UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Jaldir de Oliveira Costa

Guia de Ensino para Análise Combinatória a partir dos Livros Didáticos, ENEM e BNCC.

Campina Grande - PB
Julho/2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Jaldir de Oliveira Costa

Guia de Ensino para Análise Combinatória a partir dos Livros Didáticos, ENEM e BNCC.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB
Julho/2021

C837g Costa, Jaldir de Oliveira.
Guia de ensino para análise combinatória a partir dos livros didáticos, ENEM e BNCC / Jaldir de Oliveira Costa. – Campina Grande, 2021.
103 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima”.
Referências.

1. Matemática – Análise Combinatória – Estudo e Ensino. 2. Livro Didático – Ensino Médio. 3. Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). 4. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Título.

CDU 519.1(07)(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Jaldir de Oliveira Costa

Guia de Ensino para Análise Combinatória a partir dos Livros Didáticos, ENEM e BNCC.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 09 de julho de 2021:

Romildo N. de Lima

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima - UFCG
Orientador

Célia Maria R. Franco

Profª. Drª. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
Convidada

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira - UFRN
Convidado

Campina Grande - PB
Julho/2021

Dedico à minha amada esposa Maria das Dores (Dorinha), que compartilha deste sonho junto comigo, sempre me incentivando a ser uma pessoa melhor e a lutar por nossos objetivos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida, pelo seu infinito Amor e Misericórdia. Sou grato por ter me cumulado de dons, entre eles a fé e a esperança, que me fizeram perseverar até a etapa da conclusão deste curso. Agradeço também por tudo que ainda há de vir, pois confio na Divina Providência e sei que Ele reserva o melhor para mim.

À minha família, pelo apoio incondicional, por acompanhar de perto a minha trajetória, vibrar com cada vitória e me fortalecer nos momentos de dificuldade.

À minha esposa Dorinha, pelo amor, paciência, cuidado e companheirismo contínuos.

À minha mãe Maria das Graças, que, mesmo morando distante está sempre presente. Também agradeço ao meu pai José Costa e aos meus irmãos Júnior, Juliana, Alan, Letícia e Júlio César.

Ao PROFMAT pólo da UFCG-Campina Grande, por todo aprendizado adquirido. Sou grato aos excelentes professores, por todo conhecimento oferecido no decorrer do curso. Agradeço também pelo exemplo profissional, sempre comprometidos com uma educação de qualidade e formação acadêmica de exelência.

Ao meu orientador, Professor Romildo, que sempre esteve paciente, compreensivo e apresentou direcionamentos certeiros para construção deste trabalho. Agradeço também, aos Professores Célia Maria Rufino Franco e André Gustavo Campos Pereira que, gentilmente, aceitaram participar da banca avaliadora e deram valiosas contribuições.

Aos discentes ingressos em 2019, onde destaco e agradeço a Railton, Rayanne, Shirlene, Gerivaldo, João Batista, Paulo Roberto, Geraldo e Maria Eduarda, por todo conhecimento compartilhado. De maneira especial, refiro-me à Suênia, Edvenilson e Rubem, que me fizeram companhia durante as viagens à UFCG, sempre com boas conversas e palavras de incentivo.

Aos meus amigos Romário, Silvânia, Vanessa Lays e Ivanielma, verdadeiros presentes de Deus na minha vida, que sempre me incentivam a continuar, acreditando no meu potencial, até quando eu mesmo não acreditei. O sentimento é gratidão, a todos que contribuíram para concretização deste sonho.

“Aliás, sabemos que todas as coisas
concorrem para o bem daqueles que amam a Deus,
daqueles que são os eleitos, segundo os seus desígnios.”
Bíblia Sagrada, Rm 8,28

“Eu sempre acreditei que tudo daria certo.
Acredite na sua história e tenha certeza
de que ela também vai acontecer,
aliás, já está acontecendo!”
Beto Carrero, 15/03/2019

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma discussão sobre o conteúdo Análise Combinatória, em torno da abordagem de Livros Didáticos e das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Utilizou-se, como referencial teórico, fatos históricos e a Legislação Educacional Brasileira. Foi possível elaborar um Guia para o Ensino de Análise Combinatória, distribuído nas três séries do Ensino Médio, em consonância com as competências e habilidades exigidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Para construção do Guia, sugerimos a implementação de atividades pautadas na experimentação e problematização, com a finalidade de complementar o ensino deste conteúdo para, consequentemente, atingir um melhor desempenho na avaliação nacional e também em situações que os alunos possam enfrentar em suas vidas.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Livro Didático. ENEM. Experimentação. Problematização.

Abstract

In this paper we present a discussion on the content of Combinatorial Analysis, around the approach of Textbooks and the questions of the National Secondary Education Examination (ENEM). Historical facts and the Brazilian Educational Legislation were used as a theoretical reference. It was possible to prepare a Guide for Teaching Combinatorial Analysis, distributed in the three grades of high school, according to the skills and abilities required in the Common National Curriculum Base (BNCC). For the preparation of the Guide, we suggest the implementation of activities based on Experimentation and Problematization, in order to complement the teaching of this content and consequently achieve better performance in the national assessment and also in situations that students may face in their lives.

Keywords: Combinatorial Analysis. Textbook. ENEM. Experimentation. Problematization.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A Análise Combinatória é o conteúdo da Matemática que trata dos problemas de contagem e pertence ao ramo da Matemática Discreta. O seu objetivo, segundo HAZZAN (2013, p. 1), consiste em “desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições”. Esta é uma descrição abrangente, que nos surpreende quando passamos a conhecer as múltiplas ferramentas aplicadas às soluções de problemas de contagem (ou combinatórios).

A contagem de elementos aparentemente é uma tarefa fácil de executar, dependendo da quantidade e das condições impostas para contá-los, por exemplo, quando pretendemos organizar e contar pequenas quantidades. Porém, a mesma tarefa vai se dificultando quando precisamos enumerar uma quantidade maior de elementos ou incrementa-se condições ao agrupamento. Neste caso, o processo pode se tornar exaustivo demais ou humanamente impossível de elencar todas as possibilidades.

No conjunto de ferramentas que permitem atacar os problemas de contagem, estão os principais conceitos que são imediatamente lembrados: Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutações, Arranjos e Combinações. Podemos dizer que esses constituem a parte básica da Análise Combinatória, pois se aplicam à maioria das situações e resolvem problemas de contagem, em diferentes níveis, inclusive para agrupamentos com repetição de elementos.

Geralmente os problemas combinatórios não requerem cálculos sofisticados ou algoritmos especiais, pelo contrário, muitas vezes a contagem pretendida se resume à operação de multiplicação aplicada corretamente. Mas, como o próprio nome sugere “Análise Combinatória”, neste ramo do conhecimento a chave para o sucesso consiste numa análise cuidadosa da situação, observação do contexto e formulação da resolução através das técnicas estudadas.

Existem problemas enunciados de maneira simples, cuja resolução também é simples e prontamente determinada. Assim como pode acontecer de um enunciado simples requerer uma solução mais elaborada, envolvendo um ou mais métodos de contagem. Neste sentido, a resolução dos problemas de contagem vai muito além de aplicação de uma fórmula ou replicação de casos particulares expressos em exemplos.

Para explorar corretamente as habilidades combinatórias, é necessário impor uma postura ativa, não adiar as dificuldades e assumir o papel de responsável pela solução do desafio são as estratégias recomendadas por MORGADO e CARVALHO (2015, p. 108-109), que acrescentam a sugestão de fracionar as etapas da resolução, pois, quando a solução do problema requer uma decisão mais elaborada, geralmente é possível dividi-la em subdecisões mais simples, que deverão ser solucionadas primeiro.

Por outro lado D'AMBRÓSIO (2002, p. 19) conceitua "aprendizagem por excelência, isto é, a capacidade de explicar, de apreender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas. Aprender não é o mero domínio de técnicas, habilidades e nem a memorização de algumas explicações e teorias".

É notório que o Ensino da Análise Combinatória, tal como vem sendo desenvolvido, falha nesse aspecto e produz resultados aquém do esperado, pois é flagrante a tendência por memorização de fórmulas e indagações que os alunos apresentam quanto a aplicação desses conceitos. Contudo, esse cenário pode ser superado pela valorização das habilidades combinatórias, compreendendo a importância desses conceitos em diversas situações e em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, Física, Química, Biologia, e, especialmente, nas novas tecnologias, Informática e Desenvolvimento de Redes.

Percebe-se que o Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória está sustentando em dois pilares: Teoria e Prática. O primeiro pilar é caracterizado pelo conhecimento das técnicas de contagem e o segundo pode ser entendido como experiência adquirida através dos exemplos/exercícios. Estes pilares são edificados a partir da metodologia empregada, pois quando há um desequilíbrio nos pilares, facilmente tem-se que a metodologia utilizada favorece a aprendizagem apenas de uma parcela dos alunos.

Neste contexto, somos provocados a pensar numa metodologia de ensino que fortaleça ambos os pilares, passível de ajustes e que estejam de acordo com a realidade do profissional. Ademais, estimular a capacidade e criatividade do aluno para elaborar estratégias de solução mais eficientes, formulação de hipóteses e conjecturas. Sendo assim, defendemos a metodologia da Experimentação e da Problematização, a fim de que os alunos sejam estimulados a desenvolver estratégias próprias e lograr êxito frente aos desafios que requerem as habilidades combinatórias.

Portanto, indicamos um caminho que pode auxiliar ao professor neste desafio. Trata-se de um Guia para o Ensino de Análise Combinatória durante o Ensino Médio, baseado numa metodologia que complementa o Livro Didático e preza por uma aprendizagem significativa voltada para o protagonismo do aluno, fazendo-o despertar habilidades essenciais no ensino-aprendizagem de Matemática.

Nessa proposta, o professor é convidado a repensar a metodologia usualmente empregada, iniciando por uma mudança de postura, investindo na aprendizagem construtiva do aluno e estimulando-o a aprender com os próprios erros. "É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada." (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 134). Trata-se de uma metodologia que incentiva a construção do conhecimento, diálogo e interação através das atividades de grupo, para explorar habilidades críticas, criativas e raciocínio lógico.

1.1 Objetivos

Discutir o Ensino de Análise Combinatória e elaborar uma proposta a partir dos documentos legais que norteiam a Educação Nacional, analisando a abordagem deste conteúdo em dois exemplares de Livros Didáticos e nas questões do ENEM.

1.1.1 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento histórico e bibliográfico sobre o conteúdo de Análise Combinatória;
- Consultar os documentos legislativos relacionados ao Ensino de Matemática, em particular, ao conteúdo de Combinatória no Ensino Médio;
- Apresentar a abordagem de dois livros didáticos sobre o conteúdo;
- Discutir a resolução das questões do ENEM que tratam do conhecimento de Análise Combinatória;
- Apresentar uma proposta de atividade complementar voltada para o ensino de Análise Combinatória, que possa ser utilizada pelos professores da Educação Básica.

1.2 Organização

Discutiremos aspectos relevantes ao conteúdo de Análise Combinatória em cinco capítulos após esta introdução. Iniciamos por um levantamento de fatos históricos e finalizamos por uma proposta de Ensino para este conteúdo, baseado na metodologia da Experimentação e da Problematização, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular. Na construção dessa proposta, levamos em consideração a análise do Livro Didático e as questões do ENEM.

O desenvolvimento das teorias combinatórias ainda é muito recente na História da Matemática, tendo um avanço mais rápido a partir do século XVIII. Assim, dedicaremos o primeiro capítulo à apresentação de alguns fatos que retratam problemas de contagem, desde a Antinguidade até o período pós Idade Média. Alguns destes problemas são situações pontuais, que exemplificam a necessidade de uma contagem e contribuíram para que, anos mais tarde, fossem formuladas teorias, conjecturas e generalização que utilizamos hoje e avançamos com rapidez no desenvolvimento da contagem.

No segundo capítulo, destacam-se as orientações contidas nos principais documentos que norteiam o currículo da Educação Brasileira, dentre estes a Base Nacional Comum

Curricular (2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000) e a Matriz de Referência do ENEM (2009). Ressaltando, principalmente, o tratamento dispensado ao conteúdo da Análise Combinatória.

O capítulo seguinte está direcionado ao Livro Didático, onde é apresentado as principais características na abordagem do conteúdo de Análise Combinatória, através da comparação feita em dois exemplares selecionados através do Programa Nacional do Livro Didático, no triênio 2018-2020. Nesta etapa é fundamental avaliar se os livros contemplam os principais conceitos necessários à resolução dos problemas de contagem, quais as estratégias e recursos propostos.

Ainda no terceiro capítulo, apresenta-se as definições tal como estão nos livros, alguns exemplos e exercícios com respectivas soluções, destinadas à compreensão dos conteúdos Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo e Combinação. Por fim, discutiremos se a metodologia utilizada oferece o suporte necessário para solucionar questões cotidianas e as questões contextualizadas presentes em avaliações.

O quarto capítulo é dedicado ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por seu relevante impacto para o sistema educacional brasileiro, tanto pelo aspecto avaliativo para o qual foi criado, quanto para o aspecto seletivo que o exame adquiriu nos últimos anos. Por isso, apresenta-se brevemente a evolução histórica do exame, seguida das habilidades contidas na Matriz de Referência do ENEM que remetem ao conteúdo Análise Combinatória. Em seguida, investigaremos, na área de Matemática e Suas Tecnologias, a presença de questões que contemplam este assunto e apresentaremos propostas de resolução.

No último capítulo, apresentamos um Guia para o Ensino de Análise Combinatória, elaborado segundo as recomendações da BNCC, que sugerimos a utilização das metodologias da Experimentação e da Problematização, complementando o roteiro do Livro Didático.

2 Fatos históricos da Análise Combinatória

Antes de começar a discussão sobre a Análise Combinatória, se faz interessante a investigação de fatos históricos que estão relacionados com este ramo da matemática discreta, pois as atividades de organizar e contar fazem parte do cotidiano desde as antigas civilizações. E, mesmo deixando poucos registros sobre como era feito esse procedimento de contagem, conseguimos compreender o domínio do mesmo, através das aplicações realizadas.

Nas seções seguintes, apresentaremos alguns desses fatos históricos como recurso motivador, que ajudarão a compreender um pouco da evolução dos estudos em Análise Combinatória e podem ser utilizados como introdução para aulas deste conteúdo.

2.1 Contribuição da civilização chinesa

Os fatos mais antigos registrados sobre a utilização do raciocínio combinatório, remete aos chineses, quatro milênios atrás. Obviamente, o legado deixado por esta civilização, para o estudo da Análise Combinatória, não se trata da teoria formulada tal qual conhecemos hoje, mas já se demonstra a habilidade de organizar e enumerar quantidades. Esse fato evidenciado nos Quadrados Mágicos, contido na obra *I-King (ou I Ching)*, descrito por EVES (2011, p. 268), quando afirma que:

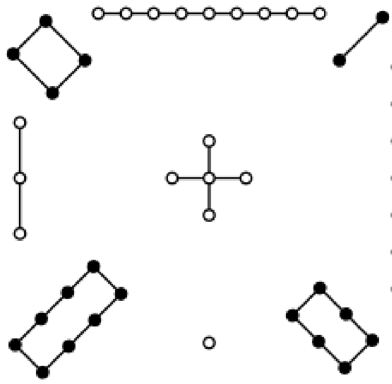
> um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o *I-King* ou *Livro das Permutações*. Nele aparece um diagrama numérico conhecido como *Lo-Shu*, (...). Trata-se do exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico; conta uma lenda que o primeiro a vê-lo foi o imperador *Yu*, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu às margens do rio Amarelo. (...) é um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números ímpares.

Ainda nessa referência, é possível visualizar uma representação desses numerais, que, supostamente, estampava o casco da tartaruga (Figura 1).

O quadrado mágico trata-se de uma figura formada por n linhas e n colunas. Assim, existem n^2 espaços que devem ser preenchidos por números naturais consecutivos (a partir do 1), obedecendo a alguns critérios de organização como, por exemplo, o somatório das linhas, colunas e diagonais devem ser iguais.

No *I Ching* também está descrito uma variação simbólica construída a partir de dois elementos básicos: o traço contínuo (o masculino, *Yang* $-$) e o traço interrompido (o feminino *Ying* $- \ -$). Com esses símbolos é possível representar uma quantidade cada vez maior de composições. Por exemplo, numa figura constituída por 3 traços é

Figura 1 – Lo Shu (Quadrado Mágico)

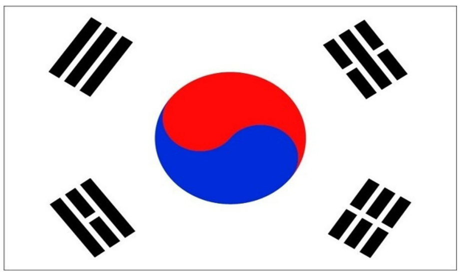


Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Lo_Shu_Square>

possível representar oito formatos diferentes (trigramas ou *Pa-kua*), fazendo-se variar suas posições. Analogamente, com quatro traços é possível gerar dezesseis formatos, e assim por diante. Logo, a figura alcançará, no máximo, 2^n formatos distintos, onde n representa a quantidade de traços.

A simbologia com seis traços (hexagrama), que totalizam 64 formas, é utilizada para enumerar os capítulos do *I-Ching* ou *Livro das Permutações*.

Figura 2 – Bandeira da República Nacional da Coreia do Sul

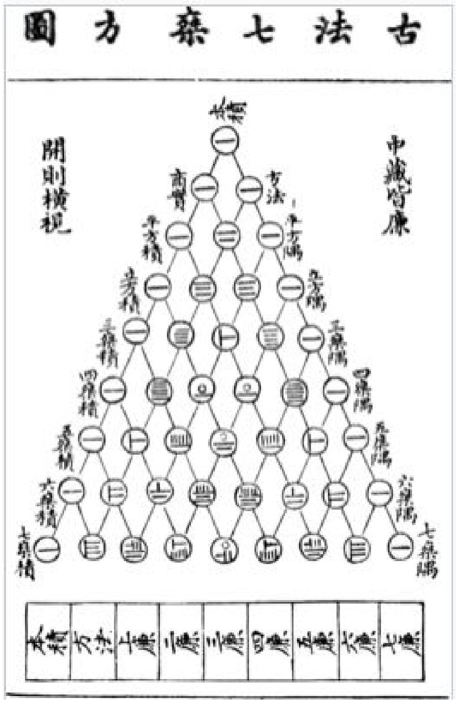


Fonte: <https://www.koreapost.com.br/>

Atualmente, é possível observar a aplicação dessa simbologia na bandeira sul coreana, oficializada em 12 de julho de 1948, que contém 4 trigramas, conforme observados na Figura 2. Cada um deles representa uma força da natureza (céu, sol, lua e terra); ou uma estação do ano (primavera, verão, outono e inverno); ou um ponto cardeal (leste, sul, norte, oeste); ou uma virtude (humanidade, justiça, inteligência e cortesia).

Outra contribuição da civilização chinesa remonta ao ano de 1303, onde já era conhecido o Triângulo Aritmético, apresentado por *Chu Shï-kié* (Figura 3). Uma versão do estudo que, posteriormente, ficou famoso como sendo o Triângulo de Pascal, em referência ao matemático Blaise Pascal.

Figura 3 – Triângulo Aritmético



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal>

2.2 Contribuição da civilização egípcia

Uma contribuição egípcia para a Análise Combinatória é apresentada através do famoso Papiro de Rhind, que recebe este nome por ter sido descoberto pelo escocês Alexander Henry Rhind (1833-1863). Ele era um grande estudioso daquela cultura (egiptólogo) e adquiriu o papiro numa de suas viagens em 1856. O Papiro de Rhind (ou Ahmes) é um dos mais antigos escritos de matemática e, originalmente, é uma obra do escriba Ahmes (EVES, 2011, p. 69):

> 1650 a.C. essa é a data aproximada do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. (...). O papiro Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de 13 polegadas de altura.

Após o falecimento de A. Rhind, o papiro foi vendido ao Museu Britânico, situado em Londres. No entanto, a obra que chegou ao museu em 1985 estava incompleta e a parte que faltava foi doada por uma sociedade de historiadores de Nova York em 1932, após tê-lo adquirido de Edwin Smith. Atualmente, o Papiro de Rhind está disponível para visualização pública no site do Museu Britânico.

Figura 4 – Papiro de Rhind (ou Ahmes)

Fonte: Museu Britânico. Disponível em:
<https://www.britishmuseum.org/collection/object/>

A tradução desse Papiro contribuiu significativamente para compreender o desenvolvimento da matemática na civilização Egípcia. Dentre os 85 problemas, existe um que está relacionado à contagem: o Problema 79. Esse problema foi traduzido pela primeira vez para língua portuguesa na obra do professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia: "O mais antigo documento mathematico conhecido (papiro Rhind)", detalhado no estudo apresentado por MARTINS (2015). O Problema 79 também foi enunciado segundo BOYER (1974, p. 12), quando diz que:

> Assim o Pro. 79 cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hecates". É presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que em cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria a quantidade de grão poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

A descoberta desse papiro por volta do século XIX fez o historiador Moritz Cantor associar o Problema 79 aos famosos problemas enunciados de forma retórica na Idade Média, destacando um deles cuja autoria é atribuída ao matemático Leonardo Fibonacci (1.170 - 1.250). Assim, descrito por EVES (2011, p. 76),

> (...) ele viu no problema um precursor de um popular problema da Idade Média e que figura no Liber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci. Dentre os muitos problemas dessa obra há o seguinte: "Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?"

Assim, podemos notar que, tanto no problema descrito no Papiro de Rhind quanto no problema proposto por Fibonacci, para se chegar à solução, é preciso utilizar a operação de multiplicação repetidas vezes e, em seguida, a adição. Ou seja, estamos diante de dois problemas que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem.

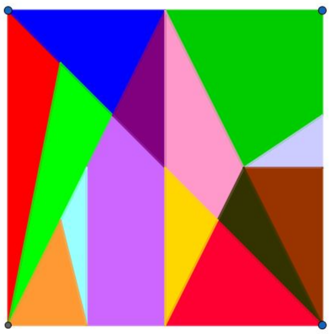
2.3 Contribuição da civilização grega

Conhecido desde muito tempo, o *Stomachion* é um "quebra-cabeças" constituído por 14 formas geométricas (triângulos e quadriláteros) que, unidas, formam um quadrado, conforme a Figura 5. Esta nomenclatura é de origem grega e significa estômago.

> Temos alguma evidência proveniente da Antiguidade referindo-se a um jogo, chamado *Stomachion*, ou "dor de barriga" jogo supostamente tão difícil que revira o estômago. (A dificuldade de juntar peças seria um tema constante sobre o *Stomachion* por sua história afora.) Envolvia catorze peças que deveria ser unidas para formar um quadrado. (NETZ; NOEL, 2009, p. 244)

O primeiro contato com as peças nos instiga a pensar como podemos reorganizá-las de modo a formar novas figuras ou mesmo trocar as peças de lugar permanecendo o formato original do quadrado. Esse é um exercício interessante devido a grande variedade de formatos que podem ser obtidos e, por muito tempo, o *Stomachion* foi tratado dessa maneira, isto é, como um jogo ou passatempo.

Figura 5 – Stomachion



Fonte: Autoral (Adaptado)

Porém, recentemente, em 1998, a História da Matemática escreveu mais uma importante página, quando foi adquirido, num leilão em Nova York, um manuscrito medieval, arrematado pelo Mr. B, que pagou uma quantia superior a dois milhões de dólares. Esse comprador anônimo destinou a obra para a um grupo de historiadores, onde deram início a um projeto que ficou conhecido como "O Códex de Arquimedes". O grupo utilizou modernas técnicas de restauração e alta tecnologia, constatando que a obra, na real, tratara de um palimpsesto (papiro ou pergaminho cujo texto primitivo foi raspado, para dar lugar a outro).

O palimpsesto foi anunciado para o leilão como textos religiosos, mas, após a análise dos historiadores, este revelou-se como sendo o manuscrito mais antigo escrito por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) e nele constava alguns estudos importantes de sua autoria e menção ao *Stomachion*. E, mesmo não sendo possível comprovar se o desafio foi criado pelo gênio matemático, é bem curioso o fato de Arquimedes já ter se dedicado ao puzzle (do inglês "enigma").

> Embora muito provavelmente Arquimedes não tenha sido o inventor do *Stomachion*, uma dúvida se levantou ao estudar o palimpsesto: O que este puzzle despertou no espírito de Arquimedes. Afinal, o que é o puzzle *Stomachion*?
> Depois de traduzir e interpretar o Códex C, o investigador Reviel Netz afirma que o que Arquimedes queria não era propriamente fazer figuras de animais, mas sim responder a uma simples pergunta:
> De quantas formas possíveis se podem juntar as 14 peças do jogo de maneira a formar um quadrado? (SILVA; SANTOS; PEDRO NETO, 2007, p. 36-37)

Eis a importante discussão sobre o envolvimento do *Stomachion* e Arquimedes, pois a figura não seria apenas um passatempo ou objeto de estudo das formas geométrica. O verdadeiro desafio consistia em contabilizar quantos formatos diferentes podem ser gerados ao reorganizar as peças. Este seria o questionamento que, de fato, inquietara o gênio matemático da Grécia Antiga.

SILVA, SANTOS e PEDRO NETO (2007) apresentam um roteiro de como se chegar ao quantitativo de novas composições utilizando as catorze peças mantendo o formato de um quadrado, e sugerem que esta teria sido uma das preocupações de Arquimedes.

> Os gregos foram fundadores dos mais variados campos da matemática. Podemos mesmo dizer que foram os fundadores de quase todos. No entanto, sempre se pensou que a combinatória fugiu ao seu impressionante leque de criações. Uma das coisas que a análise do palimpsesto veio mostrar é que provavelmente esta ideia está errada. O investigador Reviel Netz, baseado nas traduções do manuscrito, é defensor da tese de que Arquimedes pretendeu encontrar o número de maneiras diferentes de se juntar as 14 peças do *Stomachion* de forma quadrangular. (SILVA; SANTOS; PEDRO NETO, 2007, p. 38)

Mas, para isto, Arquimedes teria avançado nas técnicas de contagem e seria, portanto, um precursor dos estudos de Análise Combinatória, fato que em nada surpreenderia em face da sua genialidade.

Outra contribuição que remete à civilização grega, está contida no livro "Os Elementos" de Euclides (300 a. C.), que, dentre as proposições, apresentou o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$, para o caso $n = 2$, anos mais tarde a teoria Binomial foi ampliada (MORGADO, 1991).

2.4 Análise Combinatória na Idade Média

Há registros de problemas matemáticos durante a Idade Média (Séc. V ao Séc. XV) que também contribuíram para formulação do conceito atual de Análise Combinatória. Alcuíno de York (735-804) é um nome que merece destaque nesse período, seus trabalhos sugerem quebra-cabeças e desafios que estimulam a utilização de estratégias combinatórias. "Alcuíno escreveu sobre muitos tópicos matemáticos e consta, inclusive, como dele (embora haja dúvidas a respeito) uma coleção de problemas em forma de quebra-cabeça que exerceu muita influência nos autores de textos escolares por muitos séculos." (EVES, 2011, p. 290)

Dentre os quais podemos citar o famoso desafio que trata da travessia de barco: "Um lobo, uma cabra e um repolho devem ser transportados para a outra margem de um rio num barco que só aguenta um deles, além do barqueiro. Como se deve fazer para que o lobo não coma a cabra, nem esta coma o repolho?" (EVES, 2011, p. 314). A solução desse problema contribui para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois consiste em descrever todas as trajetórias possíveis do barco, observando as restrições apresentadas. Para solucionar este problema, é necessário assumir a posição do barqueiro e seguir os seguintes passos:

1. Levar a cabra para a outra margem;
2. Retornar com o barco vazio e pegar o repolho, para levá-lo até outra margem;
3. Deixar o repolho e trazer a cabra de volta no barco;
4. Trocar a cabra pelo lobo e cruzar o rio com o lobo;
5. Voltar para pegar a cabra.
6. Levar a cabra até a outra margem, onde estarão finalmente os três.

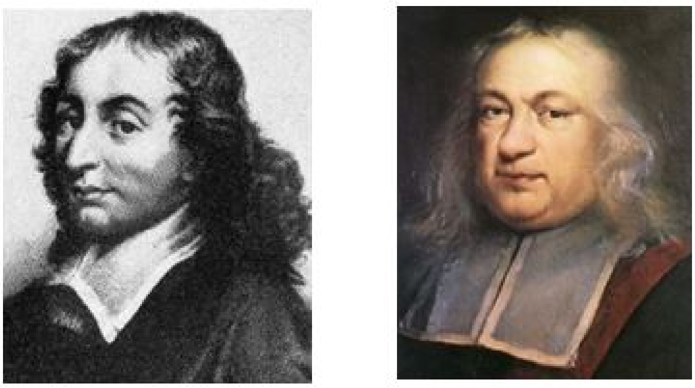
Esse problema da travessia e as demais situações apresentadas até o momento tratam de problemas que podem ser resolvidos pontualmente, portanto, não havia a necessidade de generalização para formulação de teoria. Mas, com o passar dos anos, alguns matemáticos começaram sistematizar o conceito de Análise Combinatória como ferramenta de apoio aos cálculos probabilísticos voltados para os jogos de azar.

Ainda na Idade Média, destaca-se o matemático hindu Báskara (1114-1185), que "sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos", segundo MORGADO (1991).

2.5 Análise Combinatória após a Idade Média

Para compreender o desenvolvimento da Análise Combinatória após a Idade Média, seria necessário discorrer sobre as contribuições de muitos estudiosos que deixaram importantes obras, produzidas individualmente ou fruto das parcerias acadêmicas. Isso não é objetivo do trabalho, então elegemos apenas três matemáticos europeus que se destacaram nesse período e contribuíram extraordinariamente em diversos ramos, formulando várias teorias que aplicamos hoje. São eles: os franceses Blaise Pascal (1632-1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1655), e o matemático suiço Leonard Euler (1707 - 1783).

Figura 6 – Matemáticos Blaise Pascal e Pierre De Fermat



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br>

A comunicação entre Pascal e Fermat, por meio de sete cartas, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da teoria de Probabilidade atual. Nestas correspondências, eles discutiam a resolução do problema dos pontos, que consiste em determinar a divisão das apostas num jogo de dados interrompido entre dois jogadores de habilidade semelhante, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos a ser atingido para vencer.

> Enquanto Pascal em 1654 trabalhava em sua *As cônicas*, seu amigo, o Chevalier de Mére, propôs-lhe questões como esta: Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado? Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades. (BOYER, 1974, p. 265)

O detalhamento das cartas contendo os argumentos apresentados por Fermat e Pascal, para resolver o problema, pode ser visto em anexo ao trabalho de SA (2015, p. 93-110). Na sétima e última carta, percebemos a despedida concluindo que ambos apresentaram soluções distintas e válidas, que contribuiu também formulação dos conceitos combinatórios, visto que este precede a Probabilidade.

Além da troca de cartas com Fermat, Pascal investiu mais no desenvolvimento da probabilidade e avançou nos estudos sobre o Triângulo Aritmético, que já existia há aproximadamente 600 anos (Figura 3), encontrando propriedades que antes não foram estudadas, por exemplo:

> em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo inclusive.
> Pascal chamava posições na mesma coluna vertical, “células do mesmo posto perpendicular”, e as de uma mesma horizontal “células de mesmo posto paralelo”; células na mesma diagonal apontando para cima ele chama “células da mesma base”. (BOYER, 1974, p. 265)

Pascal também apresentou a propriedade relacionada à soma dos elementos de uma linha, que resulta em 2^n, onde n corresponde à n-ésima linha. Por essas importantes descobertas, a tabela numérica passou então a ser conhecida por Triângulo de Pascal, que dispõe os elementos obedecendo as propriedades das combinações e subsidiam alguns cálculos probabilísticos.

Leonardo Euler é dos matemáticos mais conhecidos da história, que deixou relevantes contribuições em diferentes áreas da matemática. Aos vinte anos, fora indicado para Academia de São Petesburgo (Rússia) pelos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli (EVES, 2011, p. 466).

Figura 7 – Leonard Euler

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br>

Mesmo sendo acometido de uma cegueira, por volta dos 35 anos idade, ele continuou a produzir extraordinariamente, publicando mais de 530 trabalhos durante a sua vida. Para isto contava com o auxílio de um secretário para fazer suas anotações.

Um dos trabalhos é a base do conceito das Permutações Caóticas, que conhecemos atualmente, desenvolvido a partir da interação acadêmica de Euler com Nicolaus

Bernoulli (1687-1759), por meio de cartas. Numa dessas correspondências, Euler fora desafiado por Nicolaus, que propôs um problema interessante: enumerar quantas são as possíveis formas de se colocar uma certa quantidade de cartas, na mesma quantidade de envelopes com destinatários distintos, de modo que nenhuma das cartas esteja no envelope correto (MORAIS FILHO; FERREIRA, 2011).

Outro problema que se tornou famoso a partir dos estudos de Euler, foi *O Problema das 7 Pontes de Königsberg*, que diz o seguinte:

> (...) seria possível fazer um passeio pela cidade de Königsberg de maneira a cruzar todas as pontes da cidade, uma, e uma só, vez, e voltar ao ponto de partida? A cidade, localizada perto da foz do rio Pregel, era famosa por suas sete pontes, cinco delas dando acesso a uma ilha. (EVES, 2011, p. 500)

Este problema foi solucionado em 1736 quando Euler, apresentando novos estudos, que hoje conhecemos por Teoria dos Grafos, justifica a impossibilidade de resolvê-lo nas condições dadas. Nesta teoria, ele associa uma visão "geométrica" para problemas como este das pontes. A representação associa pontos às porções de terra e linhas às pontes. Assim, cada ponto é chamado vértice de um grafo, de onde saem suas linhas. As linhas, por sua vez, unem dois vértices consecutivos e são chamadas de arcos do grafo.

Com esta teoria, Euler provou que não é possível realizar o trajeto passando pelas sete pontes e retornando ao ponto de partida inicial, pois, seria necessário que cada vértice (porção de terra) estivesse ligado por uma quantidade par de arcos (pontes).

A Teoria de Grafos não está inclusa à grade de conteúdos da Educação Básica, mas este fato histórico aborda um desafio interessante que pode ser discutido ainda no Ensino Médio, propondo variações para o problema e, com isso, explorar as habilidades combinatórias dos alunos, tais como enumerar as possíveis soluções (quando houver) e justificar as situações impossíveis.

Hoje em dia, a Teoria dos Grafos possui vasta aplicabilidade, principalmente nos ramos da informática, onde se baseiam muitos mecanismos computacionais, desenvolvimento de softwares, aplicativos de localização, informações geográficas, teorias dos circuitos elétricos na Física, e muitos outros.

3 Legislação Educacional Brasileira e o Ensino de Análise Combinatória

Neste capítulo, abordaremos alguns documentos da legislação brasileira voltados à construção do currículo na Educação Básica, em particular, para o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio. Iniciando pela Constituição Federal (1988), Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996) e Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), para culminar na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que norteia o ensino e contemplam o conjunto de habilidades essenciais ao desenvolvimento do educando.

No Artigo 205 da Constituição Federal (BRASIL, 1988) está escrito que "A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho". Esse artigo torna clara a importância da educação para todos, essencial para o pleno desenvolvimento da pessoa e a sua qualificação profissional, onde espera-se que, ao final de cada etapa, o educando alcance a formação adequada estabelecida no currículo.

A Constituição Federal também prevê as competências da União em legislar, conforme disciplinado no Art. 22, que apresenta no inciso XXIV - Diretrizes e bases da educação nacional. Assim, para o cumprimento deste inciso, foi promulgada a atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (BRASIL, 1996), sob o Nº 9.394, vigente a partir de 20 de dezembro de 1996.

Vale lembrar que esta não foi a primeira versão da LDB, a lei originária que trouxe as diretrizes para o sistema educacional brasileiro remota a 1961 (Lei nº 4.024) e as reformulações seguintes contribuíram para se configurar esse importante dispositivo que trata da estrutura da educação em nosso país. E, assim como as antigas versões da LDB, a atual também sofreu modificações desde a sua promulgação.

As alterações se concretizaram com a finalidade de ratificar alguns artigos ou para inclusão de novos, por ocasião da implementação dos programas governamentais. Por exemplo, a Lei nº 13.415/2017 foi uma das alterações mais recentes, ela trouxe relevantes contribuições ao texto da LDB, com objetivo de harmonizar a parte diversificada do currículo, conforme o Parágrafo Primeiro do Artigo 3º:

> § 1º A parte diversificada dos currículos de que trata o caput do art. 26, definida em cada sistema de ensino, deverá estar harmonizada à Base Nacional Comum Curricular e ser articulada a partir do contexto histórico, econômico, social, ambiental e cultural.

A partir desse dispositivo, foi criada a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). Além disso, esta alteração da LDB definiu os direitos e objetivos da aprendizagem no Ensino Médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, e apresentou a separação da área de “Matemática e suas tecnologias” que, anteriormente, estava atrelada à área de Ciências da Natureza.

Portanto, uma educação de qualidade parte do cumprimento da Constituição Federal e da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que trazem os direitos e garantias para que o educando alcance o pleno desenvolvimento de suas habilidades. Para isto, é necessário a elaboração de um currículo específico em cada etapa, sob a atribuição do Ministério da Educação, que organizou os documentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular.

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) foram elaborados no ano 2000, tendo, por fundamentação legal, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (1996) e as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - DCNEM (1999), instituídas pela Resolução nº 03, da Câmara de Educação Básica - CEB (1998).

Este documento se apresenta como uma proposta para reformulação da etapa final da Educação Básica, o Ensino Médio, tendo em vista as transformações que a sociedade vem atravessando, com atenção especial ao maior volume de informações e as inovações tecnológicas que exigem novos parâmetros para a formação dos cidadãos. Neste sentido, os PCNEM (BRASIL, 2000a, p. 5) recomendam que

> a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação.
> Propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, **ao invés do simples exercício de memorização.**

Assim, percebemos a preocupação em formar educandos que estejam preparados para encarar os desafios do mercado de trabalho moderno. Também merece destaque a necessidade de rompimento do “simples exercício de memorização”, o que ainda é frequente na aprendizagem de conceitos matemáticos - a tendência por querer apenas “decorar as fórmulas”. Em complemento a esta perspectiva, o documento também destaca a justificativa para formulação do novo currículo:

> considerando-se tal contexto, buscou-se construir novas alternativas de organização curricular para o Ensino Médio comprometidas, de um

> lado, com o novo significado do trabalho no contexto da globalização e, de outro, com o sujeito ativo, a pessoa humana que se apropriará desses conhecimentos para se aprimorar, como tal, no mundo do trabalho e na prática social. Há, portanto, necessidade de se romper com modelos tradicionais, para que se alcancem os objetivos propostos para o Ensino Médio. (BRASIL, 2000a, p. 13)

Por isso, foi necessário repensar o currículo voltado para o Ensino Médio. Assim, o que antes eram disciplinas isoladas, a partir de então, se organizou numa nova estrutura, em três áreas do conhecimento: a) Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; b) Ciências Humanas e suas Tecnologias e **c) Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, planejada de acordo com os conhecimentos que compartilham objetos de estudo e estimulem a interdisciplinaridade. A Matemática, em conjunto com as ciências da natureza, é justificado pela Câmara de Educação Básica, no Parecer CEB nº15/1998, que trata das DCNEM:

> a presença da Matemática nessa área se justifica pelo que de ciência tem a Matemática, por sua afinidade com as Ciências da Natureza, na medida em que é um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos destas últimas, e finalmente pela importância de integrar a Matemática com os conhecimentos que lhe são mais afins. Esta última justificativa é, sem dúvida, mais pedagógica do que epistemológica, e pretende retirar a Matemática do isolamento didático em que tradicionalmente se confina no contexto escolar. (Parecer CEB nº15/1998, p. 61)

O conhecimento matemático contribui significativamente para o desenvolvimento das ciências da natureza e também é importante na compreensão de informações pertinentes às outras áreas, inclusive humanas e sociais aplicadas. Por isso, no conjunto de habilidades e competências descritas no parecer supracitado, destaca-se "compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas" (Parecer CEB nº15/1998, p. 65).

Esse fato possibilita ao professor selecionar os conteúdos e estratégias metodológicas que serão adotados. E, portanto, é relevante a inclusão da Análise Combinatória no currículo do Ensino Médio, pois este conhecimento é frequentemente requisitado para solucionar situações cotidianas como, por exemplo, combinações de objetos, disposição em tabelas de jogos, organização de comissões, definição de senhas, entre outros contextos.

3.2 Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi incluída na legislação nacional pela Lei nº 13.415/2017, após aprovação da Resolução CNE Nº2, de 22 de dezembro de 2017, que institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular, normatizando o conjunto das aprendizagens essenciais nas etapas que integram a Educação Básica.

O documento final, que orienta para implementação dos conteúdos necessários à integralização do currículo, foi homologado no ano seguinte (2018). Resultado da discussão entre os professores, gestores e outros profissionais da educação que constituíram comissões incumbidas de apresentar sugestões e melhorias para o texto. Na fase de sua implementação, também foi aberto um prazo de consulta pública, onde a sociedade teve a oportunidade de manifestar as suas contribuições.

Em seguida, as sugestões ofertadas foram apreciadas pelas comissões, que analisaram a possível inclusão na parte diversificada do currículo, em virtude das características regionais, conforme previsão da LDB (BRASIL, 1996):

> Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos

É importante destacar que, mesmo contendo uma parte variável, o currículo da educação básica deve ser planejado em consonância com a BNCC.

Por isso, os estados e os municípios, ao elaborarem seus documentos, devem ter por parâmetro o texto nacional da BNCC, que contempla as orientações para as três etapas da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Em sua apresentação (BRASIL, 2018, p. 07),

> a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo, que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

As orientações contidas na BNCC sobre a aprendizagem na etapa do Ensino Médio estão dividas em quatro áreas, a saber: a) Linguagens e suas tecnologias; b) Matemática e suas tecnologias; c) Ciências da natureza e suas tecnologias; d) Ciências humanas e sociais aplicadas. Nesse trabalho, restringiremos a discussão apenas para área de Matemática e Suas Tecnologias, onde salienta-se que "O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais." (BRASIL, 2018, p. 20).

A Matemática, assim como as demais áreas, possui grande importância para formação do cidadão e a BNCC contém um detalhamento das habilidades em cada ano (série) da formação básica. Essas habilidades possibilitam acompanhar o desenvolvimento do aluno e foram catalogadas por um código alfanumérico, que facilita sua localização no documento. Por exemplo:

EM13MAT310

Os códigos possuem quatro sequências: duas alfabéticas e duas numéricas, que estão intercaladas e variam conforme a seguinte descrição:

- **EM:** A primeira sequência de letras representa a etapa da educação básica, ou seja:
  EI - Educação Infantil
  EF - Ensino Fundamental
  EM - Ensino Médio.

- **13:** O primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos.

- **MAT:** A segunda sequência de letras indica a área da seguinte forma:
  LGG - Linguagens e suas Tecnologias
  MAT - Matemática e suas Tecnologias
  CNT - Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  CHS - Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

- **310:** Os números finais indicam a competência específica a qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas à cada competência (dois últimos números).

Dentre as habilidades elencadas na BNCC (BRASIL, 2018), para a área de Matemática e Suas Tecnologias para Ensino Médio, é possível destacar duas que estão diretamente relacionadas à aprendizagem das técnicas de Contagem e Análise Combinatória:

> **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
>
> **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

A habilidade EM13MAT310 caracteriza-se como um aprofundamento de algumas habilidades requeridas no Ensino Fundamental, assim como está relacionada à contagem, ao Princípio Aditivo e ao Princípio Multiplicativo.

> **(EF04MA08)** Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais
>
> **(EF05MA09)** Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
>
> **(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo. (BRASIL, 2018)

A Habilidade EM13MAT311, por sua vez, indica que o domínio das técnicas de contagem são essenciais para delimitar o espaço amostral dos eventos, fundamentais para realização de cálculos probabilísticos. Por este motivo, o conteúdo de Análise Combinatória geralmente é anteposto ao conteúdo de probabilidade.

Porém, o documento da BNCC não fixa a série em que estes conteúdos serão lecionados, visto que as habilidades relacionadas à contagem são identificadas pelo código “13”, ou seja, podem ser abordada nas três séries do Ensino Médio.

No estado da Paraíba foi constituída a Comissão Estadual de Implementação da Base Nacional Comum Curricular, que elaborou a Proposta Curricular do Estado da Paraíba (ProBNCC) após ampla discussão, que contou com a participação de professores, educadores, pesquisadores de Universidades Públicas, além de parceiros de movimentos e segmentos sociais de todo o território paraibano.

A proposta estadual (PARAÍBA, 2019) contempla as mesmas habilidades apresentadas na BNCC para Educação Infantil e Ensino Fundamental, sugerindo uma atenção especial na transição para o Ensino Médio, onde é realizado um aprofundamento dos conhecimentos adquiridos nas séries anteriores. Por esta razão, destacamos esta importante reflexão acerca do ensino de Matemática:

> atualmente, valoriza-se o raciocínio e a compreensão do que se aprende, bem mais que a memorização e a repetição. O ensino não visa à formação de calculistas e sim, de cidadãos que usam e compreendam a Matemática, que percebam os conhecimentos matemáticos como úteis para entender e melhorar a atuação no mundo em que vivem. (PARAÍBA, 2019, p. 55)

A Proposta Curricular do Ensino Médio (2021), apresentada pela Secretaria Estadual de Educação da Paraíba, é destinada aos educadores da sua rede. Este documento está em consonância com as habilidades da BNCC, contendo o itinerário de conteúdos e estratégias de ensino a serem adotadas. Na área de Matemática, destacamos a divisão das habilidades por série e a indicação de metodologias que contribuem para o processo de ensino-aprendizagem.

Com relação ao conteúdo de Análise Combinatória, são apresentados os seguintes objetivos da aprendizagem para o 3º Ano:

> Utilizar o triângulo de Pascal para encontrar a quantidade de soluções de uma inequação.
>
> Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
>
> Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
>
> Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamento. (PARAÍBA, 2021, p. 278)

Além desses, o documento acrescenta, como objetivos do conhecimento, "Princípios fundamentais da contagem" e "Agrupamentos ordenados e não-ordenados". De fato, estes objetivos da aprendizagem e do conhecimento são os essenciais para compreensão e aplicação dos conceitos combinatórios. E, por isso, é importante pensar uma estratégia de ensino que favoreça o ensino-aprendizagem deste conteúdo.

Por fim, após a reflexão dos documentos apresentados neste capítulo, entendemos que a Análise Combinatória é um dos conteúdos que se faz importante integralizar ao currículo, não somente por sua aplicação em situações práticas, mas também por contribuírem no desenvolvimento do raciocínio, pela análise crítica dos fatos e a tomada de decisões frente as problemáticas.

3.3 O Ensino de Análise Combinatória

O Livro Didático é o principal aporte para o Ensino de Matemática e, consequentemente, para abordagem do conteúdo de Análise Combinatória. Sendo assim, o professor que segue apenas a metodologia proposta nos livros tende a lecionar este conteúdo de forma repetitiva através das listas de exercícios, correndo o risco de desfavorecer, no discente, as habilidades de raciocínio lógico e criatividade. Essa maneira de ensinar matemática é criticada por BOALER (2018, p. 30) quando diz que

> os professores geralmente recebem longas listas de conteúdo a ensinar, com centenas de descrições de conteúdo e nenhum tempo para se

> aprofundar em qualquer ideia. Quando recebem listas de conteúdo para ensinar, os professores deparam-se com uma disciplina que foi reduzida a suas partes básicas, (...) Listas de conteúdos não incluem conexões; elas apresentam a matemática como se as conexões sequer existissem.

Ainda segundo a autora, é necessário proporcionar uma experiência inovadora, capaz de conduzir o aluno ao processo de descoberta e ao prazer em fazer matemática. No entanto, até mesmo os professores mais experientes, conscientes da necessidade de aplicar novas metodologias que estimulem a capacidade criativa dos estudantes, esbarram em dificuldades como a falta de recursos didáticos e/ou de tempo para preparação de metodologias auxiliares.

Por essa razão, investigamos, nas bibliografias relacionadas, alguns recursos e metodologias que podem potencializar o estudo da Análise Combinatória, diferenciando-se do modelo tradicionalista apresentado nos livros didáticos, que é frequentemente questionado, onde os conteúdos matemáticos estão postos de forma linear, seguidos de numerosas listas de exercícios.

Algumas metodologias propõem romper com essa linearidade, por exemplo, a **Modelagem Matemática**, apresentada por (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 12): "Neste sentido, é que entendemos a Modelagem como uma possibilidade de ruptura com a linearidade do currículo, pois nela, não são os conteúdos que determinam os problemas ou as situações, mas os problemas ou situações que determinam os conteúdos".

Além da Modelagem, outras metodologias se apresentam como alternativas na busca por melhores resultados no ensino-aprendizagem de Matemática, dentre as quais podemos citar:

a) Etnomatemática;

b) Resolução de Problemas;

c) História da Matemática;

d) Problematização e Experimentação.

A **Etnomatemática** consiste em aproximar o ensino da realidade dos discentes, envolver o cotidiano nas situações da sala de aula, propor as aulas e atividades baseadas no contexto sociocultural, no território, nas motivações e perspectivas pessoais dos estudantes. Fortemente defendida por seu precursor D'AMBRÓSIO (2002, p. 19),

> o acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais dá, quando devidamente contextualizadas, muito maior capacidade de enfrentar situações e problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível solução ou curso de ação.

> Isto é aprendizagem por excelência, isto é, a capacidade de explicar, de apreender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas. Aprender não é o mero domínio de técnicas, habilidades e nem a memorização de algumas explicações e teorias.

A "aprendizagem por excelência" citada pelo autor é, certamente, o grande objetivo e o principal desafio para os professores de matemática que buscam tornar a aprendizagem mais significativa, fugindo da memorização/reprodução de exemplos e despertando, nos alunos, a sua capacidade criativa.

Na metodologia da **Resolução de Problemas**, por sua vez, os alunos são provocados por situações-problemas a aplicarem os conceitos aprendidos, testar suas hipóteses em situações análogas e reinventar soluções a partir dos erros cometidos. Esta estratégia está descrita nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000b), que aponta os principais benefícios para o ensino de matemática:

> não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas;

A **História da Matemática** como recurso motivador na introdução dos problemas combinatórios é uma estratégia interessante, porque desperta a curiosidade em conhecer mais fatos semelhantes e o contexto que estes poderão ser aplicados. PEREIRA e CAMPOS (2012) utilizam esta metodologia contando sobre o *astragalus* (antepassado dos dados) e o Triângulo de Pascal. MORGADO (1991) e HAZZAN (2013) também utilizam a História para mostrar alguns estudiosos matemáticos e suas respectivas contribuições para o desenvolvimento da Análise Combinatória.

> (...) é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. BRASIL (2018, p. 298)

A **Experimentação** e a **Problematização** remetem à investigação matemática, que incentivam o protagonismo do aluno no processo de criação dos problemas que eles mesmo solucionarão. Estas metodologias cumprem com as recomendações dos PCNs, assemelhando-se, em vários aspectos, com a Resolução de Problemas e da Etnomatemática. Contudo, existem poucos trabalhos trazendo essa abordagem de ensino.

É importante destacar que as metodologias podem e devem ser utilizadas conjuntamente, complementando-se, isto é, contribuindo para melhor compreensão e aplicação dos conteúdos pertinentes à Análise Combinatória. Além delas, existem recursos que agregam às metodologias e potencializam a sua eficiência, tais como: jogos, materiais manipuláveis, TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação), ferramentas computacionais e eletrônicas, etc.

Portanto, pretendemos discorrer um pouco mais sobre a Experimentação e a Problematização aplicadas ao ensino de matemática, em particular, para o conteúdo de Análise Combinatória, objetivando a elaboração de uma atividade direcionada aos professores que estão dispostos a encarar o desafio de inovar a sua metodologia de ensino.

3.4 Problematização e Experimentação na Análise Combinatória

A Problematização, como o próprio nome sugere, é pautada na elaboração de problemas como estratégia para aprendizagem matemática, porém essa metodologia de ensino ainda é pouco comentada. GONTIJO et al. (2019, p. 72) apontam a vantagem de aplicar a Problematização em relação à Resolução de Problemas:

> a vantagem da elaboração de problemas sobre a resolução de problemas estaria, então, no fato de que as tarefas de problematização permitem desenvolver algumas habilidades específicas como invenção de critérios de avaliação e tomada de decisão para mudar de direção como resultado de tal avaliação.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, são recomendados a Resolução de Problemas associada à Experimentação: "A experimentação permite ainda ao aluno a tomada de dados significativos, com as quais possa verificar ou propor hipóteses explicativas e, preferencialmente, fazer previsões sobre outras experiências não realizadas" (BRASIL, 2000b, p. 53). E, a partir dessa indicação, somos provocados a pensar sobre quais maneiras podemos realizar a experimentação na matemática. Quais as contribuições que a experimentação traria para o conhecimento do aluno? O próprio documento contém a resposta:

> (...) adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000b, p. 52)

De fato, são promissores os benefícios da Problematização e Experimentação para o ensino-aprendizagem de Matemática, pois tornam mais efetivo o aprendizado de conteúdos como a Análise Combinatória, onde os alunos demonstram maior envolvimento nas atividades e atingem melhores resultados, bem como estimula-se a capacidade criativa e valorização dos conhecimentos prévios. A Experimentação também contribui no aprendizado científico, conforme destacado nos PCN:

> para o aprendizado científico, matemático e tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, seja de observação e manipulação de situações e equipamentos do cotidiano do aluno e até mesmo a laboratorial, propriamente dita, é distinta daquela conduzida para a descoberta científica e é particularmente importante quando permite ao estudante diferentes e concomitantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual. (BRASIL, 2000b, p. 51-52)

A Experimentação em Matemática pode ser aplicada através da elaboração de problemas feitos pelos próprios alunos, confecção de material didático e dinâmicas que privilegie a interação. Deste modo, a resolução dessas situações permitirão não somente a validação dos conceitos apresentados na teoria, mas também despertar, no educando, a habilidade crítica e ele possa se tornar pesquisador/criador da sua aprendizagem conforme exige o conhecimento matemático. Concordando com a constatação de BOALER (2018, p. 28), "estudantes e adultos se engajam muito mais quando recebem problemas de matemática abertos e têm liberdade para sugerir métodos e caminhos do que quando trabalham sozinhos em problemas que requerem um cálculo e uma resposta".

Além disso, outra consequência imediata é o desenvolvimento das habilidades necessárias para resolver situações aplicadas à realidade, semelhantes às questões contextualizadas da prova do ENEM, que abordam situações cotidianas. Conforme estabelecido na Matriz Curricular do exame, e mais detalhadamente nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000b, p. 44-45),

> as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, **aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática** em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos **conteúdos de contagem**, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Tais habilidades propostas no PCN, estão em consonância com o posicionamento de BOALER (2018, p. 27), que também alerta para o perfil profissional alvo do mercado de trabalho na atualidade, quando nos diz que

> que os empregadores precisam, ele argumenta, é de pessoas que façam boas perguntas, montem modelos, analisem resultados e interpretem

> respostas matemáticas. Foi-se o tempo em que os empregadores precisavam de pessoas para calcular. O que eles precisam agora é de pessoas para pensar e raciocinar.

É, portanto, um período em que as inovações tecnológicas invadem os diversos segmentos da sociedade e, consequentemente, o ambiente educacional, onde professores e alunos precisaram avançar rapidamente no domínio das novas tecnologias, não somente para se manterem informados, mas também para utilizar serviços essenciais como o acesso à educação. Atualmente vivenciamos aquilo que foi predito há mais de vinte anos, através da Base Legal do PCN, quando afirmou que

> a denominada "revolução informática" promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central nos processos de desenvolvimento, em geral. É possível afirmar que, nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias. (BRASIL, 2000a, p. 5)

Os recursos de informática também agregam à Experimentação, pois, com o uso de softwares/aplicativos, é possível realizar projeções, simulações e ilustrações que seriam complicadas de serem executadas apenas com recursos humanos, isto agiliza o processo de ensino, intermediado por um profissional capacitado. Além disso, é preciso estar ciente das outras peculiaridades inerentes ao processo, tais como, o conhecimento prévio da temática, recursos didáticos/eletrônicos disponíveis, plano de trabalho da instituição de ensino, acesso à internet/livros, entre outros.

Assim sendo, selecionamos as metodologias da Problematização e da Experimentação dentre as demais disponíveis, pelo grande potencial que essa oferecem no desenvolvimento da aprendizagem da Análise Combinatória. Apostamos nestas metodologias, como uma forma mais dinâmica, interativa, criativa de se aprender matemática.

4 Análise Combinatória nos Livros Didáticos

O Livro Didático é, certamente, o recurso mais utilizado pelo professor de Matemática. E, quando possível, são inseridos outros meios, tais como dinâmicas, jogos, aparelhos tecnológicos, materiais manipuláveis, etc. Conforme está recomendado nos PCNEM, “Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática” (BRASIL, 2000b, p.53).

Todavia, nem sempre o Ensino de Matemática acontece num cenário favorável à inserção de outros recursos. E, para muitas realidades, o livro didático torna-se o único material disponível, por isso, é fundamental selecioná-lo corretamente.

Essa tarefa é atribuída ao professor, que precisa analisar, dentre as opções disponíveis, aqueles materiais que contém o currículo básico previsto na legislação e que melhor se adequam a sua realidade escolar. Deste modo, sobre a escolha do livro são válidos os seguintes questionamentos:

a) Como selecionar o material mais adequado?

b) Quais conteúdos o livro deve contemplar?

c) Os livros atuais cumprem com as orientações dos documentos nacionais?

Neste trabalho, iremos restringir a análise dos livros apenas para o conteúdo de Análise Combinatória, que geralmente é lecionado na segunda série do Ensino Médio, penúltimo ano da Educação Básica.

Essa é uma fase muito importante, de preparação para o ingresso no Ensino Superior, onde espera-se que o aluno tenha uma postura criativa frente aos problemas combinatórios e, como bem destaca MORGADO (1991, p. 02),

> embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Os livros favorecem o despertar para essa engenhosidade? Ao tentar responder essa pergunta, percebemos o grande desafio que é lecionar Análise Combinatória, pois, além de apresentar os conteúdos e técnicas, é preciso, também, que os professores estimulem a capacidade criativa dos alunos. Por isso, é oportuno discutir sobre a abordagem utilizada nos livros e quais estratégias são oferecidas ao professor para mediar a aprendizagem.

Conforme visto anteriormente, os conteúdos seguiam os Parâmetros Curriculares Nacionais, mas, com a implementação da Base Nacional Comum Curricular em 2018, presume-se que as novas edições passarão por reformulações. Os livros posteriores a 2020 não foram distribuídos às escolas da rede pública da Paraíba, por esse motivo não será possível analisá-los neste trabalho.

4.1 Análise dos livros didáticos

O Governo Federal disponibiliza, através do Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático (PNLD), os livros que cumprem as exigências estabelecidas em edital, dentre as quais destacamos a necessidade de estarem em consonância com o currículo pré-determinado para cada série, conforme os documentos normativos (Capítulo 3).

> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. (BRASIL, 2021) [1].

Procedemos com a análise de dois exemplares de Livros Didáticos, distribuídos na rede pública de ensino, que foram contemplados pelo PNLD na vigência 2018-2020. Nesta avaliação, apontamos seis quesitos, tomando por base o trabalho de SILVA (2018, p. 13-29):

1. Introdução do capítulo;
2. Abordagem do conteúdo;
3. Exemplos, exercícios e atividades;
4. Uso de tecnologias;
5. Contexto Histórico;
6. Relação com o ENEM.

[1] Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>. Acesso 08/09/2021, às 08:05.

Esses tópicos podem contribuir na escolha do material mais adequado a ser utilizado no ensino de Análise Combinatória.

Os dois livros são destinados à segunda série do Ensino Médio. Neles pretendemos destacar aspectos pertinentes ao conteúdo de Análise Combinatória e, caso possível, apresentar sugestões. Salientamos que não temos a intenção de apontar erros, criticar ou promover a autoria, e, por esse motivo, os exemplares serão distinguidos por *"LIVRO A"* e *"LIVRO B"*.

4.2 Análise do Livro A

O primeiro livro analisado foi editado em 2016. Sua estrutura contempla dez capítulos, divididos em quatro unidades, que são sugestivas para cada bimestre letivo. Para abordar conteúdo de Análise Combinatória, foram dispensadas 28 páginas, postas no nono capítulo (quarta unidade).

O posicionamento deste conteúdo, no penúltimo capítulo, desperta a seguinte preocupação: caso o professor siga a sequência apresentada no livro e aconteça imprevistos no decorrer do ano letivo, o que aconteceria com o conteúdo de Análise Combinatória? Certamente seria suprimido ou lecionado superficialmente em vistas a cumprir todo o cronograma.

Esta decisão acarretaria uma consequência imediata na aprendizagem do conteúdo seguinte, visto que muitos cálculos probabilísticos dependem das técnicas de contagem para definição do espaço amostral, conforme previsto na BNCC (BRASIL, 2018), através da "Habilidade (EM13MAT311): Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade."

Após essa constatação inicial, prossigamos com a discussão dos itens mencionados anteriormente:

a) **Introdução do capítulo:** A imagem de um cadeado com senha alfanumérica ilustra a abertura do capítulo, indicando que, neste objeto, há uma aplicação do conceito de Análise Combinatória. É um recurso interessante, pois motiva o professor a iniciar essa temática apresentando outras situções práticas. E também desperta a curiosidade dos discentes em constituir senhas, o que se configura como uma atividade de experimentação para aprendizagem do conceito.

b) **Abordagem do conteúdo:** A abordagem do conteúdo, no decorrer do capítulo, é feita pela utilização de exemplos que possibilitam compreender as diversas situações envolvendo problemas combinatórios. Em seguida, é enunciada a definição do conceito e a apresentação das fórmulas, com a seguinte preocupação, destacada numa observação ao final da página: “Compreender o que está sendo feito é mais importante do que decorar a fórmula e aplicá-la”.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O capítulo contempla boa quantidade de exemplos com respectivas soluções. Ao todo, estão dispostos 5 exemplos e 31 exercícios resolvidos, além de 78 exercícios propostos. Alguns dos exercícios resolvidos apontam para a existência de múltiplos caminhos para se chegar à solução, isto revela a intenção de ampliar a visão do discente em formular a própria estratégia. Além dos exemplos resolvidos, o material contém exercícios semelhantes que auxiliam na fixação do conceito e familiaridade com a notação.

d) **Uso de tecnologias:** Não há indicação para utilização de recursos tecnológicos, embora alguns dos exercícios permitam realizar o experimento prático como, por exemplo, retirada de bolas de uma urna onde, neste caso, poderia ser sugerido a confecção de material manipulável. Além disso, são propostos desafios para formulação de estratégias e resolução em duplas/grupo, indicados por um ícone.

e) **Contexto Histórico:** Outro aspecto interessante do capítulo foi a utilização de recortes históricos relacionados ao conteúdo, por exemplo, os problemas de contagem na antiguidade *I Ching* e *Lo Shu*, que foram apresentados na Seção 2.1. O livro também trouxe questões combinatórias mais recentes, como o Clássico *Problema das 7 Pontes de Königsberg* (Seção 2.5), apresentado pelo matemático suiço Leonard Euler em 1735, e o *Problema de Lucas*, do matemático François Éduard Lucas (1842-1891).

f) **Relação com o ENEM:** Ao término da unidade, o livro contém uma seção intitulada “Pensando no ENEM”, que traz situações alternativas dentro de um contexto que pode ser objeto de questão. Em seguida, foram colocadas várias questões aplicadas em vestibulares e no ENEM. Três dessas questões pertencem ao conteúdo de Análise Combinatória e foram aplicadas no Exame, porém a resposta é dada apenas por gabarito, que indica a alternativa correta, ou seja, não houve detalhamento da resolução.

Dentro das características destacadas, o conteúdo foi subdividido em nove seções que permitem compreender as técnicas de contagem, para agrupamentos de objetos ordenados ou não-ordenados:

1. Princípio da Multiplicação ou Princípio Fundamental da Contagem;

2. Permutação simples e fatorial de um número;

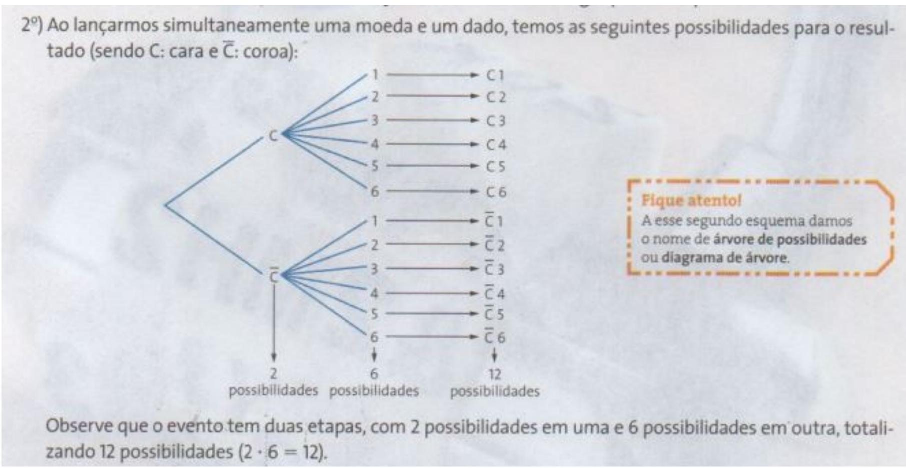
3. Permutação com repetição;
4. Arranjo Simples;
5. Combinação Simples;
6. Problemas que envolvem vários tipos de agrupamentos;
7. Números binomiais;
8. Triângulo de Pascal ou triângulo aritmético;
9. Binômio de Newton.

Discutiremos os conteúdos listados nas seções de (1) a (5), visto que eles integram os principais conteúdos da Análise Combinatória. Para isto, extraímos trechos do livro que serão apresentados por imagens (recortes) da formatação original, visando preservar a redação oficial dada às definições. Alguns exemplos e exercícios estão transcritos para discutirmos as soluções e elaborarmos comentários, quando oportuno.

4.2.1 Princípio da Multiplicação ou Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) foi introduzido por três problemas que exemplificam a sua utilização. Além disso, também foi apresentado a **árvore de possibilidades** (ou **diagrama da árvore**), que consiste num recurso visual muito importante e bastante utilizado para ilustrar problemas de contagem.

Figura 8 – Exemplo PFC e Árvore de possibilidades


2º) Ao lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e $\overline{C}$: coroa):

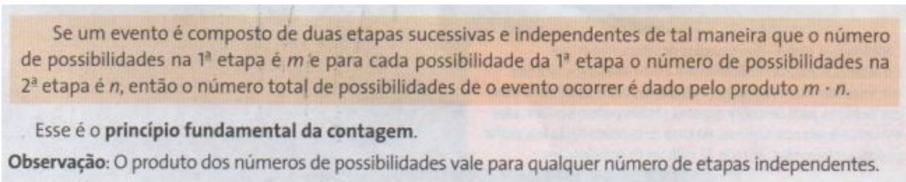
Fique atento!
A esse segundo esquema damos o nome de **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**.

Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \cdot 6 = 12$).

Fonte: LIVRO A

A quantidade de "ramificações" dessa árvore auxilia na enumeração total das possibilidades, o que nos direciona a compreensão da definição do PFC (Figura 9).

Figura 9 – Definição do Princípio Fundamental da Contagem



Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

Fonte: LIVRO A

Os exemplos utilizados são clássicos para o Princípio Fundamental da Contagem: a) Modos de realizar um trajeto entre três cidades; b) Lançamento de dado e moeda simultâneos; c) Composição de uma refeição a partir das opções de comida; d) Representação numérica com algumas opções algarismos. Nessas situações ficam evidentes a característica essencial das etapas serem independentes e, portanto, aplicação do **Princípio Multiplicativo**.

Na parte de exercícios, segue-se os modelos dos exemplos apresentados, dentre os quais destacamos dois exercícios que foram sugeridos para resolução em dupla:

Exercício 1. *Uma prova é composta de 7 questões do tipo "Verdadeiro ou Falso". De quantas maneiras um aluno pode responder a essa prova aleatoriamente, ou seja, "chutando" as respostas?*

Solução: Para resolver cada uma das questões, existem duas opções, Verdadeiro (V) ou Falso (F). Como as respostas em cada uma das questões independem da anterior, segue-se pelo princípio multiplicativo, que existem $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ maneiras de responder as sete questões aleatoriamente. ∎

Exercício 2. *Em um salão de festas há 6 janelas. De quantas maneiras podemos escolher quais janelas estarão abertas ou fechadas, de modo que pelo menos uma das janelas esteja aberta?*

Solução: Nesta questão também utilizamos o Princípio Fundamental da Contagem. Para se contabilizar todas as possibilidades de manter as janelas Abertas (A) ou Fechadas (F), teremos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$. Contudo, existe uma condição adicional: pelo menos uma das janelas deve estar aberta. Então, do total de possibilidades, precisamos retirar aquela sequência que possui todas as janelas fechadas, ou seja, não satisfaz esta condição. Portanto, existem $64 - 1 = 63$ maneiras de observar a disposição das janelas abertas e/ou fechadas. ∎

4.2.2 Permutação simples e fatorial de um número

Permutar é sinônimo de trocar, ou seja, para tratar dos problemas de contagem onde precisamos quantificar as diferentes formas de embaralhar objetos, iremos utilizar o conceito de Permutação.

O autor apresenta dois exemplos simples:

a) Permutar três números: 1, 2 e 3;

b) Permutar quatro letras: A, N, E, L.

Mostrando que, nestes casos, há uma dependência entre a escolha do primeiro objeto (letra ou número), para escolha do item seguinte com um objeto a menos, ou seja, $n-1$.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Assim, a definição de Permutação (Figura 10) de n objetos advém, intuitivamente, quando retiramos um objeto a cada etapa da contagem até que se encerre a quantidade total. Neste caso, utilizamos o **Princípio Multiplicativo** na contagem dos agrupamentos ordenados, conforme a seguinte definição:

Figura 10 – Definição de Permutação Simples

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de **permutações simples**. Indicamos por P_n o número de permutações simples de n elementos e escrevemos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fonte: LIVRO A

Essa contagem de objetos pelo critério de ordenação, sem repetição, também é conhecido por **Fatorial**. A notação de Fatorial permite operar com números de forma simplificada, pois, se expresso todos os algarismos, resultaria um número muito extenso.

Figura 11 – Conceito de Fatorial

O valor obtido com P_n é também chamado **fatorial** do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial").

Assim, temos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 1$.

Considera-se $0! = 1$.

Fonte: LIVRO A

Os exercícios propostos são semelhantes aos exemplos apresentados: a) variações de letras na constituição de anagramas sob certas condições; b) constituir números a partir de alguns algarismos; c) operações com fatorial. Destacamos um, que contempla uma situação cotidiana e aplica o conceito de permutação:

Exercício 3. *De quantas maneiras uma família de 5 pessoas podem se sentar em um banco de 5 lugares, ficando duas delas (por exemplo, pai e mãe) sempre juntas em qualquer ordem?*

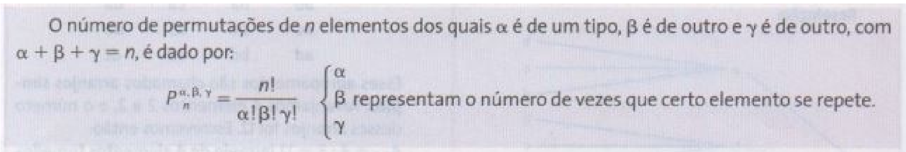
Solução: Duas pessoas que sentarão sempre juntas podem ser contabilizadas como uma única, assim a questão é adaptada para permutar 4 pessoas (três pessoas e uma dupla), ou seja, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Mas, como a ordem da dupla altera a composição, devemos permutá-la também $2! = 2 \times 1 = 2$. Portanto, pelo PFC, existem $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ maneiras de acomodar a família nas condições apresentadas. ■

4.2.3 Permutação com repetição

Seguindo o raciocínio do conteúdo anterior, desta vez foi utilizado a composição de anagramas para introduzir o conceito. Porém, nesta seção, existe o diferencial que é a repetição da(s) letra(s).

No caso da contagem com objetos repetidos, é necessário realizar o procedimento de divisão, do número total de permutações (fatorial) pelo produto dos fatoriais que quantificam as repetições. Segue a definição:

Figura 12 – Definição de Permutação com Repetição


O número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por:

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} \quad \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \text{representam o número de vezes que certo elemento se repete.}$$

Fonte: LIVRO A

Os exemplos resolvidos também tratam de anagramas. Já os exercícios propostos abordam situações mais interessantes, como este a seguir:

Exercício 4. *Um casal pretende ter 4 filhos, sendo 2 meninas e 2 meninos, em qualquer ordem de nascimento. Quantas são as ordens possíveis em que podem ocorrer esses 4 nascimentos?*

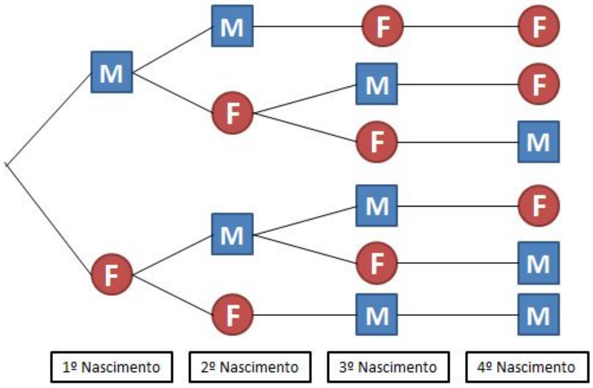
Solução: Tomemos $P_4 = 4!$, que representa os nascimentos dos quatro filhos, e, consideremos as expectativas do casal de serem dois meninos e duas meninas, isto é, $P_2 = 2!$ e $P_2 = 2!$, que representam os elementos repetidos. Para realizar a contagem das possíveis ordens dos nascimentos, aplicaremos o conceito de Permutação com repetição, onde:

$$\frac{P_4}{P_2 \times P_2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2 \times 1 \times \cancel{2!}} = 6.$$

■

Além da solução dada pela fórmula, podemos comprovar o resultado utilizando o recurso visual da Árvore de Possibilidades (Figura 13). Neste caso, extraímos as ramificações da árvore completa que contém $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ ramos.

Figura 13 – Árvore de possibilidades - Permutação com repetição



Fonte: Autoral

4.2.4 Arranjo Simples

Arranjo Simples é outra técnica de contagem aplicada para os agrupamentos ordenados, isto significa que objetos arranjados serão distintos, a depender de sua disposição. Nos exemplos introdutórios, observamos que este conceito é semelhante à Permutação, contudo, nas situações de Arranjo, não necessariamente serão agrupados todos os objetos.

O quantitativo de objetos arranjados p, dentro da quantidade total n, será um número cada vez mais próximo do número de permutações para a mesma quantidade de objetos.

No caso geral de n elementos arranjados p a p, com $p \leq n$, $A_{n,p}$ é dado por:

Figura 14 – Definição de Arranjo

Arranjos simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Fonte: LIVRO A

Esta fórmula do Arranjo é resultante do seguinte procedimento:

Para $p = n$, temos $A_{n,n} = P_n = n!$

Para $p < n$, temos n elementos distintos e vamos arranjá-los p a p. Através da árvore de possibilidades, temos:

- Na primeira posição há n possibilidades;

- Na segunda posição há $(n-1)$ possibilidades;

- Na terceira posição há $(n-2)$ possibilidades;

  $\vdots$

- Na p-ésima posição há $n-(p-1)$ possibilidades.

Os fatores desse produto vão diminuindo uma unidade, até a p-ésima posição $n-(p-1)$. Aplicando o **Princípio Fundamental da Contagem**, obteremos o número total de possibilidades:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot [(n-(p-1)]$$
$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot [(n-p)+1)]$$

Multiplicando $A_{n,p}$ por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$ (que não altera o resultado), e procedendo com as operações de fatorial, é possível obter a fórmula do Arranjo Simples, conforme Figura 14.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Dando continuidada ao capítulo, são apresentados oito exercícios resolvidos, que se aplicam o conceito de Arranjo. Em cada um deles foram detalhadas duas maneiras para solucionar o problema: sem usar a fórmula e usando a fórmula. Vejamos um desses exemplos:

Exemplo 1. *Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada uma de uma cor?*

Solução 1 (sem utilizar a fórmula): A região Sul do Brasil possui três estados (Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul). Para pintar o primeiro estado temos 5 cores disponíveis. Para colorir o segundo estado, sem repetir a cor anterior, temos 4 cores disponíveis. Para colorir o terceiro estado, há 3 possibilidades, excetuando-se as duas utilizadas anteriormente. Logo, pelo PFC, são $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilidades.

■

Solução 2 (utilizando a fórmula): 5 cores disponíveis e 3 estados a serem coloridos. Assim, devemos calcular:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \times 4 \times 3 = 60,$$

que são as maneiras diferentes de se colorir, distintamente, os três estados.

■

Apresentar mais de uma solução nos exemplos é uma estratégia que privilegia a capacidade criativa dos alunos, que poderão compará-las e sentir-se motivados a buscar uma solução própria. Tendo a fórmula apenas como auxílio, ao invés de simplesmente memorizar e reproduzir. Dois dos exercícios propostos que podem ser resolvidos pelo conceito de arranjo são:

1. De quantas maneiras podemos escolher uma pivô e uma ala em um grupo de 12 jogadoras de basquete?
2. Em um sofá há lugares para 4 pessoas. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 6 pessoas?

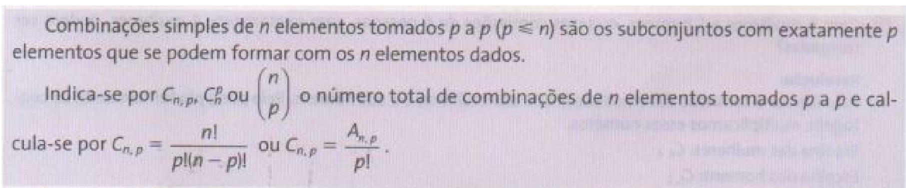
4.2.5 Combinação Simples

Na apresentação desta seção, foi utilizado um exemplo bastante comum nas questões de combinação: formar uma comissão a partir de certa quantidade de pessoas. Neste exemplo, foi sugerido quantificar as comissões de três membros selecionados, dentre cinco disponíveis.

Observe que, nesta situação, a ordem dos elementos não interfere na constituição da comissão, ou seja, não gera uma nova composição. Sendo subconjuntos de um conjunto, a ordem dos elementos não importa assim, só consideramos subconjuntos distintos os subconjuntos que diferem pela natureza dos seus elementos.

Calcular o número total de combinações simples de n objetos tomados p a p é o mesmo que perguntar de quantos modos podemos selecionar p objetos entre n objetos distintos dados.

Figura 15 – Definição de Combinação Simples



Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leqslant n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações de n elementos tomados p a p e calcula-se por $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!}$.

Fonte: LIVRO A

Além disso, é possível determinar o número de Combinações $C_{n,p}$, a partir da divisão de um Arranjo $A_{n,p}$ pela Permutação $p!$:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Tem-se a seguinte propriedade, conhecida como igualdade das combinações: $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, pois,

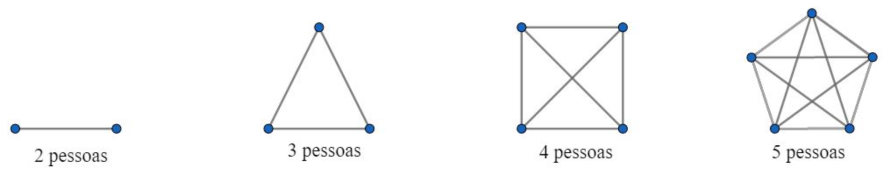
$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_{n,n-p}$$

O exemplo a seguir, apesar do enunciado simples, exige criatividade e uma boa estratégia para organizar as informações e chegar ao quantitativo total de apertos de mão. Existem mais de uma maneira para resolvê-lo, e o livro analisado apresenta três alternativas de respostas.

Exemplo 2. *No primeiro dia de aula de Matemática do 2º Ano, 30 alunos estavam presentes na sala de aula. Para se conhecerem melhor, o professor sugeriu que cada aluno cumprimentasse o outro com um aperto de mão e uma breve apresentação. Qual foi o total de apertos de mão?*

1ª Solução - Usando Diagramas: Pontos representando as pessoas e traços ligando os pontos representando os apertos de mão. Com essa estratégia é possível desenhar as situações com 2 pessoas, 3 pessoas, 4 pessoas, e daí por diante (Figura 16). A contagem é relativamente simples para um número reduzido de pessoas. Mas, se cresce o número, aumenta também a dificuldade de visualização das ligações e a tarefa de contabilizar.

Figura 16 – Solução de Exemplo - Combinação Simples



Fonte: Autoral

Observamos, pelo recurso visual, que cada pessoa está ligada a todas outras, exceto a ela própria. Assim, a ligação representa ida e volta, precisamos reduzí-los pela metade a quantidade de apertos.

Assim, partimos para uma tentativa de generalização do resultado:

Para 2 pessoas: $\frac{2 \cdot 1}{2}$, contamos 1 aperto de mão;

Para 3 pessoas: $\frac{3 \cdot 2}{2}$, contamos 3 apertos de mão;

Para 4 pessoas: $\frac{4 \cdot 3}{2}$, contamos 6 apertos de mão;

Para 5 pessoas: $\frac{5 \cdot 4}{2}$, contamos 10 apertos de mão;

E assim sucessivamente. Então, seguindo essa estratégia, é possível quantificar:

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2} = 435$$

■

2ª Solução - Generalização de uma P.A.: Estruturando uma tabela, de modo semelhante a solução anterior. Dessa vez tomou-se o cuidado para evitar a duplicação dos apertos de mão, então:

Para 2 pessoas: Podemos contabilizar 1 aperto de mão;

Para 3 pessoas: A primeira pessoa realiza 2 apertos de mão; a segunda realiza 1 aperto de mão, pois não precisará apertar novamente a mão da primeira. Podemos contabilizar, no total, $2 + 1 = 3$ apertos de mão;

Para 4 pessoas: A primeira pessoa realiza 3 apertos de mão; a segunda realiza 2 apertos de mão, pois não precisará apertar novamente a mão da primeira; a terceira realiza 1 aperto de mão, pois não precisará apertar novamente a mão da primeira e da segunda. Podemos contabilizar, no total, $3 + 2 + 1 = 6$ apertos de mão;

Para 5 pessoas: A primeira pessoa realiza 4 apertos de mão; a segunda realiza 3 apertos de mão, pois não precisará apertar novamente a mão da primeira; a terceira realiza 2 apertos de mão, pois não precisará apertar novamente a mão da primeira e do segunda; a quarta realiza 1 aperto de mão, pois não precisará apertar novamente a mão da primeira, da segunda e da terceira; Podemos contabilizar, no total, $4+3+2+1 = 10$ apertos de mão.

Repetindo o mesmo procedimento, para os 30 alunos, resulta o somatório $29+28+27+26+25+\cdots+3+2+1$, que remete à soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA) dada por: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Neste caso, $a_1 = 1$, $a_n = 29$ e $n = 29$.

$$S_{29} = \frac{(1 + 29) \cdot 29}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2} = 435$$

■

3ª Solução - Usando a fórmula da Combinação: Sabendo que não importa a ordem nos cumprimentos, a contagem total será o resultado da Combinação dos 30 alunos, tomados 2 a 2.

$$C_{30,2} = \frac{30!}{2! \cdot (30 - 2)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \cancel{28!}}{2! \cdot \cancel{28!}} = \frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2} = 435$$

■

A partir destas três soluções apresentadas, elaboramos uma quarta opção complementar, que trata-se de um modelo pautado na experimentação. Vejamos:

Solução Complementar: Para facilitar a contagem por esse procedimento, imaginemos a situação em que estão reunidos os 30 alunos na sala. O aperto de mão será um gesto de despedida e, após cumprimentar todos os presentes, o aluno sairá da sala. Repetindo o gesto até que os dois últimos se congratulem. Deste modo, a contagem evitará duplicação. Após a saída de cada aluno será anotado no quadro a quantidade de apertos de mão que foram dados. O somatório pode ser apresentado após todos retornarem ao ambiente. ■

Outros exemplos de Combinação foram apresentados e novamente foi incentivado adotar mais de um caminho para se chegar à solução e os exercícios foram elaborados seguindo o mesmo modelo.

4.3 Análise do LIVRO B

O Livro B possui características semelhantes ao trabalho que foi analisado anteriormente em relação à edição, pois também foi produzido em 2016, disponibilizado para as escolas na vigência 2018-2020 do PNLD.

Contendo onze capítulos, a Análise Combinatória está posicionada em penúltimo (anterior ao da probabilidade), sendo que foram dedicadas 25 páginas ao seu estudo. Percebe-se que a sequência de Análise Combinatória anterior à Probabilidade é intencional, visto que as técnicas de contagem são necessários à realização de cálculos probabilísticos, conforme está descrito na BNCC.

A seguir discutiremos, para o segundo livro, os mesmos pontos destacados para o LIVRO A, que servirão de comparação entre as duas obras:

a) **Introdução do capítulo:** Para iniciar o conteúdo, foram enunciados quatro situações práticas, que são qualificadas como problemas de contagem e ajudam a despertar o interesse pelo assunto. Não teve maior destaque e nem foram utilizados outros recursos, tais como figuras, que poderiam despertar a curiosidade dos educandos e reforçar a temática.

b) **Abordagem do conteúdo:** Após a introdução, seguiram-se com a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial, que serão essenciais para desenvolvimento e compreensão dos tópicos seguintes. O recurso do diagrama da árvore de possibilidades foi utilizado para ilustrar as situações de contagem. A obra privilegia a resolução de problemas que estão relacionadas à situações práticas, através de exemplos e/ou exercícios sobre o conteúdo. Em seguida, é dada a teoria que contém as fórmulas necessárias para se compreender a notação.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** Ao todo estão dispostos 7 exemplos, 12 exercícios resolvidos, 83 exercícios propostos e 1 desafio, sendo que a maioria deles estão relacionados com situações práticas. No decorrer do capítulo, encontramos 7 caixinhas com o título sugestivo "Pense Nisto", que trazem reflexões interessantes para investigar os conhecimentos combinatórios.

d) **Uso de tecnologias:** Não consta o indicativo do uso de tecnologias para se verificar os procedimentos de contagem.

e) **Contexto Histórico:** Neste capítulo, em particular, não foi utilizado o recurso de História da Matemática.

f) **Relação com o ENEM:** Dentre os exercícios propostos consta apenas uma questão que foi retirada do ENEM. A questão foi colocada no primeiro bloco, ou seja, onde é necessário apenas o conhecimento do PFC e fatorial para resolvê-la. A solução da questão citada será abordada no capítulo seguinte, Questão 10 - ENEM 2014.

A sequência dos conteúdos também é semelhante ao primeiro trabalho, contudo foram contemplados menos tópicos. Vejamos:

1. Princípio Fundamental da Contagem (PFC)
2. Fatorial de um número natural
3. Agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações
4. Permutações com elementos repetidos

O livro dá maior ênfase ao **Princípio Fundamental de Contagem** e **Fatorial** e, logo na introdução, reuniu uma quantidade significativa de questões, a fim de serem bem trabalhadas antes de avançar para os tipos de agrupamentos simples.

4.3.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Antes de enunciar o conceito propriamente dito, o exemplar apresenta quatro exemplos onde são aplicados o **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**:
a) Combinação de suco e sanduíche;
b) Lançamento de uma moeda três vezes;
c) Viagem entre três cidades;
d) Definição de uma senha com três dígitos distintos.

Destacamos o exemplo *(c)*, que foi resolvido conforme a Figura 17. A utilização do recurso visual ilustra a quantidade de caminhos ligando as cidades A e B, e também as cidades B e C. Em seguida, foi nomeado cada um dos caminhos que unem as cidades, para podermos quantificar as maneiras possíveis para se realizar o trajeto. Assim, teremos $4 \times 2 = 8$.

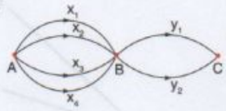
Figura 17 – Exemplo do Princípio Fundamental da Contagem

Quatro estradas ligam as cidades **A** e **B**, e duas estradas ligam as cidades **B** e **C**. De quantas maneiras distintas pode-se ir de **A** a **C**, passando por **B**?

Vamos representar as estradas que ligam as cidades **A** a **B** por $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ e as que ligam as cidades **B** a **C** por $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$.

Há duas etapas sucessivas a serem cumpridas; na primeira, deve-se ir de **A** até **B** e, na segunda, de **B** até **C**.

Cada caminho determina uma sequência de dois elementos (x_i, y_j), em que $x_i \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $y_j \in \{y_1, y_2\}$, como mostra o esquema ao lado.



Caminhos possíveis: (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_4, y_2).

O número de maneiras de realizar a viagem completa corresponde ao número de sequências possíveis, que é $4 \cdot 2 = 8$.

Fonte: LIVRO B

Análogo a outro recurso fundamental utilizado nas técnicas de contagem, temos o **diagrama da árvore de possibilidades**, cujas ligações permitem contabilizar a quantidade de "caminhos" que são expressos no PFC.

Para definir o PFC suponhamos uma sequência formada por k elementos $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$, em que:

- a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras distintas;
- a_2 pode ser escolhido de n_2 formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- a_3 pode ser escolhido de n_3 formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
  $\vdots$
- a_k pode ser escolhido de n_k formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores.

Que resulta na definição a seguir:

Figura 18 – Definição do Princípio Multiplicativo

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

Esse resultado é conhecido como **princípio fundamental da contagem** (PFC) ou **princípio multiplicativo** e serve de base para a resolução de muitos problemas de contagem.

Fonte: LIVRO B

Depois disso, outros três exercícios são resolvidos para compreender melhor a utilização do PFC:

1. Uma prova é composta de 8 questões do tipo verdadeiro (V) ou falso (F). De quantas maneiras distintas podem ser respondidas todas as questões dessa prova?

2. A seleção brasileira de futebol irá disputar um torneio internacional com outras cinco seleções, no sistema "todos jogam contra todos uma única vez". Quantas são as possíveis sequências de resultados - vitória (V), empate (E) e derrota (D) - da equipe brasileira nesse torneio?

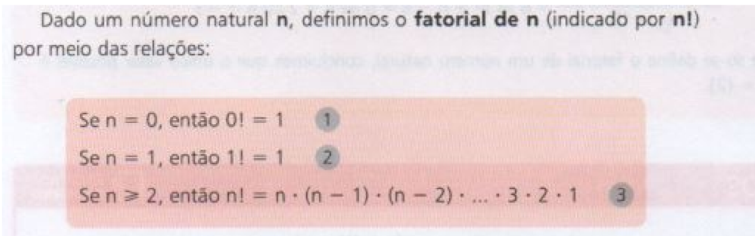
3. Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, responda: a) Quantos números de três algarismos podemos formar? b) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

A seção encerra-se com a proposta de 27 exercícios, de contextos variados, a partir dos quais é possível treinar a aplicação do PFC para diferentes situações hipotéticas.

4.3.2 Fatorial de um número natural

O conceito de **Fatorial** (Figura 19) é enunciado para justificar as operações com multiplicação de números naturais consecutivos. Sendo aplicado para simplificar as operações e agilizar a resolução das questões combinatórias.

Figura 19 – Definição de Fatorial



Dado um número natural **n**, definimos o **fatorial de n** (indicado por **n!**) por meio das relações:

Se n = 0, então 0! = 1 (1)
Se n = 1, então 1! = 1 (2)
Se n ⩾ 2, então n! = n · (n − 1) · (n − 2) · ... · 3 · 2 · 1 (3)

Fonte: LIVRO B

Caso o n seja um número muito grande será trabalhoso desenvolvê-lo, valendo a seguinte propriedade:

$$n! = n \cdot (n-1)!,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Essa propriedade indica que nem sempre é necessário seguir com a multiplicação dos termos até o menor natural, ou seja, a interrupção do fatorial permite uma simplificação com outro termo. Por isso, nesse tópico foi priorizado as operações com fatoriais, que serão bastante úteis para calcular os agrupamentos simples detalhados na seção seguinte. Por exemplo:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

A partir dessa propriedade também é possível instigar o seguinte desafio:

Pense Nisto: *Se $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, então o fatorial de n é sempre um número par. Explique.*

Solução: Conforme já visto, se $n \geq 2$, então $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots\ \cdot 2 \cdot 1$
Ou ainda $n! = 2 \times [n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots\ \cdot 3]$.
Mas, como o produto de 2 por qualquer número k é sempre par, seja ele par ou ímpar. Concluímos que $n!$, para $n \geq 2$, será sempre par.

■

É um questionamento interessante que pode incentivar uma discussão em grupo, contribuindo ainda mais na aprendizagem e fixação do conceito.

4.3.3 Agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações

Agrupamentos simples são aqueles grupos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos de um conjunto, com $k \leq n$.

4.3.3.1 Permutações

A situação escolhida para exemplificar uma aplicação de **Permutação** consiste em verificar a quantidade de maneiras possíveis de posicionar 4 estudantes em 4 carteiras disponíveis.

Utilizando uma tabela (Figura 20), foram anotadas 24 possibilidades. Procedimento, que pode ser replicado como atividade prática para ilustrar o conceito envolvido.

Figura 20 – Exemplo de Permutação - Tabela de Possibilidades

	1ª	2ª	3ª	4ª
1	A	B	C	D
2	A	B	D	C
3	A	C	B	D
4	A	C	D	B
5	A	D	C	B
6	A	D	B	C
7	B	A	C	D
8	B	A	D	C
9	B	C	A	D
10	B	C	D	A
11	B	D	A	C
12	B	D	C	A

	1ª	2ª	3ª	4ª
13	C	A	B	D
14	C	A	D	B
15	C	B	A	D
16	C	B	D	A
17	C	D	A	B
18	C	D	B	A
19	D	A	B	C
20	D	A	C	B
21	D	B	A	C
22	D	B	C	A
23	D	C	A	B
24	D	C	B	A

Fonte: LIVRO B

A solução advém do PFC, pois:

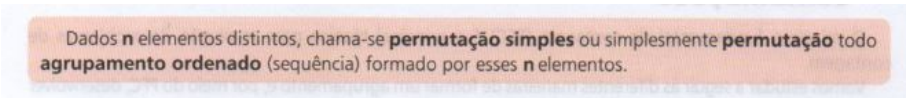
- Há 4 pessoas para ocupar primeira carteira;

- Definida a primeira posição, há três pessoas disponíveis para ocupar a segunda carteira;
- Definidas a primeira e a segunda posições, há duas pessoas disponíveis para ocupar a terceira carteira;
- Por fim, depois de definidas as outras posições, temos que existe apenas uma pessoa disponível para ocupar a quarta carteira;

Portanto, verifica-se a quantidade de possibilidades é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

A característica principal para distinguir estes agrupamentos é a ordenação dos elementos, pois cada disposição configura uma nova sequência, e, por isso, a Permutação é um tipo de agrupamento ordenado. Segue a definição apresentada no livro (Figura 21):

Figura 21 – Definição de Permutação



Dados **n** elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por esses **n** elementos.

Fonte: LIVRO B

A composição de anagramas é frequentemente utilizada para exercitar o conceito de Permutação, pois, seguindo o mesmo Princípio Fundamental da Contagem, é possível contabilizar a quantidade de variações. Assim, por exemplo, a palavra PRATO possui 5 letras e pode gerar $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagramas.

Mais uma vez a caixinha, trouxe uma relevante indagação.

Pense Nisto: *Como seria a representação dessas possibilidades em um diagrama de árvore?*

Solução: Seria uma árvore com 120 ramos, ou seja, a representação de todas possibilidades. Isto nos alerta para o fato de que nem sempre é viável tentar ilustrar o problema pelo diagrama da árvore, mas se faz uma atividade interessante para fixar a compreensão e validação do PFC para problemas de permutação.

■

Dentre os exercícios propostos, destacamos um, acompanhado da respectiva solução. Trata-se de uma situação que pode acontecer no cotidiano, ao pensarmos na organização de uma casa ou exposição de itens numa galeria para visitação.

Exercício 5. *Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria. De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?*

Solução: Os cinco livros de Álgebra permanecendo juntos terão 5! possibilidades, do mesmo modo que os três livros de Geometria e os dois Trigonometria, terão 3! e 2! modos de serem organizados, respectivamente. Assim, $P_5 \cdot P_3 \cdot P_2 = 5! \cdot 3! \cdot 2!$ representa os modos de serem organizados os dez livros, separados por área. Mas é importante observar que as áreas também podem permutar na prateleira, ou seja, como são 3, teremos 3! possibilidades de organizá-las. Portanto, a quantidade de modos distintos para se arrumar os 10 livros na prateleira será $P_3 \cdot (P_5 \cdot P_3 \cdot P_2) = 3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 8.640$.

■

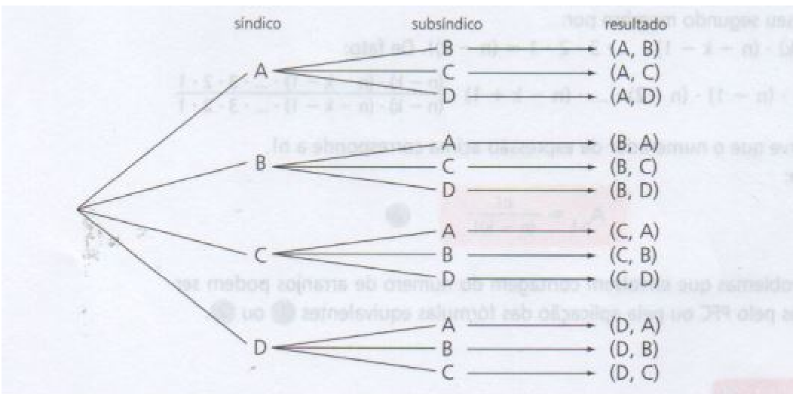
Este exemplo é uma aplicação do conceito de Permutação que necessita também do PFC. As variações no contexto contribuem para exercitar a capacidade de raciocínio dos alunos em desenvolver as próprias soluções. Além disso, os próprios discentes podem incrementar o desafio e testar os colegas.

Ao invés de livros, pode ser modificado os objetos a serem permutados, por exemplo, o posicionamento de amigos para tirar uma foto: *"Giba e Gina tem três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado. De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir? Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?"*.

4.3.3.2 Arranjos

O conceito de **Arranjo** é o segundo tipo de agrupamento abordado nesta seção, que foi iniciado através de um exemplo: uma reunião de condomínio com quatro pessoas (A, B, C e D), onde serão eleitos síndico e subsíndico. Para ilustrar as possíveis composições, foi utilizado o **diagrama da árvore de possibilidades**.

Figura 22 – Diagrama da Árvore de Possibilidades



Fonte: LIVRO B

Cada "ramificação" da árvore resulta numa dupla que pode ser eleita para os cargos. Isto corresponde a um **agrupamento ordenado**. Pois as composições de mesmos elementos serão distintos pela ordem, ou seja, (A,B) é diferente de (B,A), visto que serão ocupados cargos diferentes.

Figura 23 – Definição de Arranjo

Dado um conjunto com **n** elementos distintos, chama-se **arranjo** desses **n** elementos, tomados **k** a **k** (com k ⩽ n), qualquer agrupamento ordenado de **k** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

Fonte: LIVRO B

Pela definição (Figura 23) percebemos que o resultado da votação corresponde a um Arranjo de quatro objetos (pessoas) tomados dois a dois (cargos a serem preenchidos), denotado por $A_{4,2}$.

Pelo PFC, também é possível concluir o mesmo resultado, pois:

- Para escolha do cargo de síndico há 4 opções;
- Após escolha do síndico, restam 3 opções para para o cargo de subsíndico.

Portanto, $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Ainda pelo PFC, podemos deduzir uma generalização para os cálculos de $A_{n,k}$, ou seja, n elementos tomados k a k. Vejamos:

- Existem n maneiras de selecionar o primeiro elemento;
- Existem $(n-1)$ maneiras de selecionar o segundo elemento, considerando que já foi escolhido o primeiro e não é possível repetí-lo;
- Existem $(n-2)$ maneiras de selecionar o terceiro elemento, considerando que já foram escolhidos o primeiro e o segundo elementos, não podendo haver repetição;
  $\vdots$
- Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $(k-1)$ escolhas anteriores, sobram $n-(k-1) = (n-k+1)$ opções.

Assim, pelo PFC, a quantidade de Arranjos possíveis é

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1).$$

Usando fatorial, basta multiplicar e dividir a expressão por

$$(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Assim, obtemos

$$A_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Portanto,

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exercício 6. *A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 de alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?*

Solução: Seja o formato da senha requerida: $L\ L\ A\ A\ A$, onde $L = Letra$ e $A = Algarismo$. Para escolha das duas letras distintas, temos 26 opções, para selecionar a primeira letra e 25 opções para escolha da segunda, ou seja, um Arranjo $A_{26,2}$. Para escolha dos três algarismos distintos, temos: 10 opções para o primeiro, 9 opções para o segundo e 8 para selecionar o terceiro algarismo, ou seja, um Arranjo $A_{10,3}$. Assim,

$$A_{26,2} \cdot A_{10,3} = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468000$$

Isto é, poderão ser criadas 468000 senhas distintas.

■

4.3.3.3 Combinações

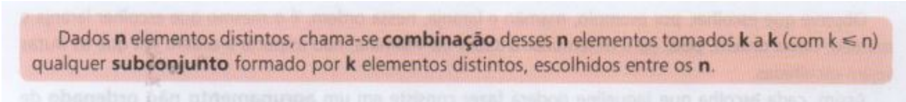
Esta seção é iniciada pela exposição de um exemplo onde se aplica o conceito de **Combinação**, que consiste em escolher as possíveis combinações de suco com duas frutas dentre seis opções disponíveis: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. Neste caso, cada uma das frutas pode ser combinada com qualquer uma das outras cinco opções, pois não faz diferença combinar mamão e laranja, ou vice-versa.

Assim, a combinação pode ser obtida listando as quinze possibilidades e, a partir delas, podemos compreender a característica fundamental desse tipo de agrupamento não ordenado.

Podemos tentar deduzir o resultado utilizando o PFC: $6 \cdot 5 = 30$. Contudo, essa contagem considera a ordem de escolha dos elementos - Arranjo, e, por tratar-se de um agrupamento não ordenado, é necessário eliminar os subconjuntos que possuem mesmos elementos. Considerando que duas frutas podem ser escolhidas de $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$ maneiras diferentes, concluímos que o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

Aprimorando o exemplo, iremos contabilizar a combinação de seis elementos tomados três a três. Neste caso, pelo PFC, existem $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ agrupamentos de três frutas, essas três podem ser escolhidas de $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras. Por fim, o número de combinações serão $\frac{120}{6} = 20$.

Figura 24 – Definição de Combinação



Dados **n** elementos distintos, chama-se **combinação** desses **n** elementos tomados **k a k** (com k ≤ n) qualquer **subconjunto** formado por **k** elementos distintos, escolhidos entre os **n**.

Fonte: LIVRO B

Em resumo, a contagem de combinações para n elementos distintos, tomados k a k (com $k \leq n$), indicado por $C_{n,k}$ ou por $\binom{n}{k}$, é obtida através do PFC, pela aplicação de dois conceitos vistos anteriormente nas seções 4.3.3.2 e 4.3.3.3: **Arranjo** e **Permutação**, respectivamente.

1. Agrupamentos ordenados (arranjos) formados por k elementos distintos, escolhidos entre elementos disponíveis: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot [n-(k-1)] = A_{n,k}$.
2. O número de sequências distintas (ordens) que podem ser formadas com os k elementos escolhidos (permutação): $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$.
3. Como qualquer permutação desses k elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações de n elementos tomados k a k:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} \Rightarrow C_{n,k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} \Rightarrow C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

A partir desta generalização são válidas as seguintes propriedades:

- Se $k = 1$, o número de subconjuntos de n elementos distintos, tomados um a um, é igual a n:

$$C_{n,1} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)}!}{\cancel{(n-1)}! \cdot 1!} = \frac{n}{1!} = n.$$

- Se $k = n$, o número de combinações de n (com $n \geq 1$) elementos distintos, tomados n a n, é igual a 1:

$$C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{\cancel{n}!}{0! \cdot \cancel{n}!} = \frac{1}{0!} = 1, \text{ pois } 0! = 1.$$

- Se $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ ou $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot [n-(n-p)]!} = C_{n,n-p}.$$

Essas observações são importantes para construir argumentos e resolver situações práticas, como, por exemplo, o questionamento da caixinha:

Pense Nisto: *Em um grupo formado por cinco pessoas, a quantidade de duplas (não ordenadas) que podemos formar é igual à quantidade de trios (não ordenados)? Por quê?*

Solução: Utilizando a fórmula que generaliza o conceito de Combinação, temos:

$C_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{20}{2} = 10$, e

$C_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = \dfrac{20}{2} = 10.$

Portanto, satisfaz a terceira observação $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.

■

A generalização permite resolver rapidamente problemas cuja característica são subconjuntos não ordenados, utilizando apenas a fórmula. Porém, é necessário cautela para não estimular a memorização de uma fórmula e mecanização do procedimento.

O livro segue com quatro exercícios resolvidos, que servem de base para solucionar o bloco de exercícios propostos na sequência. Dentre estes, destacamos:

Exemplo 3. *Uma locadora de automóveis tem, à disposição de seus clientes, uma frota de dezesseis carros nacionais e quatro carros importados, todos distintos. De quantas formas uma empresa poderá alugar três carros, de modo que pelo menos um carro nacional seja escolhido?*

Para solucioná-lo, foram desenvolvidas duas opções de respostas:

1ª Solução: Temos 16 opções de carros nacionais e 4 opções de carros importados. Examinemos as três possibilidades de selecionar três carros, sendo ao menos um carro nacional:

I) Três carros nacionais: $\binom{16}{3} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \cancel{13!}}{3! \cdot \cancel{13!}} = \dfrac{3360}{6} = 560.$

II) Dois carros nacionais e um importado: $\binom{16}{2} \cdot 4 = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot \cancel{14!}}{2! \cdot \cancel{14!}} \cdot 4 = \dfrac{240}{2} \cdot 4 = 480.$

III) Um carro nacional e dois importados:$16 \cdot \binom{4}{2} = 16 \cdot \dfrac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{2! \cdot \cancel{2!}} = 16 \cdot \dfrac{12}{2} = 96.$

O número total corresponde a $560 + 480 + 96 = 1136$ maneiras de a empresa alugar os três carros.

■

2ª Solução: Contabilizamos a quantidade total de possibilidades para selecionar os três carros, dentre as 20 opções disponíveis: $\binom{20}{3} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{3! \cdot \cancel{17!}} = \dfrac{1641600}{6} = 1140.$

O número de possibilidades de a empresa só alugar carros importados é $\binom{4}{3} = 4$. Portanto, a diferença $\binom{20}{3} - \binom{4}{3} = 1140 - 4 = 1136$, que corresponde à escolha de pelo menos um carro nacional.

■

4.3.4 Permutações com elementos repetidos

Após o estudo das técnicas de contagem para os agrupamentos simples, ou seja, quando é considerado apenas os agrupamentos de objetos distintos, o capítulo dá seguimento ao estudo de Análise Combinatória apresentando a Permutação com elementos repetidos, trazendo, de início, o exemplo de lançamento de um dado em duas situações:

1ª) Apenas um elemento se repete: Total de sete lançamentos, obter quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6.

Solução: Primeiro vamos escolher as posições das faces distintas (2,5 e 6), visto que as posições restantes serão ocupadas pelo número 1. Neste caso, utilizamos Combinação $C_{7,3} = \dfrac{7!}{(7-3)! \cdot 3!}$. Depois disso, observamos que (2,5 e 6) podem ser permutados nas posições que ocupam, ou seja, $P_3 = 3! = 6$.

Assim, a quantidade de sequências que podem ser obtidas é dada por:

$$C_{7,3} \cdot P_3 = \frac{7!}{(7-3)! \cdot \cancel{3!}} \cdot \cancel{3!} = \frac{7!}{4!}.$$

Nesta razão, o numerador $n = 7$ corresponde ao total de lançamentos e o denominador, $n_1 = 4$, corresponde a quantidade de vezes que há repetição do elemento 1. E será indicado por $P_7^{(4)}$.

■

2ª) Dois elementos diferentes se repetem: Total de nove lançamentos, obter quatro faces iguais a 1, duas faces iguais a 3 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6.

Solução: Primeiramente, iremos determinar as possíveis posições para os números (2, 3, 3, 5 e 6). Por combinação, temos $C_{9,5} = \dfrac{9!}{(9-5)! \cdot 5!} = 126$, já que as posições restantes serão ocupadas pelo número 1.

Em seguida, iremos permutar as posições dos números (2, 3, 3, 5 e 6), onde observamos que este procedimento é análogo ao caso anterior, pois existe uma repetição do número 3 por duas vezes, ou seja, $P_5^{(2)} = \dfrac{5!}{2!}$. Depois disso, concluímos que o número de permutações possíveis será $C_{9,5} \cdot P_5^{(2)} = \dfrac{9!}{\cancel{5!} \cdot 4!} \cdot \dfrac{\cancel{5!}}{2!} = \dfrac{9!}{4! \cdot 2!}$, que indicamos por $P_9^{(4,2)}$.

■

A partir desses dois casos particulares é possível pensar o caso geral, conforme segue na definição apresentada na Figura 25:

Figura 25 – Definição de Permutação com repetição

Dados **n** elementos, dos quais n_1 são iguais a $\mathbf{a_1}$, n_2 são iguais a $\mathbf{a_2}$, n_3 são iguais a $\mathbf{a_3}$, ..., n_r são iguais a $\mathbf{a_r}$ (em que $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$), o número de permutações desses **n** elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_r)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \, ... \, n_r!}$$

Fonte: LIVRO B

Na sequência, o livro apresenta os exemplos que tratam da quantidade de anagramas que podem ser formados, utilizando palavras cujas grafias possuem letras repetidas. É uma atividade útil para fixar o conceito e memorização da fórmula, porém com pouca aplicabilidade para resolver situações cotidianas.

4.4 Considerações gerais sobre os livros analisados

Antes de apresentar as considerações, cabe ressaltar que a análise de um livro didático incorre em fatores subjetivos, ou seja, as impressões pessoais e a própria experiência docente podem induzir à parcialidade. Além disso, existem peculiaridades que são inerentes ao público alvo, ou seja, aquele material que cumpre bem o papel para determinada realidade, poderá não se adequar da mesma forma para outra.

Os livros selecionados estão de acordo com a legislação vigente, pois apresentam o currículo básico necessário para série especificada. Em particular, para o conteúdo de Análise Combinatória, identificamos os principais tópicos que permitem resolver vários problemas de contagem, sempre acompanhado de exemplos e exercícios que são úteis para associar às novas situações que os alunos possam se deparar.

Nos dois trabalhos, o capítulo que é dedicado à Combinatória estão posicionados na parte final do livro, sendo anterior ao conteúdo de Probabilidade, e possuem características semelhantes quanto à abordagem do conceito, pois, utilizam-se da estratégia de apresentar exemplo(s) anterior(es) à formulação do conceito, seguidos da definição e de alguns exercícios resolvidos.

Esta sequência de ensino exemplos/teoria/exercícios é predominante no Ensino de Análise Combinatória, mas tem se mostrado pouco eficaz em muitas realidades. Percebemos resultados mais animadores quando ocorre à inserção de jogos, brincadeiras, aplicativos, etc, que tornam o ensino mais dinâmico e prazeroso.

Assim, procuramos identificar também quais as recomendações contidas para utilização de outras ferramentas, tais como a História da Matemática, tecnologias, desafios, atividades em grupo, entre outras.

A introdução do capítulo no LIVRO A é feita por um objeto que representa uma aplicação de Análise Combinatória. Já no LIVRO B, inicia-se descrevendo alguns exemplos que podem ser aplicados as técnicas de contagem e que serão detalhadas no decorrer do capítulo.

Em relação ao conteúdo, os dois contemplam praticamente os mesmos tópicos de assuntos básicos para compreender as principais técnicas de contagem: Princípio Fundamental da Contagem (PFC), Permutação, Arranjo e Combinação. Destacamos que o PFC é satisfatoriamente abordado através dos exemplos clássicos e aplicação da Árvore de Possibilidades. O LIVRO A (Seção 4.2) foi além e acrescentou Números Binomiais, Triângulo de Pascal e Binômio de Newton, que, apesar de serem assuntos pouco requisitado em exames, são úteis para ampliar os conhecimentos básicos de Matemática, especialmente para os estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores da área de exatas.

A História da Matemática, explorada apenas no LIVRO A, apresentou alguns fatos interessantes, que podem despertar a curiosidade em compreender como o conceito se desenvolveu ao longo dos anos.

A quantidade de exemplos/exercícios é um fator relevante no Ensino de Matemática, em especial para Análise Combinatória, tendo em vista que cada um dos problemas exige um raciocínio próprio. Ademais, uma decisão tomada errada auxilia na reformulação da estratégia ou resolução de outra questão de enunciado semelhante. Neste critério, o LIVRO B (Seção 4.3) apresentou maior quantidade de exercícios propostos, desafios e sugestões de atividades em duplas/grupos.

As situações aplicadas nos exercícios são análogas nos dois livros. Verificamos que existem aqueles exercícios direcionados à aprendizagem da notação e operações com fatorial, inclusive na realização de contagem por meio dos anagramas, que ajudam a compreender o conceito, porém não se aplica para o cotidiano. Uma sugestão que poderia tornar as questões mais atrativas, seria a adaptação dos objetos permutados, ao invés de usar letras, utilizar livros, pessoas, móveis, brinquedos, entre outros. O LIVRO A indica, por um ícone específico, alguns exercícios para serem resolvidos em grupo. O LIVRO B, por sua vez, apresenta desafios que exigem uma discussão na construção das respostas.

Por fim, estas foram algumas considerações que podem ajudar o professor no momento de selecionar o seu material de apoio, onde buscará o mais adequado a sua realidade, examinando não somente a lista de conteúdos, mas, principalmente, o conjunto de critérios que potencialize o ensino. Neste caso, refere-se a uma metodologia que proporcione uma aprendizagem construtiva e diversificação dos recursos didáticos.

Ademais, os livros fazem pouca referência ao ENEM (3 questões no LIVRO A e 1 questão no LIVRO B), informando apenas o gabarito e omitiram uma solução mais detalhada. Assim, diante da relevância deste exame, iremos discutir, no capítulo seguinte, mais sobre o ENEM e a resolução de algumas questões aplicadas nesta avaliação.

5 Análise Combinatória no ENEM

Instituído através da Portaria MEC nº 438, de 28 de maio de 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é a principal avaliação para etapa final da Educação Básica, que cumpre com a atribuição da União de realizar o processo de avaliação nacional para os estudantes do Ensino Médio, conforme o previsto no Artigo 9º da LDB (BRASIL, 1996), Inciso VI: "Assegurar processo nacional de avaliação do rendimento escolar no ensino fundamental, médio e superior, em colaboração com os sistemas de ensino, objetivando a definição de prioridades e a melhoria da qualidade do ensino". Quando criado, o ENEM representava, para educação nacional, apenas um instrumento avaliativo e seus objetivos foram detalhados no Art. 1º da Portaria supracitada (BRASIL, 1998):

> I - conferir ao cidadão parâmetro para auto-avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;
> II – criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;
> III – fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;
> IV – constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.

Além dos objetivos bem definidos, o documento também descreve o formato da avaliação: composta por questões de múltipla escolha e uma produção textual, aplicado uma vez, anualmente. Inicialmente a participação era voluntária, sendo destinada aos estudantes concluintes do Ensino Médio ou para quem já o tivesse concluído, conforme consta em (BRASIL, 1998):

> Artigo 5º - A participação no ENEM é voluntária, circunscrita aos egressos do ensino médio em qualquer um de seus cursos, independentemente de quando o concluíram, e aos concluintes da última série do ensino médio, também em qualquer uma das suas modalidades, podendo o interessado participar dos exames quantas vezes considerar de sua conveniência.

Assim, houve baixa participação nos primeiros anos de aplicação do exame e, nas edições seguintes, a quantidade de inscritos aumentou consideravelmente. Um fator decisivo que contribuiu para este aumento no número de interessados em prestar o ENEM foi que a nota obtida passou a ser utilizada como meio para o ingresso nas instituições privadas através do Programa Universidade Para Todos - PROUNI (2004) e do Fundo de Financiamento Estudantil - FIES (2010). Satisfazendo uma das alterações imputadas à LDB, conforme o parágrafo sexto, do Art. 62:

> § 6º O Ministério da Educação poderá estabelecer nota mínima em exame nacional aplicado aos concluintes do ensino médio como pré-requisito para o ingresso em cursos de graduação para formação de docentes, ouvido o Conselho Nacional de Educação - CNE. (Incluído pela Lei nº 12.796, de 2013).

Além do ingresso para as instituições privadas, o ENEM também contribuiu para unificar o processo de seleção para as instituições públicas, com a publicação da Portaria Normativa Nº 18, de 11 de outubro de 2012. Essa portaria possibilitou o credenciamento das instituições de ensino superior para utilizar as notas do ENEM como critério de seleção, em substituição parcial/total aos vestibulares, e, com a crescente adesão das instituições de ensino ao estabelecido na portaria, foi se constituindo o atual Sistema de Seleção Unificada – SISU.

A nova atribuição do ENEM representa um marco na história da educação brasileira, pois a prova tornou-se meio de seleção para instituições de ensino públicas e privadas. Deste modo, o exame deixou de ser apenas avaliativo e assumiu também o caráter seletivo/classificatório.

Esta mudança resultou num crescente número de participantes, chegando a ultrapassar 8 milhões de inscritos por duas vezes e manteve sempre um número superior a cinco milhões de participantes desde 2011. Vejamos, na tabela a seguir, o quantitativo de inscritos no exame desde a sua criação:

Tabela 1 – Quantidade de inscritos no ENEM: 1998 a 2019

Ano	**Quantidade de Inscritos**	**Ano**	**Quantidade de Inscritos**
1998	157.221	2009	4.148.721
1999	346.819	2010	4.626.094
2000	390.180	2011	5.380.857
2001	1.624.131	2012	5.791.332
2002	1.829.170	2013	7.173.574
2003	1.882.393	2014	8.722.290
2004	1.552.316	2015	7.792.025
2005	3.004.491	2016	8.627.371
2006	3.742.827	2017	6.731.186
2007	3.568.592	2018	5.513.662
2008	4.018.070	2019	5.095.308

Fonte dos dados: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/historico> Acesso 01/06/2021, às 00:09.

Em 2020, foram realizadas 5.783.357 inscrições. Portanto, o número cada vez maior de participantes significa, estatisticamente, que a concorrência ficou mais acirrada, a cada edição. E, através do SISU, estudantes de qualquer parte do Brasil podem concorrer em qualquer curso/instituição credenciada.

5.1 Matriz Curricular do ENEM

A padronização no sistema de seleção que substituiu a maioria dos vestibulares também contribuiu diretamente para unificação do currículo básico nacional. E, para nortear os conteúdos cobrados no exame, foi implementada a Matriz de Habilidades do ENEM, aprovada por seu Comitê de Governança, integrado por Reitores em 2009. Nesta ocasião, o então Ministro da Educação, Fernando Haddad, deu a seguinte declaração:

> Segundo Haddad, a mudança que vem com o novo Enem não é para esvaziar o ensino médio, mas para abordar os conteúdos privilegiando a capacidade de raciocínio do aluno e não a decoreba. E dá um exemplo: se o estudante compreende um fenômeno da natureza, mesmo que tenha esquecido a fórmula, ele dará a resposta certa por outros meios. No novo modelo, diz, não serão cobradas datas, mesmo de episódios importantes. (BRASIL, 2021). [1]

O documento contém as descrições das habilidades esperadas do candidato e a relação dos conteúdos organizados por área do conhecimento. São estas: a) Linguagens, Códigos e suas tecnologias; b) Ciências Humanas e suas tencologias; c) Ciências da Natureza e suas tecnologias; e d) Matemática e suas tecnologias. A composição da prova também foi readequada para atender à nova matriz, passando a conter 45 questões em cada uma das áreas e mais uma produção textual no gênero dissertativo argumentativo. Isto significa que Matemática e suas Tecnologias, sendo uma das quatro áreas, possui expressiva contribuição na nota final do candidato.

O novo formato da prova, possui outra característica marcante, que é o modelo das questões expressando situações-problemas, contextualizadas nos conteúdos abordados. Este fator aumenta a responsabilidade do candidato ao preparar-se para o exame, bem como para o professor, que vai em busca da melhor metodologia de ensino-aprendizagem.

Conforme já vinha sendo destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, o conhecimento matemático exige essa postura ativa do indivíduo para buscar soluções e aprender com os próprios erros, adquirindo, neste processo, uma base de conteúdos que permita-o solucionar situações mais complexas que venham a surgir, inclusive para os desafios do Ensino Superior.

A Matriz de Referência vem reforçar esta característica, apresentando, para o conteúdo de Análise Combinatória, a Habilidade 2 da Competência 1: "H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem". Como a lista de conteúdos para esta habilidade não foi detalhada, fica abrangente quais tópicos atendem especificamente

[1] Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/212-educacao-superior-1690610854/13419-comite-de-governanca-do-novo-enem-aprova-matriz-de-habilidades-para-prova-de-outubro>. Acesso 25/01/2021, às 19:31.

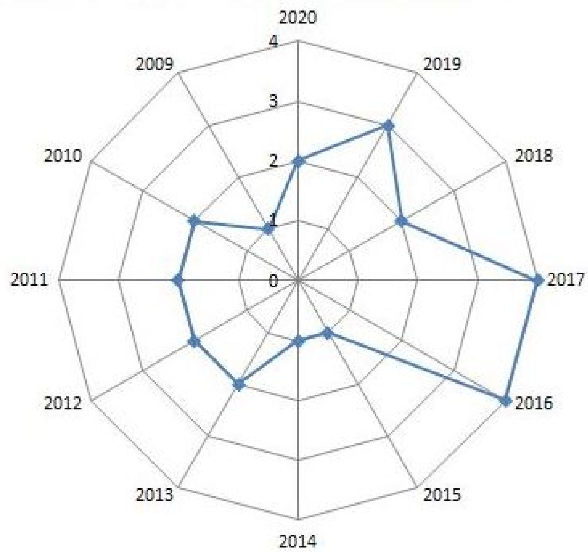
aos Princípios de Contagem. E este foi novamente mencionado na Matriz ao tratar dos Conhecimentos Numéricos:

> conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, **princípios de contagem**. (BRASIL, 2009)

5.2 Questões de Análise Combinatória no ENEM

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, responsável pela elaboração e aplicação do ENEM, mantém, em seu site, o banco de provas e gabaritos contendo todos os exames aplicados, desde o primeiro realizado em 1998 até o ano de 2020. Fizemos um levantamento da incidência das questões cujo conteúdo é Análise Combinatória nas provas posteriores a 2009, quando o exame foi reformulado pela Matriz Curricular, citada na seção 5.1. Observamos que esse conteúdo tem razoável incidência no quantitativo geral e, por vezes, é utilizado como suporte para resolver as questões de Probabilidade.

Figura 26 – Questões de Análise Combinatória no ENEM



Fonte: Autoral

O Gráfico (Figura 26) expressa o quantitativo de questões referentes à Análise Combinatória no ENEM, totalizando 26 questões aplicadas, no período de 2009 a 2020. É perceptível que houve a inclusão desse assunto em todas as edições, sendo no mínimo uma e no máximo quatro questões, cumprindo o previsto na matriz curricular.

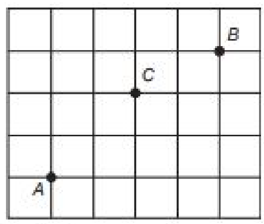
Apresentaremos, a seguir, algumas destas questões extraídas do ENEM. E, para cada uma delas, elaboramos uma proposta de solução, seguindo a estratégia de MORGADO e CARVALHO (2015, p. 108-109) para resolver problemas de Combinatória:

> **1) Postura.** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. (...)
> **2) Divisão.** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. (...)
> **3) Não adiar as dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

PEREIRA e CAMPOS (2012) apresentam estratégia semelhante para chegar a solução de problemas combinatórios: dividir a decisão em subdecisões e aplicar o Princípio Multiplicativo.

Além da resolução, apresentaremos comentários sobre a estrutura da questão, o contexto, a relação com a abordagem dos Livros Didáticos e as habilidades da BNCC.

Questão 1. ***(ENEM 2020)*** *Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.*



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

A) 4
B) 14
C) 17
D) 35
E) 48

Solução: O desafio consiste em determinar a quantidade de caminhos partindo do ponto A até o ponto B, sem passar pelo ponto C, realizando apenas os movimentos ($\rightarrow$) ou ($\uparrow$). Dividimos a solução em três partes:

1. **Calcular a quantidade de caminhos de A até B:** Para realizar esse trajeto, serão necessários 4 deslocamentos ($\rightarrow$) e 3 deslocamentos ($\uparrow$), totalizando 7 movimentos. Permutando-se esses elementos e considerando as repetições, teremos:

$$P_7^{(3,4)} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35.$$

2. **Calcular a quantidade de caminhos de A até C:** Nesse trajeto, serão necessários 2 deslocamentos ($\rightarrow$) e 2 deslocamentos ($\uparrow$), totalizando 4 movimentos. Permutando-se esses elementos e considerando as repetições, teremos:

$$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6.$$

3. **Calcular a quantidade de caminhos de B até C:** Nesse trajeto, serão necessários 2 deslocamentos ($\rightarrow$) e 1 deslocamento ($\uparrow$), totalizando 3 movimentos. Permutando-se esses elementos e considerando a repetição, teremos:

$$P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3.$$

Então, pelo Princípio Multiplicativo, determinamos os caminhos de A até B, que passam por C, isto é, $6 \times 3 = 18$. Portanto, os caminhos de A até B, que não passam por C, serão $35 - 18 = 17$.

■

Nesta situação, seguimos a resolução que procede conforme a recomendação das três etapas: postura, divisão das etapas e não adiar as dificuldades, nos permitindo concluir, de maneira objetiva o resultado, utilizando as técnicas estudadas.

Quanto a complexidade da questão, percebemos que foram exigidas duas técnicas pertinentes aos conhecimentos combinatórios (ou Princípios de Contagem). Para contabilizar todos os possíveis trajetos sob as regras impostas, é necessário utilizar os conceitos de *Princípio Multiplicativo* e *Permutação com Repetição*. Vale lembrar que, o Conceito de Permutação com Repetição foi abordado nos livros analisados, e estão revisados nas Subseções (4.2.3) e (4.3.4).

Esta solução não é exclusiva e o candidato poderia elaborar sua própria estratégia, inclusive desenhar cada um dos 17 percursos.

Questão 2. ***(ENEM 2019)*** *Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?*
A) 69
B) 70
C) 90
D) 104
E) 105

Solução: Vale destacar que duplas de jogadores não se diferenciam pela ordem, por isso, aplica-se o conceito de combinação.

1. Inicialmente, calculemos a quantidade total de possibilidades para se constituir as quatro duplas a partir dos 8 jogadores, independente de ser destro ou canhoto:

    a) Primeira dupla: C_8^2;

    b) Segunda dupla: C_6^2;

    c) Terceira dupla: C_4^2;

    d) Quarta dupla: C_2^2;

    As quatro duplas podem ser reordenadas aleatoriamente, por isso, o produto das combinações deve ser dividido por 4!. Então, a quantidade total de duplas será:

$$\frac{C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{4!}$$

2. Agora calculemos a quantidade total de duplas que poderão ser constituídas, após ter sido formada uma dupla de canhotos. Ou seja, só existe uma forma de fazer a dupla com os dois canhotos e, em seguida, restarão 6 jogadores destros para compor as três duplas restantes:

    a) Dupla de canhotos: $C_2^2 = 1$;

    b) Primeira dupla destra: C_6^2;

    c) Segunda dupla destra: C_4^2;

    d) Terceira dupla destra: C_2^2.

    As três duplas destras podem ser reordenadas aleatoriamente, por isso, o produto das combinações deve ser dividido por 3!

$$\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{3!}$$

Portanto, fazendo a subtração, temos:

$$\frac{C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{4!} - \frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{3!} = 105 - 15 = 90.$$

■

Essa questão se enquadra na Habilidade EM13MAT310 da BNCC, que indica o domínio dos Princípios de Contagem, neste caso, aplicado para um tipo de agrupamento específico "não-ordenado".

O tópico de Análise Combinatória predominante na questão é a Combinação, cuja característica principal é organizar objetos quando a ordem não é relevante, bastante aplicada para formar comissões ou times, que foram detalhadas na abordagem dos livros analisados, conforme Seções 4.2.5 e 4.3.3.3.

Questão 3. ***(ENEM 2018)*** *O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.*
Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).
Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.
Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:
A) A_{10}^4
B) C_{10}^4
C) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$
D) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$
E) $C_4^2 \times C_6^2$

Solução: Existem 4 carros compactos à disposição, dos quais serão selecionados apenas 2, isto é, C_4^2. Uma vez escolhidos os dois carros compactos, existem duas possibilidades para posicioná-los: entrada ou dentro do salão, o que resulta em $C_4^2 \times 2$.

De modo análogo, existem 6 caminhonetes à disposição, das quais serão selecionados 2, isto é, C_6^2. Após a escolha, teremos duas maneiras para posicioná-las: $C_6^2 \times 2$.

Como a escolha do carro compacto não interfere na escolha da caminhonete, e vice-versa. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a quantidade de maneiras para organizar o estande será: $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$. ■

O diferencial desta questão está no formato das alternativas, pois exigem que dos candidatos reconheçam as notações utilizadas em Análise Combinatória, para os conceitos de Arranjo e Combinação. Uma avaliação interessante de ser feita é qual interpretação equivocada do enunciado levaria às demais opções. Vejamos:

A) Representa a escolha de 4 carros, do total de 10, não necessariamente 2 de cada. Além disso, seria fixada a ordem de posicionamento dos carros.

B) Representa a escolha de 4 carros, do total de 10, não necessariamente 2 de cada. Neste caso, não está fixada a ordem de posicionamento dos carros.

C) Resposta Correta.

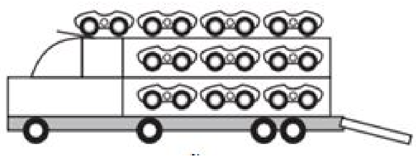
D) O primeiro Arranjo representa a escolha de 2 carros compactos e fixada a ordem e o segundo Arranjo representa a escolha de 2 caminhonetes e fixada a ordem, que forneceria uma resposta correta. Porém, a multiplicação por 2×2 quadriplica as possibilidades.

E) Este item considera as combinações corretamente para escolha dos veículos. Mas, desconsidera as possibilidades de alternar os veículos em entrada ou centro do salão.

Ambos os livros analisados no capítulo anterior priorizam as notações do tipo $A_{n,k}$ e $C_{n,k}$ para representar Arranjo e Combinação, respectivamente, porém as alternativas dadas utilizaram notações C_n^p e A_n^p, que são semelhantes, mas não iguais.

Os livros tiveram o cuidado de alertar sobre a existência de outras notações como, por exemplo, $\binom{n}{k}$ para Combinação. Mas, apenas o LIVRO A (Seção 4.2.5) incluiu C_n^p como uma terceira maneira para denotar Combinação de n elementos, tomados k a k, conforme dado na questão.

Questão 4. ***(ENEM 2017)*** *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo

caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.
Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?
A) $C_{6,4}$
B) $C_{9,3}$
C) $C_{10,4}$
D) 6^4
E) 4^2

Solução: Serão 10 carrinhos a serem coloridos, utilizando-se quatro cores, onde cada cor deve ser utilizada pelo menos uma vez.

a) Colorindo um carrinho de cada cor, todas as cores serão utilizadas e teremos $10 - 4 = 6$ carrinhos restantes;

b) Para colorir os 6 carros, teremos 4 cores à disposição, que podem repetir-se ou não. Por isso será utilizado conceito de Combinação com repetição.

$$C_{n-1+p,6} = C_{4-1+6,6} = C_{9,6}$$

c) Pela propriedade de Combinação $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, temos que $C_{9,6} = C_{9,9-6}$, ou seja, a quantidade de modelos distintos do brinquedo-caminhão cegonha é $C_{9,3}$.

■

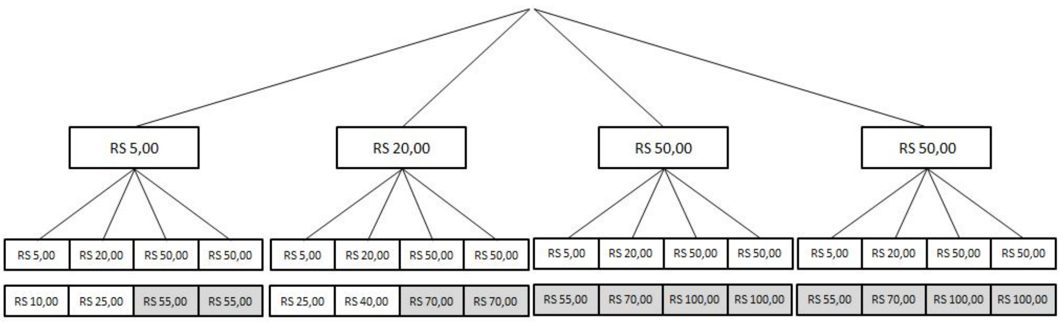
Assumindo o papel de quem deseja resolver o problema, seguimos a estratégia de solução em três passos: primeiro saber restringir a quantidade de objetos facilitará a contagem final. Em seguida, conhecer o conceito e aplicação de "combinação com repetição", que é aplicada quando a ordem não é relevante e estes podem repetir-se. Por fim, na terceira etapa é preciso identificar a propriedade das combinações equivalentes para se determinar a resposta correta.

A fórmula para cálculo de combinações com repetição, tal como foi utilizada na solução, não está contemplada nos livros analisados, cabendo ao professor ou ao discente investigar em outras fontes sobre essa técnica de contagem e sua aplicação. Casos especiais de Combinação, como este apresentado na questão, podem ser melhor estudados por SANTOS, MELLO e MURARI (2007); HAZZAN (2013); PEREIRA e CAMPOS (2012); MORGADO e CARVALHO (2015).

Outro fator que dificulta chegar até a solução correta está na tendência do ENEM em utilizar a notação de combinação, ao invés do valor numérico correspondente, que pode inibir a iniciativa de resolução por cálculos numéricos.

Questão 5. ***(ENEM 2016)*** *Uma caixa contém uma cédula de* $R\$5,00$*, uma de* $R\$20,00$ *e duas de* $R\$50,00$ *de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.*
A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R\$ 55,00 é:
A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{2}{9}$
E) $\frac{5}{9}$

Solução: Utilizando o recurso da árvore de possibilidades podemos ilustrar a sequência de extração de duas cédulas, nas condições apresentadas:



Além disso, como a primeira cédula extraída será reposta, temos, pelo Princípio Multiplicativo, que serão 16 possibilidades de extração, das quais 12 apresentam soma igual ou superior a $R\$55,00$. Portanto, a solução final será o cálculo da probabilidade, que consiste na razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, isto é, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

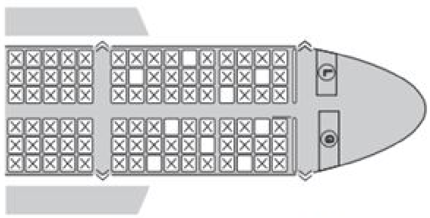
$\blacksquare$

Esta questão aplicada em 2016, cujo conteúdo principal é Probabilidade, exige conhecimentos combinatórios para quantificar os casos possíveis, ao se extrair duas notas consecutivas e com reposição. É interessante observar que, mesmo sendo aplicada em edição anterior à implantação da BNCC (BRASIL, 2018), a solução exige duas habilidades relacionadas à Análise Combinatória que, foram, posteriormente, descritas no documento.

A primeira delas é "(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore". E, a segunda, "(EM13MAT311): Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade".

Portanto, entendemos que o recurso visual da árvore de possibilidades e o Princípio Multiplicativo para descrever as possibilidades de extração das notas atende a primeira habilidade. E, por fim, quantificar os casos favoráveis para o espaço amostral necessário ao cálculo probabilístico, exigido como conteúdo principal, atende a segunda habilidade.

Questão 6. ***(ENEM 2015)*** *Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.*



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

A) $\dfrac{9!}{2!}$

B) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$

C) $7!$

D) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$

E) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$

Solução: Pela observação da figura, percebemos que existem 9 vagas disponíveis para acomodar os 7 familiares. Neste caso, usaremos Arranjo, pois cada pessoa trocada de lugar gera uma nova configuração na contagem das acomodações. Portanto,

$$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}.$$

■

Para resolver o problema, é preciso saber distinguir entre as características dos princípios de contagem, diferenciando a aplicação de uma permutação, um arranjo ou uma combinação. O resultado expresso de forma numérica, utilizando apenas a notação de fatorial, favorece a elaboração de outras estratégias. Mas, se o candidato consegue distinguir as diferentes fórmulas, irá proceder com a resposta correta mais rápido.

Sabendo que número de pessoas a serem acomodadas é inferior ao número de assentos disponíveis e que as pessoas representam elementos distintos, cada uma mudança de assento gera uma nova configuração. Essas duas características são suficientes para aplicar o conceito de Arranjo, estudado em ambos os livros analisados, conforme as Subseções (4.2.4) e (4.3.3.2).

Também é importante destacar que a situação apresentada é uma aplicação prática do conceito de Análise Combinatória para o cotidiano, pois, em muitas situações, somos instigados a contabilizar de quantas maneiras é possível acomodar uma certa quantidade de pessoas em assentos disponíveis em carro, ônibus, avião, shows, cinema, etc.

Questão 7. ***(ENEM 2014)*** *Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.*
De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?
A) $20 \times 8! + (3!)^2$
B) $8! \times 5! \times 3!$
C) $\dfrac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
D) $\dfrac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
E) $\dfrac{16!}{2^8}$

Solução: O primeiro passo é organizar os dados do problema. Ao todo temos 16 filmes a serem alugados, sendo 8 de ação, 5 de comédia e 3 de drama. Como as locação serão realizadas dois títulos por vez, teremos 8 locações no total e, por isso, em cada uma delas haverá um título de ação, logo $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$ possibilidades. Nas cinco primeiras locações, haverá a inclusão de um título de comédia, ou seja, serão $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. E, nas três últimas locações haverá a inclusão dos três filmes do gênero drama, logo $3 \times 2 \times 1 = 3!$. Como a ordem de seleção dos filmes está bem definida e não há interferência entre eles, contabilizamos, portanto, $8! \times 5! \times 3!$ formas distintas do cliente assistir os 16 filmes disponíveis.

■

Para solucionar esta questão, utilizamos dois conceitos da Análise Combinatória: o Princípio Multiplicativo, que foi o primeiro tópico apresentado na abordagem dos dois livros, fundamental para estudo das técnicas combinatórias seguintes, seguido do conceito de Permutação, que foi utilizado na solução desta questão. Repetindo por três vezes: primeiro a permutação dos oito filmes de ação, depois a permutação dos cinco filmes de comédia e dos dois filmes três filmes de drama.

Esta questão está contida no banco de questões do LIVRO A, porém não houve discussão sobre a resolução, constando apenas a informação sobre a alternativa correta.

Questão 8. ***(ENEM 2012)*** *O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.*

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Solução: Pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo, temos que existem $5 \times 6 \times 9 = 270$ maneiras de descrever a situação, utilizando um personagem, um objeto e um cômodo. Assim, cada um dos 280 presentes, arriscando um palpite distinto do(s) anterior(es), acertará a sequência correta, no máximo, até a 270ª tentativa, visto que, há $280 - 270 = 10$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

■

Por este questionamento, percebemos que o ENEM elabora problemas em diferentes níveis e aplicações. Este último, é de fácil compreensão e pode ser aplicado inclusive para alunos do Ensino Fundamental, por ocasião do primeiro contato com as técnicas de contagem, pois, representa um exemplo interessante para introduzir o Princípio Fundamental da Contagem.

A questão também poderá ser adaptada pelo professor e apresentada em forma dinâmica, uma vez que, retrata uma situação-problema interessante, que pode acontecer no cotidiano da sala de aula.

Questão 9. ***(ENEM 2010)*** *A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro deles cabem 23 netunos.*
Revista Veja. Ano 41, nº25, 25 jun. 2008 (Adaptado).
Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?
A) 406
B) 1334
C) 4002
D) 9338
E) 28014

Solução: Pelos informações dadas na reportagem, temos:

$$\begin{gathered}1 \text{ Marte} = 3 \text{ Mercúrios}\\ 1 \text{ Terra} = 7 \text{ Martes}\\ 1 \text{ Netuno} = 58 \text{ Terras}\\ 1 \text{ Júpiter} = 23 \text{ Netunos}\end{gathered}$$

Como, 1 Júpiter = 23 Netunos e 1 Netuno = 58 Terras, pelo Princípio Multiplicativo, temos $23 \times 58 = 1334$, que representa a alternativa correta. ∎

A questão exige do candidato a postura de organizar as informações contidas na reportagem. Em seguida, utilizar o conceito fundamental da contagem, que é o Princípio Multiplicativo.

Uma observação interessante é que o questionamento poderia ter ido além, caso perguntasse "Quantos Mercúrios cabem dentro de Júpiter?"

1 Terra = 7 Martes e 1 Marte = 3 Mercúrios, então 1 Terra = 21 Mercúrios;

1 Netuno = 58 Terras e 1 Terra = 21 Mercúrios, então 1 Netuno = 1.218 Mercúrios;

1 Júpiter = 23 Netunos e 1 Netuno = 1.218 Mercúrios, então 1 Júpiter = 28.014 Mercúrios.

Perceba que, a resposta obtida representa uma das alternativas, ou seja, uma intepretação equivocada do enunciado levaria ao erro. Mas o fato interessante dessa adaptação é que ela se torna muito semelhante ao problema histórico do *Papiro de Rhind*, apresentado na Seção (2.2).

Questão 10. ***(ENEM 2009)*** *Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.*
A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:
A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
D) duas combinações.
E) dois arranjos.

Solução: Examinemos as duas situações:

1ª: Do total de 12 times, serão sorteados 4 para formar o Grupo A. Note que, neste caso, o número de times é uma parte do total, por isso aplica-se o conceito de Arranjo ou Combinação. É importante observar que a ordem não é relevante, isto é, um grupo formado pelos times ABCD é o mesmo formado pelos times CBDA. Portanto, vale a aplicação do conceito de COMBINAÇÃO.

2ª: Dos 4 times que integram o grupo, serão sorteados 2 para formar o jogo de estreia. Assim, novamente, o número de times é uma parcela do total, por isso aplica-se o conceito de Arranjo ou Combinação. Mas, nesse momento, a ordem do sorteio será importante para determinar o time mandante e visitante, portanto, vale a aplicação do conceito de ARRANJO.

Sendo, a resposta final, uma combinação e um arranjo, respectivamente.

■

O contexto que apresenta uma situação do meio esportivo é bastante interessante. Aplicar os conhecimentos de Análise Combinatória, em situações como esta, contribuem para melhor fixação dos conceitos, que já devem ter sido apresentados as definições e quais situações são aplicáveis.

Ao final da discussão sobre as Questões extraídas do ENEM, percebemos que todas elas foram elaboradas em consonância com a Matriz de Referência, explorando os diferentes princípios de contagem, para agrupamentos simples ou com repetição, bem como foram laboradas numa diversidade de contextos, ou seja, jogos esportivos, posicionamento de carros, organização/ordenação de pessoas/objetos, etc. Assim como as demais questões que não foram discutidas neste trabalho e seguem um padrão modelo semelhante.

Há sempre um detalhe que visa o ineditismo, seja pelo contexto ou pela estratégia de resolução. E, por isso, o conteúdo de Análise Combinatória é temido por estudantes e professores que se deparam com uma grande variedade de estratégias e interpretações possíveis para os problemas.

Esse e outros fatores, tais como o cronograma do último bimestre mais apertado, a predileção ao conteúdo de probabilidade, a falta de recursos, entre outros, contribuem para que o conteúdo seja lecionado superficialmente, quando o oposto deveria acontecer.

Diante dessa dificuldade, uma solução viável seria investir mais tempo e mais recursos no ensino deste conteúdo, visto que, para resolver um problema combinatório, exige-se engenhosidade associada ao domínio das principais técnicas de contagem, o que demanda emprego de metodologia(s) adequada(s).

Portanto, lecionar todo cronograma de conteúdos e ainda preparar os alunos de forma satisfatória para os exames é, de fato, um grande desafio. E, pensando numa alternativa, apresentaremos, no capítulo, seguinte uma proposta metodológica que pode auxiliar nesta missão.

6 Proposta Didática para o Ensino de Análise Combinatória

A Terceira Competência da BNCC para a área de Matemática, no Ensino Médio, está relacionada diretamente com a Análise Combinatória, quando indica que é necessário

> utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 535)

A Habilidade EM13MAT310 também tem relação com o tema, quando enfatiza:

> resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p. 537)

Fica evidente a importância do aluno ser capaz de “resolver e elaborar” problemas de contagem. Contudo, é praxe, no ensino da Análise Combinatória, utilizar exemplos e resolução de exercícios que promovem a ação de “resolver” em detrimento da ação de “elaborar”, e são raras as iniciativas que colocam os alunos como protagonistas, criadores das situações-problemas que irão resolver. Também vale destacar que a BNCC sugere esta habilidade para os três anos do Ensino Médio, porém o conteúdo vem sendo contemplado apenas nos livros da segunda série e, algumas vezes, no Ensino Fundamental.

A partir dessas constatações, apresentamos uma proposta de intervenção didática aplicada ao ensino de Análise Combinatória, que pode auxiliar os professores preocupados em tornar o conteúdo mais dinâmico, criativo e prazeroso de ser ensinado, rompendo com a linearidade do conteúdo ao distribuí-lo nas três séries, acrescentando atividades introdutórias no primeiro ano e atividades de revisão/fixação no terceiro ano, do Ensino Médio.

O 1º Ano do Ensino Médio marca o ingresso do aluno na etapa final da Educação Básica, momento propício para aprofundar os conhecimentos adquiridos durante o Ensino Fundamental e lecionar os novos conteúdos. Com relação à Análise Combinatória, presume-se que os discentes já tiveram o primeiro contato, e saibam utilizar corretamente o Princípio Fundamental da Contagem e outras contagens mais simples.

Assim, algumas atividades pautadas na Etnomatemática contribuem na apreensão da realidade, no diagnóstico e planejamento das atividades. BOALER (2018, p. 26) aponta a importância do diálogo, de rodas de conversas e da interação entre os estudantes:

> (...) muitas salas de aula de matemática são lugares onde os alunos completam folhas de atividades em silêncio. As discussões em grupo ou da classe inteira são muito importantes. Além de serem o maior auxílio à compreensão – pois os estudantes raramente compreendem ideias sem discuti-las – e de darem vida à matéria e envolverem os alunos, as discussões em grupo também são encontros em que os alunos aprendem a raciocinar e a criticar o raciocínio uns dos outros.

Este é um período favorável para realizar dinâmicas, utilizar a História da Matemática para despertar o interesse na temática, elaborar peças teatrais, confeccionar materiais didáticos, produzir cartazes e vídeos, segundo as experiências trazidas pelos discentes.

O 2º Ano é quando, tradicionalmente, leciona-se o conteúdo, por isso sugerimos a complementação da metodologia utilizada pelo professor, através da experimentação e utilização de jogos/aplicativos para agilizar os processos.

Na última série do Ensino Médio - 3º Ano, os estudantes têm a preocupação extra de ingressar para o Ensino Superior e isto implica enfrentar um processo seletivo, por meio do ENEM. Então, além de lecionar os conteúdos próprio desta série, temos uma última oportunidade para revisão dos assuntos que foram vistos superficialmente.

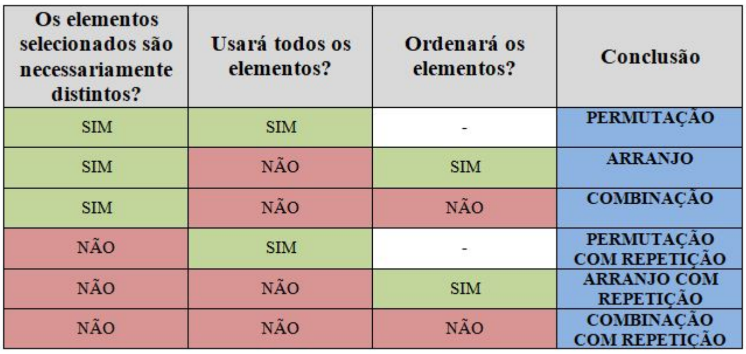
Deste modo, recomendamos o roteiro proposto por PEREIRA e BEZERRA (2015) para fixação dos conceitos combinatórios, onde os autores discutem alguns problemas enfrentados pelos professores ao lecionar Análise Combinatória, e destacam que

> as respostas apresentadas nas avaliações ilustram que os alunos não conseguem desvincular as técnicas de contagem de situações particulares, ou seja, eles querem que o problema inteiro se encaixe em alguma das versões do algoritmo da permutação. Com esse pensamento eles ficam incapazes de modelar apropriadamente o problema mais simples de contagem que esteja presente em livros de Ensino Médio. (PEREIRA; BEZERRA, 2015, p. 505)

E, para contribuir na melhoria do ensino deste conteúdo, apresentam um fluxograma contendo as principais técnicas de contagem e quais os questionamentos são pertinentes antes de aplicá-los.

Apresentamos a estratégia resumida em formato de tabela (Figura 27) e reforçamos a orientação de PEREIRA e BEZERRA (2015, p. 506), que recomendam cautela para não se limitar ao uso do fluxograma, na esperança que este possa responder todos os problemas combinatórios. “O fluxograma que segue é um caminho para orientar os alunos a fazerem uma análise mais direcionada, a fim de tomar decisões mais acertadas sobre que técnicas de contagem que se deve usar para atacar os problemas, configurando mais uma opção para a construção de uma estratégia eficaz”.

Figura 27 – Resumo do Fluxograma



Os elementos selecionados são necessariamente distintos?	Usará todos os elementos?	Ordenará os elementos?	Conclusão
SIM	SIM	-	PERMUTAÇÃO
SIM	NÃO	SIM	ARRANJO
SIM	NÃO	NÃO	COMBINAÇÃO
NÃO	SIM	-	PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO
NÃO	NÃO	SIM	ARRANJO COM REPETIÇÃO
NÃO	NÃO	NÃO	COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Fonte: Autoral (Adaptado)

Portanto, é necessário conhecer cada um desses conceitos e tê-los aplicados em exercícios anteriores, razão pela qual este dispositivo é sugerido dentro das atividades para o 3º Ano.

O Guia para Ensino de Análise Combinatória, dividido em três partes, está em acordo com a Base Nacional Comum Curricular e pode ser utilizado inclusive por professores que não lecionam nas três séries, visto que a proposta pode ser levada aos demais professores durante os momentos de planejamento escolar, sob a justificativa de utilizar essa estratégia visando a melhor aprendizagem do conteúdo, que favorece não somente o melhor desempenho no ENEM, mas também o desenvolvimento das habilidades criativas frente às situações práticas.

Tabela 2 – Quadro de Sugestões Metodológicas

Série do Ensino Médio	**Estratégia Metodológica**
1º Ano	1. História da Matemática; 2. Etnomatemática; 3. Jogos e Aplicativos; 4. Problematização e Experimentação.
2º Ano	1. Conteúdo do Livro Didático; 2. Problematização e Experimentação; 3. Vídeos, jogos e aplicativos
3º Ano	1. Problematização e Experimentação. 2. Resolução de Problemas e Questões do ENEM; 3. Fluxograma de Revisão.

A seguir, detalharemos o Guia de Atividades destinado a cada série, acompanhado de referências que auxiliam o professor na tarefa de proporcionar um ensino de matemática mais dinâmico, interativo e eficaz. Também destacamos quais ajustes podem ser realizados pelo professor de modo a complementar o material ou suprimir atividades por inviabilidade de aplicação, ou por terem sido realizadas anteriormente.

6.1 Guia de Atividades para o 1º Ano do Ensino Médio

Conteúdo	**Série**	**Carga Horária**
Análise Combinatória	1º Ano	20 Horas/Aulas

I - OBJETIVO:

Abordar o conteúdo da Análise Combinatória de forma dinâmica e colaborativa, de modo a despertar a criatividade dos alunos para elaborar e resolver situações-problemas.

II - EMENTA

Princípio Fundamental da Contagem;
Diagrama da árvore (ou árvore de possibilidades).

III - TEMPO ESTIMADO E PROGRAMA DIDÁTICO

Cada aula terá duração de 2 (ou 3) horas, sendo utilizado o próprio espaço da sala de aula ou espaço aberto para realização de dinâmicas de contagem.

1ª Aula: Iniciar com a apresentação de um fato histórico da análise combinatória, por exemplo, o *Stomachion* de Arquimedes (Seção 2.3). Também é interessante levar uma réplica desse quebra-cabeça, para que os discentes possam manusear e apresentar suas curiosidades. Em seguida, apresentar questionamentos abertos, sem respostas certas ou erradas, apenas como a intenção de provocar o interesse na temática. Por exemplo:

1) Quem foi Arquimedes?

2) Ele inventou somente esse quebra-cabeça?

3) Porque ele fez esse quebra-cabeça?

4) Você seria capaz de criar seu próprio *Stomachion*?

Dessa forma, é possível estimular o diálogo e o interesse pela temática de jogos e desafios. Uma sugestão de atividade criativa consiste na distribuição de folhas cortadas em forma de quadrado medindo 20 cm de lado, onde o aluno poderá construir seu próprio quebra cabeça utilizando régua e lápis e, em seguida, analisar as peças obtidas.

Por fim, serão repassados os encaminhamentos para aula seguinte, propondo outros fatos históricos (Capítulo 2), que podem ser apresentados de forma teatral ou por produção de vídeo, por exemplo: a) Travessia do Barco (Seção 2.4); b) Problema das 7 Pontes; c) Troca de Cartas Bernoulli e Euler; d) Troca de Cartas de Pascal e Fermat.

Os três últimos mencionados constam na Seção 2.5.

2ª Aula: Neste momento, haverá a apresentação das produções teatrais ou vídeos feitos pelos grupos, estimando-se o tempo de até 15 minutos para cada uma delas. As sugestões de fatos históricos ou problemas clássicos da análise combinatória estão acompanhados de referências que podem contribuir na elaboração:

1. Travessia de Barco. Baseado no Artigo "Um problema recreativo medieval e suas variações: o Problema de Travessia", escrito por Valdenize Lopes do Nascimento (UFERSA/UFRN) e Bernadete Barbosa Morey, publicado na RHMP.

2. Problema das 7 Pontes de Königsberg. Baseado no Artigo "Euler e as Pontes de Königsberg", escrito por Frederico José Andries Lopes e Plínio Zornoff Táboas, publicado na Revista Brasileira de História da Matemática.

3. Troca de Cartas de Bernoulli e Euler. Baseado no Artigo "O Problema das Cartas mal endereçadas de Nicolaus Bernoulli e Euler: uma nota sobre como Euler resolveu brilhantemente um problema interessante", escrito por Daniel Cordeiro de Morais Filho e Mario Sérgio Alves Ferreira.

4. A Troca de Cartas de Fermat e Pascal. Baseado nos artigos da Docente Olga Pombo, Seminário Temático Licenciatura em Ensino da matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa – FCUL. Matemáticos Piérre Fermat e Blaise Pascal.

Além desses temas, outros poderão ser sugeridos a critério do professor. Após cada apresentação, é importante dedicar uma média de dez minutos para fazer uma breve discussão sobre as histórias apresentadas. Ao término das apresentações, é importante destacar que a Análise Combinatória surgiu pela necessidade de resolver problemas de contagem desde a Antiguidade e que até os dias atuais recorremos aos conhecimentos combinatórios para solucionar muitas situações do cotidiano, incluindo estratégias vencedoras para jogos.

Ao final da aula, serão apresentadas algumas sugestões de objetos para que os alunos compartilhem (caso possuam), tais como cadeado com senha, cartas de baralho, dados, moedas, dominó, cubo mágico, jogo da memória, tabuleiro de damas, xadrez, tangram, bilhetes de apostas em loteria, códigos de barras, etc.

3ª Aula: Dispor as cadeiras de modo a constituir um círculo e, na parte central, preparar uma mesa para receber os objetos trazidos pelos discentes. A mesa poderá conter alguma ornamentação que remeta ao estudo da Análise Combinatória. No quadro branco, é interessante escrever um título sugestivo para aula como, por exemplo, "Aqui tem Análise Combinatória!". E, acrescentar também, o tempo de exposição e as instruções para o desenvolvimento da dinâmica:

1) Descreva as características do objeto: material, tamanho, formato, quantidade de peças, etc.

2) Em que situações você utiliza esse objeto?

3) Com que frequência você o utiliza?

4) É necessária a participação de outra pessoa para manusear?

Será estipulado o tempo máximo de cinco minutos para cada aluno comentar sobre o objeto trazido. O professor também poderá levar alguns objetos reservas, para estimular a apresentação dos alunos que não o fizerem e realizar intervenções sempre que julgar necessário para complementar as informações sobre os objetos apresentados.

Alguns desses objetos são jogos utilizados apenas por lazer e possuem um potencial inexplorado. Por esta razão, é importante que o professor conheça estes recursos e saiba como utilizá-los no ambiente da sala de aula. Nas referências, apresentamos alguns links que detalham os seguintes jogos: Dados, Baralho, Tabuleiro de Damas, Dominó e Jogo da memória.

Vale destacar que estes jogos possuem versões digitais que estão disponíveis em aplicativos ou sites da internet, possibilitando a inclusão de equipamentos tecnológicos, como o computador ou celular. E, sendo mediado pelo professor, a inclusão desses recursos contribui significativamente para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, concentração, habilidade de examinar possibilidades e tomar de decisões.

4ª Aula: Responder ao menos cinco questões que contemplam o Princípio Fundamental da Contagem, utilizando as próprias estratégias (desenhos, diagrama da árvore ou números). Os livros didáticos analisados neste trabalho (Capítulo 4) apresentam bons exemplos e exercícios que poderão ser utilizados. Segue algumas sugestões:

1) Júlia trabalha como modelo e irá fotografar para uma loja de roupas. Esta loja pretende apresentar nas redes sociais as suas peças exclusivas: 3 de calças, 2 saias, 4 pares de sandálias e 8 blusas. Considerando todas as mudanças de roupas durante a sessão fotográfica, quantas fotografias diferentes Júlia poderá tirar?

2) Certo tipo de mala de viagens possui uma trava protegida por senha. Quantas senhas de 4 algarismos podem ser formadas para esta trava usando apenas algarismos pares distintos?

3) Uma escola tem 5 professores de Língua Portuguesa, 6 de Matemática e 3 de História. Há quantas possibilidades diferentes de se formar uma comissão que contenha um professor de cada uma dessas três disciplinas?

4) Uma sorveteria dispõe de 20 sabores diferentes, que são servidos em casquinhas ou copinhos. Após escolher um desses sabores, o cliente escolhe uma cobertura entre as disponíveis: leite condensado, chocolate e morango. De quantas maneiras diferentes o cliente pode montar o sorvete?

5) Uma moeda e um dado (6 faces) são lançados simultaneamente, quantas são as possibilidades das faces? Quais serão elas?

Depois disso, é interessante pedir para cada aluno elaborar cinco questões análogas aos problemas apresentados. Por fim, as questões elaboradas serão depositadas em caixas, com o objetivo de realizar sorteio para que o aluno resolva alguma questão elaborada por algum colega e vice-versa, estimulando a interação.

5ª Aula: Avaliação escrita, contendo questões subjetivas sobre o conteúdo lecionado, tais como:

1) O que você aprendeu sobre Análise Combinatória?

2) Consegue identificar situações do dia a dia em que se aplica este conceito? Exemplifique.

3) Sente motivado a responder e elaborar desafios?

Também é importante verificar a aprendizagem correta do Princípio Fundamental da Contagem e a utilização do Diagrama da Árvore, por meio da resolução de questões extraídas do livro didático.

IV - METODOLOGIAS

Metodologia/Recurso	**1ª Aula**	**2ª Aula**	**3ª Aula**	**4ª Aula**	**5ª Aula**
História da Matemática	X	X			
Etnomatemática			X		
Jogos e Aplicativos			X		
Experimentação e Problematização	X	X		X	X

V - RECURSOS DIDÁTICOS

Livro Didático;
Quadro branco e pincel;
Cartolina e Pincel;
Folha Tamanho A4;
Tesoura e lápis-de-cor;
Computador e Datashow (Opcional);
Celular e Tablets (Opcional);

VI - AVALIAÇÃO

A avaliação desta sequência de atividades deverá ser feita de forma contínua, examinando a participação e envolvimento dos alunos ao longo das ações propostas. Também pode ser utilizada a autoavaliação e avaliação por pares. Para efeito de registro, também sugerimos a aplicação de uma atividade escrita, teste e resolução de problemas.

VII - REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar: combinatória e probabilidade.** São Paulo: Atual, 2013.

MORGADO, A. C., et al. **Análise Combinatória e Probabilidade** - 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

PEREIRA, A. G. C. CAMPOS, V. S. M. **Análise combinatória e probabilidade** – 2. ed. – Natal: EDUFRN, 2012.

Travessia do Barco: <https://www.youtube.com/watch?v=neZaAVC_6wU> e <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/82.>

Problema das 7 Pontes: <https://www.youtube.com/watch?v=TmMyl16FByk> e <https://matemateca.ime.usp.br/acervo/pontes_konigsberg.html>

Cartas Bernoulli e Euler: <http://www.mat.ufcg.edu.br/pet/arquivos/o_problema_das_cartas_mal_enderecadas_de_nicolaus_bernoulli_e_euler.pdf>

Cartas Pascal e Fermat: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/7cartas/index.htm>

Dados: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Dado_(jogo)#cite_note-1.>

Baralho: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Baralho>

Tabuleiro Damas: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Damas>

Dominó: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Domin%C3%B3>

Jogo da memória: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_de_mem%C3%B3ria>

6.2 Guia de Atividades para o 2º Ano do Ensino Médio

Conteúdo	**Série**	**Carga Horária**
Análise Combinatória	2º Ano	30 Horas/Aulas

I - OBJETIVO:

Aprofundar os conhecimentos acerca da Análise Combinatória, fixando os principais conceitos e situações em que esses poderão ser aplicados, utilizando metodologias que complementem o conteúdo proposto no livro didático e estimule a capacidade criativa dos alunos frente aos desafios.

II - EMENTA

Princípio Fundamental da Contagem;
Fatorial e Permutação Simples;
Arranjo Simples;
Combinações Simples;
Permutação com Repetição;
Combinação com Repetição.

III - TEMPO ESTIMADO E PROGRAMA DIDÁTICO

Geralmente o conteúdo de Análise Combinatória precede à Probabilidade, ambos são lecionados no último bimestre letivo para o 2º Ano do Ensino Médio. Assim, estimamos a duração de 2 horas (ou 3 horas) para cada aula, seguindo o modelo expositivo para lecionar a parte teórica e alguns exemplos, intercalado por atividades de experimentação que privilegiem a troca de ideias e a formulação de questões (problematização) para discussão em grupo.

No Capítulo 4 discutimos sobre os livros didáticos e verificamos que esses contemplam os principais conteúdos de Combinatória, pois apresentam definições, exemplos e exercícios que estão de acordo com o recomendado para série. Nesse sentido, sugerimos atividades que podem complementar o roteiro proposto no livro, ajustando-se de acordo com a realidade do professor e dos alunos.

Nesta missão, contamos com um importante aliado dos professores, que auxilia, significativamente, no ensino e na aprendizagem de Matemática, que é a plataforma de vídeos da internet – o Youtube. Através dela, podemos encontrar vídeos produzidos por profissionais renomados e cursos completos catalogados em canais instituicionais. Por exemplo, o **Portal de Matemática da OBMEP** mantido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que é referência para Ensino e Pesquisa de Matemática. “O Portal de Matemática da OBMEP oferece, gratuitamente, videoaulas, apostilas teóricas, cadernos de exercícios, problemas resolvidos, aplicativos e testes que cobrem todo o currículo de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais para complementar e aprofundar o aprendizado."

Os vídeos disponíveis neste canal poderão ser apresentados em sala de aula, para alternar com a metodologia do professor, assim como é possível recomendá-los para que os alunos assistam em casa, reforçando o conteúdo apresentado durante a aula.

1ª Aula: Os livros apresentam os conteúdos de Análise Combinatória a partir de um problema motivador, onde a resolução desse problema e de demais semelhantes ajudam a conjecturar as principais técnicas de contagem.

Neste guia, sugerimos a introdução da Análise Combinatória por um vídeo intitulado "Matemática em toda parte", com duração de 14 minutos, que mostra a matemática nos jogos, assim como em diferentes situações do cotidiano. Após a exibição do vídeo, é possível resgatar as experiências anteriores com problemas combinatórios, as atividades realizadas no 1º Ano, os jogos utilizados e quais conteúdos foram lecionados.

Também é importante que nesta primeira aula seja revisado o **Princípio Fundamental da Contagem** e a estratégia da **Árvore de Possibilidades**.

2ª Aula: Para exercitar o **Princípio Fundamental da Contagem**, através do recurso da árvore de possibilidades, sugerimos a divisão da turma em grupos para resolver e apresentar a solução das seguintes situações:

1) Lançamento de uma moeda 4 vezes;

2) Lançamento de um dado 6 vezes;

3) Escolha de roupa: 3 calças, 2 blusas e 2 tênis;

4) Escolha de cardápio: 2 pratos de entrada, 3 prato principal e 4 sobremesas;

5) Selecionar vôo com escala entre dois estados.

As soluções deverão ser ilustrativas através de desenhos, gravuras, recortes, etc. e apresentados em formato de cartazes, para que os outros colegas possam compartilhar a solução.

3ª Aula: Realizar experimento para introduzir a compreensão do conceito de fatorial. Essa atividade pode ser feita em duplas, para estimular a troca de conhecimento e agilizar a execução da tarefa proposta.

A dupla recebe uma quantidade de cartas de baralho: inicialmente 2, depois 3, depois 4, depois 5. Ao receber as cartas distintas, as duplas terão que variar as posições das cartas e contar quantas são as possíveis configurações.

Este experimento poder ser realizado utilizando outros objetos. São sugestões: a) Lápis de cor; b) Carrinhos de brinquedo; c) Livros ou revistas; d) Moedas de diferentes valores.

4ª Aula: Apresentar o conceito formal de **Permutação Simples e Fatorial** utilizando o roteiro do livro didático, seguindo as notações, exemplos e exercícios. Para complementar, sugerimos o vídeo “Análise Combinatória - Fatorial e Permutação Simples”, cujo link consta nas referências.

5ª Aula: Atividade de Experimentação para compreensão dos conceitos de **Princípio Multiplicativo**, **Arranjo** e **Combinação** através do Esporte, explorando as situações que envolvem estes conceitos.

A depender da estrutura que o ambiente escolar oferece, esta atividade pode ser realizada na quadra esportiva, ambiente aberto ou na própria sala de aula. Também é interessante convidar um profissional de educação física, para incentivar a interdisciplinaridade e reforçar a importância da matemática nas diferentes áreas do conhecimento.

1. Princípio Multiplicativo: Sorteio de competidores/times representando os países em confrontos esportivos. Tabelas de jogos e chaveamento.

2. Atividade Arranjo: Formar pódio para receber as medalhas de ouro, prata e bronze.

3. Atividade Combinação: Selecionar a quantidade de atletas necessários para cada esporte:

- Duplas de tênis;
- Três competidores para maratona;
- Revezamento no atletismo ou natação, com 4 competidores;
- Time de Futsal, com 5 jogadores;
- Time de Vôlei, com 6 jogadores;
- Time de Handbol, com 7 jogadores;
- Time de Futebol, com 11 jogadores.

6ª Aula: Apresentar o conceito de **Arranjo Simples** utilizando o roteiro do livro didático, seguindo as notações, exemplos e exercícios. Para complementar, sugerimos o vídeo “Análise Combinatória - Combinação”, cujo link consta nas referências.

7ª Aula: Apresentar o conceito de **Combinação Simples** utilizando o roteiro do livro didático, seguindo as notações, os exemplos e os exercícios. Para complementar, sugerimos o vídeo "Análise Combinatória - Exercícios sobre Combinação", cujo link consta nas referências.

8ª Aula: Para realizar experimentos dos conceitos de **Permutação com Repetição** e **Combinação Completa**, sugerimos a confecção de materiais manipuláveis, feitos de insumos recicláveis ou baixo custo, por exemplo, tampinhas de garrafa, palitos de picolé, moedas, figuras de EVA, bolinhas de gude, caixas de fósforo, prendedor de roupas, etc.

Neste experimento é ideal que seja confeccionado um kit, contendo pelo menos 50 objetos, divididos em 5 grupos diferenciados pela cor (10 azuis, 10 vermelhos, 10 amarelos, 10 verdes e 10 brancos). Assim é possível realizar os seguintes experimentos com objetos repetidos:

- Organizar 5 objetos de cores distintas;
- Organizar 4 objetos, sendo dois vermelhos e dois azuis;
- Organizar 10 objetos, sendo dois objetos de cada cor;
- Organizar 10 objetos, sendo cinco amarelos a cinco verdes;
- Organizar 10 objetos, sendo três brancos, três azuis, dois amarelos e dois vermelhos;
- Selecionar 3 objetos de um conjunto contendo 5 objetos, sendo um de cada cor;
- Selecionar 4 objetos de um conjunto contendo 10 objetos, sendo dois de cada cor;
- Selecionar 5 objetos de um conjunto contendo 20 objetos, sendo 10 azuis e 10 verdes;
- Selecionar 10 objetos de um conjunto contendo 20 objetos, sendo 4 de cada cor;
- Selecionar 10 objetos de um conjunto contendo 50 objetos.

Mesmo que não seja possível expressar o quantitativo numérico, o mais importante é mostrar como se deve proceder quando se manipula objetos iguais, despertando o interesse pelas diferentes formas de organizar os objetos e tomar as decisões atentos às restrições impostas.

Caso seja acessível o recurso do celular/tablet, sugerimos a interação com o jogo Genius, um clássico do anos 80 que consiste em memorizar e reproduzir uma sequência de cores. As cores variam, aleatoriamente, entre azul, amarelo, vermelho e verde. Iniciando com apenas uma cor na primeira rodada, o brinquedo acrescenta uma das cores ao padrão sempre que a rodada tenha sido concluída com sucesso.

9ª Aula: Apresentar o conceito formal de **Permutação com Repetição** e **Combinação Completa (ou Combinação com Repetição)** utilizando o roteiro do livro didático, seguindo as notações, exemplos e exercícios. Para complementar, sugerimos os vídeos "Análise Combinatória - Permutação com Repetição" e "Análise Combinatória - Combinação Completa”, cujos links constam nas referências.

10ª Aula: Em diversos momentos deste Guia, contamos com o recurso dos vídeos disponíveis na internet para reforçar os conteúdos lecionados. Assim, sugerimos a produção de vídeos didáticos abordando problemas de Análise Combinatória, como uma atividade interessante, que explora a capacidade criativa dos alunos. Se possível, dividir a turma em grupos, para que seja produzido ao menos um vídeo para cada técnica de contagem apresentada.

Além disso, é importante proceder com uma avaliação escrita contendo situações-problemas de Análise Combinatória, extraídas do livro didático. Além de verificar, a utilização correta das definições e das fórmulas de permutação, arranjo e combinação.

IV - METODOLOGIAS

Metodologia/Recurso	**1ª Aula**	**2ª Aula**	**3ª Aula**	**4ª Aula**	**5ª Aula**
Livro Didático				X	
Vídeos, Jogos e Aplicativos	X			X	
Experimentação e Problematização		X	X		X
Metodologia/Recurso	**6ª Aula**	**7ª Aula**	**8ª Aula**	**9ª Aula**	**10ª Aula**
Livro Didático	X	X		X	
Vídeos, Jogos e Aplicativos	X	X		X	X
Experimentação e Problematização			X		X

V - RECURSOS DIDÁTICOS

Livro Didático;

Quadro branco e pincel;

Cartolina e Pincel;

Kit Combinatória com 50 objetos;

Computador e Datashow (Opcional);

Celular e Tablets (Opcional).

VI - AVALIAÇÃO

A avaliação dessa sequência de atividades deverá ser feita de forma contínua, examinando a participação e o envolvimento dos alunos ao longo das ações propostas. Também pode ser utilizada a autoavaliação e a avaliação por pares nas atividades que exigem interação e construção de material didático. É importante a aplicação de uma atividade escrita, teste e resolução de problemas.

VII - REFERÊNCIAS

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 5: combinatória e probabilidade.** São Paulo: Atual, 2013.

MORGADO, A. C., et al. **Análise Combinatória e Probabilidade** - 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

PEREIRA, A. G. C. CAMPOS, V. S. M. **Análise combinatória e probabilidade** – 2. ed. – Natal: EDUFRN, 2012.

Vídeos do Youtube:

• **Matemática em toda parte**
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Q9_KNEwdu1w>.

• **Análise Combinatória - Fatorial e Permutação Simples**
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=BB9Qkmf0prY>

• **Análise Combinatória - Combinação**
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=-VNvbfOEi2A>

• **Análise Combinatória - Exercícios sobre Combinação**
Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=0VixIYoK_zw>

• **Análise Combinatória - Permutação com Repetição**
Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=QGqT8jl6CXk>

• **Análise Combinatória - Combinação Completa**
Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=RZyAEQx_wS4&list=PL7RjLI0hJPfDgTMb
index=28>

Jogo Genius online
Disponível em: <https://www.jogos360.com.br/simon.html>

6.3 Guia de Atividades para o 3º Ano do Ensino Médio

Conteúdo	**Série**	**Carga Horária**
Análise Combinatória	3º Ano	20 Horas/Aulas

I - OBJETIVOS:
Revisar os principais conceitos de Análise Combinatória, compreendendo em que situações esSes poderão ser aplicados. Utilizar um dispositivo prático para identificar qual técnica de contagem deve ser empregada. Praticar a elaboração e resolução de problemas, de modo a contribuir para o melhor desempenho no ENEM.

II - EMENTA
Princípio Fundamental da Contagem;
Permutação Simples e com Repetição;
Arranjo Simples;
Combinações Simples e Combinação Completa.

III - TEMPO ESTIMADO E PROGRAMA DIDÁTICO
Cada aula terá duração de 2 horas, sendo utilizado o próprio espaço da sala de aula.

1ª Aula: Revisar o conteúdo Análise Combinatória e apresentar a estratégia sugerida por (PEREIRA; BEZERRA, 2015), que consiste num fluxograma contendo os principais métodos de contagem e quais os questionamentos devem ser elucidados antes de selecionar a estratégia correta.

Resumindo o conteúdo descrito no fluxograma, apresentamos a Tabela (Figura 27), quais os questionamentos devem ser feitos ao se deparar com uma questão de combinatória: os elementos selecionados são necessariamente distintos? Usará todos os elementos? Ordenará os elementos? As respostas para estes questionamos ajudarão a decidir entre seis técnicas de contagem: Permutação Simples ou com repetição, Arranjo Simples ou com repetição e Combinação Simples ou com repetição.

Nesta aula também é importante revisar as fórmulas que são utilizadas em cada uma das técnicas de contagem, contudo, é importante ressaltar que essas não devem ser a única maneira de resolver uma questão de Combinatória, uma vez que elas derivadam do Princípio Fundamental da Contagem e, portanto, existem vários caminhos para se chegar ao resultado de questões assim.

2ª Aula: Apresentar um rol contendo 5 situações aplicadas em cada uma das técnicas de contagem, totalizando 30 situações. Assim, os alunos devem responder aos três questionamentos do fluxograma e identificar qual a técnica correta a ser utilizada, podendo ou não realizar o cálculo.

1. Permutação:

1.1) De quantas maneiras distintas é possível posicionar 5 irmãos e seus pais para uma fotografia em família?

1.2) Um estudante está se preparando para o ENEM, então ele decidiu que cada dia da semana (segunda a sexta-feira) irá dedicar para uma das quatro áreas ou para redação. Quantas serão as possibilidades de organizar a sequência de estudos na primeira semana?

1.3) Uma partida tradicional de sinuca possui quinze bolas, enumeradas de 1 a 15. A sequência para encaçapar depende da estratégia dos jogadores. De quantas maneiras distintas poderão ser encaçapadas as bolas?

1.4) Alice ganhou seis livros de presente. De quantas formas ela poderá realizar a leitura dos livros que acabou de ganhar?

1.5) Eduardo está planejando uma viagem turística pela Europa, onde pretende conhecer 4 países: Portugal, França, Espanha e Itália. De quantos modos ele poderá fazer a viagem sem passar mais de uma vez pelo mesmo país?

2. Arranjo

2.1) Uma família composta por 5 pessoas compraram bilhetes para uma viagem ônibus. De quantas maneiras eles poderão se acomodar nos 12 assentos disponíveis?

2.2) Numa corrida de Fórmula 1, os 20 pilotos disputam um pódio de 5 lugares. De quantas maneiras é possível constituir esse pódio?

2.3) Na eleição, para Diretor e Vice-diretor de uma escola, serão eleitos os dois candidatos mais bem votados dentre os 10 professores que estão concorrendo. O resultado da eleição poderá ocorrer de quantas maneiras?

2.4) Um pintor dispõe de 7 cores para pintar as quatro paredes de uma sala. Usando apenas uma cor em cada parede, de quantas formas ele pode fazer a pintura deste ambiente?

2.5) Será sorteada uma rifa entre 50 compradores. O primeiro sorteado ganhará uma TV e o segundo sorteado receberá uma bicicleta. De quantas formas esta premiação poderá acontecer?

3. Combinação:

3.1) O presidente de um time de futebol irá sortear dois prêmios em dinheiro, de igual valor. Neste sorteio, irão concorrer apenas os onze jogadores titulares escalados para final do campeonato. De quantas formas é possível sortear os dois prêmios?

3.2) No jogo de loteria mais conhecido, o apostador precisa escolher seis números dentre os sessenta números disponíveis. Quantas serão as possibilidades de aposta?
3.3) Um pedreiro irá revestir um piso em cerâmica, no formato xadrez, de duas cores. A loja vende 6 opções de cores. De quantas formas é possível compor este piso?
3.4) A "Sorveteria Napolitano" só vende potes de sorvete contendo três sabores diferentes a escolha do freguês. Sabendo que ela oferece 15 opções de sabores, quantos serão os diferentes potes de sorvete que um cliente pode comprar?
3.5) Para iniciar uma partida de baralho, um jogador irá receber 9 cartas das 52 disponíveis. De quantas maneiras isso pode ocorrer?

4. Permutação com Repetição:
4.1) De quantas maneiras podemos empilhar sete livros, sabendo que há 3 livros exatamente iguais?
4.2) Quantas senhas distintas de 6 dígitos podem ser formadas usando o dígito 2 três vezes, o dígito 9 duas vezes e o número 1 apenas uma vez?
4.3) Três barras de chocolate branco e duas barras de chocolate preto serão distribuídas entre cinco irmãos. De quantas formas isso pode acontecer?
4.4) Uma concessionária de automóveis está organizando um feirão de vendas e possui 20 veículos do mesmo modelo, sendo 7 na cor prata, 7 na cor preta, 5 na cor vermelha e 1 na cor branca. De quantas maneiras é possível posicionar os automóveis numa fila para exposição?
4.5) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

5. Arranjo com Repetição:
5.1) Uma pesquisa de satisfação é constituída de 10 questões, cuja resposta pode ser sim ou não. Para validar o questionário, é necessário responder todas as questões. De quantas maneiras diferentes é possível responder ao questionário?
5.2) André utiliza seu carro diariamente para ir de casa ao trabalho. Nesse trajeto, ele passa por cinco semáforos de trânsito, estes semáforos possuem três cores: Verde (Siga), Amarelo (Atenção) e Vermelho (Pare). Ele decide anotar a cor, no exato momento em que chega a cada um dos semáforos, gerando uma sequência. Quantas são as possíveis sequências de cores?
5.3) Uma moeda é lançada sete vezes. Quantas sequências de caras e/ou coroa serão possíveis?
5.4) Uma partida de futebol admite os seguintes resultados: Vitória, Empate ou Derrota. Ao término de um campeonato com 10 partidas, quantas são as sequências de resultados que podem ser obtidas?

5.5) Roberta está participando de um programa de TV e concorre a um prêmio em dinheiro. O prêmio será pago de acordo com o valor obtido após a participante girar 4 roletas, cada uma delas enumeradas de 1 a 5. Quantos valores diferentes poderão ser pago nesta premiação?

6. Combinação com Repetição:
6.1) A padaria produz diariamente 4 tipos de pães recheados. De quantas maneiras um cliente pode escolher 3 pães?
6.2) Uma pizzaria possui, no cardápio, oito sabores. Para agradar ao cliente, esta pizzaria permite que ele escolha o sabor das fatias que deseja. De quantas maneiras diferentes é possível pedir uma pizza, de 4 pedaços, à critério do cliente?
6.3) Genius é jogo clássico dos Anos 80 que consiste em memorizar e reproduzir uma sequência de cores gerada aleatoriamente pelo brinquedo. As cores do jogo são: azul, amarelo, verde e vermelho. Este brinquedo acrescenta uma dessas cores na sequência a cada rodada. Quantas sequências de cores podem ser geradas na décima rodada?
6.4) O Bar Central oferece três opções de bebida: refrigerante, cerveja e energético. De quantas maneiras um cliente pode consumir 5 bebidas?
6.5) Um supermercado vende três marcas de açúcar. De quantos modos é possível comprar 10 pacotes?

Ao término desta atividade será possível compreender se os discentes apresentam dificuldade para utilização das técnicas de contagem.

3ª Aula: Sugerir que os discentes construam o próprio fluxograma em forma de cartaz, utilizando cartolina e pincel. Essa atividade poderá ser realizada individualmente ou dupla/grupo, a depender da dinâmica da sala de aula e do envolvimento com as atividades. O ideal é que este recurso esteja disponível para consulta do aluno, por isso, sugere-se a construção de um material semelhante a um "mapa mental" colorido, que estimule a capacidade de memorização por meio da percepção visual. Ao fim de cada ramificação, é interessante conter um exemplo da aplicação desta técnica de contagem.

4ª Aula: O site do INEP possui todas as provas aplicadas no ENEM, de 1998 a 2020, incluindo as reaplicações, sendo mais interessante o estudo das questões posteriores a 2009, quando o exame foi reformulado, conforme discutido no Capítulo 5. Então é possível selecionar algumas questões do assunto que está sendo abordado, para que se torne familiar o estilo de abordagem na prova. No referido capítulo, também apresentamos dez questões extraídas do exame, referentes ao conteúdo da Análise Combinatória. Para cada uma desas, propomos uma resolução, que pode ser analisada e aprimorada por outras sugestões. As questões poderão ser apresentadas e resolvidas de forma conjunta ou individualmente.

5ª Aula: Aplicação de simulado contendo questões do ENEM, selecionadas de edições anteriores ou elaboradas de acordo com o Livro didático.

IV - METODOLOGIAS

Metodologia/Recurso	**1ª Aula**	**2ª Aula**	**3ª Aula**	**4ª Aula**	**5ª Aula**
Fluxograma	X	X			
Experimentação e Problematização			X		X
Resolução de Problemas		X		X	X

V - RECURSOS DIDÁTICOS

Livro Didático;
Quadro branco e pincel;
Cartolina, pincel e lápis de cor;
Computador e Datashow (Opcional).

VI - AVALIAÇÃO

A avaliação desta sequência de atividades deverá ser feita de forma contínua, examinando a participação e o envolvimento dos alunos ao longo das ações propostas. A aplicação de atividades escritas, testes e resolução de problemas favorecerá a compreensão de enunciados e melhor preparação para o ENEM.

VII - REFERÊNCIAS

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>

PEREIRA, A.G.C.; Bezerra, J.R.A. **Uma ferramenta para ajudar na fixação dos conceitos básicos de Análise Combinatória**. Ciência e Natura, 2015.

7 Conclusões

Ao chegarmos na etapa final deste trabalho, somos capazes de compreender a grande importância da Análise Combinatória no currículo da Educação Básica, pois esse conteúdo auxilia não somente no desempenho em avaliações, como o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, mas também contribui para resolver situações práticas em que precisamos examinar possibilidades e tomar decisões relacionadas à contagem.

Pela análise dos Livros Didáticos, concluímos que os materias contemplam a parte básica, necessária à compreensão do conteúdo: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo, Combinação, entre outros. Contudo, deixam a desejar na inserção de atividades extra exercícios.

Vimos que a carga teórica acompanhada de exemplos/exercícios desfavorece a aprendizagem, conforme defendido por BOALER (2018) e D' AMBRÓSIO (2002). Sendo assim, é necessário proporcionar uma experiência além da memorização de fórmulas. É preciso despertar a capacidade criativa nos alunos, para resolver as situações e promover a construção do conhecimento.

Pela resolução das Questões do ENEM, percebemos a grande variedade de contextos em que se aplicam este conteúdo. Assim como percebemos que é necessário dominar as diferentes técnicas de contagem e adquirir experiência na resolução de problemas práticos.

Por estas razões, investimos na elaboração de um Guia destinado ao Ensino de Análise Combinatória, que distribui o conteúdo nas três séries do Ensino Médio, conforme indicado no documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pensando no desenvolvimento das habilidades voltadas à aplicação das técnicas de contagem.

Trata-se de material flexível à realidade escolar, que pode ser ajustado em face da carga horária disponibilizada ao professor, uma vez que as atividades propostas podem ser incrementadas ou suprimidas. Tais atividades estão pautadas nas metodologias da Etnomatemática, História da Matemática, Jogos/Aplicativos, Resolução de Problemas e, principalmente, através da Experimentação e da Problematização.

Dentre elas, destacamos as metodologias da Experimentação e da Problematização em relação às demais, por percebemos o grande potencial que elas oferecem para o Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória.

Não foi possível aplicar as instruções contidas no Guia, por algumas razões, incluindo o cenário de pandemia de COVID-19, que atinge todo território nacional e obrigou as escolas a adotarem medidas de segurança e aulas remotas, desde abril de 2020. Assim, fica a indicação para continuidade deste trabalho, a aplicação da metodologia proposta e posterior apresentação dos resultados alcançados.

Referências

BOALER, J. *Mentalidades Matemáticas - Tradução Daniel Bueno.* Porto Alegre: Penso, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 32, 36 e 82.

BOYER, C. B. *História da Matemática - Tradução: Elza Gomide.* São Paulo: Editora Edgard Blücler Ltda., 1974. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 24.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* Brasília: Diário Oficial da União, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 26, 29 e 65.

BRASIL. *Portaria nº438 de 28 de maio de 1998.* Brasília: MEC, 1998. Citado na página 65.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino médio. Parte I: Bases Legais.* Brasília: MEC/SEMT, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 37.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino médio. Parte III: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC/SEMT, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 36 e 38.

BRASIL. *Matriz de referência do ENEM.* Brasília: MEC, 2009. Citado na página 68.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 27, 29, 30, 31, 34, 40, 75 e 82.

BRASIL. *Ministério da Educação.* 2021. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 67.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomática e educação. *UNISC: Reflexão e Ação*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 33.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e aplicções: ensino médio.* São Paulo: Ática, 2016. Nenhuma citação no texto.

EVES, H. *Introdução a História da Matemática - Tradução Hygino H. Domingues.* São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 16, 18, 19, 22, 24 e 25.

GONTIJO, C. H. et al. *Criatividade em Matemática: conceitos, metodologias e avaliação.* Brasília: Editora da UnB, 2019. Citado na página 35.

HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar: Combinatória, Probabilidade. Vol. 5. 8. ed.* São Paulo: Atual, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 12, 34 e 74.

IEZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e aplicções: Ensino Médio. Vol. 2.* São Paulo: Saraiva, 2016. Nenhuma citação no texto.

INEP. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 99.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. *Modelagem Matemática: Pontos que justificam a sua utilização no ensino.* Belo Horizonte: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Citado na página 33.

MARTINS, J. *O livro que divulgou o papiro de Rhind no Brasil. Dissertação.* Rio Claro: UNESP, 2015. Citado na página 19.

MORAIS FILHO, D. C.; FERREIRA, M. S. A. *O Problema das cartas mal endereçadas de Nicolaus Bernoulli e Euler: uma nota sobre como Euler resolveu brilhantemente um problemas interessante.* Campina Grande: UFCG, 2011. Citado na página 25.

MORGADO, A. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: IMPA, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 34 e 38.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 69 e 74.

NETZ, R.; NOEL, W. *Códex Arquimedes - Tradução Rachel Schwartz.* Rio de Janeiro: Record, 2009. Citado na página 20.

PARAÍBA. *Proposta Curricular do Estado da Paraíba: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Secretaria Estadual de Educação e da Ciência e da Tecnologia.* João Pessoa: SEECT, 2019. Citado na página 31.

PARAÍBA. *Proposta Curricular do Ensino Médio. Secretaria Estadual de Educação e da Ciência e da Tecnologia.* João Pessoa: SEECT, 2021. Citado na página 32.

PEREIRA, A. G. C.; BEZERRA, J. R. A. *Uma ferramenta para ajudar na fixação dos conceitos básicos de Análise Combinatória.* Santa Maria: Revista Cência e Natura UFSM, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 96.

PEREIRA, A. G. C.; CAMPOS, V. S. M. *Análise Combinatória e Probabiliade. 2. ed.* Natal: EDUFRN, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 34, 69 e 74.

SA, M. A. A. F. *Análise e resolução de problemas clássicos de probabilidade para o Ensino Médio.* Tersina: UFPI, 2015. Citado na página 23.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução a Análise Combinatória. 4. ed.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007. Citado na página 74.

SILVA, A. P. *Jogos de Loteria: uma aplicação de probabilidade.* Rio de Janeiro: UNIRIO, 2018. Citado na página 39.

SILVA, J. N.; SANTOS, C. P.; PEDRO NETO, J. *10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se: A Geometria + Puzzle Stomachion.* Portugal: Noprint, 2007. Citado na página 21.