tipo de multiplicação pois, ao tomar um algarismos localizado em uma coluna k, o seu valor relativo tem um total de $k-1$ zeros.

Com a regra dos produtos parciais estabelecida, o algoritmo é iniciado multiplicando a coluna de ordem maior do fator superior pela ordem maior do fator inferior, ficando os produtos parciais registrados na parte mais abaixo do ábaco. Assim, devemos multiplicar as duas fichas na coluna das dezenas do multiplicador pelas três fichas da coluna das dezenas do multiplicando, obtendo $2 \times 3 = 6$. As seis fichas devem ficar na coluna $2+2-1=3$, coluna das centenas. Continuando com o processo, multiplicamos as mesmas duas fichas da coluna das dezenas do multiplicador pelas seis fichas da coluna das unidades do segundo fator, chegando ao valor de $2 \times 6 = 12$. Uma vez que o 12 pode ser decomposto como uma dezena mais duas unidades, essa primeira etapa do algoritmo nos apresenta o resultado indicado na figura 6.23:

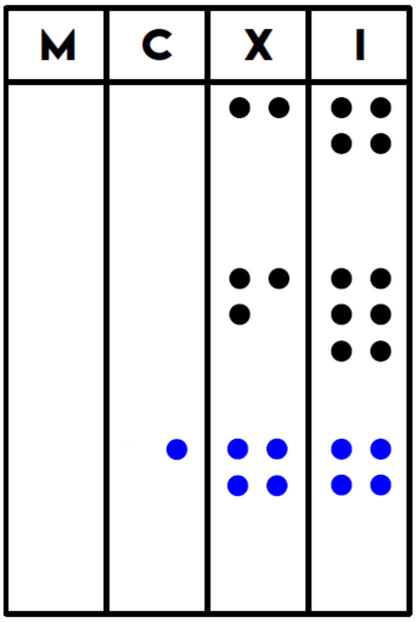
Figura 6.23: Primeira etapa do produto 24×36



Fonte: Elaborada pelos autores

O procedimento descrito é repetido para as quatro fichas da coluna das unidades simples do multiplicador. Os produtos parciais estão apresentados na figura 6.24:

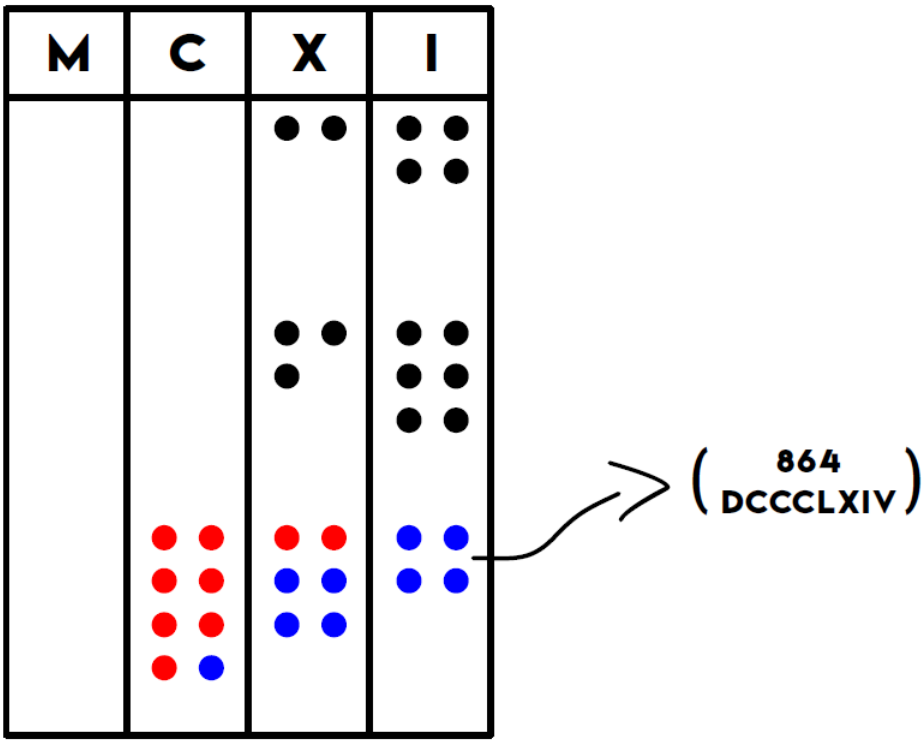
Figura 6.24: Segunda etapa do produto 24×36



Fonte: Elaborada pelos autores

Para finalizar a multiplicação, devemos somar os resultados obtidos na primeira e segunda etapas. Esta soma é indicada na figura 6.25:

Figura 6.25: Resultado da multiplicação 24×36



Fonte: Elaborada pelos autores

Este segundo algoritmo afasta a estrutura iterativa do ábaco e aproxima-se da estrutura posicional implícita no instrumento. Percebe-se que existe um aumento nos cálculos mentais e a memorização da tabuada é necessária. Além disso, o processo é parecido com o método atual de multiplicação, baseado na notação posicional [7].

Capítulo 7

A multiplicação hindu e Aritmética de Treviso

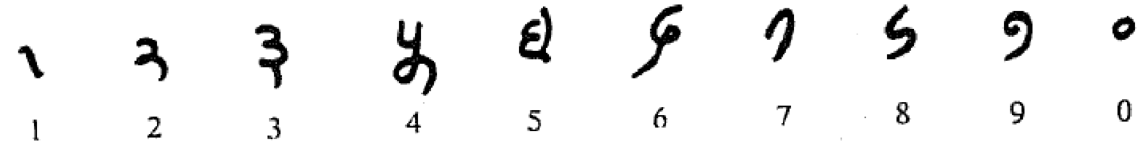
A civilização hindu alcançou um sistema de numeração completo e consistente. Os símbolos gráficos utilizados conjuravam visualmente apenas o número de unidades que representavam e o valor de cada algarismo passou a variar de acordo com o lugar ocupado na representação numérica e, com grande importância para as culturas que passaram a fazer uso deste sistema, criou-se um símbolo para o zero, substituindo o vazio em unidades faltantes. Conseguiu-se finalmente com o sistema de numeração hindu alcançar um nível de perfeição que durante muitos séculos se procurou atingir [2]. Este sistema era posicional decimal.

Neste capítulo iremos dissertar sobre a chegada dos algarismos hindus aos países árabes e como estes passaram a ser os *algarismos indo-arábicos*. Também descreveremos a chegada desses novos números à Europa. Em seguida, ainda sobre a influência do sistema hindu de numeração, apresentaremos dois algoritmos de multiplicação desta civilização para, em seguida, mostrar métodos de se multiplicar em uma obra datada da época do Renascimento. Para a construção desse texto, tomamos como referência os trabalhos de Ifrah (2010), Almeida (2017), Boyer (2012), Eves (2007) e Swetz (1987).

7.1 Os algarismos indo-arábicos e sua introdução na Europa

Quando os números hindus e seus métodos de cálculo chegam à Arábia, seus algarismos foram, inicialmente, usados como cópias do modelo originado na Índia. Estes algarismos estão indicados na figura 7.1 a seguir:

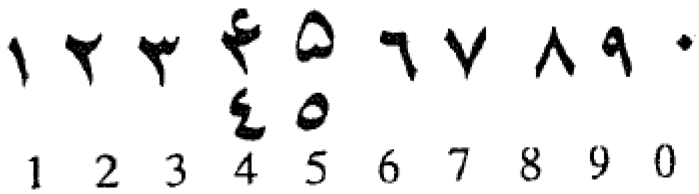
Figura 7.1: Algarismos originados na Índia



Fonte: Ifrah (2010)

A evolução destes algarismos foi natural, uma vez que era preciso que suas formas fossem adaptadas ao estilo de escrita dos países árabes do Oriente. Assim, a grafia hindu, moderadamente modificada, foi propagada nas regiões árabes do Oriente (figura 7.2).

Figura 7.2: Grafia dos "algarismos hindu"

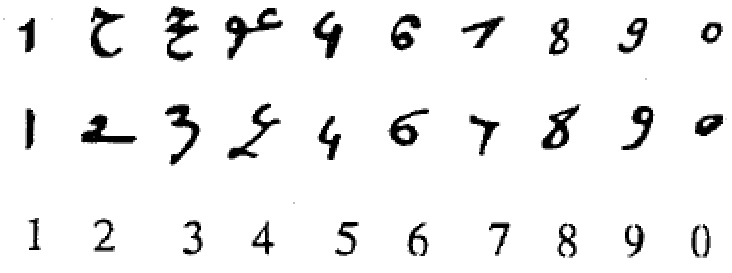


Fonte: Ifrah (2010)

Estes algarismos ainda são empregados nos países do golfo Pérsico, assim como no Egito, na Turquia, na Síria, no Afeganistão, no Paquistão e em várias províncias da Índia muçulmana. Há muito tempo os árabes atribuem a estes algarismos uma denominação que não deixa nenhuma dúvida sobre sua origem: os "algarismos hindi" [10], contudo, a origem dos nossos algarismos arábicos são originados dos árabes do norte da África e parte da Espanha, os árabes ocidentais.

As diferenças entre as grafias dos algarismos pelos árabes orientais e os árabes ocidentais, sem dúvida, estão relacionadas aos costumes dos escribas e dos copistas do lado ocidental. Estes desenvolveram um caráter gráfico bastante particular que ficou conhecido como a "escrita magrebina". Esse tipo de grafia influenciou na escrita dos algarismos hindus nessa região, determinando uma forma diferente de escrevê-los. Na figura 7.3 ilustramos estes algarismos:

Figura 7.3: Grafia dos algarismos na "escrita magrebina"



Fonte: Ifrah (2010)

Foi esta grafia, proveniente dos árabes ocidentais, que chegou aos cristãos da Europa medieval a começar pela Espanha, antes de dar origem aos algarismos que hoje chamamos de *algarismos indo-arábicos*. No momento que estiveram diante do sistema de numeração e dos processos de cálculos hindus, os árabes souberam reconhecer suas vantagens e méritos, passando a adotá-lo. Os europeus, ao contrário, estavam presos a seus sistemas obsoletos e hesitaram perante a novidade que perdurou por alguns séculos, até que os algarismos pensados pelos hindus e aprimorados na grafia e divulgados pelos árabes fossem aceitos em definitivo. Foi através de um monge francês, por volta do ano 1000, que esse cenário de apego aos antigos sistemas começa a ruir.

O monge em questão é Gerbert d'Aurillac que, no ano de 999, ficou muito mais conhecido ao se tornar papa sob o nome de Silvestre II. Curioso e ávido por conhecimento, estudou Matemática e Astronomia, possivelmente na Espanha Cristã, onde chegaria a conhecer os algarismos chegados da Arábia. Voltando à França, assume a direção da escola diocesana. Seus ensinamentos exerceram uma influência preponderante sobre as escolas de seu tempo e suscitaram de novo no Ocidente o gosto pela Matemática. É a ele que se deve a origem da primeira introdução dos algarismos arábicos na nossa cultura [10]. Reforçando esta premissa, Boyer (2012) afirma que, mais interessante que suas obras expositórias sobre aritmética e geometria, é o fato de Gerbert ser o primeiro a ter ensinado, na Europa, os numerais indo-arábicos.

7.2 Algoritmos de multiplicação Hindu

Na seção 7.1 destacamos como os algarismos de origem na Índia chegaram aos povos árabes para, em seguida, se espalhar pela Europa. Agora mostraremos como os hindus realizavam multiplicações, tema central de nosso trabalho.

Assim como outros povos antigos, os calculadores hindus realizavam, inicialmente, seus cálculos aritméticos em ábacos de colunas, traçados sobre a areia fina. A coluna mais à direita era associada às unidades simples, a coluna seguinte, às dezenas e assim por diante.

A diferença, neste caso, era que em vez de usar fichas ou pedras, os números sendo representados através dos noves primeiros algarismos de sua notação numérica mais arcaico. Os números eram escritos sobre a areia, nas colunas, de acordo com as necessidades dos cálculos, sendo que se apagava a cada vez os algorismos que eram transportados [10], ficando vazia uma coluna quando faltava uma unidade em determinada ordem.

O primeiro algoritmo que será apresentado é uma das formas primitivas para se multiplicar dois números naturais. Ilustraremos todo o procedimento ao realizar a multiplicação entre os números 325 e 28. Na areia é desenhado o ábaco de modo que quatro colunas fiquem determinadas e, no interior delas, são escritos os números 325 e 28, conforme é mostrado na figura 7.4. A disposição do multiplicador é feita de forma que o seu algarismo de menor ordem (o oito) fique na mesma coluna que o algarismo de maior ordem do multiplicando (o três), mas em um posicionamento mais abaixo.

Figura 7.4: Multiplicação Hindu

	3	2	5
2	8		

Fonte: Elaborada pelos autores

O algoritmo tem início fazendo a multiplicação do 3 da linha de cima pela 2 da linha de baixo. O 6, resultado deste produto, é colocado à esquerda no 3, também na linha de cima, como pode ser observado na figura 7.5:

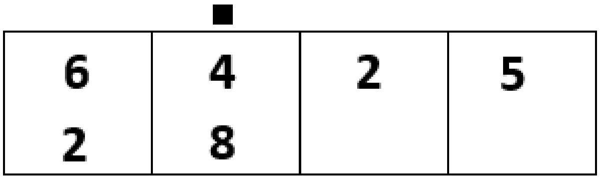
Figura 7.5: Produto parcial: $3 \times 2 = 6$

6	3	2	5
2	8		

Fonte: Elaborada pelos autores

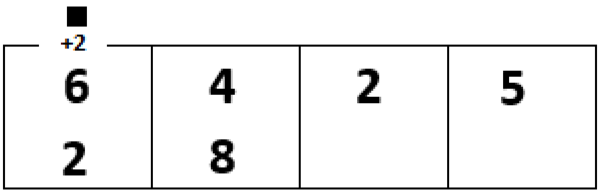
A multiplicação segue com o produto entre o 3, da linha de cima, pelo 8, de baixo. Uma vez que o resultado é 24, deve-se apagar o algarismo 3 e, em seu lugar, colocar o 4 (número de unidades do 24) (figura 7.6). O 2, algarismo das dezenas do 24, é somado ao 6, obtido anteriormente. A figura 7.7 destaca essa passagem.

Figura 7.6: Produto parcial: $3 \times 8 = 24$



Fonte: Elaborada pelos autores

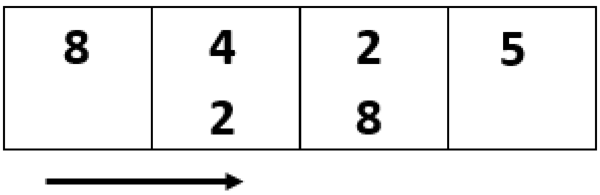
Figura 7.7: Acréscimo de 2 unidades após produto parcial



Fonte: Elaborada pelos autores

Realizando a soma $2 + 6 = 8$, a primeira etapa do algoritmo é concluída, uma vez que o algarismo 3 da linha de cima foi multiplicado por todos os números do multiplicador 28. A segunda etapa começa com o deslocamento do multiplicando para a direita, em uma casa (figura 7.8).

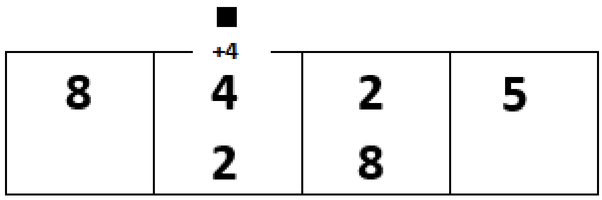
Figura 7.8: Início da segunda etapa do produto 325×28



Fonte: Elaborada pelos autores

Feito tal deslocamento, o número 2 da linha de cima é multiplicado pelo 2, da linha de baixo e o 4, valor do produto, é adicionado ao número que se encontra à esquerda do 2 da linha de cima. Este estágio do algoritmo está representado na figura 7.9:

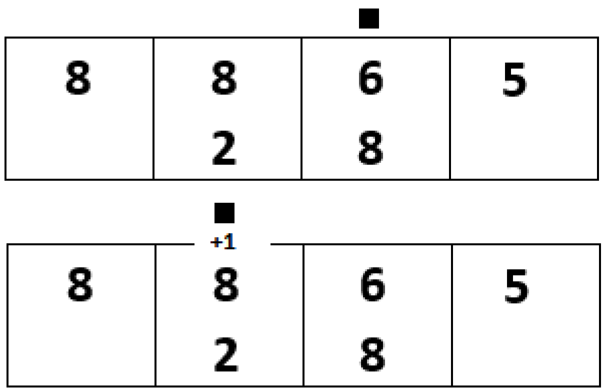
Figura 7.9: Produto parcial: $2 \times 2 = 4$



Fonte: Elaborada pelos autores

Agora, o produto parcial deve ser feito com o 2, da linha de cima, com o 8, da linha de baixo, obtendo 16. Então o 2 será substituído pelo número 6 e o 1, somado ao 8 que está na coluna à esquerda (figura 7.10).

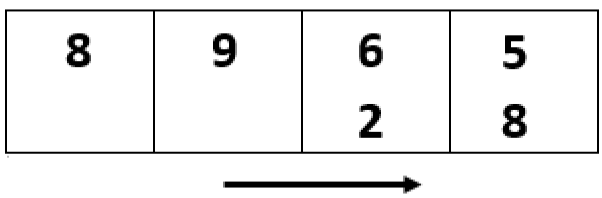
Figura 7.10: Produto parcial: $2 \times 8 = 16$



Fonte: Elaborada pelos autores

Este foi o último produto parcial da segunda etapa, uma vez que os produtos 2×2 e 2×8 foram feitos. Iniciamos, então, a terceira etapa. O procedimento é idêntico ao começo da etapa anterior: deslocar o multiplicando 28 em uma casa, para a direita, o qual está indicado na figura 7.11:

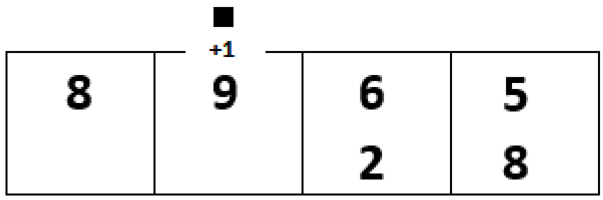
Figura 7.11: Início da terceira etapa do produto 325×28



Fonte: Elaborada pelos autores

Neste momento, os produtos parciais que devem ser determinados são 5×2 e 5×8. A primeira resposta é 10 (uma dezena), que não tem unidade. Logo, o número 6, na coluna à esquerda do 5 da linha de cima, não deve ser alterado e uma unidade precisa ser adicionada ao 9 da mesma linha (figura 7.12).

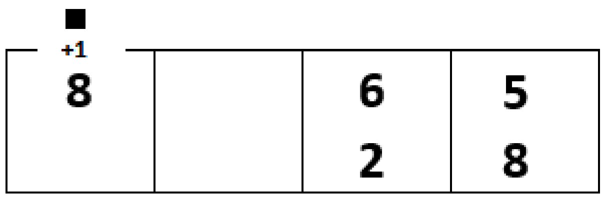
Figura 7.12: Produto parcial: $5 \times 2 = 10$



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao realizar a soma descrita, encontramos o valor 10, o que faz com que zero unidades substitua o 9 e uma unidade seja somada ao número 8, na coluna à esquerda. Na figura 7.13 é possível observar esta passagem do algoritmo.

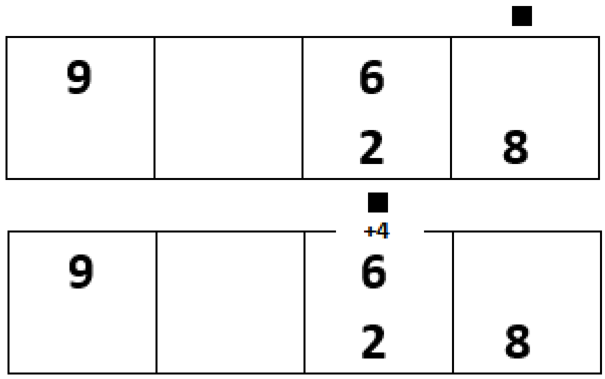
Figura 7.13: Produto parcial: $5 \times 2 = 10$



Fonte: Elaborada pelos autores

O último produto parcial será o 5×8. Uma vez que o resultado deste produto é 40, devemos apagar o 5 da linha de cima, deixando sua posição vazia, e somar 4 unidades ao 6, número da coluna à esquerda.

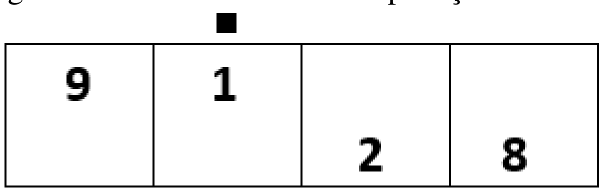
Figura 7.14: Produto parcial: $5 \times 8 = 40$



Fonte: Elaborada pelos autores

Como o resultado é 10, o número 6 é apagado e uma unidade é acrescentada à casa imediatamente à esquerda, nesse momento, vazia. O resultado final da multiplicação 325×28 está determinado e representado na figura 7.15. As casas vazias, com a notação numérica atual, são preenchidas com zeros. Dessa forma, temos $325 \times 28 = 9100$.

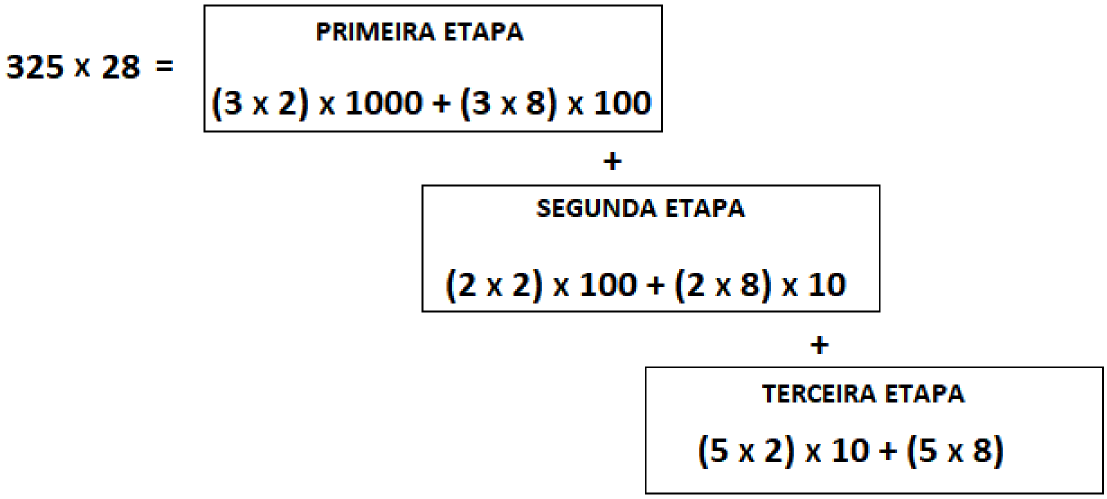
Figura 7.15: Resultado da multiplicação: 325×28



Fonte: Elaborada pelos autores

O princípio deste algoritmo consiste em realizar tantas etapas quantas ordens existirem no multiplicando, correspondendo cada uma dessas etapas aos produtos de um número deste último pelos números sucessivos do multiplicador. Em nosso exemplo, a justificativa está apresentada na figura 7.16 a seguir:

Figura 7.16: Justificativa do algoritmo de multiplicação hindu



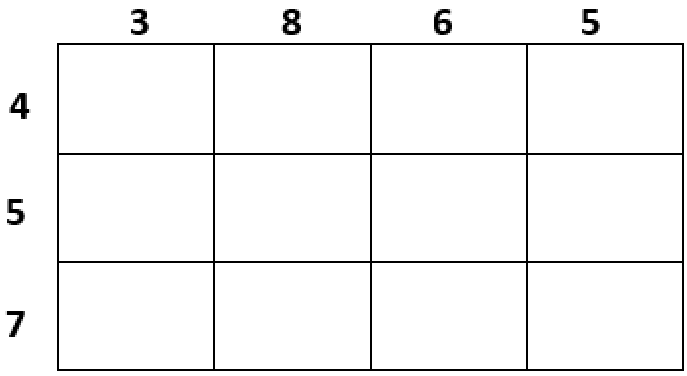
Fonte: Elaborada pelos autores

Este algoritmo é bastante longo e exigia um treinamento constante, além de uma atenção fixa a cada um dos produtos parciais e etapas. Ao liberar definitivamente seus algarismos significativos das colunas do ábaco de areia e ao inventar um símbolo para o zero, os sábios da Índia conduziram uma série de importantes progressos. Especialistas nesta arte, eles simplificaram consideravelmente suas regras, aperfeiçoando-as continuamente, antes de lançar o que viria a constituir, alguns séculos mais tarde, as próprias bases de nosso cálculo escrito atual [10].

Um exemplo desta evolução é a forma como eram feitas as multiplicações pelos matemáticos hindus, já no século VI a.D. Apresentaremos, então, o segundo algoritmo hindu, conhecido sob vários nomes: multiplicação em reticulado, multiplicação em *gelosia*, em célula, em grade ou quadrilateral [5]. Mais tarde, esse algoritmo foi disseminado entre os árabes e, por meio destes, aos europeus, aparecendo nas primeiras obras impressas sobre aritmética, como a Aritmética de Treviso, tema da seção 7.3. No algoritmo da gelosia, a disposição inicial do multiplicando e do multiplicador é particular ao método. Ilustraremos o seu funcionamento com o produto entre os números 3865 e 754.

Uma vez que o multiplicando é formado por quatro algarismos e o multiplicador por três, uma grade composta por quatro colunas e três linhas. Na parte superior do quadro, da esquerda para a direita, escrevemos os algarismos 3, 8, 6 e 5 do multiplicando; à esquerda, são colocados os algarismos 7, 5 e 4, do multiplicador, agora no sentido de baixo para cima, conforme mostrado na figura 7.17:

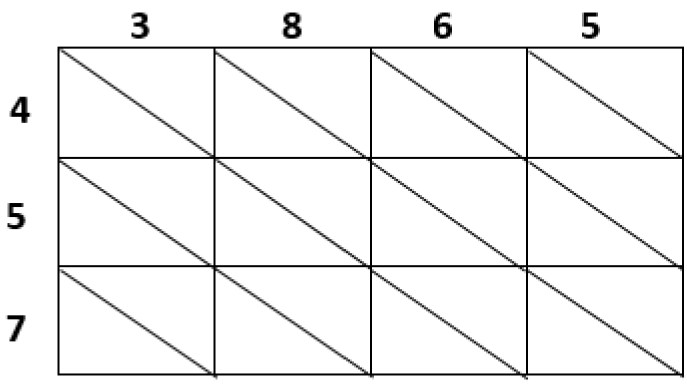
Figura 7.17: Disposição inicial do algoritmo gelosia



Fonte: Elaborada pelos autores

Uma vez construída a grade de quadriculados, dividiremos cada um dos quadrados em duas meias casas por meio de uma diagonal; esta deve ligar o vértice superior esquerdo ao vértice inferior direito de cada um dos quadrados da grade, conforme indica a figura 7.18:

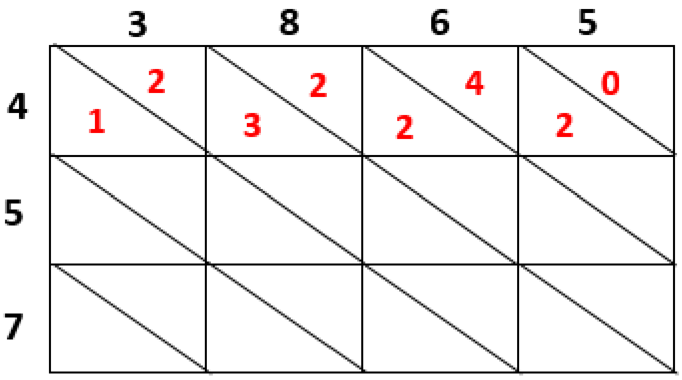
Figura 7.18: Divisão da grade no algoritmo da gelosia



Fonte: Elaborada pelos autores

O próximo passo é realizar os produtos parciais, determinando os resultados das multiplicações entre o número colocado à esquerda de uma linha e o número de cada uma das colunas correspondentes a essa linha. Começamos com a linha que tem o número 4 localizado à esquerda, escrevendo o algarismo das unidades na meia casa superior e o algarismo das dezenas na meia casa inferior. Estes produtos parciais estão descritos na figura 7.19:

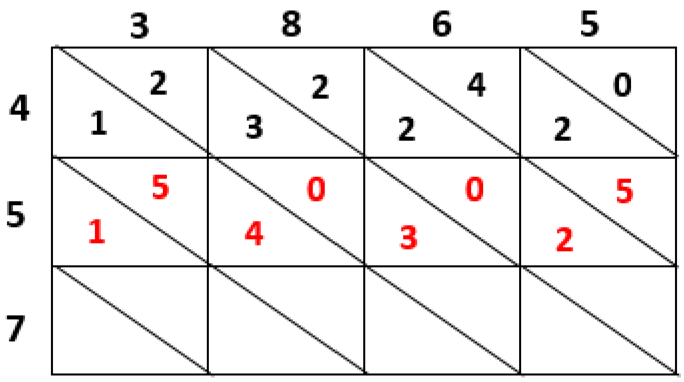
Figura 7.19: Produtos parciais da linha com 4 à esquerda



Fonte: Elaborada pelos autores

O algoritmo continua realizando produtos parciais, agora com a multiplicação entre o 5, número à esquerda da segunda linha, e os números associados a cada uma das colunas dessa linha. Representamos os resultados, já alocados em suas meias casas, na figura 7.20.

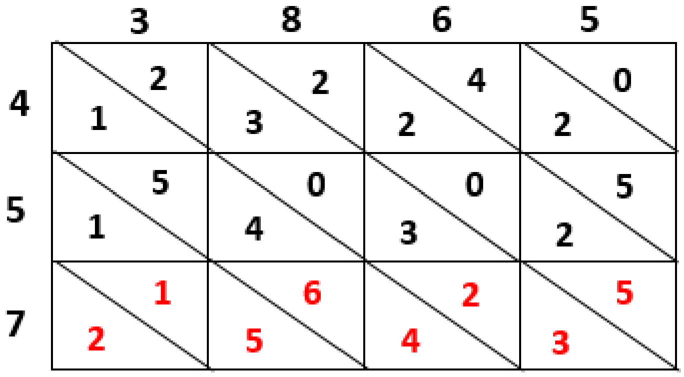
Figura 7.20: Produtos parciais da linha com 5 à esquerda



Fonte: Elaborada pelos autores

Os últimos produtos parciais são realizados com o 7, número à esquerda da linha mais abaixo, e os valores correspondentes a cada uma das colunas dessa linha. O resultados de cada uma das multiplicações estão indicados na figura 7.21 a seguir:

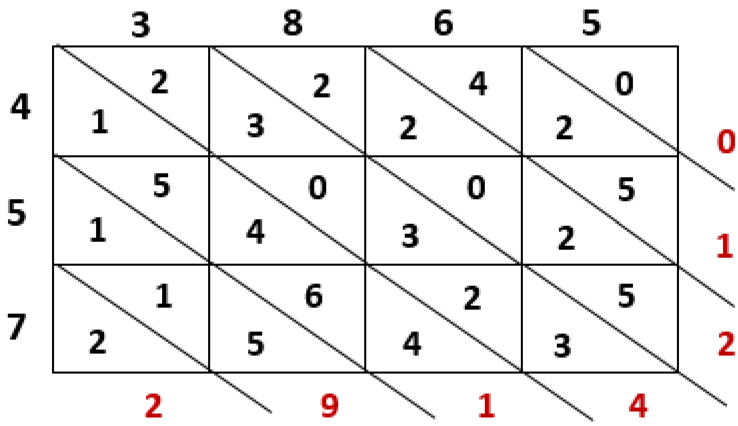
Figura 7.21: Produtos parciais da linha com 7 à esquerda



Fonte: Elaborada pelos autores

Externamente à grade retangular, adicionamos os algarismos de cada uma das diagonais, iniciando pelo zero, localizado na diagonal mais acima e à direita. Quando a soma exceder 9 unidades, escrevemos o valor referente às unidades e faremos o transporte do valor das dezenas para a próxima diagonal à esquerda. Esta etapa do algoritmo é reproduzida na figura 7.22:

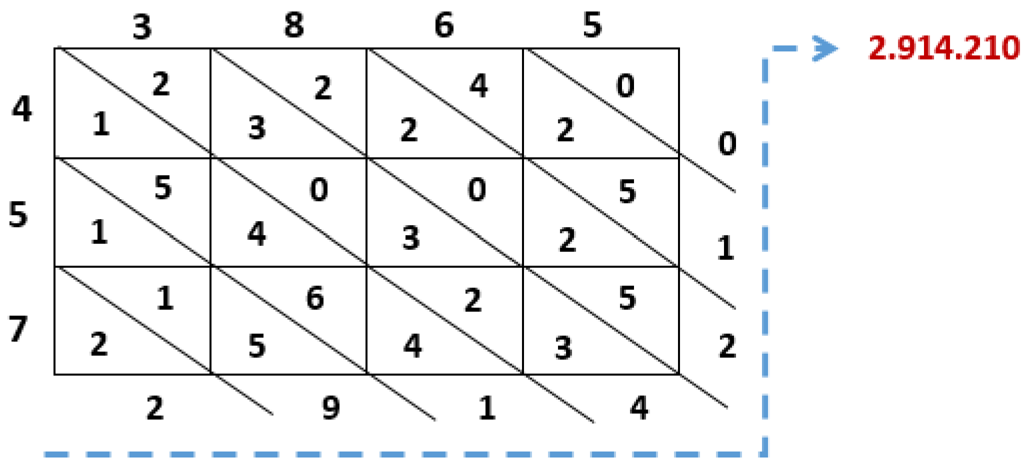
Figura 7.22: Soma dos algarismos das diagonais



Fonte: Elaborada pelos autores

O resultado da multiplicação é obtido através da leitura, da esquerda para a direita, dos números determinados através das somas dos valores de cada uma das diagonais. Em nosso exemplo, $3865 \times 754 = 2.914.210$:

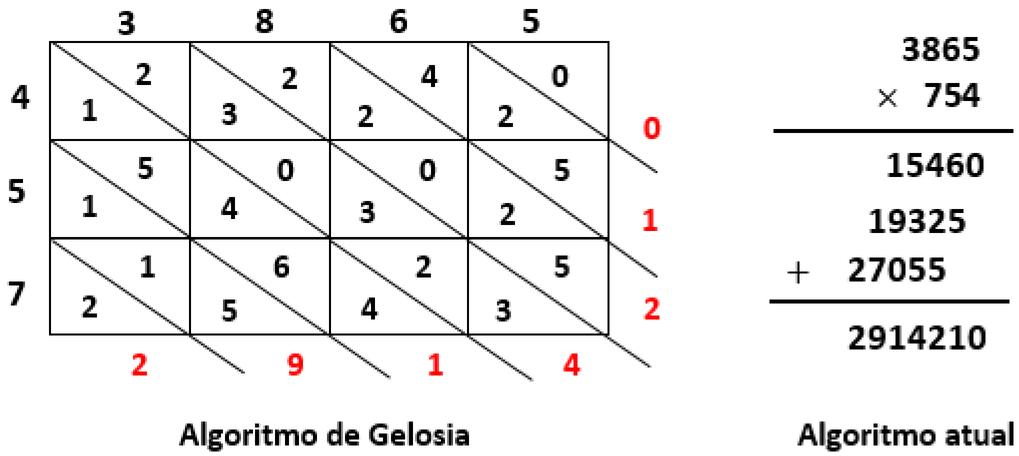
Figura 7.23: Determinação do produto 3865×754



Fonte: Elaborada pelos autores

A justificativa para o funcionamento do algoritmo da gelosia resulta da decomposição dos fatores a serem multiplicados e somados. No exemplo apresentado, calculamos o produto entre 3865 e 754. A figura 7.24 traz, lado a lado, este produto determinado por dois procedimentos: o método da gelosia e pelo atual método de multiplicação:

Figura 7.24: Comparação entre o algoritmo da gelosia e o algoritmo atual



Fonte: Elaborada pelos autores

Realizando a decomposição da multiplicação efetuada pelo algoritmo atual, chegamos a disposição indicada na figura 7.25:

Figura 7.25: Decomposição do produto 3865×754

$$
\begin{array}{r}
5\times4=20\\
6\times4\times10=240\\
8\times4\times100=3200\\
3\times4\times1000=12000\\
5\times5\times10=250\\
6\times5\times100=3000\\
8\times5\times1000=40000\\
3\times5\times10000=150000\\
5\times7\times100=3500\\
6\times7\times1000=42000\\
8\times7\times10000=560000\\
3\times7\times100000=2100000 \quad +\\
\hline
2.914.210
\end{array}
$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Cada multiplicação corresponde a um dos quadrados da tabela, o que indica que o método é válido para qualquer multiplicação que se queira fazer, pois os algarismos correspondentes a cada ordem ficarão em um quadrado, conforme o exemplo realizado.

Em relação à forma como hoje é feita a multiplicação entre dois números naturais, este procedimento pode parecer longo, mas já era extraordinário para a época, além de apresentar a vantagem de agrupar todo o trabalho de transporte para o final da operação, enquanto em nosso método atual este trabalho é feito de modo contínuo [10].

7.3 A multiplicação na Aritmética de Treviso

O interesse pela educação e o crescimento da atividade comercial à época do Renascimento faz surgir muitos textos populares sobre aritmética. Três centenas desses livros foram impressos na Europa antes do século XVII. Essas obras eram de dois tipos, basicamente aquelas escritas em latim por intelectuais de formação clássica, e outras escritas no vernáculo por professores práticos [6]. A mais antiga dessas obras é de autor desconhecido e bastante rara, conhecida pelo nome de *Aritmética de Treviso*.

O livro Aritmética de Treviso foi publicado no ano de 1478, na cidade de Treviso, Itália, sendo o primeiro livro impresso no mundo ocidental. Este é um livro essencialmente comercial, escrito para explicar a escrita dos números e efetuar cálculos com eles, trazendo em suas páginas os primeiros algoritmos impressos para as operações elementares.

Figura 7.26: Primeira página do Aritmética de Treviso

Fonte: Swetz (1987)

A figura 7.26 destaca a primeira página da Aritmética de Treviso. onde podemos observar que, no final do texto, um dos primeiros proprietários, Marco Belerami deixa sua assinatura. Também é possível identificar, gravado na margem direita, um problema envolvendo conversões monetárias.

A Aritmética de Treviso não foi escrita para um grande público. Suas situações problemas, embora específicas para a época, aparentemente não eram abrangentes suficiente para torná-la uma prática popular da aritmética comercial. Parece ter havido apenas uma edição da obra, e cópias existentes são extremamente raras. O livro foi impresso em um formato onde cada folha impressa forma quatro páginas. Existem 123 páginas de textos reais, com 32 linhas de impressão em uma página. As páginas não são numeradas, não são aparadas e têm margens amplas, como é possível identificar na figura 7.26. O tamanho do livro é de 14,5 por 20,6 centímetros, um pequeno volume para os padrões das primeiras impressões renascentistas, indicando que ele foi projetado para o uso popular. Numerosos diagramas matemáticos estão espalhados pelo texto, ilustrando procedimentos algorítmicos.

Antes de apresentar ao leitor alguns algoritmos de multiplicação, a Aritmética de Treviso esclarece que ter memorizadas as tabuadas é necessário para fazer uso dos procedimentos que serão exibidos. Em seguida, as tabuadas dos números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 20, 24, 32 e 36 são apresentadas. Um recorte destas é mostrado na figura 7.27. Salientamos que o idioma que aparece na imagem é o inglês, uma vez que para a construção desse trabalho tivemos acesso a uma publicação que, em um de seus capítulos, traz a tradução da obra original.

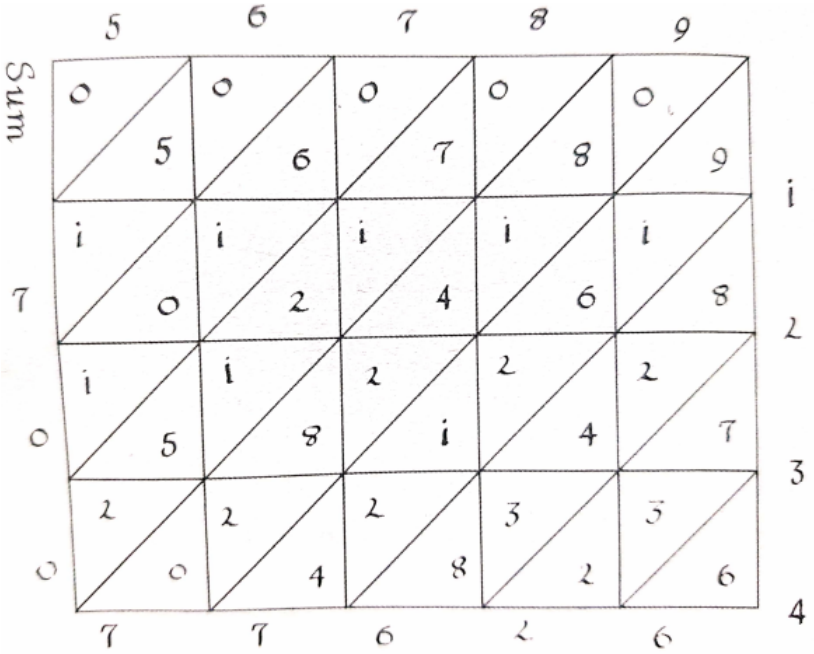
Figura 7.27: Tabuadas de multiplicação em Aritmética de Treviso

2	times	2	makes	4
2	times	3	makes	6
2	times	4	makes	8
2	times	5	makes	10
2	times	6	makes	12
2	times	7	makes	14
2	times	8	makes	16
2	times	9	makes	18
2	times	0	makes	0
3	times	3	makes	9
3	times	4	makes	12
3	times	5	makes	15
3	times	6	makes	18
3	times	7	makes	21
3	times	8	makes	24
3	times	9	makes	27
3	times	0	makes	0

Fonte: Swetz (1987)

Como informamos na seção 7.2, um dos algoritmos de multiplicação que é exibido na Aritmética de Treviso é o da gelosia. A disposição inicial do multiplicador difere da que foi exibida em nosso texto, conforme pode ser visto na figura 7.28, mas todo o funcionamento do método é o mesmo já descrito.

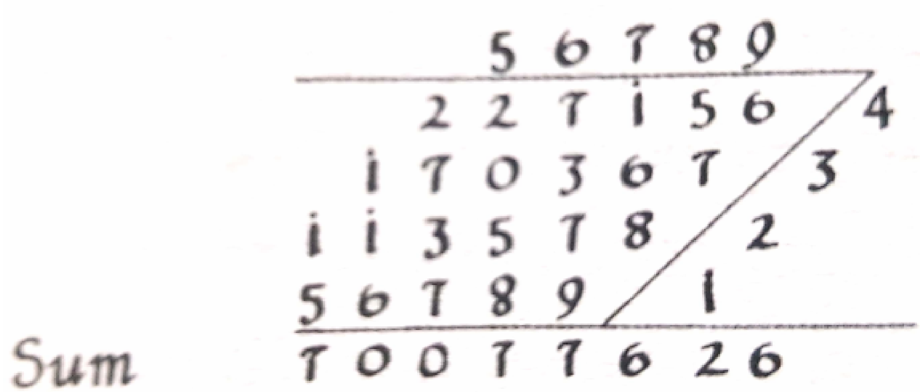
Figura 7.28: Gelosia em Aritmética de Treviso



Fonte: Silva (2003)

Outro algoritmo que é difundido no mesmo livro é destacado na figura 7.29. Nele é possível ver, além dos fatores 56789 e 1234 separados por dois segmentos que formam um "ângulo" entre eles, os produtos parciais e o resultado final separado por um segmento horizontal.

Figura 7.29: Algoritmo de multiplicação com "ângulo"



Fonte: Silva (2003)

Ainda ilustrando a operação de multiplicação, o autor desconhecido nos apresenta outro algoritmo, o qual pode ser visto na figura 7.30 em dois exemplos: 9279×8 e 12392×7.

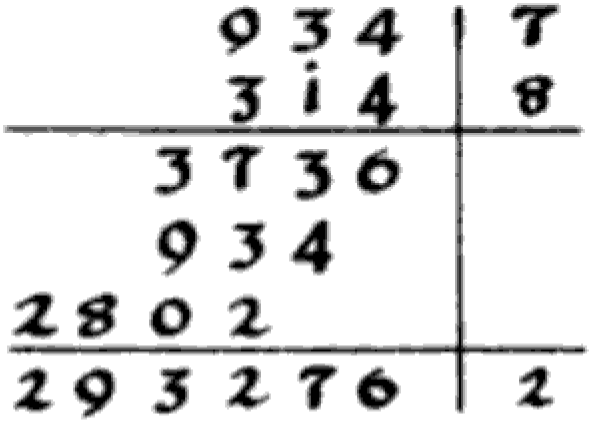
Figura 7.30: Algoritmo de multiplicação com “prova”

Fonte: Silva (2003)

O procedimento da figura 7.30 já é muito semelhante ao algoritmo que é usado atualmente e é ensinado nas escolas de educação básica por meio de livros didáticos. Aqui é possível observar um segmento vertical que separa o algoritmo em duas partes. À esquerda, temos as multiplicações 9279×8 e 12392×7 e os seus respectivos resultados que foram determinados por meio das tabuadas que exibimos na figura 7.27. Os valores posicionados à direita funcionam como uma “prova” para verificar se o produto foi calculado corretamente, algo do tipo “noves fora”, também praticados em nossas escolas. Vejamos o seu funcionamento com o exemplo 9279×8. O processo é feito retirando da soma dos algarismos do multiplicando, do multiplicador e do produto final o “excesso” de noves.

No multiplicando dois mais sete é nove, assim, o “excesso” de noves do multiplicando 9270 é zero. Na linha abaixo, o “excesso” do 8 é o próprio 8, uma vez que ele é menor que o nove. No produto final, temos sete mais 4 é onze, do qual é subtraído nove, restando dois. Dois e dois são quatro, que somados a três resulta em sete. Somando sete e dois temos nove e, seu “excesso” é zero. Assim são determinados os valores à direita do segmento vertical. Para verificar se a multiplicação está correta, devemos multiplicar o zero pelo oito e tirar o “excesso” de noves. Sendo o resultado igual ao valor à direita do número 74232, temos a confirmação do resultado correto. Assim, $0 \times 8 = 0$, mesmo valor indicado após os “excessos” do produto final, indicando que temos o valor certo para a multiplicação efetuada. Outro exemplo deste algoritmo, com a “prova” está indicado na figura 7.31:

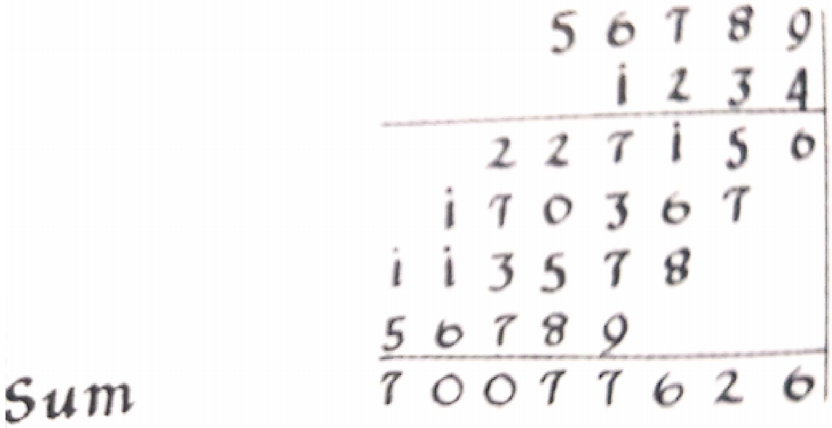
Figura 7.31: Multiplicação entre os números 934 e 314



Fonte: Swetz (1987)

Por fim, o último algoritmo que é apresentado na obra Aritmética de Treviso é bastante similar ao método que usamos nos dias atuais. A figura 7.32 exibe todos os produtos parciais e o resultado da multiplicação 56789 $\times$ 1234.

Figura 7.32: Multiplicação entre os números 56789 e 1234



Fonte: Silva (2003)

Diante do que dissertamos nesse capítulo, usando como referências os trabalhos de Eves (2007), Boyer (2012), Silva (2003), Ifrah (2010) e Swetz (1987), podemos perceber o quanto os algoritmos de multiplicação evoluíram para que hoje possamos realizar produtos entre dois números naturais de forma mais simples e otimizada.

Capítulo 8

Conclusões

A multiplicação entre dois números inteiros é uma das operações matemáticas elementares ensinadas nas escolas de Educação Básica. O algoritmo tradicional comumente utilizado é bastante simples e de fácil compreensão, o qual consiste em executar deslocamentos e somas para multiplicar dois números naturais.

Neste trabalho apresentamos métodos que destacam os diversos algoritmos de multiplicação entre dois números naturais. Analisamos, através de uma pesquisa bibliográfica, processos para efetuar a operação de multiplicação utilizados por diferentes povos, em épocas distintas, onde foi destacado suas propriedades e semelhanças com o algoritmo para multiplicar encontrado nos livros didáticos e atualmente ensinado nas escolas da Educação Básica. Assim, cada capítulo foi escrito explorando as particularidades de um sistema de numeração que está diretamente relacionado ao algoritmo de multiplicação de uma civilização antiga.

Dissertamos sobre o processo de multiplicação dos antigos babilônios, onde foi possível perceber a grande importância de seus tabletes de argila para a aritmética desta cultura e entender o sistema sexagesimal utilizado à época. Em seguida discorremos sobre a civilização egípcia e seu processo de duplicação para fazer a multiplicação entre dois números.

Ao falar sobre a Grécia, berço de grandes pensadores e notáveis matemáticos, apresentamos suas notações para a escrita dos números. Uma vez que seu sistema de numeração não era propício para a aritmética, apontamos o uso do ábaco para efetuar multiplicações pela primeira vez em nosso trabalho. No capítulo seguinte tratamos sobre o surgimento da escrita na China e seu sistema de numeração decimal em barras, para, posteriormente, apresentar o processo singular de multiplicar fazendo uso varetas de bambus.

Ao chegarmos no capítulo 6 reencontramos a motivação inicial de toda a pesquisa: o algoritmo de multiplicação utilizado pelos antigos romanos. Assim, apresentamos o ábaco romano tradicional da época e o ábaco de bolso. Exibimos o distinto sistema de numeração romano e seus sistemas aditivo e subtrativo, bem como as convenções adotadas para a escrita de números cada vez maiores. Por fim, descrevemos dois processos distintos de multiplicação feita através do uso do ábaco.

Sobre os algarismos indo-arábicos, relatamos a transição de suas formas na passagem da Índia para os países árabes e como estes chegaram à Europa, para, em seguida, com a grande contribuição do Papa Silvestre II, sua disseminação pela Europa. Ainda estudando a cultura hindu, apresentamos dois algoritmos com os quais eram feitas as multiplicações, entre eles, o método da gelosia. Encerrando a pesquisa, explicitamos a obra intitulada Aritmética de Treviso, primeira obra impressa sobre aritmética, e seus diferentes procedimentos para multiplicar dois números, onde algumas delas são muito semelhantes à forma que atualmente é feita tal operação.

Estamos conscientes dos limites da nossa pesquisa. Para trabalhos futuros, entendemos que outros algoritmos de multiplicação podem ser investigados, por exemplo, os métodos da civilização maia e as barras de Napier. Também julgamos que uma possibilidade de complemento a investigação feita em nosso texto é um estudo sobre aplicação dos diversos algoritmos de multiplicação em turmas de Ensino Fundamental e em turmas de formação de professores de matemática. Encerrando o texto, acreditamos que o objetivo do trabalho foi alcançado, uma vez que conseguimos apresentar diferentes algoritmos de multiplicação que, em algum momento da história da humanidade, contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, A.; *Episódios da história antiga da matemática (Coleção do professor de matemática)*, 3^a ed. Rio de Janeiro: SBM, (2013), 191p.

[2] ALMEIDA, F. M. M. B.; *Sistemas de numeração precursores do sistema Indo-Árabe*, 1^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2011), 167p.

[3] ALMEIDA, M. C.; *A matemática na idade da pedra: filosofia, epistemologia, neurofisiologia e pré-história da matemática*, 1^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2017), 641p.

[4] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental; *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, (1998).

[5] BOYER, C., UTA, C. M.; *História da matemática*, 3^a ed. São Paulo: Blucher, (2012), 504p.

[6] EVES, H.; *Introdução à história da matemática*, 2^a ed. Campinas: Editora da Unicamp, (2007), 844p.

[7] FOSSA, J.A.; *Os primórdios da teoria dos números* (Arquivo para a história da teoria dos números e da lógica, v.1, parte A), 1^a ed. Natal: EDUFRN, (2010).

[8] HEATH, T.; *A history of Greek Mathematics* vol 1, 1^a ed. Cambridge: Cambridge, (1923), 446p.

[9] IBIAPINA, W.F.; *Ábaco romano*: ensino, possibilidades e perspectivas, 1^a ed. Curitiba: Appris, (2017), 175p.

[10] IFRAH, G.; *Os números: a história de uma grande invenção*, 11^a ed. São Paulo: Globo, (2010), 368p.

[11] MENDES, I. A.; *Números: o simbólico e o racional na história*, 1^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2006), 102p.

[12] MOREY, B., SILVA, G. S.; *Os sistemas de numeração antigos na formação de professores*, 1^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2017), 69p.

[13] PEREIRA, A.C.C.; *A evolução histórica da multiplicação do século X ao XVI*: Construindo interfaces para o ensino, 1^a ed. Belém: SBEM/SBEM-PA, (2017), 70p.

[14] ROQUE, T.; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, 1^a ed. Rio de Janeiro: Zahar, (2012), 509p.

[15] ROQUE, T., CARVALHO, J. B. P.; *Tópicos de história da matemática (Coleção PROFMAT)*, 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, (2012), 467p.

[16] SILVA, C. M. S.; *Explorando as operações aritméticas com os recursos da história da matemática*, 1^a ed. Brasília: Plano Editora, (2003), 70p.

[17] STEFFENON, R., GUARNIERI, F.; *Belos problemas de matemática: indução e contagem*, IV Colóquio de Matemática da Região Sul. FURG - SBM, (2016), 136p.

[18] SWETZ, F. J.; *Capitlism and arithmetic: the new math of the 15th century*, 1^a ed. Illinois: Open Court, (1987), 345p.