UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Edvenilson Venâncio Dantas Farias

Cálculo de Área: da História à Prática Didática

Campina Grande - PB
Agosto/2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Edvenilson Venâncio Dantas Farias

Cálculo de Área: da História à Prática Didática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB
Agosto/2021

F224c Farias, Edvenilson Venâncio Dantas.

Cálculo de Área: da História à Prática Didática / Edvenilson Venâncio Dantas Farias. – Campina Grande, 2021.

114 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima".

Referências.

1. Área. 2. Cálculo de Área. 3. Documentos Norteadores. 4. Livros Didáticos. 5. Ensino e Aprendizagem. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Título.

CDU 51:37.013(091)(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MARIA ANTONIA DE SOUSA CRB 15/398

Edvenilson Venâncio Dantas Farias

Cálculo de Área: da História a Prática Didática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 27 de Agosto de 2021:

Romildo N. de Lima

Dr. Romildo Nascimento de Lima
Orientador

Natan de Assis Lima

Dr. Natan de Assis Lima - UEPB
Convidado

Marcelo C. Ferreira

Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG
Convidado

Campina Grande - PB
Agosto/2021

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele eu não teria forças para esta longa jornada, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia e socorro bem presente na hora da angústia; à minha esposa Gigliola Farias; à minha filha Maria Alice; ao meu pai Evenilson Dantas; à minha mãe Josefa Venâncio e ao meu irmão Edjanilson Dantas.

Agradecimentos

A Deus, o soberano Senhor e Criador do Universo, a quem sou e serei eternamente grato pelo dom da vida e pela capacidade de discernimento.

À Gigliola Gilmara de Sousa Farias Dantas, minha esposa, e à Maria Alice Dantas Farias, minha filha, pelo companheirismo e compreensão durante os períodos de ausência durante todo o transcorrer desta trajetória. A vocês, minha eterna admiração e gratidão pelo incentivo.

Aos meus pais, Evenilson Cunha Dantas e Josefa dos Santos Venâncio Dantas, que foram bases sólidas na construção do meu caráter. A vocês, o meu muito obrigado.

À meu irmão, José Edjanilson Venâncio Dantas, pela amizade e pelo apoio durante esta etapa da minha vida.

À Rita Farias e a Edilson Farias, pelo apoio, amizade, incentivo e porto seguro. A vocês, o meu muito obrigado.

Aos meus cunhados e parentes, sou grato pelo apoio e incentivo. Meu muito obrigado.

À Universidade Federal de Campina Grande, UFCG/Campus Campina Grande, pela oportunidade e acolhimento aos acadêmicos. Sou grato aos excelentes professores, por todo conhecimento oferecido no decorrer do curso.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima, pela amizade, incentivo, dedicação e por ter me ajudado e acreditado em mim, aceitando o convite de orientar-me neste trabalho. Saiba que suas orientações foram valiosas suas contribuições para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço aos professores Prof. Dr. Natan de Assis Lima e Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira, que fizeram parte da banca examinadora, por suas valiosas contribuições.

Aos discentes ingressos em 2019, onde destaco e agradeço a Railton Dantas, Rayanne Dantas, Shirlene Bernardo, Gerivaldo Bezerra, João Batista, Paulo Roberto, Geraldo Júnior e Maria Eduarda, por todo conhecimento compartilhado. Destaco, de maneira especial, Jaldir de Oliveira, Suênia Rodrigues, Rubem Silva e Aurino Junior (Ingresso 2019/UEPB) que fizeram parte das nossas viagens à UFCG, sempre incentivando um ao outro e buscando o companheirismo para vencermos juntos.

“Esse preparo não é do dia para a noite. É um processo que não se acaba.”
(Pr. Daniel Nunes da Silva)

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos como o conceito de Área e o Cálculo de Área surgiu e se desenvolveu ao longo da história, destacando os principais personagens que contribuíram para o seu desenvolvimento e compreensão. Além disso, faremos uma análise nos documentos norteadores da Educação brasileira para expor como esses conceitos estão inseridos neles, e também exploraremos como o conceito de Área está inserido em alguns livros didáticos, considerando como base para esse momento a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Por fim, apresentaremos propostas de atividades que melhorem o processo de Ensino e Aprendizagem deste conceito dos alunos do Ensino Básico, usando como ferramenta motivadora a História da Matemática e como ferramenta pedagógica auxiliar os materiais concretos.

Palavras-chave: Área. Cálculo de Área. Documentos Norteadores. Livros Didáticos. Ensino e Aprendizagem.

Abstract

In this work, we will present how the concept of Area and Area Calculation emerged and developed throughout history, highlighting the main characters who contributed to their development and understanding. In addition, we will make an analysis in the Guiding documents of Brazilian Education to expose how these concepts are inserted in them, and we will also explore how the concept of Area is inserted in some textbooks , considering as the basis for this moment the Common National Curriculum Base (BNCC). Finally, we will present proposals for activities that improve the teaching and learning process of this concept of primary school students, using as a motivating tool the History of Mathematics and as a pedagogical tool to assist concrete materials

Keywords: Area. Area calculation. Guiding Documents. Didatic books. Teaching and learning

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O estudo sobre o Cálculo de Áreas faz parte da área da Matemática conhecida como Geometria, que é extremamente importante para o desenvolvimento dessa disciplina de uma forma mais geral. Nos documentos norteadores da Educação brasileira, encontramos definições ou introduções aos conceitos pertinentes à Geometria e à Matemática como um todo. Por exemplo, a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) concluímos que a Geometria não pode ser interpretada como uma "mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume" (BRASIL, 2018, p. 272), pois ela é algo maior, no sentido que envolve um conjunto de conceitos e procedimentos para ajudar resolver problemas do mundo físico de diferentes áreas, não ficando restrito só à Matemática.

Como forma de abordar e compreender de maneira adequada o conceito de Área e seu cálculo e, assim, apresentar uma forma de adquirir habilidades necessárias para o prosseguimento da vida acadêmica dos nossos discentes, faz-se necessário um resgate histórico sobre o Cálculo de Áreas, levando em conta os documentos que sobreviveram ao longo da história e chegaram até nós.

Pensando em analisar o ensino de Áreas de figuras, e questionar formas de aperfeiçoar o ensino, é essencial a análise de como o tema é inserido nos documentos oficiais, como BNCC e PCN's, pois nesses documentos fica descrito e determinado que habilidades os alunos devem adquirir e dominar. Além disso, é importante verificarmos como esse tema é abordado nos livros didáticos disponíveis aos nossos alunos.

Por fim, com o intuito de contribuir no processo de Ensino e Aprendizagem dos nossos discentes do Ensino Básico, faremos algumas propostas de atividades para uma melhor difusão do ensino do Cálculo de Áreas.

Nessas propostas, apresentaremos as atividades levando em consideração algumas metodologias, não só a aula expositiva, mas trazer algo que atraia ainda mais a atenção dos discentes e, assim, fazer a aula mais produtiva para docentes e discentes.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Nosso trabalho tem como objetivo geral contribuir com processo de ensino e aprendizagem, fazendo uma análise histórica sobre o Cálculo de Áreas, bem como a sua inserção nos documentos oficiais e nos livros didáticos, além de fazer sugestões de atividades para melhorar o processo já existente.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar o levantamento histórico do Cálculo de Áreas;
- Analisar como o tema está inserido nos Documentos Oficiais;
- Verificar como os autores dos livros didáticos apresentam o Cálculo de Área para o aluno;
- Enriquecer o conhecimento do professor, contribuindo com a sua docência no que faz relação com o Cálculo de Área;
- Colaborar com o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

1.2 Organização

Discutiremos aspectos relevantes ao conteúdo de Cálculo de Área ao longo de todos os capítulos deste trabalho. Iniciaremos expondo fatos históricos e finalizaremos com as propostas de atividades tomando por norte o documento da Base Nacional Comum Curricular. Também serão discutidos alguns pontos ligados ao ENEM, OBMEP e aos livros didáticos. O uso do Cálculo de Área é muito antigo, por esse motivo não conseguimos dizer uma data precisa de quando começou seu uso, mas podemos indagar (de acordo com os documentos sobreviventes até os dias atuais) conclusões que ele começou no Antigo Egito antes dos anos 1500 a.C., as margens do rio Nilo, na esperança de cobrar impostos mais fiéis ao tamanho da terra que tinha para plantações. Com isso, dedicamos o primeiro capítulo (após a introdução) para realizarmos esse apanhado histórico e também mostrar alguns dos feitos um pouco mais recentes (Sec. XVI e XVII) ligados ao Cálculo de Área.

No segundo capítulo, expomos as orientações contidas nos principais documentos que norteiam o currículo da Educação Brasileira, entre os quais destacamos a Constituição da República Federativa do Brasil de 1988, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o Plano Nacional de Educação, as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais e, por fim, a Base Nacional Comum Curricular.

O capítulo seguinte está dedicado ao Livro Didático, onde iniciamos enfatizando a importância do livro didático dentro do processo de Ensino e Aprendizagem e mostramos um pouco sobre o Plano Nacional do Livro e Material Didático, para, em seguida, apresentarmos as análises dos livros propriamente dita. Separamos 4 coleções de livros, duas do Ensino Fundamental e duas do Ensino Médio, em que apresentamos uma análise de cada uma e, em seguida, fazemos o contraponto entre as coleções do mesmo nível de escolaridade, sempre tomando por base as habilidades ligadas ao Cálculo de Área que a BNCC nos apresenta para essas etapas do Ensino.

Seguindo a sequência, o próximo capítulo é destinado às propostas de atividades, elaboradas com pensamentos ligados à BNCC, no intuito de não deixar os discentes sem contemplar as habilidades de cada etapa de Ensino, ou como forma de verificar se os discentes conseguiram contemplar essa habilidade.

2 Contextualização Histórica

Desde os primórdios da humanidade, a natureza nos presenteia com uma quantidade variada de formas geométricas e, com o passar dos anos, algumas mentes brilhantes, vem desenvolvendo ou aperfeiçoando técnicas ou métodos para uma melhor compreensão de tais formas.

Com esses estudos, podemos dizer que se deu início ao que denominamos, Geometria, que é uma parte da Matemática que vem se desenvolvendo até os dias atuais. Mas, de acordo com os fatos, quando a Matemática começou a existir? E a Geometria? O autor Boyer (1974) nos dá uma boa resposta para essas perguntas:

> afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma escrita. (BOYER, 1974, p. 4)

Como Boyer descreve, não temos certeza de quando começou a Matemática como um todo, nem tão pouco a Geometria, por falta de registros. Mas, mesmo assim, no decorrer de sua obra ele nos dá um caminho firme e mais preciso para seguirmos e analisarmos os fatos históricos ou a cronologia histórica sobre Geometria. Ele afirma que

> o desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. E melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.(BOYER, 1974, p. 5)

Assim, seguindo o conselho dele, vamos parar de tentar fazer especulações ou conjecturas e vamos analisar os documentos que chegaram ao nosso conhecimento. Felizmente, com a ajuda da Arqueologia[1], foram encontrados preciosos registros de várias civilizações antigas, como, por exemplos, os registros matemáticos do Antigo Egito, da Babilônicos e dos Gregos.

[1] Ciência que estuda monumentos e vestígios de civilizações antigas. Fonte: <https://www.dicio.com.br/arqueologia/>

2.1 Egito Antigo

Os autores Boyer (1974) e Carvalho e Roque (2019) nos relatam um possível começo para a Geometria, usando como base os historiadores Heródoto e Aristóteles. Evidentemente, não vamos afirmar que essa é a verdadeira origem, mas é a que temos registro para declararmos, pois eles "não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas." (BOYER, 1974, p. 4)

Por um lado, Heródoto defendia que a Geometria se originou no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade de remarcar as terras no vale do rio Nilo, a cada inundação dele. Como torna claro em uma das suas obras,

> [Quando das inundações do Nilo], o rei Sésotris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia. (HERÓDOTO, *Oeuvres complètes* II 109, p. 183, apud CARVALHO, ROQUE, 2019, p. 60)

Usando as palavras de Heródoto, podemos chegar a uma possível conclusão dos primeiros registros ou uso do Cálculo de Áreas, que foram realizados as margens do Rio Nilo como mecanismo para o rei cobrar os impostos de forma mais justa, pois, quando havia as inundações do Rio Nilo, a área de plantio de uma determinada pessoa daquela localidade tendia a diminuir, assim, o rei, segundo Boyer (1974), enviava pessoas (também conhecidos de "esticadores de cordas" ou "agrimensores") para verificar e recalcular a área destruída e/ou inundada. Nesse contexto, esses agrimensores acabaram aprendendo a calcular Áreas de terras repartindo-as em retângulos e triângulos. É Muito provável que esse episódio seja o que melhor explica a origem da palavra Geometria, que é derivada do grego geo = terra + metria = medida, que pode ser traduzida em medição de terra.

Outrossim, Aristóteles defendia que a origem da Geometria era remetida ao Egito, pois ele falava que no Egito existia uma classe sacerdotal com lazeres e ela conduzia o estudo da Geometria, como deixa claro em uma das suas obras:

> em lugares nos quais as pessoas dispunham de lazer. Esta é a razão de a Matemática ter sido surgida primeiro no Egito; pois aí a casta dos sacerdotes tinha permissão para desfrutar de lazer. (ARISTÓTELES, *Metafísica*, 981^b 20-25, apud CARVAHO, ROQUE, 2019, p. 60)

Analisando os documentos que sobreviveram até os dias atuais, que são provenientes do Antigo Egito, encontramos os Papiros Rhind (ou Ahmes) e o Papiro Moscou (ou Golonishev), que, juntos, formam uma lista com 110 problemas, que nos trazem uma noção de como era a Geometria e a Aritmética naquela civilização. Segundo Eves (2011), o Papiro Moscou é datado de cerca de 1850 a.C., e é “um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado” (EVES, 2011, p. 69). Ainda segundo ele, o Papiro Rhind é datado de cerca de 1650 a.C., e é “um texto matemático na forma manual prático que contém 85 problemas copiados [...] pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. ” (EVES, 2011, p. 69). Dessa lista de 110 problemas dos dois papiros, temos que 26 são geométricos. Na sua maioria, esses problemas provêm de fórmulas de medição conveniente para calcular áreas e volumes de celeiros.

Figura 1 – Papiro Ahmes

Fonte:<https://media.britishmuseum.org/media/Repository/Documents/2014_10/6_12/19cee097_aaaf_4408_8751_a3bc00ca23a9/mid_00413752_001.jpg>)

De acordo com Boyer (1974), o Papiro Ahmes é o mais extenso dos papiros de natureza matemática, ele “é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento” (BOYER, 1974, p. 9). Este papiro encontra-se, em sua maior parte, no Bristish Museum (Museu Britânico), e alguns fragmentos no Brooklin Museum (Museu do Brooklyn). Os registros nos apresentam que esse papiro foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Rio Nilo, por Henry Rhind, por isso ele também é chamado de Papiro de Rhind. Segundo Boyer (1974), esse papiro também é “chamado Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 A.c.” (BOYER, 1974, p. 9).

De acordo com os autores Santos e Veiga (2002), o papiro Rhind não tem 85 problemas e sim 87, assim como tabelas em que se expressam todas as frações de numerador 2 e denominador n tal que n é ímpar e está entre 5 e 101, e a tabela de decomposição de $\frac{n}{10}$, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, como soma de frações unitárias. Ainda segundo os autores, podemos apresentar a lista com todos os problemas do Papiro de Rhind:

- 1 a 6 - Divisão de 1, 2, 6, 7, 8 e 9 pães por 10 homens.

- 7 a 20 - Multiplicação das expressões $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ por diferentes frações.
- 21 a 23 - Subtrações: $1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{15}), 1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{30})$ e $\frac{2}{3} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45})$.
- 24 a 29 - Problemas de quantidades, envolvendo equações do 1° grau com uma incógnita, resolvidas pelo método da falsa posição.
- 30 a 34 - Problemas semelhantes aos anteriores, porém mais complicados (envolvendo frações) e resolvidos pelo método da divisão.
- 35 a 38 - Problemas de hekat (medida de capacidade), envolvendo equações do 1° grau com uma incógnita, ainda mais complexas que as anteriores, resolvidos pelo método da falsa posição.
- 39 - Divisão de pães.
- 40 - Divisão de pães envolvendo progressões aritméticas.
- 41 a 43 - Volumes de contentores cilíndricos de cereais.
- 44 a 46 - Volumes de contentores paralelepipédicos de cereais.
- 47 - Tabela das frações de 1 hekat, como frações do olho de Hórus.
- 48 a 53 - Áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos.
- 54 e 55 - Divisão relacionada com área.
- 56 a 60 - Problemas relacionados com pirâmides (sekeds (equivalente à noção atual de cotangente de um ângulo), alturas e bases)
- 61 e 61B - Tabela de uma regra para encontrar $\frac{2}{3}$ de números ímpares e frações unitárias.
- 62 - Problema de proporções, sobre metais preciosos e o seu peso.
- 63 e 65 - Divisão proporcional de pães por um número de homens.
- 64 - Problema envolvendo uma progressão aritmética.
- 66 - Divisão de gordura.
- 67 - Proporção de gado devido a impostos.
- 68 - Divisão proporcional de cereais entre grupos de homens.
- 69 a 78 - Problemas de pesos de pão e cerveja. Proporção inversa.

- 79 - Progressão geométrica de razão 7.
- 80 e 81 - Tabelas das frações do olho de Hórus.
- 82 a 84 - Problemas (pouco claros) sobre a quantidade de comida de vários animais domésticos, como gansos e outras aves.
- 85 - Escritura enigmática
- 86 e 87 - Apontamento de certas contas e incidentes (em parte perdido)

Apresentaremos a seguir os problemas junto com as resoluções ligados ao Cálculo de Áreas encontrados no Papiro de Ahmes. Usaremos aqui os documentos apresentados por Santos e Veiga (2002) e, inicialmente, apresentaremos a conversão das medidas utilizadas na época para a usada atualmente.

- **Medidas de comprimento:** A unidade básica de comprimento utilizada no período era o **meh** ou **cubit**. O meh original media cerca de 0,457 m. Com o passar dos tempos, a partir da terceira dinastia, tomou-se como unidade de medida o **meh real** que era o meh original acrescido de um palmo, o que equivalia a 0,523 m. O meh dividia-se em sete **shesep**. Também havia outras unidades de medida de comprimento, como:
  - Frações do meh, como o **yeba**, $\frac{1}{28}$ do meh;
  - O **nebiu** era um meh e meio;
  - O **jet** representava cem meh;
  - O **iteru** equivalente a 10.5 km, cerca de 20000 meh;
  - O **demen** era uma unidade um tanto curiosa, pois dois demen correspondiam ao comprimento da diagonal de um quadrado com um meh de lado; seria equivalente à raiz quadrada de dois meh.

Tabela 1 – Conversão de Unidades

Nome	**Equivalência**
Meh	0,523 m
Shesep	7,471 cm
Yeba	1,87 cm
Jet	52,3 m
Iteru	10,5 Km

Fonte: Santos e Veiga (2002)

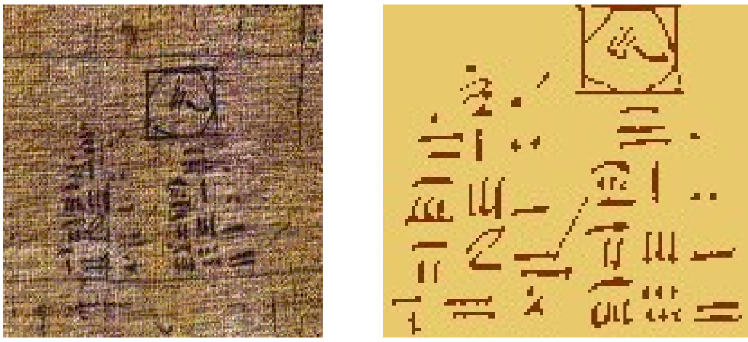
- **Medidas de Superfície:** A unidade básica de superfície era o **setat** que equivalia a um quadrado com cem meh de lado, ou seja, cem meh quadrados. Outras medidas de Superfície usada no período eram:
  - O **remen** ($\frac{1}{2}$ de setat);
  - O **hebes** ($\frac{1}{4}$ de setat);
  - O **as** ($\frac{1}{8}$ de setat);
  - O **jata** equivalente a 100 setat.

- **Problema 48:** Comparar a área do círculo com a de um quadrado circunscrito.

  <u>Resolução:</u>

  O escriba considera um diâmetro igual a 9 jet e calcula a área do círculo. Obtém, assim, um valor de 64 setat (será detalhado esse processo no **Problema 50**). E o quadrado com 9 jet de lado tem 81 setat, o que implica que a área do quadrado é maior que a do círculo.

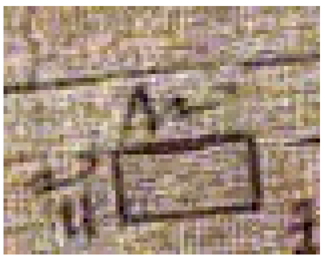
Figura 2 – Problema 48 no Papiro Ahmes



Fonte: Santos e Veiga (2002)

- **Problema 49**: Área de um retângulo de 10 jet de comprimento e 1 jet de largura.

Figura 3 – Problema 49 no Papiro Ahmes



Fonte: Santos e Veiga (2002)

<u>Resolução:</u>

O escriba obtém o valor da área de 10 setat (segundo Carvalho e Roque (2019) eles encontravam a área do retângulo da mesma forma que usamos atualmente, isto é, multiplicando as dimensões da altura e comprimento), através do produto do valor da altura e do comprimento do retângulo (10 khet 1 khet = 10 setat).

- **Problema 50:** Um campo circular tem 9 jet de diâmetro. Qual é a sua área?

  Resolução:

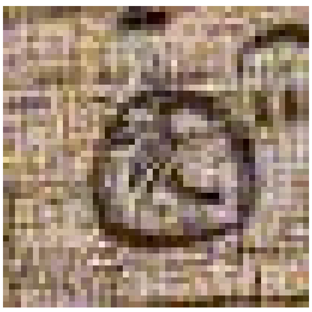
  A mais antiga referência a problemática da quadratura do círculo é apresentada no papiro Ahmes. A área de um círculo de diâmetro 9 jet é dado por:

  - subtrai-se do diâmetro a sua nona parte e o resultado é 8;
  - Multiplica-se 8 por 8 que dá 64;
  - Então a área pretendida é 64.

  Transformando em notações atuais, podemos dizer que o escriba egípcio utiliza a formula $A = (d - \frac{d}{9})^2 = (\frac{64}{81})d^2$. Lembrando que, nos registros do Antigo Egito, não encontramos o número π, mas, quando falamos de área de uma circunferência, é impossível não recorremos a ele. Se compararmos os resultados com as fórmulas atuais, teríamos $\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$, ou seja, $\pi = 3,16049...$, que é uma boa aproximação do valor real $3,1415926...$.

  Ao realizar a resolução deste problema (Figura 4), acredita-se que os egípcios fizeram uma analogia entre o círculo e um octógono inscrito num quadrado, fazendo uma aproximação da área do círculo com a de um octógono.

  Figura 4 – Problema 50 no Papiro Ahmes

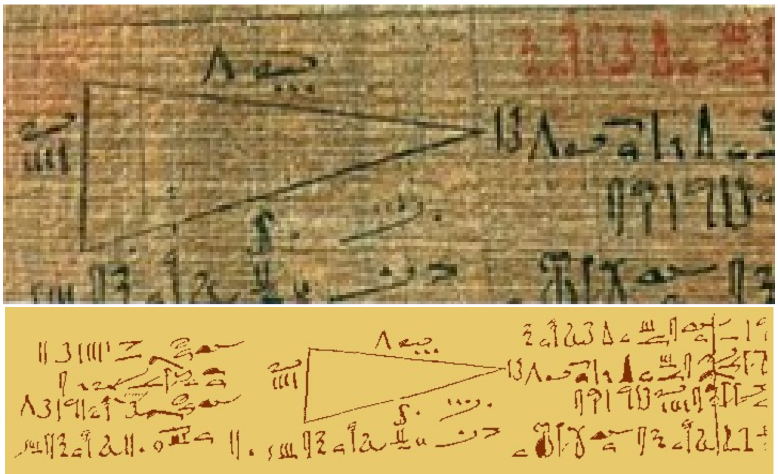
  Fonte: Santos e Veiga (2002)

- **Problema 51:** Qual é a área de um triângulo de lado 10 jet e base 4 jet?

  Resolução:

  Seguindo a resolução apresentada nos registros históricos, acredita-se que Ahmes considerou, nesse problema, o triângulo como sendo triângulo isósceles, pois ele dividiu a base em duas, e o transformou em um retângulo, encontrando a área de forma análoga a do **Problema 49**. Segue a resolução encontrada: toma-se metade de 4, para formar um retângulo, obtendo-se 2. Multiplica-se 10 por 2 é o resultado de 20 é a área procurada.

Figura 5 – Problema 51 no Papiro Ahmes



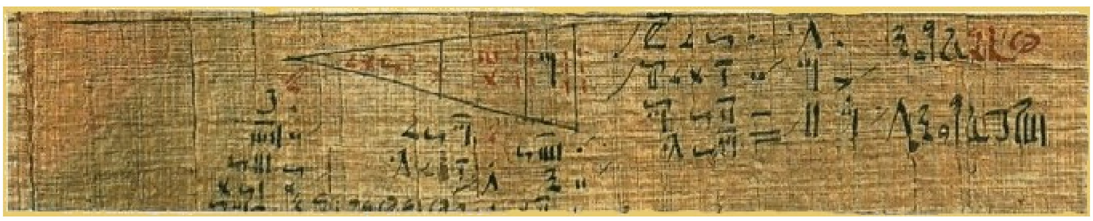
Fonte: Santos e Veiga (2002)

- **Problema 52:** Qual é a área de um triângulo truncado de 20 jet de lado, 6 jet de base e 4 jet de linha de secção?

  Resolução:

  Seguindo a resolução apresentada nos registros históricos, acredita-se que Ahmes considerou, nesse problema, que o triângulo truncado é um trapézio isósceles, que se obtém através do corte do triângulo segundo uma linha paralela à base. E, assim, ele resolveu esse problema transformando-o em um retângulo e encontrando a área de forma análoga a do **Problema 49**. Segue a resolução descrita nos registros: soma-se à base do triângulo a linha de secção, obtendo o valor 10. Para obter um retângulo, divide 10 por 2 obtendo 5. Em seguida, multiplica-se 5 por 20 e obtém a área desejada: 100.

Figura 6 – Problema 52 no Papiro Ahmes

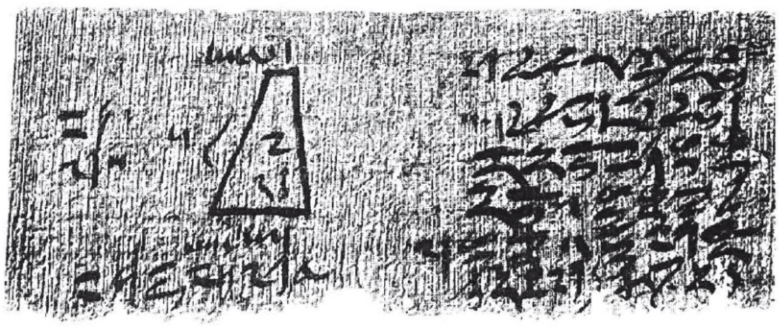


Fonte: Santos e Veiga (2002)

Concluímos, assim, que os egípcios tinham um certo conhecimento do cálculo das áreas de alguns polígonos, mas, como mencionado anteriormente, esses cálculos eram ligados à situações cotidianas, principalmente à divisões de terras e, como percebemos, eles sempre procuravam transformar as situações em conhecimentos anteriormente adquiridos. Podemos até afirmar que o Cálculo de Área do retângulo foi o primeiro cálculo dominado por eles, pois os problemas apresentados nos mostram que eles transformaram as figuras em questão em um retângulo e/ou quadrado, ou usaram o retângulo e/ou quadrado para aproximar as áreas procuradas. Devemos frisar também que os egípcios não se preocupavam em generalizar fórmulas matemática, e sim em resolver problemas do cotidiano.

Ainda com os olhares voltados para os documentos egípcios, encontramos o Papiro Moscou, também conhecido como Papiro Golenishev. Segundo Eves (2011), esse papiro foi comprado no Egito em 1893 por um colecionador russo de nome Golenishev (por esse fato o Papiro Moscou, também é conhecido por Papiro Golenishev) e, atualmente encontra-se no Museu de Belas-Artes de Moscou, Rússia. De acordo com Boyer (1974), esse papiro tem quase o mesmo comprimento do Papiro Ahmes, mas com $\frac{1}{4}$ da largura. Esse papiro foi escrito por volta de 1890 a. C., por um escriba desconhecido, sendo composto por vinte e cinco (25) problemas, principalmente ligados à vida prática.

Figura 7 – Problema 14 no Papiro Moscou



Fonte: Eves (2011)

Os autores Boyer (1974) e Eves (2011) nos apresentam alguns dos problemas do Papiro Moscou e alguns são ligados diretamente ao Cálculo de Volume e de Áreas. O Problema 14 (Figura 7) desse papiro está ligado ao Cálculo do Volume de um tronco de pirâmide de base quadrada. O Problema 10 aparenta estar ligado o Cálculo de Área de superfície curva, pois

> O Prob. 10 no Papiro de Moscou apresenta uma questão mais difícil de interpretar que a do Prob. 14. Aqui o escriba pede a área da superfície do que parece ser um cesto com um diâmetro $4\frac{1}{2}$. Procede como se usasse o equivalente da fórmula $S = (1 - \frac{1}{9})^2(2x)x$ onde x

> é $4\frac{1}{2}$, obtendo como resposta 32 unidades. Como $(1-\frac{1}{9})^2$ é a aproximação egípcia para $\frac{\pi}{4}$, a resposta 32 corresponderia à superfície de um hemisfério de diâmetro $4\frac{1}{2}$, ... Análise posterior indica que a cesta' pode ter sido um teto – Algo como o de um hangar em forma de meio cilindro de diâmetro $4\frac{1}{2}$ e comprimento$4\frac{1}{2}$. O cálculo nesse caso não exige mais que o conhecimento do comprimento de um semicírculo, e a obscuridade do texto permite oferecer interpretações ainda mais primitivas, inclusive a possibilidade de ser o cálculo apenas uma avaliação grosseira da área de um teto de celeiro em forma de cúpula.(BOYER, 1974, p.15 e 16)

Assim, podemos ver que temos, nas palavras de Boyer (1974), uma das primeiras tentativas de estimar a área de superfície curvas. Eves (2011), em sua obra, nos deixa como exercício dois dos problemas do Papiro de Moscou, que envolvem o Cálculo de Área, que iremos resolver usando linguagem matemática moderna.

Exercício 01 – A área de um retângulo é 12 e a altura é $\frac{3}{4}$ da base. Quais são as dimensões?

Resolução:

Chamando a base de x, temos que a altura será $y = \frac{3}{4}x$. Como a Área é 12 u. A., temos

$$A = b.h$$

$$A = x.y$$

$$12 = x.\frac{3}{4}x$$

$$x^2 = \frac{48}{3}$$

$$x = \sqrt{16} = 4u.C.$$

Exercício 02 – Um dos catetos de um triângulo retângulo é $2\frac{1}{2}$ vezes o outro e a área é 20. Quais são as dimensões?

Resolução:

Como o triângulo em questão é retângulo, então os catetos fazem o papel da altura e base do triângulo, assim chamando x de base, temos $y = 2\frac{1}{2}x$ de altura, assim

$$A = \frac{x.y}{2}$$

$$20 = \frac{x.y}{2}$$

$$40 = x.2\frac{1}{2}.x$$

$$80 = 5x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{80}{5}}$$

$$x = 4$$

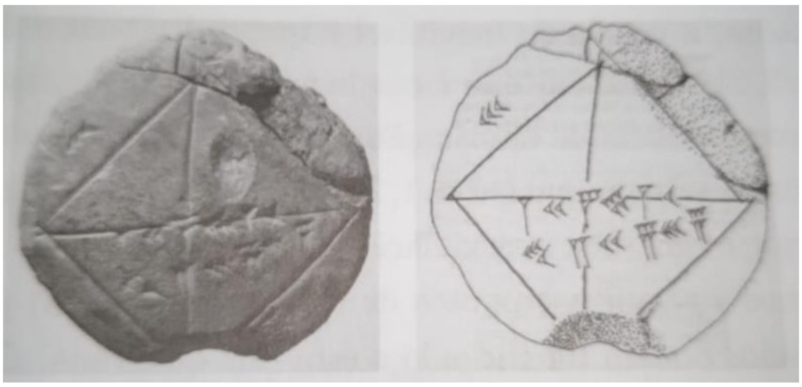
Com isso, podemos concluir que os matemáticos do Egito Antigo, conheciam e praticavam o Cálculo de Área, mas, como já mencionado anteriormente, sem preocupação de generalizações de fórmulas, e sim de resolver problemas práticos do cotidiano.

2.2 Babilônia

A Geometria babilônica está bastante relacionada com a mensuração prática. Segundo Eves (2011), já foram encontradas cerca de quinhentas mil tábulas (ou também chamadas de tabletes) na região da Mesopotâmia, das quais cerca de 400 são estritamente matemáticas, onde nos apresentam listas de problemas matemáticos. Com essas tábulas, temos um bom número de exemplos concretos que nos fazem interpretar que os babilônicos do período 2000 a.C. a 1600 a.C. estavam "familiarizados com as regras gerais para calcular área de retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo" (EVES, 2011, p. 60).

No que se refere a Cálculo de Área e/ou perímetro do círculo, os babilônicos consideravam uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e sua área como sendo um duodécimo da área do quadrado de lado igual ao comprimento de sua circunferência. Usando as fórmulas atuais, conseguimos provar que esse fato é verdadeiro desde que consideremos $\pi = 3$. Sendo assim, podemos considerar que eles conseguiam ter uma aproximação consideravelmente boa para a época da área do círculo.

Figura 8 – Tablet YBC 7289



Fonte: Carvalho e Roque (2019)

Os registros desses povos que chegaram até os dias atuais foram feitos nesses tabletes, os quais eram produzidos de argila. De acordo com Carvalho e Roque (2019), temos um exemplo prático do uso de Cálculo de Áreas, utilizada para o cálculo de raiz quadrada, pois eles nos informam que "o exemplo mais conhecido de cálculo de raízes quadradas pelos babilônicos encontra-se no tablete YBC 7289, produzido entre 2000 e 1600 a.E.C." (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 19). O tablete YBC 7289 (Figura 8) mostra uma aproximação para o que conhecemos atualmente como $\sqrt{2}$. Eles ainda nos trazem que, para calcular a raiz quadrada de um número qualquer k, eles encontram o lado de um quadrado de área k, mostrando, assim, o domínio sobre o Cálculo de Área do quadrado. Os autores ainda nos trazem outros registros babilônicos, como, por exemplo, o Tablete YBC 7302 (Figura 9), onde encontramos detalhes sobre um possível Cálculo de Área do círculo usando o comprimento de sua circunferência.

Figura 9 – Tablet YBC 7302

Fonte: Carvalho e Roque (2019)

Iremos apresentar alguns exemplos que se encontram no tablete BM 13901, que atualmente se encontra na coleção do *British Museum*, na linguagem atual, mas usando a base sexagesimal, que era a base utilizada na época pelos babilônicos.

Exemplo 01 – Procedimento: "Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?

Resolução:

- Tome 1;
- Fracione 1 tomando a metade (:0,30);
- Multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15);
- Some 0,15 a 0,45 (:1);
- 1 é a raiz quadrada de 1;
- Subtraia os 0,30 de 1;
- 0,30 é o lado do quadrado.

Exemplo 02 – Procedimento: "Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante: 0,20"

Resolução:

- Tome 1;
- Subtraia o terço de 1, ou seja, 0,20, obtendo 0,40;
- Multiplique 0,40 por 0,20 obtendo 0,13;20;
- Encontre a metade de 0,20 (: 0,10);
- Multiplique 0,10 por 0,10 (: 0,1;40);
- Adicione 0,1;40 a 0,13;20 (: 0,15);
- 0,30 é a raiz quadrada;
- Subtraia 0,10 de 0,30 (: 0,20);
- Tome o recíproco de 0,40 (1,30);
- Multiplique 1,30 por 0,20 (: 0,30);
- 0,30 é o lado do quadrado.

Comparando os exemplos acima com a Matemática atual, temos que esses enunciados podem ser traduzidos em linguagem de Equação do Segundo Grau. Por causa desse fato, alguns historiadores conjecturaram que a Matemática Babilônica era de natureza algébrica. Mas sempre é bom lembrar que (embora podemos traduzir esse fato para a linguagem $ax^2 + bx = c$) eles não tinham símbolos para designar os coeficientes nem as incógnitas.

2.3 Grécia Antiga

Saindo da Babilônia e indo um pouco mais a frente na história, chegamos à Grécia antiga. Podemos dividir essa parte da história em alguns momentos, como: Momento antes de Euclides, que podemos incluir Tales de Mileto e os pitagóricos e suas contribuições; o Momento de Euclides, onde temos grandes e ricas contribuições do mesmo, como a elaboração dos livros denominados de "Os Elementos"; temos também o Momento de Arquimedes, que é considerado por alguns como o maior matemático da Antiguidade[2].

[2] Alguns vão mais longe ainda, como fala o Professor Chris Rorres (professor emérito de Matemática da Universidade Drexel da Pensilvânia, nos Estados Unidos), "não há outro matemático na Antiguidade, nem na história que chega aos pés de Arquimedes." (NEWS, 2017).

Os livros de História nos trazem que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto (estima-se que ele teria vivido nos séculos VII e VI a.C.). Um dos grandes feitos de Tales que temos registros foi "o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, por meio de semelhança entre, por um lado, a relação desta altura com sua sombra e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra." (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 60). Em geometria, ligamos a ele 5 grandes resultados:

> 1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
> 2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
> 4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. [...]
> 5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes.) (EVES, 2011, p. 95)

Outro feito de Tales foi que ele "mediu a distância de um navio à praia, usando o fato de que 2 triângulos são congruentes se 2 ângulos e o lado comum de um deles forem respectivamente iguais a dois ângulos e ao lado comum do outro." (EVES, 2011, p. 115). Além disso, analisando o feito dele ao calcular a altura da pirâmide, não encontramos registros de como ele conseguiu vencer a dificuldade de calcular a sombra da pirâmide, que é a "distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide". (EVES, 2011, p. 95).

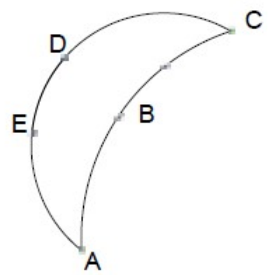
Nos registros encontrados sobre Tales, não conseguimos identificar contribuições ligadas diretamente ao Cálculo de Áreas, embora sabemos que, essas contribuições podem ser usadas como mecanismos facilitador de cálculos em algumas situações, como, por exemplo, quando deseja-se calcular a área de uma praça em forma triangular que tem as medidas proporcionais na sua maquete, onde com as medidas da maquete e usando semelhança de triângulo, podemos sem muita dificuldade calcular a área da praça.

Outro exemplo para usar as contribuições de Tales, na qual pode ser aplicada também no Ensino Básico, é propor aos alunos o cálculo da área total da pirâmide, fazendo uma ponte do fato relatado ao teorema creditado a Pitágoras (estima-se que ele é datado de 586 a.C. a 500 a. C.), o famoso Teorema de Pitágoras. Especula-se que Pitágoras possa ter sido discípulo de Tales, por morar perto de Mileto e ser mais jovem. Os pitagóricos fizeram a transição de Tales a Euclides. O famoso Teorema de Pitágoras que conhecemos hoje diz "que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" (EVES, 2011, p. 103), mas não há registros de nenhuma prova desse teorema que tenha sido realizada por algum pitagórico, e acreditamos também que esse teorema, para os pitagóricos, não deveria ser um resultado geométrico, pois esses usavam o contexto dos números figurados. "Os números figurados dos pitagóricos consistiam em uma multiplicidade de pontos que também não eram pontos matemáticos, mas remetiam a elementos discretos: pedrinhas dispostas em uma certa configuração "(CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 66).

Assim, podemos concluir que não existe contribuição direta no Cálculo de Área feita pelos pitagóricos, visto que eles não colocavam seus resultados na geometria, embora alguns desses possam ser provados usando a geometria, como o famoso Teorema de Pitágoras, que pode ser justificado utilizando o conceito de Área do Quadrado, por exemplo.

Com relação ao Cálculo de Áreas, nesse período, temos as chamadas *lúnulas de Hipócrates*, que são os primeiros exemplos de figuras limitadas por curvas com áreas calculadas. "Uma lúnula é uma figura plana limitada por dois arcos circulares de raios diferentes"(CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 70) (Figura 10). Esse estudo faz parte do período da Matemática grega, cujos matemáticos tentavam resolver um dos conhecidos problemas gregos, a Quadratura do Círculo. A Quadratura de uma figura tratava-se de construir um quadrado com área igual à da figura dada.

Figura 10 – *Lúnulas de Hipócrates*



Fonte: Carvalho e Roque (2019)

Avançando mais um pouco na História da Matemática grega, chegamos a Euclides (estima-se que ele viveu em torno de 300 a.C., mas não temos registros fiéis para data de nascimento e nem de morte dele) e uma das maiores contribuições foi a coleção de livros conhecida como *Os Elementos*. Essa coleção é composta por 465 proposições distribuídas em livros, que apresentam resultados de vários tipos e podem, de acordo com Carvalho, ser divididos em 3 grupos: Geometria Plana (Livros I - VI), Aritmética (Livros VII - IX) e Geometria Espacial (Livros XI - XII). Nos Livros de Geometria Plana, encontramos bons resultados. Inicia-se com alguns princípios e axiomas, dando até uma demonstração ao Teorema de Pitágoras, fazendo também equivalência entre Áreas de figuras, como, por exemplo,

> Dado um triângulo, construir um retângulo com a mesma área. Isso pode ser feito seguindo o roteiro abaixo.
> 1. Dado o triângulo ABC, "complete-o" para obter o paralelogramo ABCD, cuja área é igual a duas vezes a área do triângulo.

> 2. Construa o retângulo ACED, equivalente ao paralelogramo obtido no item anterior.
> 3. Divida o segmento AC em duas partes iguais, pelo ponto K, obtendo, assim, o retângulo AKLD, equivalente ao triângulo ACB inicialmente dado.(CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 92)

Com esse exemplo, podemos fazer a quadratura de várias figuras planas. Para isso, basta dividí-la em vários triângulos e depois realizar o processo acima, pois também encontramos nos livros *Os Elementos* como construir um quadrado igual a um retângulo dado, que se trata da Proposição II. 14, a qual está inserida no segundo livro da coleção. Outro grande resultado que Euclides traz em seus livros encontra-se no Livro XII, garantindo que "círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros" (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 113). Esse resultado nos trazem uma relação entre áreas e diâmetros de círculos, facilitando o cálculo de algumas áreas de círculos.

Em resumo (segundo Eves), podemos descrever que o Livro I da coleção começa com definições, axiomas e postulados essenciais para o desenvolvimento da teoria. Esse primeiro livro é composto por 48 proposições, subdividida em 3 grupos: as 26 primeiras proposições tratam das propriedades do triângulo; Da Proposição I 27 a I 32, encontramos a Teoria das Paralelas, como a prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 2 ângulos retos; e as demais proposições trabalham com paralelogramos, triângulos e quadrados, com cuidado espacial no que trata a relação entre áreas.

O segundo livro da coleção é um pouco menor com apenas 14 Proposições, o qual, dentre outros assuntos, ele nos apresenta a transformação de área, que já foi citada como exemplo anteriormente. O Terceiro livro é composto por 39 proposições, onde é trabalhado teoremas sobre círculos, cordas, medidas de ângulos, entre outros assuntos interligados a esses. O quarto livro também é um pouco pequeno, contendo 16 proposições que tratam de construção usando régua e compasso de polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, e 15 lados, bem como apresenta a inscrição e circunscrição desses polígonos em um círculo dado.

O quinto livro apresenta uma exposição da teoria das proporções de Eudoxo [3]. O sexto livro aplica a Teoria das Proporções Eudoxiana à Geometria Plana. Os livros VII, VIII e IX apresentam um total de 102 proposições, trabalhando sobre a teoria elementar dos números. O décimo livro traz, em especial, os irracionais, ou seja, "segmento de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado " (EVES, 2011, p. 175). Os últimos três livros vão tratar de Geometria Espacial. O Livro XI apresenta definições,

[3] Podemos definir proporção (usando a definição eudoxiana) como:"*Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente."* (EVES, 2011, p. 173)

teoremas sobre retas e planos no espaço, bem como teoremas sobre paralelepípedo. No Livro XII, encontramos estudos sobre pirâmides, cilindros, cones e esferas. Uma das proposições desse livro, a Proposição XII. 2, nos apresenta que dois círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros, ou seja, podemos usar essa proposição para o Cálculo de Área de círculos "semelhantes". E, para finalizar a coleção, no Livro XIII, Euclides desenvolve construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

Seguindo adiante na Matemática grega, chegamos ao período pós Euclides, onde encontramos Arquimedes (estima-se que ele viveu na segunda metade do século II a.C.) e, como já foi mencionado anteriormente, ele é considerado por muitos o maior matemático da antiguidade. Mas quais fatos históricos nos deixam defender esse ponto de vista? O primeiro fato que podemos ressaltar é o cálculo de volume de objetos de várias formas, através do chamado "Princípio de Arquimedes", que postula que qualquer corpo mais denso que um fluido, ao ser mergulhado nesse, perde peso correspondente ao volume de fluido deslocado. Esse princípio ajudou a resolver o problema da coroa do Rei Hiero, Rei de Siracusa, no qual o rei queria saber se a coroa dele tinha sido feita só de ouro, como tinha ordenado, ou se os ourives misturaram prata. Arquimedes conseguiu provar que tinha se misturado prata ao ouro da coroa.

Outro grande feito de Arquimedes que merece o referido destaque foi o fato dele estimar o valor do número irracional π, vital para calcular a área de um círculo. Ele conseguiu estimar o número colocando um círculo entre polígonos, já que seu perímetro pode ser calculado. Começou inserindo um hexágono dentro do círculo e outro fora. Em seguida, foi adicionando mais e mais lados até chegar a 98. Assim ele calculou que o valor de π estava entre $\frac{223}{71} \approx 3,1408$ e $\frac{22}{7} \approx 3,1428$. (EVES, 2011, p. 142).

Mais um dos grandes feitos dele foi o problema da quadratura da parábola. Esse problema trata-se da "comparação da área limitada por uma parábola e por um segmento de reta com a Área de um triângulo tendo este segmento de reta como base" (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 138), mais precisamente, ele queria mostrar que a área entre a parábola e o segmento de reta é $\frac{3}{4}$ da Área do triângulo cuja base é o segmento de reta e a altura é a distância ao "vértice" da parábola. Temos que "A prova pelo método de exaustão é longa e elaborada, mas Arquimedes provou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico APBQC [...] é quatro terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e mesma altura. " (BOYER, 1974, p. 94 e 95).

Outro feito de Arquimedes dentro do Cálculo de Área foi a quadratura do círculo, onde ele demonstra (usando o método da exaustão) que "Proposição 1. A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo. " (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 147). Analisando os registros, vemos que aqui é a primeira vez que aparece, na matemática grega, o uso do perímetro para figuras curvas, no sentido de que antes era só utilizado em polígonos.

Ainda falando da Matemática grega, apresentaremos algumas das contribuições de Apolônio de Perga (estima-se que ele teria vivido durante os últimos anos do século III até o princípio do Século II a.C.) no que se refere ao Cálculo de Áreas, onde seus principais trabalhos foram as cônicas (que conhecemos hoje por Elipse, Parábola e Hipérbole). Mas antes de falarmos dessas contribuições, faremos uma breve introdução sobre o método de aplicação de Área da Geometria grega, que "está presente nos Elementos de Euclides e é amplamente usado por Apolônio." (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 158).

Assim, na terminologia Matemática grega, o que significa aplicar uma figura (poligonal) a um segmento de reta dado? Em resumo, é construir a figura dada, usando o segmento de reta como um dos lados, ou seja, construir uma nova figura com um lado já conhecido e preservando a área da figura original. Por exemplo, sejam $ABCDE$ um polígono qualquer e FG um segmento de reta, fazer a aplicação ao segmento FG, por exemplo, um paralelogramo, com área igual à de $ABCDE$, significa construir um paralelogramo $FGHI$ com FG sendo um dos lados e Área seja igual à do polígono $ABCDE$.

Na História da Matemática, vemos que "os gregos usavam três tipos de aplicação de áreas, listadas a seguir: **1.** Aplicação parabólica; **2.** Aplicação elíptica; **3.** Aplicação hiperbólica." (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 159). Uma aplicação parabólica baseia-se em aplicar, a um segmento de reta, um paralelogramo com área igual à da figura dada, com um ângulo especificado. Já uma aplicação elíptica ou *com falta* baseia-se em aplicar a um segmento de reta, um paralelogramo, com ângulo previamente estabelecido e Área igual a de um polígono dado, mas esse processo deve ser feito de tal maneira que o que faltar para completar todo o segmento de reta, seja outro paralelogramo semelhante ao paralelogramo dado. E, por fim, a aplicação hiperbólica *com excesso* é similar à anterior, mas ao invés de faltar para completar o segmento, ela deve exceder o segmento, ou seja, a aplicação baseia-se em aplicar a um segmento de reta, um paralelogramo, com ângulo dado, com Área igual à do polígono dado, mas deve ser feito de maneira que ele exceda o segmento por um paralelogramo semelhante ao paralelogramo dado.

Nos registros que sobreviveram até os dias atuais, pouco se sabe da vida do matemático Apolônio de Perga. O autor Boyer (1974) nos relata que Apolônio escreveu algumas obras, mas a maior parte se perdeu. Ainda de acordo com ele, numa dessas obras (perdidas) chamada de *Resultados Rápidos*, Apolônio obteve uma nova aproximação para o número π, melhor do que a apresentada por Arquimedes, mas não temos registro de como o valor foi obtido, embora acredita-se que ele estimou para

$3,1416$. Temos também outros títulos das suas obras perdidas, como: *Dividir uma razão, Cortar uma área*, entre outras.

O autor (BOYER, 1974) nos traz alguns problemas que essas obras contemplam, e usam as aplicações de áreas dos gregos:

> o *Dividir em uma razão* tratava de vários casos de um problema geral – dadas duas retas e um ponto em cada uma, traçar por um terceiro ponto dado uma reta que corte sobre as retas dadas segmentos (medidos a partir dos pontos fixados sobre elas) que estejam numa razão dada. Esse problema equivale a resolver uma equação quadrática do tipo $ax\breve{}x^2 = bc$, isto é, aplicar a um segmento um retângulo igual a um retângulo e faltando um quadrado. Em *Cortar uma área* o problema é semelhante, só que se exige que os segmentos cortados contenham um retângulo dado, em vez de estar numa razão dada. Esse problema leva a uma quadrática da forma $ax + x^2 = bc$, de modo que é preciso aplicar a um segmento a um retângulo igual a um retângulo e com excesso de um quadrado. (BOYER, 1974, p. 105)

Ainda com relação às obras de Apolônio, temos que só uma delas se preservou consideravelmente, que foi a sua obra mais memorável, cujo título é *Cônicas.* Ela trata-se de uma obra formada por oito livros, com cerca de 400 proposições, onde traz vários resultados sobre cônicas obtidos até aquele período por seus antecessores, assim como apresenta inovações importantes. Ela é um estudo que supera até os trabalhos realizados por Euclides dentro desse assunto. Um detalhe a mais é que apenas sete livros chegaram até nós. Os quatros primeiros livros tratam da teoria mais elementar. No Livro I, ele obtinha as cônicas da maneira mais familiarizada com as atuais, ou seja, "a partir de um cone circular *duplo*, reto ou oblíquo" (EVES, 2011, p. 199). Ele foi o primeiro a obter as cônicas com esse processo, uma vez que os seus antecessores "concebiam as cônicas como interseção de um cone com o plano perpendicular à sua geratriz. [...] os três tipos de cônicas [...] (elipse, parábola e hipérbole) eram obtidas, respectivamente, quando o ângulo do vértice do cone era agudo, reto ou obtuso" (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 161).

Os nomes das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) têm origem da terminologia pitagórica antiga, referente à aplicação de Áreas descritas anteriormente e foram introduzidos por Apolônio. No Livro II, ele traz as propriedades de assíntotas e hipérbole conjugadas e do traçado de tangente. No Livro III, Apolônio explora teoremas variados, inclusive alguns sobre áreas, como "se as tangentes a uma cônica em dois pontos A e B se interceptam em C e também interceptam os diâmetros pôr B e A em D e E, então os triângulos CBD e CAE têm áreas iguais. " (EVES, 2011, p. 199).

No Livro IV, ele traz as provas das recíprocas de algumas das proposições do Livro III referente às propriedades harmônicas de polos e polares, bem como alguns teoremas referentes a pares de cônicas que se interceptam. No Livro V, ele trata de "teoremas relativos a retas máximas e mínimas traçadas a uma cônica que na verdade podem ser interpretados como teorema sobre tangentes e normais. " (SANTOS; SILVA, 2016, p. 6). O Livro VI apresenta teoremas e problemas de construção relativas à cônicas iguais e semelhantes. Por fim, o Livro VII apresenta teoremas envolvendo diâmetros conjugados, como, por exemplo, o teorema "que garante que são iguais as áreas dos paralelogramos formados pelas tangentes a uma cônica central nas extremidades de cada par de diâmetros desse tipo. " (EVES, 2011, p. 200)

Apolônio não tinha nome para o que hoje chamamos de Foco, mas ele se referia a eles de forma indireta, pois o foco é apresentado como implicações de muitos teoremas, por ele, assim como não havia conceito numérico para o que chamamos atualmente de excentricidade.

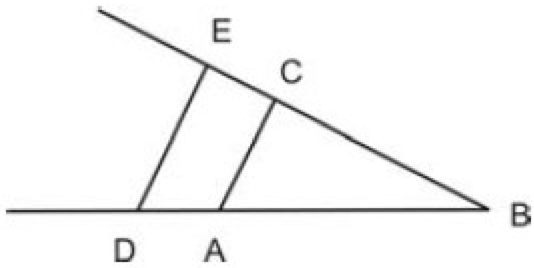
2.4 Matemáticos da Era Moderna

As obra de Apolônio, em especial, inspirou alguns matemáticos anos depois, como foi o caso de Pierre de Fermat (1601-1665), que, encantado com a obra, "assumiu a tarefa de recuperá-las e o contato com o pensamento matemático deste clássico influenciou profundamente sua obra. " (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 244). Fermat e outros, como René Descartes (1596-1650), G. W. Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1643-1727), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Blaise Pascal (1623 – 1662), tiveram grandes contribuições no avanço da Matemática, principalmente na Geometria, e no que conhecemos hoje por Cálculo Diferencial e Integral.

O início do século XVII foi configurado por esforços de diversos desses matemáticos para recuperar as obras gregas que tinham se perdido ao longo dos anos. Durante esse período, vimos que Descartes redefiniu a exatidão dos procedimentos empregados em Geometria, pois ele, ao contrário de construções geométricas, usava técnicas algébricas na definição de curvas, estabelecidas como objeto central da Geometria.

A segunda metade do século XVII explorava os efeitos desta mudança e o trabalho com curvas servirá de incentivo para o desenvolvimento dos métodos infinitesimais. Em suma, o principal objeto de estudo durante esse período era o desenvolvimento de mecanismos ou métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, como, por exemplo, encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e outras de origem física, como achar comprimento de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre curvas. Descartes tinha como objetivo utilizar a geometria para solucionar problemas de construção e, para ele, por razões puramente geométricas, era preciso algebrizar a geometria. Carvalho e Roque (2019) nos apresentam que Descartes mostra, em suas obras, por exemplo (Figura 11), como, tomando um segmento AB como unidade, segue que o segmento BE é produto dos segmentos BD e BC, obtido ligando-se os pontos A e C e traçando-se DE paralela a AC.

Figura 11 – *Exemplo*



Fonte: Carvalho e Roque (2019)

De fato, suponhamos, sem perda de generalidade, $AB = 1$ e $BD = a$ e marcamos C de modo que BC= b. Temos que $\frac{a}{1} = \frac{BE}{b}$, o que implica $BE = ab$, produto de BD e BC. Uma consequência desse mecanismo é que o produto dos segmentos (no caso, BD e BC) pode ser considerado um segmento (no caso, BE), e não um retângulo, como no pensamento dos povos mais antigos. Um caso particular desse fato é que também podemos marcar o ponto C de modo que $BC = a$ e, daí, teríamos $BE = a^2$, ou seja, uma potência quadrada que não é associada a um quadrado, e sim a um segmento de reta. A importante novidade da obra geométrica de Descartes é a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas. Esse passo também foi importante para a criação ou aperfeiçoamento do que denominamos hoje de "Geometria Analítica".

Ainda no século XVII, podemos analisar as contribuições de mais dois grandes matemáticos: Cavalieri e Pascal. Eles, para efetuarem o cálculo de área de figuras, usavam a decomposição dela. Por um lado, Cavalieri "argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é composto de contas; um plano é feito de linhas, assim como uma roupa, de fios; e, um sólido é composto de planos, assim como um livro, de páginas. " (CARVALHO; ROQUE, 2019, p. 271). Assim, para ele a Área poderia ser calculada através da soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelas, assim chamado de indivisíveis de Área.

Por outro lado, Pascal, bem como Fermat, utilizavam o método dos indivisíveis, transformando a área em uma soma de retângulos infinitamente pequenos. Podemos citar uma diferença básica entre esse método e o método utilizado pelos gregos antigos: nesse método, o número de retângulos pode crescer arbitrariamente, ou seja, cada vez mais podemos colocar quantos retângulos achar conveniente, isto é, como se diz nos dias atuais, *eles tendem para o infinito.* Com isso, o resultado do cálculo de área se torna uma expressão analítica e não outra área, dando, assim, passos importantes para o nosso Cálculo. Ainda nesse período, John Wallis (1616-1703) introduziu o símbolo

∞ para designar o infinito. Motivado pelos métodos analíticos de Descartes e Fermat, ele também estudou as propriedades aritméticas de séries infinitas, bem como utilizou o método dos indivisíveis para fazer algumas quadraturas.

3 Documentos Norteadores da Educação e o Cálculo de Área

Neste capítulo, teremos como objetivo principal descrever como o conteúdo “Cálculo de Área” está abordado nos principais documentos norteadores da educação brasileira, como: Constituição da República Federativa do Brasil de 1988 (Constituição Federal), Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Plano Nacional de Educação (PNE), Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN’s), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Tomaremos como ponto de partida a Constituição Federal, que é a Lei maior da República Federativa do Brasil, em seguida, analisaremos os demais documentos no que se refere ao Cálculo de Área.

3.1 Constituição Federal

Para falarmos de Documentos Norteadores da Educação Brasileira, ou Documentos Legais, devemos começar analisando a nossa Constituição Federal, que é a lei maior do Estado Brasileiro, quel foi promulgada em 05 de Outubro de 1988. Assim, a CONSTITUIÇÃO DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL DE 1988 nos garante que

> Art. 205. A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.
> Art. 206. O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: I - igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;
> II - liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar o pensamento, a arte e o saber;
> III - pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas, e coexistência de instituições públicas e privadas de ensino;
> IV - gratuidade do ensino público em estabelecimentos oficiais; (BRASIL, 1988)

Assim, com essa contextualização da nossa Constituição, podemos ter uma rápida noção dos princípios de uma Educação de qualidade, bem como mostrar que a Educação não é de responsabilidade única das escolas, e sim uma parceria entre escola e família. Outro detalhe que podemos encontrar nessa Lei é de onde vêm os recursos e como devem ser empregados para que essa Educação se efetive. Em suma, ela traz tudo que devemos saber sobre Educação em todo território nacional.

3.2 LDB

A Lei n° 9.394, de 20 de Dezembro de 1996, conhecida com Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, ou popularmente chamada de LDB, é considerada por muitos estudiosos da área, a lei mais importante no que se refere à Educação. Ela é composta por 92 artigos que abordam temas diversos sobre a educação do nosso País. Nesses artigos, encontramos a primeira divisão nas etapas de ensino, dividido em Educação Básica e Educação Superior, e depois realiza uma nova subdividida nessas etapas, apresentando que a Educação Básica é subdivisão em Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. E, para todos os professores de Matemática, é nela também que fala a obrigatoriedade das áreas de conhecimento que, no nosso caso, é a Matemática e Suas Tecnologias; como exposto no seu Art. 26:

> Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (Redação dada pela Lei nº 12.796, de 2013)
> ~~§ 1° Os currículos a que se refere caput devem abranger, obrigatoria - mente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimen - to do mundo físico e natural e da realidade social e política, especial - mente do Brasil.~~
> ~~§ 1° Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoria - mente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecei - mento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente da República Federativa do Brasil, observado, na edu - cação infantil, o disposto no art. 31, no ensino fundamental, o disposto no art. 32, e no ensino médio, o disposto no art. 36. (Redação dada pela Medida Provisória nº 746, de 2016)~~
> § 1° Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. (BRASIL, 2017b)

Assim temos, nessa parte da lei, que a matemática já deve começar a ser introduzida no berço da educação, ou seja, na Educação Infantil. Mas o Cálculo de Área quando deve ser exposto aos alunos? Essa pergunta será respondida posteriormente.

3.3 PNE

O Plano Nacional de Educação (PNE) foi aprovado através da Lei N° 13.005/2014 na data de 25 de Junho de 2014, a qual apresenta, em resumo, um total de 20 metas a serem alcançadas pelo sistema educacional em todo territórios nacional. São elas:

> **META 1** Universalizar, até 2016, a educação infantil na pré-escola para as crianças de 4 (quatro) a 5 (cinco) anos de idade e ampliar a

oferta de educação infantil em creches de forma a atender, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das crianças de até 3 (três) anos até o final da vigência deste PNE.

META 2 Universalizar o ensino fundamental de 9 (nove) anos para toda a população de 6 (seis) a 14 (quatorze) anos e garantir que pelo menos 95% (noventa e cinco por cento) dos alunos concluam essa etapa na idade recomendada, até o último ano de vigência deste PNE.

META 3 Universalizar, até 2016, o atendimento escolar para toda a população de 15 (quinze) a 17 (dezessete) anos e elevar, até o final do período de vigência deste PNE, a taxa líquida de matrículas no ensino médio para 85% (oitenta e cinco por cento)

META 4 Universalizar, para a população de 4 (quatro) a 17 (dezessete) anos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação, o acesso à educação básica e ao atendimento educacional especializado, preferencialmente na rede regular de ensino, com a garantia de sistema educacional inclusivo, de salas de recursos multifuncionais, classes, escolas ou serviços especializados, públicos ou conveniados.

META 5 Alfabetizar todas as crianças, no máximo, até o final do 3° (terceiro) ano do ensino fundamental.

META 6 Oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos (as) alunos (as) da educação básica.

META 7 Fomentar a qualidade da educação básica em todas as etapas e modalidades, com melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem de modo a atingir as seguintes médias nacionais para o Ideb.

META 8 Elevar a escolaridade média da população de 18 (dezoito) a 29 (vinte e nove) anos, de modo a alcançar, no mínimo, 12 (doze) anos de estudo no último ano de vigência deste Plano, para as populações do campo, da região de menor escolaridade no País e dos 25% (vinte e cinco por cento) mais pobres, e igualar a escolaridade média entre negros e não negros declarados à Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE.

META 9 Elevar a taxa de alfabetização da população com 15 (quinze) anos ou mais para $93,5\%$ (noventa e três inteiros e cinco décimos por cento) até 2015 e, até o final da vigência deste PNE, erradicar o analfabetismo absoluto e reduzir em 50% (cinquenta por cento) a taxa de analfabetismo funcional.

META 10 Oferecer, no mínimo, 25% (vinte e cinco por cento) das matrículas de educação de jovens e adultos, nos ensinos fundamental e médio, na forma integrada à educação profissional.

META 11 Triplicar as matrículas da educação profissional técnica de nível médio, assegurando a qualidade da oferta e pelo menos 50% (cinquenta por cento) da expansão no segmento público.

META 12 Elevar a taxa bruta de matrícula na educação superior para 50% (cinquenta por cento) e a taxa líquida para 33% (trinta e três por cento) da população de 18 (dezoito) a 24 (vinte e quatro) anos, assegurada a qualidade da oferta e expansão para, pelo menos, 40% (quarenta por cento) das novas matrículas, no segmento público.

META 13 Elevar a qualidade da educação superior e ampliar a proporção de mestres e doutores do corpo docente em efetivo exercício

> no conjunto do sistema de educação superior para 75% (setenta e cinco por cento), sendo, do total, no mínimo, 35% (trinta e cinco por cento) doutores.
>
> **META 14** Elevar gradualmente o número de matrículas na pós-graduação de modo a atingir a titulação anual de 60.000 (sessenta mil) mestres e 25.000 (vinte e cinco mil) doutores.
>
> **META 15** Garantir, em regime de colaboração entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, no prazo de 1 (um) ano de vigência deste PNE, política nacional de formação dos profissionais da educação de que tratam os incisos I, II e III do caput do art. 61 da Lei n 9.394, de 20 de dezembro de 1996, assegurado que todos os professores e as professoras da educação básica possuam formação específica de nível superior, obtida em curso de licenciatura na área de conhecimento em que atuam.
>
> **META 16** Formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos (as) os (as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino.
>
> **META 17** Valorizar os (as) profissionais do magistério das redes públicas de educação básica de forma a equiparar seu rendimento médio ao dos (as) demais profissionais com escolaridade equivalente, até o final do sexto ano de vigência deste PNE.
>
> **META 18** Assegurar, no prazo de 2 (dois) anos, a existência de planos de Carreira para os (as) profissionais da educação básica e superior pública de todos os sistemas de ensino e, para o plano de Carreira dos (as) profissionais da educação básica pública, tomar como referência o piso salarial nacional profissional, definido em lei federal, nos termos do inciso VIII do art. 206 da Constituição Federal.
>
> **META 19** Assegurar condições, no prazo de 2 (dois) anos, para a efetivação da gestão democrática da educação, associada a critérios técnicos de mérito e desempenho e à consulta pública à comunidade escolar, no âmbito das escolas públicas, prevendo recursos e apoio técnico da União para tanto.
>
> **META 20** Ampliar o investimento público em educação pública de forma a atingir, no mínimo, o patamar de 7% (sete por cento) do Produto Interno Bruto - PIB do País no 5°(quinto) ano de vigência desta Lei e, no mínimo, o equivalente a 10% (dez por cento) do PIB ao final do decênio. (BRASIL, 2014)

Analisando as metas, prazos e estudos realizados posteriormente, vemos que ainda estamos longe do ideal. Em 2019 foi realizado um estudo, sob a responsabilidade de Andressa Pellanda (Coordenadora Executiva da Campanha Nacional pelo Direito à Educação), onde ficou claro que 16 das 20 metas não foram cumpridas dentro do prazo, e as outras 4 foram cumpridas parcialmente. Foram elas:

- **Meta 07:** foi considerada parcialmente cumprida, pois os dados do Ideb mostram que a meta foi atingida nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mas não foi atingida nem nos anos finais do Ensino Fundamental e nem no ensino Médio;

- **Meta 11:** foi considerada parcialmente cumprida, pois o estudo apontou que houve uma oscilação na expansão desejada da Educação Profissional Técnica, influenciando, assim, o aumento das matrículas na respectiva parte da educação;
- **Meta 13:** foi considerada parcialmente cumprida, embora que, em 2017, a porcentagem de professores do Ensino Superior com mestrado ou doutorado era de $79,6\%$, sendo que a maior parte ($88,6\%$) desses profissionais estão nas escolas públicas;
- **Meta 14:** foi considerada parcialmente cumprida, pois o estudo apontou que a meta dos 60 mil mestres foi alcançada dentro do prazo e prevê que a meta dos 25 mil doutores será atingida até o fim da vigência do PNE.

3.4 DCN

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN's) para a Educação Nacional são diretrizes que estabelecem a base nacional comum, a qual é "responsável por orientar a organização, articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino brasileiras. " (BRASIL, 2013a, p. 04). Nesse mesmo documento, encontramos, de forma bem clara, uma das funções da educação, que é de "proporcionar o desenvolvimento humano na sua plenitude, em condições de liberdade e dignidade, respeitando e valorizando as diferenças. " (BRASIL, 2013a, p. 04).

A formulação das DCN's é de responsabilidade do Governo Federal, através do Conselho Nacional de Educação (CNE), com a sua Câmara de Educação Básica (CEB), que emitiram a Resolução CNE/CEB n° 2/98, que nos traz uma boa definição do que seria essas diretrizes, pois temos que são

> Um conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica (...) que orientarão as escolas brasileiras dos sistemas de ensino, na organização, na articulação, no desenvolvimento e na avaliação de suas propostas. (BRASIL, 2013a, p. 07).

No decorrer dos anos, essas diretrizes passaram por algumas atualizações, como a Resolução n° 4, de 13 de Julho de 2010. Essa nova resolução define as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Logo no seu segundo artigo, nos apresenta os objetivos dessas diretrizes, que são:

> Art. 2° Estas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica têm por objetivos:
>
> I – sistematizar os princípios e as diretrizes gerais da Educação Básica contidos na Constituição, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação

> Nacional (LDB) e demais dispositivos legais, traduzindo-os em orientações que contribuam para assegurar a formação básica comum nacional, tendo como foco os sujeitos que dão vida ao currículo e à escola;
>
> II – estimular a reflexão crítica e propositiva que deve subsidiar a formulação, a execução e a avaliação do projeto político-pedagógico da escola de Educação Básica;
>
> III – orientar os cursos de formação inicial e continuada de docentes e demais profissionais da Educação Básica, os sistemas educativos dos diferentes entes federados e as escolas que os integram, indistintamente da rede a que pertençam. (BRASIL, 2013a, p. 63).

Ainda falando da Resolução n° 4, temos que os princípios nas quais o ensino será transmitido, bem como o reforço de que a "educação é direito universal e alicerce indispensável para o exercício da cidadania. " (BRASIL, 2013a, p. 64). Também está apresentada, nesta resolução, formas de como organizar os currículos e, mais uma vez, traz como deve ser dividido as etapas da educação básica.

3.5 PCN

Os documentos até então abordados trabalharam mais a Educação como um todo. A partir desse documento, iremos sair mais do geral e chegarmos ao mais restrito nesse momento, que é a Matemática, Geometria e o Cálculo de Área.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, são uma coleção de documentos que abordam a estrutura curricular de uma instituição educativa, bem como apresentam o ponto de partida para o trabalho docente, dando direcionamentos para a realização de atividades em sala de aula. Essa coleção de documentos é dividida por etapas de Ensino e por componente curricular. Nos documentos voltados a componente curricular Matemática, no Ensino Fundamental, é apresentada uma das finalidades do ensino de Matemática que é levar o aluno à

> resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis. (BRASIL, 1997, p. 37)

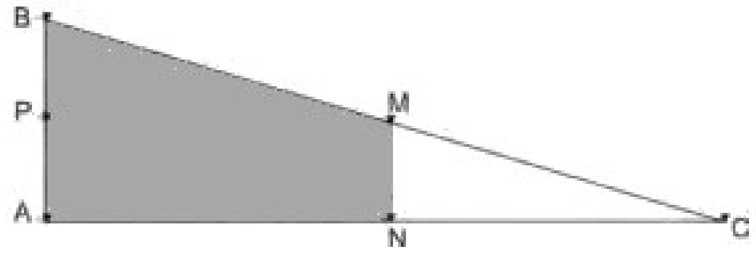
Mas por que as situações-problemas merecem esse destaque especial? Por que as situações-problemas se tornam um campo fértil e propício para levar o conteúdo teórico para a prática, apresentando, assim, uma forma de trazer o aluno para mais próximo da Matemática. Mas, ao propor um problema ou uma situação-problema, sempre devemos (falando como docente) ter em mente que

> resolver um problema pressupõe que o aluno:
> • elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
> • compare seus resultados com os de outros alunos;
> • valide seus procedimentos. (BRASIL, 1997, p. 33)

Com relação a essas situações-problemas, Santos (2002) nos apresenta em detalhes o caminho a ser seguido por nossos alunos, para que elas alcancem o objetivo previamente traçado, pois o aluno deve, então, diante de problemas desses tipos, ser capaz de realizar TENTATIVAS, estabelecer HIPÓTESES, TESTAR essas e VALIDAR seus resultados, provando que são verdadeiros ou, em caso contrário, mostrando algum contraexemplo. (SANTOS, 2002)

Ele também expõe em seu trabalho uma caracterização para essas situações-problemas, dando, assim, suporte para os docentes se precaverem e preparem bem suas situações-problemas, evitando cair em erros, bem como evitar de expor uma situação dessa que não irá alcançar o objetivo previamente traçado, pois ele diz que uma situação-problema é "uma situação geradora de um problema, cujo conceito necessário à sua resolução seja aquele conceito que queremos que o aluno construa" (SANTOS, 2002). Vejamos, a seguir, alguns exemplos desses tipos de situações no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Exemplo 1 (BRASIL, 2010) - Questão 161 – ENEM 2010 – Caderno Rosa
Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

a) à mesma área do triângulo AMC.

b) à mesma área do triângulo BNC.

c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.

d) ao dobro da área do triângulo MNC.

e) ao triplo da área do triângulo MNC.

Com esse tipo de exercício, o professor pode introduzir relações entre Cálculo de Área de figuras diferentes, reforçando, assim, que figuras podem ter a mesma Área, mesmo sendo de formatos diferentes.

Exemplo 2 (BRASIL, 2013b) - Questão 166 – ENEM 2013 – Caderno Rosa
Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada. A quantidade X, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

a) $\frac{N}{9}$

b) $\frac{N}{6}$

c) $\frac{N}{4}$

d) $\frac{3}{N}$

e) $\frac{9}{N}$

Para esse tipo de exercício, o discente pode descrever a relação entre as áreas das placas antes e depois da mudança, permitindo visualizar se eles possuem o domínio sobre esse cálculo, bem como mostrar que eles conseguem visualizar generalizações para placas com áreas quaisquer, pois não foi especificado nenhuma medida, assim o discente deve estar preparado tanto para os casos particulares, quanto para os casos gerais.

Ainda na análise dos PCN's voltados para o Ensino Fundamental e Matemática, mas com os olhares voltados a Geometria e/ou Cálculo de Área (como no exemplo anterior), temos que "a Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente."(BRASIL, 1997, p. 39). E, fazendo uma ponte direta com o Ensino Fundamental I (ou seja, do 1° ao 5° Ano), temos que "o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa " (BRASIL, 1997, p. 39), reforçando que o estudo da Geometria deve vim do berço do Ensino de Matemática. Com relação ao Cálculo de Áreas no Ensino Fundamental I, verificamos que a primeira vez que ele é abordado é quando as crianças vão utilizar a malha quadriculada para o "cálculo de perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas. " (BRASIL, 1997, p. 61). E tomando esse passo como ponto de partida para o desenvolvimento dos demais cálculos, usando as fórmulas básicas conhecidas no Ensino Fundamental e Médio, bem como a possível utilização do Cálculo Diferencial e Integral para resolução de problemas mais complexos.

3.6 BNCC

Para começarmos a falar da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), encontramos primeiro uma definição do que é Geometria e também de como ela é tratada por alguns docentes e discentes na Educação Básica. Ela diz que "a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. " (BRASIL, 2018, p. 271). Em resposta a esse fato, a BNCC nos apresenta um detalhe muito importante, que é o fato de como muitos tratam a geometria. Ela descreve que

> a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do Teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2018, p. 272)

Com isso, podemos ver que ainda temos muito a avançar no Ensino de Geometria no Ensino Básico e a BNCC veio para nos dar um norte melhor e mais efetivo nesses pontos, pois esse documento traz as competências (Gerais e Específicas), as habilidades e as aprendizagens essencias que todos os alunos, em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), precisam desenvolver. Ela também frisa que todas as competências, habilidades e conteúdos devem ser os mesmos para todas as crianças, os adolescentes e os jovens, independentemente de onde estudam ou moram. As tabelas a seguir nos apresentaram as competências Gerais e específicas que a BNCC coloca para todos os estudantes:

Tabela 2 – Competências Gerais

Competências Gerais da Educação Básica
I. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
II. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
III. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
IV. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
V. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
VI. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
VII. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
VIII. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
IX. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
X. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 9 e 10)

Tabela 3 – Competências Específicas

Competências Específicas de Matemática para o Ensino fundamental	**Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio**
I. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. II. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. III. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. IV. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. V. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, ex-	I. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. II. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. III. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. IV. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. V. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

pressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). VI. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. VII. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.	

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 267)

Com relação ao conceito de Área, a BNCC nos apresenta que, já no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, os alunos devem desenvolver algumas habilidades em Geometria, uma delas é que eles reconheçam que medir é realizar uma comparação entre uma grandeza e uma unidade, bem como apresentar essa comparação por meio de um número. Ela também apresenta que os alunos nessa fase devem conseguir resolver problemas em situações cotidianas que envolvem algumas grandezas "como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) [...], sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais." (BRASIL, 2018, p. 273). Logo, podemos concluir que, desde o berço da educação, o conceito de Área deve estar incluído dentro da Matemática apresentada a nossos estudantes, pois esses contextos são importante para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do pensamento matemático deles e, assim, se convertendo em objetos de conhecimento.

O primeiro objeto de conhecimento que a BNCC nos apresenta o conceito de Área está no 3° Ano do Ensino Fundamental, dentro da Unidade Temática: Grandezas e Medida; Objeto do Conhecimento: Comparação de Área por superposição; Habilidade:

(EF03MA21)[1] Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos; na qual os estudantes já começam a se deparar com a tentativa de Cálculo de Área através da comparação com outras figuras, mas nessa fase não usa-se ainda conceito numéricos, e sim só as comparações; e, a partir dessa, vai fazendo a interligação entre as próximas etapas até se desenvolver por completo no Ensino Médio com a Habilidade: (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Podemos citar também como exemplo dessas habilidades, a habilidade EF06MA24 - Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento, que está interligada ao Objeto de Conhecimento Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume. Essa Habilidade e esse Objeto de Conhecimento já nos mostram que os documentos oficiais estão se preocupando desde o início do Ensino Fundamental II com temas bem relevantes para nosso prosseguimento escolar, fazendo, assim, as boas interligações também entre as Unidades de Conhecimento.

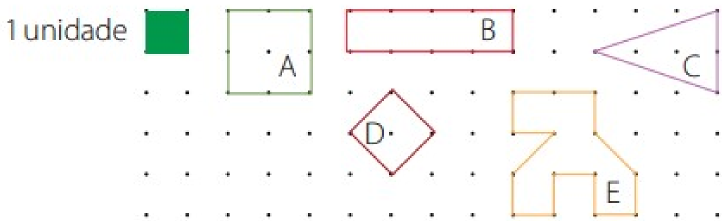
Como forma de abordar e compreender de maneira adequada o conceito de Área e seu cálculo e, assim, apresentar um modo de adquirir parcialmente a habilidade citada acima, faz-se necessário um resgate histórico sobre o Cálculo de Áreas, sempre levando em conta os documentos que sobreviveram ao longo da história e chegaram até nós. Apresentaremos a seguir alguns exemplos que podem ajudar aos discentes a contemplarem as habilidades requeridas na BNCC ligadas ao Cálculo de Área:

- **Habilidade EF03MA21:** Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos.

  Exemplo 3 (AQUARELA MATEMÁTICA, 2018) - Utilizando o quadradinho verde como unidade de medida, calcule a área das figuras na malha pontilhada e assinale a alternativa que indica cada área na ordem das letras:

[1] O Primeiro par de letras indica a etapa de Ensino Fundamental; O primeiro par de números indica o ano a que se refere a habilidade; O segundo par de letras indica a componente curricular e o último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano

Figura 12 – Exemplo 3



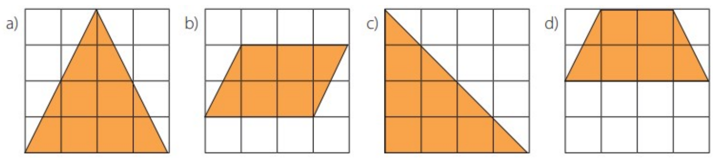
Fonte:<http://aquarelamatematica.com.br/DIGITAL_F/MATEMATICA_L3_3B.PDF>

Para a resolução desse exemplo, os alunos deverão primeiro reconhecer qual é a unidade de medida e, em seguida, procurá-la em cada figura geométrica, fazendo uma superposição entre elas e realizando a contagem da quantidade de vezes que cada figura apresenta a unidade de medida; da mesma forma, se elas estiverem cortadas ao meio (figuras C, D e E da Figura 12), eles deverão ter a percepção desse detalhe e, assim, juntar duas metades para formar uma unidade completa.

- **Habilidade EF04MA21:** Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.

Exemplo 4 (AQUARELA MATEMÁTICA, 2018) - Calcule a área das figuras e preencha a tabela com os valores encontrados:

Figura 13 – Exemplo 4



A UNIDADE DE ÁREA É O QUADRADINHO.	A	B	C	D
ÁREA				

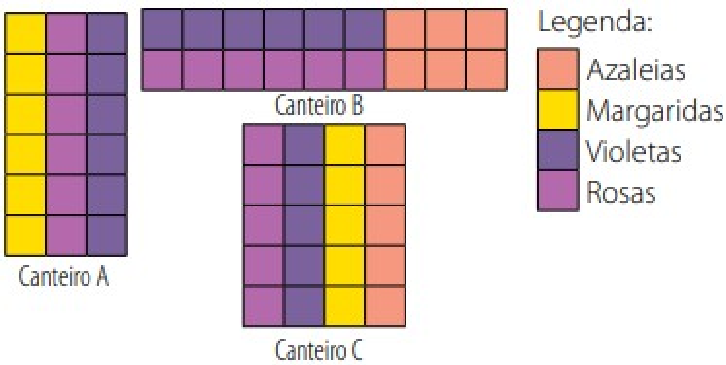
Fonte:<http://aquarelamatematica.com.br/DIGITAL_F/MATEMATICA_L4_2B.PDF>

Para resolução desse exemplo, os alunos devem perceber que, ao contar os quadradinhos completo (ou considerá-los como unidade de medida) na figura A, ainda faltaram contar alguns "pedaços" para completar a área laranja, sendo necessária a observação da figura como um todo para perceber que a metade da figura A na cor laranja completa a outra metade que está em branco do lado esquerdo ou direito, sendo, então, a área do triângulo em laranja a metade do quadrado todo, e que ele pode usar pensamento análogo para analisar e calcular a Área da figura C. Esse procedimento também poderá ser realizado nas figuras B e D, pois têm quadradinhos cortados de modo que podemos juntar e formar a metade de um retângulo formado por dois quadradinhos e que, por fim, têm a mesma área.

- **Habilidade EF05MA20:** Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

  Exemplo 5 (AQUARELA MATEMÁTICA, 2018) - Observe a disposição dos canteiros de flores de um jardim botânico em que as cores representam as flores plantadas e cada quadradinho tem 1 m de lado.

Figura 14 – Exemplo 5



Fonte:<http://aquarelamatematica.com.br/DIGITAL_F/MATEMATICA_L5_4B.PDF>

Assinale a alternativa correta:
a) As áreas dos canteiros A e C são iguais a 18 m .
b) As áreas dos canteiros B e C são iguais ao perímetro do canteiro C.
c) As áreas dos canteiros A, B e C são iguais, mas seus perímetros são diferentes.
d) As áreas dos canteiros A e B são iguais aos perímetros dos canteiros A e C.

A resolução desse exercício permite que os discentes analisem que existem figuras com mesmo perímetro, mas com áreas diferentes, e vice-versa, pois nesse tipo de exercício é permitido tanto o cálculo de áreas e perímetros, bem como a sua comparação de áreas e perímetro.

- **Habilidade EF06MA24:** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

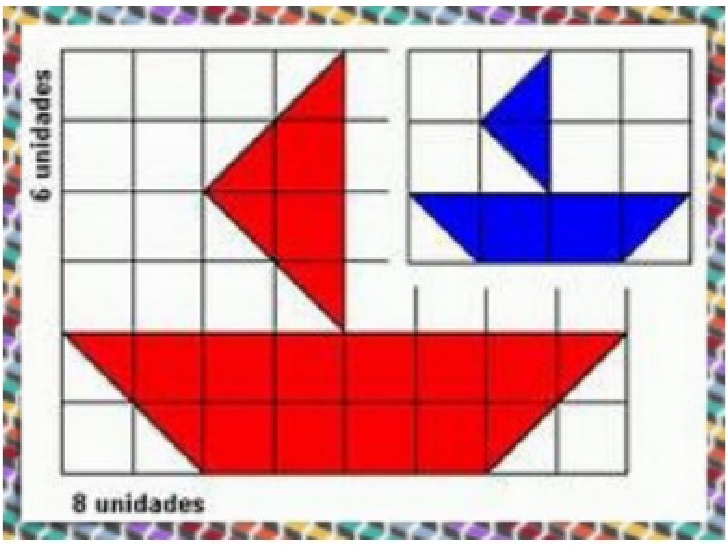
Exemplo 6 – De segunda a sábado o senhor João se exercita através de caminhada, sabendo que ele caminha aproximada 40 minutos todos os dias, e durante esse tempo ele da 3 (três) voltas em um campo de futebol com forma retangular de medidas de 75 m x 110 m. Quantos quilômetros ele percorre durante a sua caminha? E quantos quilômetros ele percorre em 10 minutos?

A resolução desse exercício permite que o discente consiga fazer comparações entre medidas e cálculo de distância sem o uso de fórmulas matemática, ou seja, só com a interpretação dos dados expostos ele já consegue ter caminhos para chegar as suas conclusões, bem como é possível realizar comparação entre grandezas, que, no caso, é comprimento e tempo.

- **Habilidade EF06MA29:** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Exemplo 7 (MATEMáTICA NA ESCOLA, 2018) – Observe as duas figuras a seguir e responda:

Figura 15 – Exemplo 7



Fonte:<https://matematicanaescola.com/>

a) As figuras são iguais? Podemos fazer alguma relação uma com a outra?
b) Os perímetros das figuras são iguais? São diferentes? Qual a relação pode ser

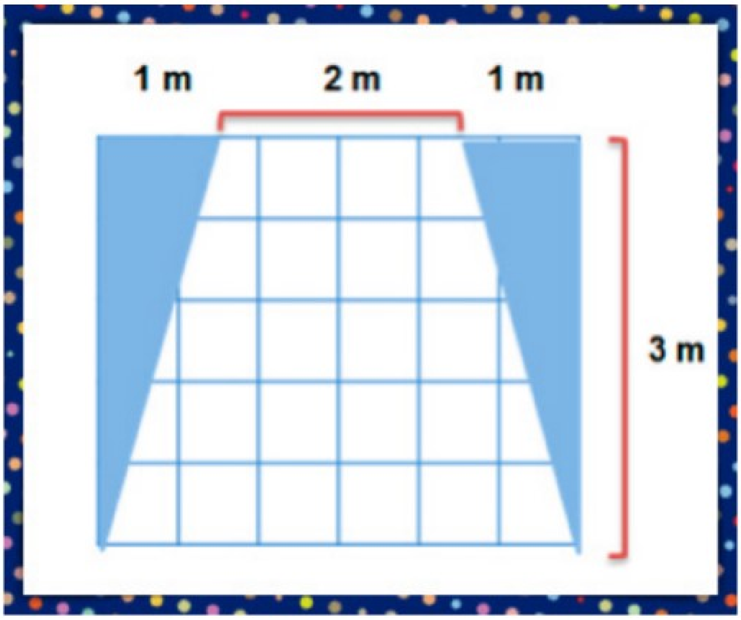
feita entre seus perímetros?
c) As áreas que elas ocupam na malha quadriculadas são iguais? Podemos fazer alguma relação entre as áreas das figuras?

Na resolução desse exemplo, o discente conseguirá fazer todo o percurso para análises e comparações entre áreas e perímetros, podendo, assim, a perceber que o perímetro e o lado de quadrados estão ligados proporcionalmente.

- **Habilidade EF07MA31** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

Exemplo 8 (MATEMáTICA NA ESCOLA, 2018) – A calçada de entrada do mercadinho de mão Ana está sendo reformada. Serão feitas duas jardineiras triangulares e iguais nas laterais, conforme indica na figura, e a calçada restante será revestida em cerâmica.

Figura 16 – Exemplo 8



Fonte:<https://matematicanaescola.com/>

Qual a área do piso que será revestido com cerâmicas?

A resolução desse tipo de exercício propiciará, ao discente, a oportunidade de usar outros mecanismos matemáticos, como a fórmula de calcular a área do retângulo e do triângulo para deduzir uma forma de calcular à área do quadrilátero em questão (no nosso caso, o trapézio).

- **Habilidade EF07MA32:** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

  Exemplo 9 (OLIVEIRA; RODRIGUES, 2020) - No quarto de Vitória há uma parede em que cabem 26 cerâmicas azuis no comprimento e 24 na altura. Para reformar essa parede, qual a quantidade de cerâmica que Vitória vai precisar comprar?

  Esse é o que podemos considerar um bom exercício, pois dá alguns caminhos diferentes que os discentes possam chegar para a solução correta. Primeiro ele pode usar apenas o Princípio Multiplicativo e chegar a uma solução, mas também ele pode ir mais além, istó é, com as medidas das cerâmicas atuais, calcular a área total da parede e, em seguida, decompor essa área em área da cerâmica que ele desejar, seja ela quadrada ou retangular.

- **Habilidade EF08MA19:** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

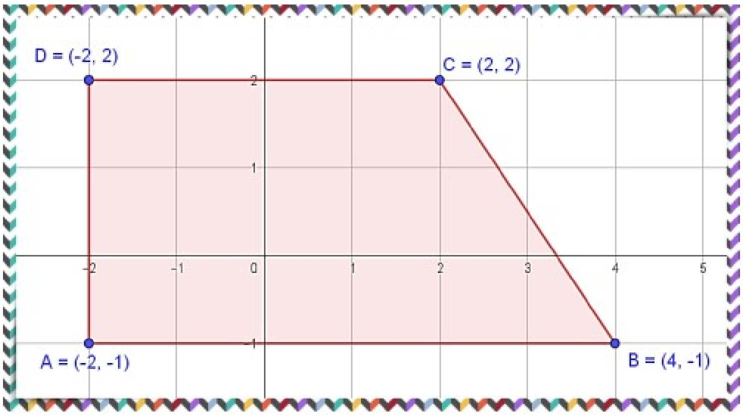
  Exemplo 10 (BRAGAGNOLLO; RODRIGUES; BRITO, 2020) - Seu João tem uma banca de verduras na Feira, ele vende especificamente alfaces que compra de terceiros, devido a isso resolver fazer sua própria horta de alfaces em um terreno ao lado de sua casa. Pesquisando ele descobriu que pode plantar 8 pés de alface por metro quadrado. O terreno tem formato de um trapézio retângulo com 10 metros de fundo, 8 metros de frente e o comprimento de 14 metros. Calcule quantas mudas de alface seu João consegue plantar em too o terreno.

  Para resolver esse tipo de exemplo, o discente primeiro deve estar familiarizado com os tipos de quadriláteros existentes, bem com as fórmulas de Cálculo de Área dos mesmos. Assim ele sabendo o que é um trapézio e conhecendo as suas características, ele não terá maiores problemas na resolução desse exercício, pois é uma aplicação direta da fórmula, seguida de uma multiplicação simples para encerrar o exemplo.

- **Habilidade EF09MA16:** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

  Exemplo 11 (MATEMáTICA NA ESCOLA, 2018) - Dona Maria pretende forrar a horta que tem em seu sítio, com tela de proteção. E para isso pediu ajuda a sua neta, que construiu no plano cartesiano a seguinte representação da horta. Com base nesta construção quanto de tela será necessário para forrar a horta da dona Maria.

Figura 17 – Exemplo 11



Fonte:<https://matematicanaescola.com/>

Na resolução desse exercício, os discentes se depararam com o plano cartesiano e, assim, poderão usar seus conhecimentos para, de uma forma alternativa, calcular o perímetro da figura em questão. Usando a distância entre pontos, ele poderá encontrar as medidas de todos os lados e, portanto, poderá calcular tanto o perímetro, como, caso queira, a Área também.

Assim, podemos ver que todos os documentos norteadores da Educação Brasileira tem um papel importante dentro daquilo que lhe foi proposto, embora sabemos que estamos muito longe do ideal, como foi apresentado no PNE. Mas, em contra partida de tudo isso, a BNCC vem para dar maior apoio e suporte aos docentes e aos discentes, pois traça um caminho a ser seguido com mais clareza para conseguir atingir um melhor desenvolvimento do seu pensamento matemático, bem como das demais componentes curriculares.

4 Análise do Livro Didático

Neste capítulo, faremos uma análise crítica de como o conteúdo de Cálculo de Área é abordado em alguns livros didáticos, mas antes teceremos alguns comentários da importância do livro didático no processo de Ensino e Aprendizagem e também sobre o que daremos mais destaque na nossa análise. Uma observação que deve ser levada em conta, no que se refere ao livro didático do Ensino Médio, é que a última escolha ocorrida do PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) foi em 2017, ou seja, antes da efetivação da BNCC para o Ensino Médio. A próxima escolha seria em 2020, porém foi adiada para 2021, por causa da pandemia da COVID-19. Como nosso objetivo era analisar livros que estão sendo utilizados pelas escolas da nossa região, optamos por analisar os livros do Ensino Médio de 2017, e ver se eles já contemplavam as habilidades apresentadas na BNCC.

4.1 O Processo de Ensino Aprendizagem e o Livro Didático

O livro didático foi e continua sendo uma das principais fontes de pesquisa para os docentes prepararem suas aulas, seja de matemática ou de qualquer outra componente curricular. Ele se torna peça importante no processo de Ensino e Aprendizagem, pois ele é elaborado e organizado tanto para os docentes como para os discentes, assim quanto mais organizado cronologicamente os conteúdos estiverem, e as figuras, os exemplos e os exercícios estiverem alinhados, mais se tornará proveitoso o seu uso.

Temos que um bom livro didático apresenta algumas “funções” básicas, que estão relacionadas a docentes e discentes. O Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) nos apresenta essas funções importantes, onde, com relação aos discentes temos que uma das principais funções do livro didático é favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes, entre outras funções; em relação aos docentes, uma dessas funções do livro didático é ajudar na elaboração e aplicação de aulas e/ou projetos.

O PNLD nos apresenta que a escolha do livro didático a ser usado em cada escola, é feito na própria escola, seguindo alguns critérios de seleção exposto em editais que é realizada essa seleção em certo período, no momento atual, a cada 3 anos os docentes se reúnem, nas escolas, separados por componente curricular e fazem a escolha dos livros que serão usadas no próximo período. Assim, sabendo dessa realidade e da importância que o livro didático apresenta dentro do processo de Ensino e Aprendizagem, os docentes devem sempre realizar uma boa escolha, e nas seções deste capítulo, analisaremos algumas coleções de livros e apresentaremos as nossas conclusões (lembrando que vamos focar nossos olhares para o conteúdo de Cálculo de Área, ou seja, não vamos analisar eles de forma mais geral) sobre aquela coleção, destacando se ela seria ou não uma boa escolha.

4.2 PNLD

O PNLD é um programa de caráter federal, administrado pelo Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação do Ministério de Educação (FNDE/MEC). Ele era conhecido como Programa Nacional do Livro Didático, mas com a edição do Decreto n° 9.099, de 18/07/2017, o programa passou a ser chamado Programa Nacional do Livro e do Material Didático, unificando assim dois programas já existentes: o antigo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional Biblioteca na Escola (PNBE). Esse programa tem como principal objetivo avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma gratuita às escolas, bem como auxiliar professores e diretores nas escolhas das coleções a serem utilizadas dentro do ano letivo.

O PNLD dispões dos critérios de avaliação para que o livro ou a coleção de livros possa prosseguir até a possível escolha dentro do ambiente escola:

> Art. 10. A avaliação pedagógica dos materiais didáticos no âmbito do PNLD será coordenada pelo Ministério da Educação com base nos seguintes critérios, quando aplicáveis, sem prejuízo de outros que venham a ser previstos em edital:
> I - o respeito à legislação, às diretrizes e às normas gerais da educação;
> II - a observância aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
> III - a coerência e a adequação da abordagem teórico-metodológica;
> IV - a correção e a atualização de conceitos, informações e procedimentos;
> V - a adequação e a pertinência das orientações prestadas ao professor;
> VI - a observância às regras ortográficas e gramaticais da língua na qual a obra tenha sido escrita;
> VII - a adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico; e
> VIII - a qualidade do texto e a adequação temática. (BRASIL, 2017a)

Após a avaliação das obras inscritas no programa, o MEC publica o Guia de Livros Didáticos, onde disponibiliza as resenhas das coleções consideradas aprovadas. Esse guia é encontrado de forma virtual na página do MEC, bem como é encaminhado às escolas para que os professores das áreas escolham a coleção que melhor atendam as especificações locais e dos documentos norteadores, entre os títulos disponíveis. Assim, conhecendo os critérios bases para aprovação de uma obra dentro do PNLD, vamos seguir para nossa análise geral das obras, salientado que nossas análises seguiram padrões de uso em sala de aula, visto que eles já foram aprovados no PNLD e estão sendo usados nas escolas da nossa região. Para fortalecer nossa análise, tomaremos por base o trabalho de Silva (2018) com algumas adaptações:

1. Introdução do capítulo;
2. Abordagem do conteúdo;
3. Exemplos, exercícios e atividades;
4. Uso de tecnologias;
5. Contexto Histórico;
6. Relação com a BNCC.

4.3 Coleções de Livros do Ensino Fundamental

4.3.1 Coleção A

A coleção aqui analisada está na sua 3^a Edição e foi publicada no ano de 2018. O conteúdo de Cálculo de Área está distribuído da seguinte forma:

Tabela 4 – Distribuição da Coleção A

6° Ano
Capítulo 8 - Grandezas geométrica: Comprimento, Perímetro e Área.
7° Ano
Capítulo 10 - Perímetro, Área e Volume
8° Ano
Capítulo 6 - Área e Volume
9° Ano
Capítulo 8 - Grandezas e medidas

Fonte: Coleção A

4.3.1.1 Livro do 6° Ano do Ensino Fundamental

Realizando uma rápida análise pelo sumário do livro, vemos que o autor já apresenta o seu livro seguindo as orientações da BNCC e que, no Capítulo 8 em especial, faz uma construção didática até chegar ao conceito de Área. Após essa rápida análise inicial e seguindo as orientações do trabalho de Silva (2018), temos que

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo em questão, o autor apresenta algumas imagens que relacionam-se ao conteúdo de grandezas geométricas, como comprimento, perímetro e área, que é o foco do capítulo como um todo.

b) **Abordagem do conteúdo:** A abordagem do conteúdo é feita de forma gradual, não colocando o conteúdo de forma direta, e sim fazendo, incialmente, a construção da unidade padrão e, assim, seguindo com as outras construções.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta exemplos e exercícios de forma diversificada, inclusive, no final do capítulo, apresenta questões das provas oficiais.

d) **Uso de tecnologias:** Neste ponto, o autor apresenta alguns exercícios onde deixa como opção para o discente usar a calculadora para conferir seus resultados.

e) **Contexto Histórico:** Na introdução do capítulo, faz um breve comentário histórico, onde deixa claro que, provavelmente, as medições feitas pelo ser humano começou desde que iniciou-se a procura por alimentos para sobrevivência.

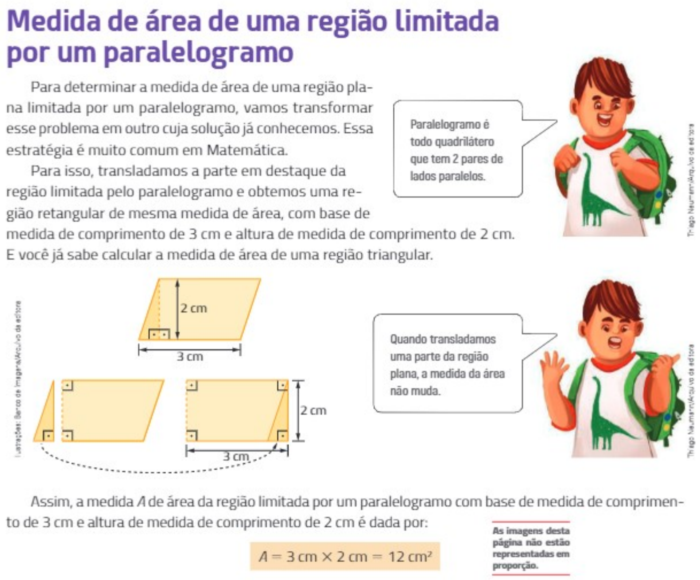
f) **Relação com a BNCC:** Acreditamos que, com relação às habilidades da BNCC, o autor quase que cumpre 100%.

Em resumo, ao realizarmos a análise no capítulo em si, vemos que nossas indagações iniciais se confirmam, pois o autor começa o capítulo mostrando os conceitos básicos com exemplos e, com base nesses conceitos, ele vai avançando e formalizando os próximos conceitos. Com relação ao Cálculo de Área, que está presente nas seções 3 e 4 do capítulo 8, temos que o autor faz construção de uma unidade padrão, para justamente apresentar o que seria área de uma determinada figura usando a contagem e essa unidade padrão, ou seja, ele apresenta formas de Cálculo de Área para os discentes sem o uso de fórmulas, seguindo o que a BNCC orienta dentro dessa fase escolar.

Ao apresentar a medida de área da região retangular e quadrada, ele também apresenta formas de cálculo dessas medidas usando a unidade padrão, mas agora, ao invés de só usar a contagem, ele apresenta esse mesmo cálculo usando a multiplicação da quantidade de unidades padrões na base e na altura. Ao ampliar a quantidade de figuras, sempre mostra mecanismos de como transformar as novas figuras ou transformar a possível solução em algo que já é conhecido, ou seja, como transformar um paralelogramo em retângulo (Figura 18), e, assim, calcular a sua área; também apresenta como transformar uma região triangular em um paralelogramo (Figura 19) e, assim, analisar o cálculo da sua Área.

No que diz respeito a Habilidade EF06MA29, que fala sobre mudanças na Área quando a figura é ampliada ou reduzida utilizando a malha quadriculada, o livro deixa a desejar, pois ele trabalha com ampliação e redução de figuras na malha quadricula na seção 7 do capítulo 5 do livro, entretanto não faz relação com a Área das figuras, e sim com ângulos e proporção entre os segmentos de retas. Em outras palavras, ele deixa o caminho pronto para o docente falar do assunto, mas não aborda.

Figura 18 – Cálculo da Área de um Paralelogramo


Medida de área de uma região limitada por um paralelogramo

Para determinar a medida de área de uma região plana limitada por um paralelogramo, vamos transformar esse problema em outro cuja solução já conhecemos. Essa estratégia é muito comum em Matemática.

Para isso, transladamos a parte em destaque da região limitada pelo paralelogramo e obtemos uma região retangular de mesma medida de área, com base de medida de comprimento de 3 cm e altura de medida de comprimento de 2 cm. E você já sabe calcular a medida de área de uma região triangular.

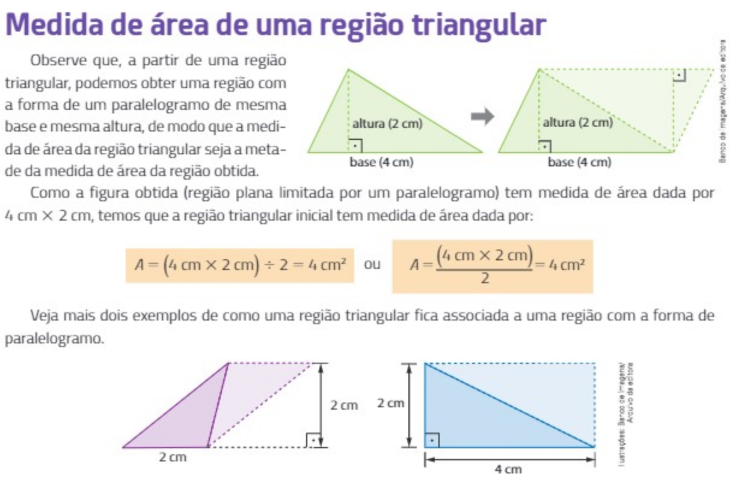
Assim, a medida A de área da região limitada por um paralelogramo com base de medida de comprimento de 3 cm e altura de medida de comprimento de 2 cm é dada por:

$A = 3\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Fonte: Livro do 6° Ano da Coleção A

Figura 19 – Cálculo da Área de uma região triangular


Medida de área de uma região triangular

Observe que, a partir de uma região triangular, podemos obter uma região com a forma de um paralelogramo de mesma base e mesma altura, de modo que a medida de área da região triangular seja a metade da medida de área da região obtida.

Como a figura obtida (região plana limitada por um paralelogramo) tem medida de área dada por $4\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, temos que a região triangular inicial tem medida de área dada por:

$A = (4\text{ cm} \times 2\text{ cm}) \div 2 = 4\text{ cm}^2$ ou $A = \frac{(4\text{ cm} \times 2\text{ cm})}{2} = 4\text{ cm}^2$

Veja mais dois exemplos de como uma região triangular fica associada a uma região com a forma de paralelogramo.

Fonte: Livro do 6° Ano da Coleção A

Acreditamos, assim, que esse é um capítulo adequado para o docente trabalhar o conceito de Áreas no 6° Ano do Ensino Fundamental, embora deixe a desejar na habilidade EF06MA29, mas, por deixar o caminho bem apresentado para o docente e discente, esse livro fica sendo bem representativo nessa etapa do ensino.

4.3.1.2 Livro do 7° Ano do Ensino Fundamental

Começando da mesma forma do anterior, já pelo sumário obtemos uma boa noção de como o conteúdo sobre Cálculo de Área está distribuído, e vemos que está de bom agrado, tanto olhando como docente, quanto como discente, visto que o autor mais uma vez aparenta fazer a construção adequada do conteúdo e não expõe ele sem prévias.

Após essa rápida análise inicial, temos que

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo a ser analisado, o autor apresenta uma imagem de um lago e, após a imagem, faz algumas explanações, aproximando os valores do perímetro, da Área e do volume, em seguida apresenta algumas questões para os alunos responderem, com conversas com seus colegas, sobre o que entendem com relação aos termos propostos.

b) **Abordagem do conteúdo:** A abordagem do conteúdo é também feita de forma gradual, não colocando o conteúdo de forma direta, isto é, fazendo incialmente a construção da unidade padrão e, assim, seguindo com as outras construções.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta exemplos e exercícios de forma diversificada, apresentado alguns exemplos ligados ao cotidiano dos alunos, como planta de casas, e também, no final do capítulo, apresenta questões das provas oficiais.

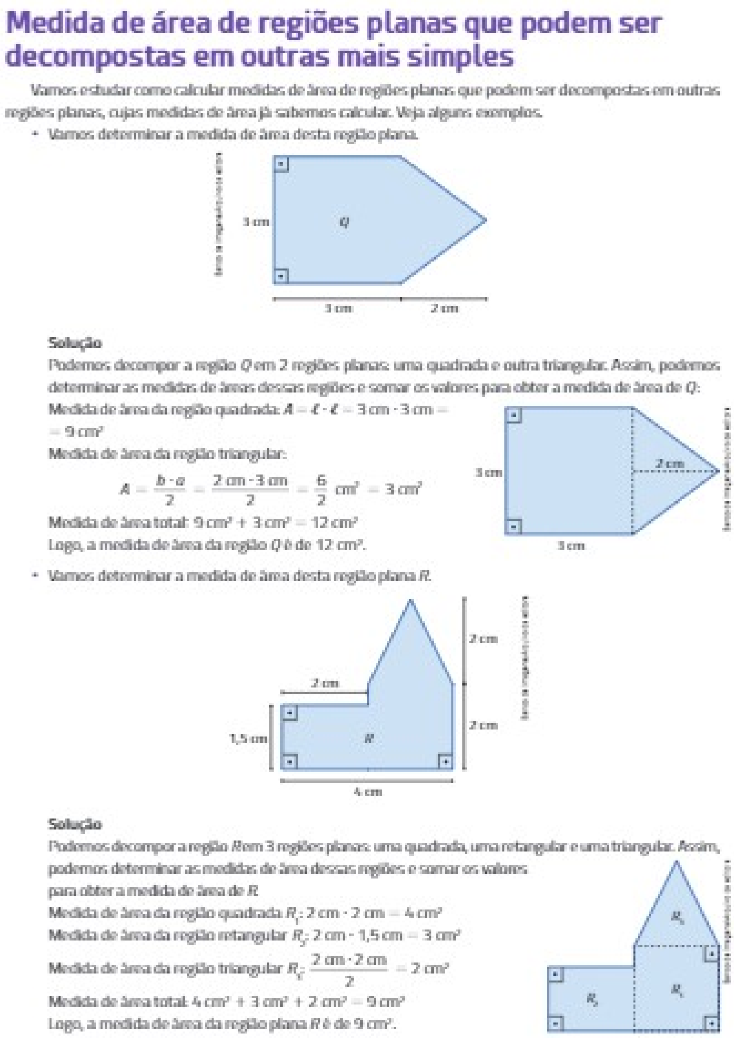
d) **Uso de tecnologias:** Nesse ponto, o autor apresenta alguns exercícios nos quais deixa livre para o discente usar a calculadora para conferir seus resultados, principalmente em um momento que ele deixa, de forma prática, um método para encontrar a aproximação do valor de π.

e) **Contexto Histórico:** Durante o capítulo, o autor apresenta duas passagens históricas. Em uma delas, ele desenvolve a história do número π, informando que, desde o Antigo Egito, o escriba Ahmes já utilizava o valor aproximado de 3,16 para o π, bem como ensina que Arquimedes também chegou a uma aproximação de π bem considerável, e, em outro momento, informa sobre "O banho de Arquimedes" para mostrar momentos históricos no cálculo de volume.

f) **Relação com a BNCC:** Acreditamos que, com relação as habilidades da BNCC, o autor cumpre de forma mais efetiva as habilidades dessa etapa.

Em resumo, ao realizar a análise do conteúdo em questão, temos que ele é apresentado na seção 2 do capítulo 10, e, como no livro anterior, o autor mais uma vez começa apresentando a unidade padrão, mas agora com medidas (usando principalmente o centímetro – cm). Antes de apresentar as fórmulas para Cálculo de Áreas de algumas figuras planas, ele faz o lembrete que "você já estudou, nos anos anteriores, que é possível calcular a medida de área de algumas regiões planas usando as medidas de comprimento de alguns dos elementos da região." (Livro do 7° da Coleção A), ou seja, ele faz a ponte para o docente e o discente ir ao livro de anos anteriores e relembrar que as Áreas de figuras planas podem ser calculadas de outras formas (como usando o Princípio da Contagem) e, a partir daí, ele começa a apresentar as fórmulas de Cálculo de Área de uma região retangular, região plana quadrada, região triangular e região plana limitada por um paralelogramo. Antes de apresentar a fórmula para o Cálculo de Área da região retangular, ele explica que essa pode ser feita através da multiplicação da medida da base pela altura, como foi vista no 6° Ano, as demais fórmulas, depois do lembrete acima, ele as apresenta direto.

Figura 20 – Seção de Cálculo de Área com decomposição em figuras já conhecidas



Medida de área de regiões planas que podem ser decompostas em outras mais simples

Vamos estudar como calcular medidas de área de regiões planas que podem ser decompostas em outras regiões planas, cujas medidas de área já sabemos calcular. Veja alguns exemplos.

- Vamos determinar a medida de área desta região plana.

Solução

Podemos decompor a região Q em 2 regiões planas: uma quadrada e outra triangular. Assim, podemos determinar as medidas de áreas dessas regiões e somar os valores para obter a medida de área de Q:

Medida de área da região quadrada: $A = \ell \cdot \ell = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 9\text{ cm}^2$

Medida de área da região triangular:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = \frac{6}{2}\text{ cm}^2 = 3\text{ cm}^2$$

Medida de área total: $9\text{ cm}^2 + 3\text{ cm}^2 = 12\text{ cm}^2$

Logo, a medida de área da região Q é de 12 cm^2.

- Vamos determinar a medida de área desta região plana R.

Solução

Podemos decompor a região R em 3 regiões planas: uma quadrada, uma retangular e uma triangular. Assim, podemos determinar as medidas de área dessas regiões e somar os valores para obter a medida de área de R.

Medida de área da região quadrada R_1: $2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$

Medida de área da região retangular R_2: $2\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm} = 3\text{ cm}^2$

Medida de área da região triangular R_3: $\frac{2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{2} = 2\text{ cm}^2$

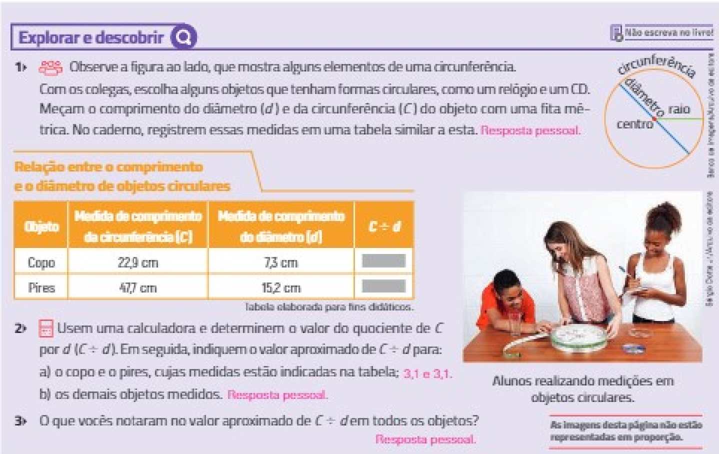
Medida de área total: $4\text{ cm}^2 + 3\text{ cm}^2 + 2\text{ cm}^2 = 9\text{ cm}^2$

Logo, a medida de área da região plana R é de 9 cm^2.

Fonte: Livro do 7° Ano da Coleção A

Seguindo as orientações da BNCC, ele apresenta subseções com alguns problemas de figuras planas que podem ser decompostas em outras já vistas (Figura 20). Um ponto forte que podemos ver nesse capítulo, é que ele apresenta uma experiência prática (Figura 21) para analisar aproximações para o número π, que será essencial para o Cálculo de Área de regiões circulares, que é assunto de anos posteriores.

Figura 21 – Aproximações para π


Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

1› Observe a figura ao lado, que mostra alguns elementos de uma circunferência.
Com os colegas, escolha alguns objetos que tenham formas circulares, como um relógio e um CD. Meçam o comprimento do diâmetro (d) e da circunferência (C) do objeto com uma fita métrica. No caderno, registrem essas medidas em uma tabela similar a esta. Resposta pessoal.

Relação entre o comprimento e o diâmetro de objetos circulares

Objeto	Medida de comprimento da circunferência (C)	Medida de comprimento do diâmetro (d)	$C \div d$
Copo	22,9 cm	7,3 cm	
Pires	47,7 cm	15,2 cm	

Tabela elaborada para fins didáticos.

2› Usem uma calculadora e determinem o valor do quociente de C por d ($C \div d$). Em seguida, indiquem o valor aproximado de $C \div d$ para:
a) o copo e o pires, cujas medidas estão indicadas na tabela; 3,1 e 3,1.
b) os demais objetos medidos. Resposta pessoal.

Alunos realizando medições em objetos circulares.

3› O que vocês notaram no valor aproximado de $C \div d$ em todos os objetos? Resposta pessoal.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Fonte: Livro do 7° Ano da Coleção A

Acreditamos, assim, que esse também é um capítulo adequado para se trabalhar o conceito de Áreas no 7° Ano do Ensino Fundamental, embora, como mencionado acima, quando vai falar de algumas áreas ele coloca a fórmula direto, mas deixa o lembrete antes, e também faz algumas considerações que não deixa nem o docente, e muito menos os alunos, sem amparo para fazer seus cálculos.

4.3.1.3 Livro do 8° Ano do Ensino Fundamental

Seguindo o mesmo padrão, primeiro fizemos uma rápida análise pelo sumário, e temos que o conteúdo em análise se encontra na primeira seção do capítulo 6, mas, ficamos com dúvidas se ele iria ou não cumprir os critérios ou orientações da BNCC, visto que ela elenca que nessa fase os estudantes devem usar expressões para calcular Áreas em situações cotidianas, ao colocar medidas de terrenos. Assim, o sumário não deixou claro se estava abordando essa parte, mas, como nas outras edições, ele apresenta que o autor irá fazer uma sequência de apresentação de todas as fórmulas ou expressões para Cálculo de Área de quadriláteros, triângulos e círculos, como é recomendado no documento. A seguir, também apresentamos os tópicos de nossa análise:

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo, temos uma imagem mostrando o possível uso do Cálculo de Área e de Volume em situações do dia-a-dia, nesse caso com o pedreiro (área de azulejos) e pintor (volume da lata de tinta).

b) **Abordagem do conteúdo:** Como nos demais livros da coleção, o autor faz uma abordagem do conteúdo de forma gradual, não colocando o conteúdo de forma direta, fazendo, incialmente, a construção da unidade padrão e assim seguindo com as outras construções.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta exemplos e exercícios de forma diversificada, apresentando alguns exemplos ligados ao Cálculo de Área de plantações, entre outros, e, como nos outros livros da coleção, no final do capítulo, apresenta questões das provas oficiais.

d) **Uso de tecnologias:** Nesse ponto, o autor apresenta uma situação de como utilizar uma balança para o Cálculo de Área de figuras não regulares.

e) **Contexto Histórico:** Durante o capítulo, encontramos um relato que apresenta que, em uma pesquisa, é mostrado que o desenho mais antigo feito pelo homem foi um losango, na qual relata que arqueólogos encontraram o objeto mais antigo de imagem, com 77 mil anos.

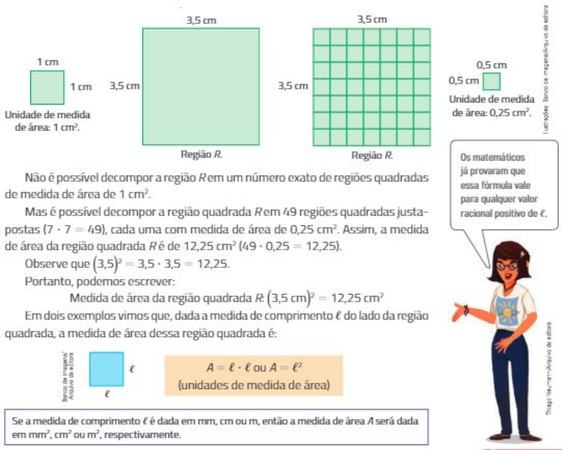
f) **Relação com a BNCC:** Acreditamos que, com relação as habilidades da BNCC, o autor deixa o docente bem mais seguro para trabalhar com sua obra, visto que as habilidades dessa etapa são contempladas na obra.

Em resumo, ao chegarmos no capítulo em questão, vimos que nossa suspeita mencionada acima é errada, pois o autor começa o capítulo, com um breve exemplo sobre Cálculo de Área e de Volume, fazendo as comparações entre as medidas para saber quantas peças de azulejos são necessárias para uma determinada parede, ou seja, já coloca uma situação cotidiana, não ainda com terrenos, mas com azulejos e paredes. Ao iniciar a seção que fala do Cálculo de Área, temos um grande e importante "anúncio", indo de caminho com a BNCC: "é muito importante sabermos calcular a medida de área de uma superfície, pois muitas situações do dia a dia exigem esse tipo de cálculo. " (Livro do 8° Ano da Coleção A). Em seguida, ele dá alguns exemplos desse uso no dia a dia e, mais uma vez, ele reforça que os conceitos já foram vistos em anos anteriores, assim como reforça o uso das unidades padrões.

Ao mencionar o Cálculo de Área da região quadrada, mais uma vezo autor faz a construção por decomposição com a unidade padrão, para usar o princípio da contagem, mas também introduz, realizando o mesmo processo, área de figuras com medidas usando números decimais, ou seja, ele faz o mesmo processo, mas agora com unidades padrões que são divisões da unidade padrão encontrada antes. Mesmo com todo esse novo passo, ele não deixa o discente perdido, pois faz a construção (Figura 22) dando exemplos concretos e auto explicativos, até conseguir chegar a fórmula que é conhecida. Ao mencionar o Cálculo de Área de região retangular qualquer, ele faz a mesma construção da região quadrada e, assim, deixa bem claro para o aluno o processo.

Na Área de uma região triangular, ele faz processo análogo ao que fez no livro do 6° ano, mostrando como transformar um triângulo e um paralelogramo e, assim, conseguir mostrar o processo de obtenção da fórmula, bem como a justificativa do porquê que na fórmula da Área de uma região triangular aparece a divisão por 2. Em seguida, ele apresenta todas as demais expressões para Cálculo de Área dos quadriláteros trapézio e losango. No Cálculo de Área do Trapézio, ele apresenta como decompor o trapézio em triângulos (Figura 23) e, assim, faz o processo até chegar a fórmula que conhecemos hoje. Já no Cálculo de Área de Losango, ele a apresenta de forma direta, embora deixa como exercício (Figura 24) para explorar e descobrir o processo de decompor o losango em figuras que já conhecemos (como o triângulo) e verificar que o resultado será o mesmo que usar a fórmula.

Figura 22 – Cálculo de Área com Números Racionais



Não é possível decompor a região R em um número exato de regiões quadradas de medida de área de 1 cm².

Mas é possível decompor a região quadrada R em 49 regiões quadradas justapostas ($7 \cdot 7 = 49$), cada uma com medida de área de 0,25 cm². Assim, a medida de área da região quadrada R é de 12,25 cm² ($49 \cdot 0{,}25 = 12{,}25$).

Observe que $(3{,}5)^2 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$.

Portanto, podemos escrever:

Medida de área da região quadrada R: $(3{,}5\text{ cm})^2 = 12{,}25\text{ cm}^2$

Em dois exemplos vimos que, dada a medida de comprimento ℓ do lado da região quadrada, a medida de área dessa região quadrada é:

$A = \ell \cdot \ell$ ou $A = \ell^2$
(unidades de medida de área)

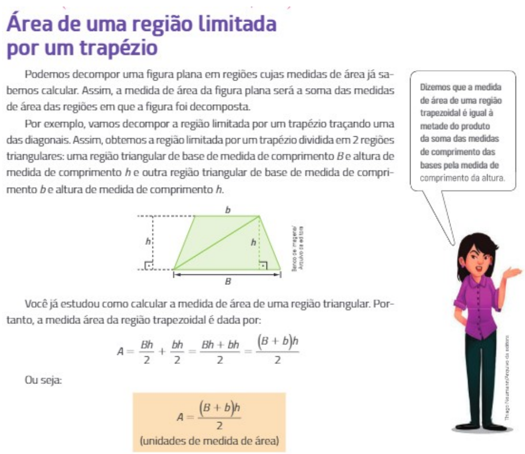
Se a medida de comprimento ℓ é dada em mm, cm ou m, então a medida de área A será dada em mm², cm² ou m², respectivamente.

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção A

Ao ampliar para área de figuras não poligonais, ele usa uma questão do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) para mostrar que podemos aproximar Área quaisquer (no caso em questão, era de uma planta de uma cidade) usando uma balança e recortes do mesmo papel, onde desenha a planta da cidade e faz comparações usando o mesmo princípio da contagem. Ele também deixa como exemplo, para o caso das figuras não poligonais, o uso da malha quadriculada para aproximar essas Áreas. Ao trabalhar com Cálculo de Área de um círculo, ele começa mostrando como aproximar a Área do círculo com a de um quadrado, mostrando que, ao colocar um círculo dentro de um quadrado, há perdas na Área total dele, em seguida, faz uma construção (Figura 25) até chegar a fórmula que conhecemos hoje, mencionando, durante o processo, como chegamos a usar π para chegarmos a fórmula que conhecemos hoje.

Concluímos, assim, que esse também é um capítulo adequado para se trabalhar o conceito de Áreas no 8° Ano do Ensino Fundamental, embora o sumário não deixa claro os preceitos previsto na BNCC. O capítulo não deixa a desejar no que apresenta o documento para essa etapa do ensino, apresentando alguns exemplos e exercícios ligados ao cotidiano dos discentes, falando também de Cálculo de Área de terrenos.

Figura 23 – Cálculo de Área do Trapézio



Área de uma região limitada por um trapézio

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas medidas de área já sabemos calcular. Assim, a medida de área da figura plana será a soma das medidas de área das regiões em que a figura foi decomposta.

Por exemplo, vamos decompor a região limitada por um trapézio traçando uma das diagonais. Assim, obtemos a região limitada por um trapézio dividida em 2 regiões triangulares: uma região triangular de base de medida de comprimento B e altura de medida de comprimento h e outra região triangular de base de medida de comprimento b e altura de medida de comprimento h.

Dizemos que a medida de área de uma região trapezoidal é igual à metade do produto da soma das medidas de comprimento das bases pela medida de comprimento da altura.

Você já estudou como calcular a medida de área de uma região triangular. Portanto, a medida área da região trapezoidal é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

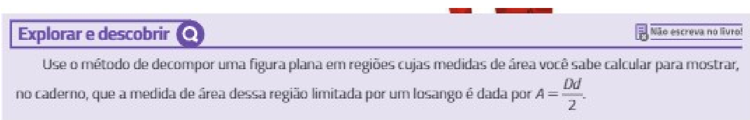
Ou seja:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

(unidades de medida de área)

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção A

Figura 24 – Cálculo de Área do Losango

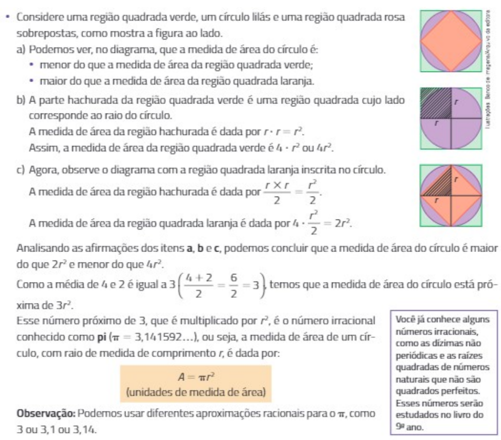


Explorar e descobrir Não escreva no livro!

Use o método de decompor uma figura plana em regiões cujas medidas de área você sabe calcular para mostrar, no caderno, que a medida de área dessa região limitada por um losango é dada por $A = \frac{Dd}{2}$.

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção A

Figura 25 – Cálculo de Área do Círculo



- Considere uma região quadrada verde, um círculo lilás e uma região quadrada rosa sobrepostas, como mostra a figura ao lado.

a) Podemos ver, no diagrama, que a medida de área do círculo é:
- menor do que a medida de área da região quadrada verde;
- maior do que a medida de área da região quadrada laranja.

b) A parte hachurada da região quadrada verde é uma região quadrada cujo lado corresponde ao raio do círculo.
A medida de área da região hachurada é dada por $r \cdot r = r^2$.
Assim, a medida de área da região quadrada verde é $4 \cdot r^2$ ou $4r^2$.

c) Agora, observe o diagrama com a região quadrada laranja inscrita no círculo.
A medida de área da região hachurada é dada por $\frac{r \times r}{2} = \frac{r^2}{2}$.
A medida de área da região quadrada laranja é dada por $4 \cdot \frac{r^2}{2} = 2r^2$.

Analisando as afirmações dos itens **a**, **b** e **c**, podemos concluir que a medida de área do círculo é maior do que $2r^2$ e menor do que $4r^2$.

Como a média de 4 e 2 é igual a 3 $\left(\frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3\right)$ temos que a medida de área do círculo está próxima de $3r^2$.

Esse número próximo de 3, que é multiplicado por r^2, é o número irracional conhecido como **pi** (π = 3,141592...), ou seja, a medida de área de um círculo, com raio de medida de comprimento r, é dada por:

$$A = \pi r^2$$

(unidades de medida de área)

Observação: Podemos usar diferentes aproximações racionais para o π, como 3 ou 3,1 ou 3,14.

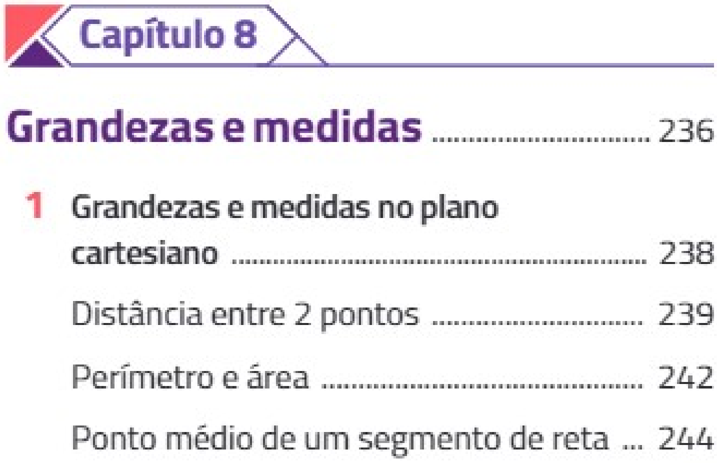
Você já conhece alguns números irracionais, como as dízimas não periódicas e as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. Esses números serão estudados no livro do 9º ano.

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção A

4.3.1.4 Livro do 9° Ano do Ensino Fundamental

Começamos pelo sumário, onde também tivemos dúvidas se ele cumpriria o que diz a BNCC, pois a habilidade dessa etapa apresenta que o discente deve usar o conceito de ponto médio de um segmento de reta e o conceito de distância entre dois pontos quaisquer para calcular a Área de figuras planas construídas no plano cartesiano, e pelo sumário (Figura 26), temos que só um desses conceitos será apresentado antes do Cálculo de Área.

Figura 26 – Parte do Sumário do Livro



Fonte: Livro do 9° Ano da Coleção A

Logo após essa rápida análise inicial, conseguimos expor, com relação aos tópicos de nossa análise, que:

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo, o autor apresenta imagens e um pequeno texto que dá a ideia que o capítulo irá trabalhar só com notação científica, e não deixa claro que também irá trabalhar com Plano Cartesiano.

b) **Abordagem do conteúdo:** o autor começa relembrando o que é plano cartesiano e, em seguida, começa do básico no Plano, que é traçar pontos, e vai construindo o conhecimento em cima dele, até chegar a calcular distância entre pontos, e assim fazer a ponto para Cálculo de Área e de Perímetro.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta exemplos e exercícios de forma diversificada, inclusive, no final do capítulo, apresenta questões das provas oficiais.

d) **Uso de tecnologias:** Nesse ponto, o autor apresenta alguns exercícios nos quais deixa livre para o discente usar a calculadora para conferir seus resultados.

e) **Contexto Histórico:** Na introdução ao plano cartesiano, ele faz um breve relato histórico, onde menciona que o matemático e filósofo francês René Descartes criou o sistema de coordenadas cartesianas.

f) **Relação com a BNCC:** No que diz respeito às habilidades, ele supre a necessidade momentânea do discente, embora não trabalhe uma parte com clareza, deixando o caminho aberto para o docente complementar e, assim, deixar o discente bem amparado.

Assim, em resumo, temos que o conceito de ponto médio de um segmento e o de distância entre pontos quaisquer, bem como o Cálculo de Área, são todos apresentados na seção 1 do capítulo 8. E, ao analisarmos, o capítulo como um todo vemos que o nosso alerta está fundamentado, pois o autor começa o livro relembrando um breve relato do plano cartesiano e os conceitos básicos do mesmo, em seguida faz a construção de como podemos obter a distância entre dois pontos no plano cartesiano, principalmente quando eles não pertencem a uma mesma reta paralela aos eixos coordenados, na qual ele apresenta a construção usando o teorema de Pitágoras.

Dando continuidade a questão, ele apresenta como usar a distância entre pontos quaisquer para o Cálculo de Área de figura esboçadas no plano cartesiano, fazendo a ponte entre esse conceito e as fórmulas já vistas anteriormente, mas não identificamos nenhum exemplo onde sejá possível usar o ponto médio, conceito apresentado após a apresentação do Cálculo de Área, mas ele utiliza o ponto médio para, por exemplo, encontrar ponto de interseção entre as diagonais de paralelogramos em exemplos e exercícios propostos.

Assim, mais uma vez acreditamos que esse também é um livro adequado para ser trabalhado nessa etapa do ensino no que se refere ao Cálculo de Área, embora não deixa claro relações entre ponto médio de um segmento qualquer e o Cálculo de Área, mas explica bem o conceito, deixando o caminho aberto para o docente procurar essas relações, como, por exemplo, utilizar esse conceito para encontrar a altura de um triângulo isósceles representado no plano cartesiano e, assim, conseguir calcular sua Área.

4.3.2 Coleção B

A coleção aqui analisada está na sua 1^a edição e foi publicada no ano de 2018. O conteúdo relativo ao Cálculo de Área está distribuído da seguinte forma:

Tabela 5 – Distribuição da Coleção B

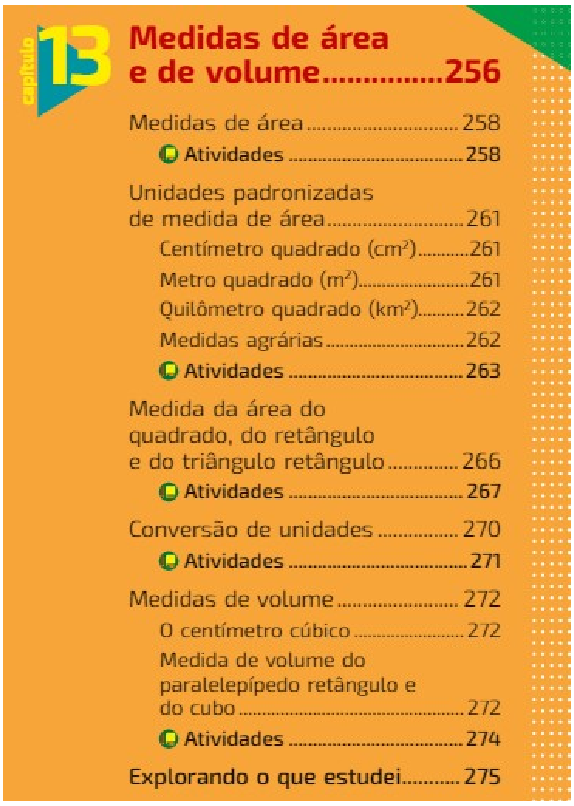
6° Ano
Capítulo 13 - Medidas de área e de volume.
7° Ano
Capítulo 12 - Medida de Área e de volume
8° Ano
Capítulo 11 - Medidas de Área
9° Ano
Capítulo 9 - Relações no Triângulo Retângulo

Fonte: Coleção B

4.3.2.1 Livro do 6° Ano do Ensino Fundamental

Realizando de maneira análoga aos demais, observamos, pelo sumário (Figura 27), que o autor não deixa claro como ele seguirá o processo para chegar o conceito de Área, pois a primeira seção do capítulo 13 apresenta como título "Medida de área", assim não podemos concluir o processo que ele seguiu para chegar até as habilidades que são dessa etapa.

Figura 27 – Parte do Sumário do Livro



Fonte: Livro do 6° Ano da Coleção B

Após essa análise inicial, temos que:

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo em questão, temos que o autor apresenta imagens com umas informações ligadas à Área da Mata Atlântica nos estados brasileiros, mas não fala de volume na abertura do capítulo, dando a interpretação que ele só trabalhará Área.

b) **Abordagem do conteúdo:** A abordagem do conteúdo é feita de forma gradual, começando com a construção da unidade padrão e, assim, seguindo com as outras construções do conhecimento.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta alguns exemplos e muitos exercícios. Em alguns desses exercícios, aborda conteúdos ligados à realidade dos discentes e também situações ligadas ao Brasil de uma forma geral, como densidade demográfica.

d) **Uso de tecnologias:** No final do livro os autores apresentam duas seções para trabalhar com tecnologias, uma para falar do Geogebra e o seu uso na geometria e a outra para falar das planihas eletrônicas e trabalhar com frações e registros de informações.

e) **Contexto Histórico:** No capítulo em questão, não encontramos a história do Cálculo de Área, nem do Cálculo de Volume, mas, em outros capítulos, encontramos um pouco de contexto histórico, mas nenhum relacionado a Área.

f) **Relação com a BNCC:** Acreditamos que, com relação as habilidades da BNCC, o autor quase que cumpre 100%.

Resumindo, vemos que, ao chegarmos na seção destinada para o Cálculo de Área, os autores começam abordando uma unidade padrão, também apresentando o conceito inicial de Cálculo de Área usando a contagem através da unidade padrão. Em seguida, apresentam algumas das unidades padrões utilizadas no dia a dia, como cm^2, m^2 e km^2. Dando continuidade aos conceitos, ele apresenta o Cálculo de Áreas de figuras planas usando a malha quadriculada ou por representações de quadrados com a unidade padrão, assim chegando aos valores para as Áreas usando o princípio da contagem.

No que se relaciona a Habilidade EF06MA29, o livro deixa a desejar pois, embora trabalhe ampliação e redução de figuras, ele apresenta que os lados da figuras ampliadas ou reduzidas são proporcionais, mas não faz a conexão com o Cálculo de Área, que também é foco dessa habilidade, mas apresenta alguns exemplos para analisarmos e, com isso, o caminho fica pronto para o docente fazer o caminho com o Cálculo de Área.

Concluímos, assim, que esse é um capítulo adequado para se trabalhar o conceito de Áreas no 6° Ano do Ensino Fundamental. E, mesmo deixando a desejar na habilidade

EF06MA29, esse livro fica sendo bem representativo nessa etapa do ensino por deixar o caminho bem apresentado para o docente fazer as pontes que faltam para completar a habilidade.

4.3.2.2 Livro do 7° ano do Ensino Fundamental

Ao verificar o sumário, mais uma vez ficamos com dúvidas de como será realizado o processo didático no que se refere ao Cálculo de Área, nem temos certeza se as habilidades da BNCC serão contempladas em sua totalidade, pois o sumário é muito direto e não dá espaço para vermos os caminhos. Após uma breve análise inicial, temos que

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo em questão, os autores apresentam algumas imagens que ligam ao conteúdo de volume, mas não fala sobre o conteúdo de Área, deixando para o leitor a impressão que não será trabalhado nesse momento.

b) **Abordagem do conteúdo:** Primeiramente os autores aborda uma opção de Cálculo de Área com o uso da multiplicação, em seguida fala da unidade padrão e, em conseguinte, eles começam a construção dos outros Cálculo de Área de figuras.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta pouco exemplos e mais exercícios, inclusive apresenta um Cálculo de Área dentro de um exercício.

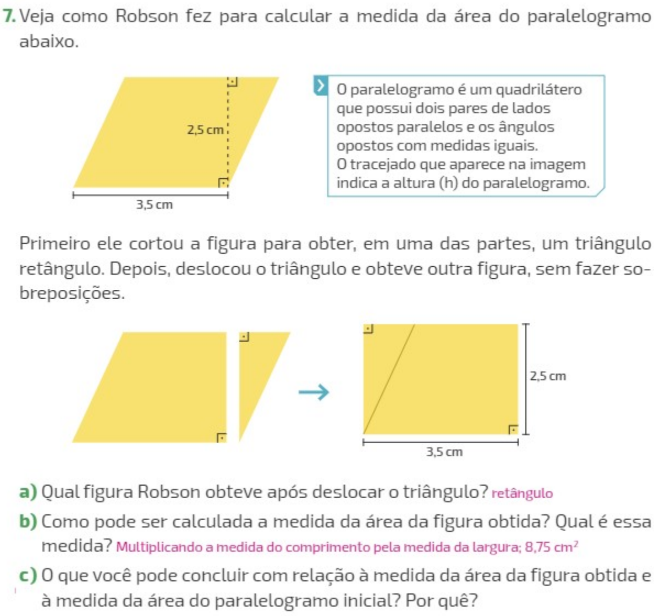
d) **Uso de tecnologias:** Como no livro anterior, os autores apresentam duas seções no final do livro, uma com o Geogebra, para usá-lo na construção de figuras geométricas, e a outra com planilhas eletrônicas, para trabalhar com gráficos.

e) **Contexto Histórico:** Mais uma vez não encontramos nenhum contexto histórico dentro do capítulo.

f) **Relação com a BNCC:** No que se refere às habilidade dessa etapa, os autores trabalham, mas deixam um pouco precário, por trabalharem apenas em dois exercício uma das habilidades.

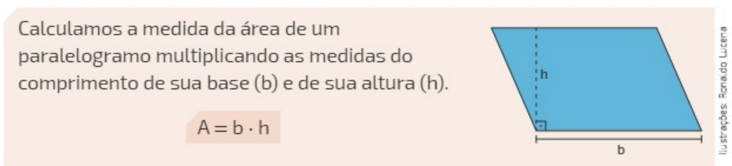
Assim, ao chegarmos na seção que trata sobre o Cálculo de Área do capítulo 12, observamos que eles apresentam uma forma de Cálculo de Área do quadrado e do retângulo usando a multiplicação dos lados de um papel, em seguida apresenta que esse é o mecanismo ou fórmula para esse cálculo. Eles abordam o Cálculo de Área do paralelogramo dentro de um exercício (Figura 28), mas não fazem uma contextualização prévia, eles fazem tudo dentro de um exercício e, em seguida, abrem uma caixa de diálogo (Figura 29) para apresentar formalmente a fórmula do Cálculo de Área do paralelogramo e logo depois outros exercícios para serem realizados de forma análoga, assim como fazem (Figura 30) para apresentar a fórmula do Cálculo de Área do triângulo.

Figura 28 – Cálculo de Área do Paralelogramo



Fonte: Livro do 7° Ano da Coleção B

Figura 29 – Formalização do Cálculo de Área do Paralelogramo

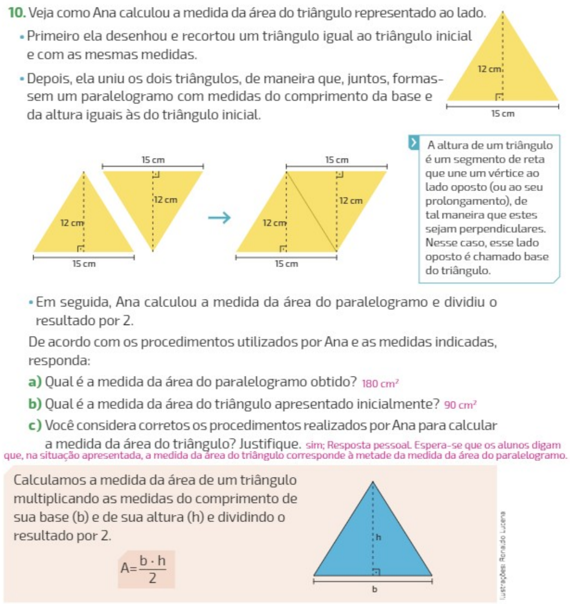


Fonte: Livro do 7° Ano da Coleção B

No que se refere à Habilidade EF07MA32, que trata sobre como calcular Áreas de figuras usando a decomposição em figuras como quadrado, retângulo e/ou triângulos, o livro deixa a desejar, pois só trabalha essa parte em dois exercícios (Figura 31), sem fazer nenhuma contextualização ou exemplos anteriormente.

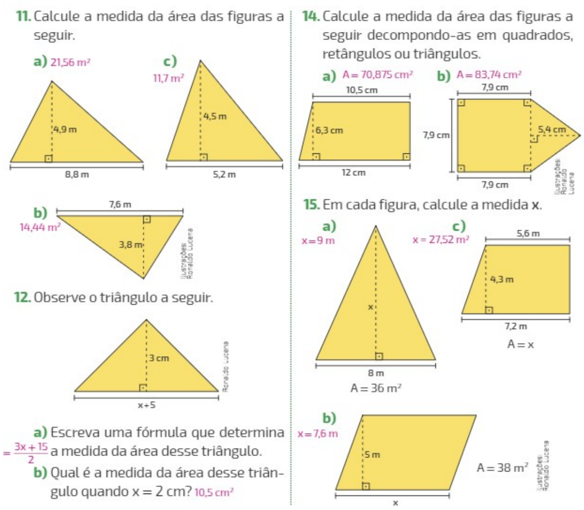
Assim, podemos concluir que esse livro, embora fale de todos os pontos que a BNCC apresenta para essa etapa de ensino, não é considerado um livro excelente dentro dos requisitos falado acima, mas o docente dá para trabalhar dentro da etapa de ensino usando esse livro, mas precisará de um tempo a mais para contextualizar os pontos que deixaram sem muita exemplificação.

Figura 30 – Apresentação do Cálculo de Área do Triângulo



Fonte: Livro do 7° Ano da Coleção B

Figura 31 – Cálculo de Área por decomposição



Fonte: Livro do 7° Ano da Coleção B

4.3.2.3 Livro do 8° Ano do Ensino Fundamental

No 3° livro da coleção, temos que os autores reservam um capítulo completo para trabalhar o Cálculo de Área, mas, como nos outros livros, pelo sumário (Figura 32) a apresentação do conteúdo aparentemente será bem direta, sem contextualização, não deixando claro se cumprirá as habilidades para essa etapa.

Figura 32 – Parte do Sumário do Livro

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção B

Logo em seguida a análise inicial, chegamos que:

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo, os autores apresentam uma situação bem real no nosso momento, pois trabalham com painéis solares e sua produção de energia por m^2 de painel, dando a interpretação correta ao leitor que irá trabalhar Cálculo de Área.

b) **Abordagem do conteúdo:** Eles fazem a abordagem do conteúdo de forma conectada com a anterior, mostrando como transformar as novas figuras em outras já existentes, fazendo, assim, a demonstração de cada fórmula.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** Mais uma vez, os autores apresentam pouco exemplos para os discentes tomarem como base para prosseguirem na resolução dos exercícios.

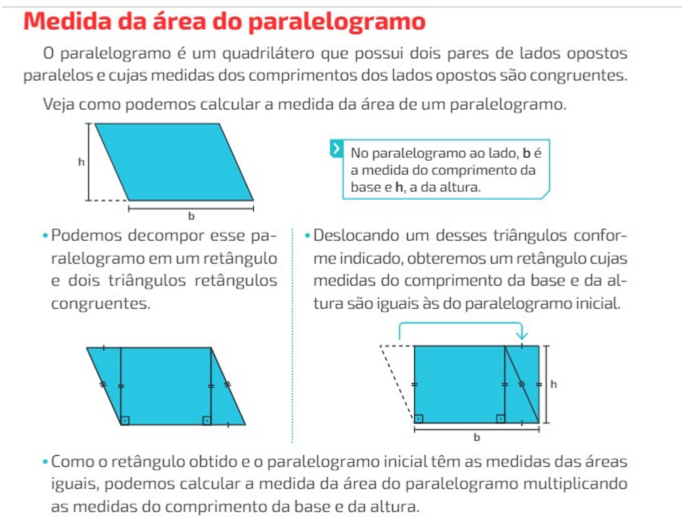
d) **Uso de tecnologias:** Seguindo o mesmo padrão das livros anteriores, os autores destinam duas seções no final do livro, para trabalhar com o Geogebra e com as planilhas eletrônicas com alguns conteúdos abordados durante o livro.

e) **Contexto Histórico:** Em uma seção do capítulo, os autores apresentam as ocas dos indígenas para se referir a um uso da circunferência em alguns locais, não fala do contexto histórico, mas faz essa menção do uso da figura geométrica dentro de uma Aldeia indígena.

f) **Relação com a BNCC:** Esse livro trabalha bem as habilidades destinadas para essa etapa do ensino.

Assim, podemos resumir que, ao analisarmos o capítulo em si, temos que os autores começam falando que já foi visto anteriormente (se referindo a anos anteriores) o Cálculo de Área de quadrados e retângulos, e que vai ampliar os conceitos para outros quadriláteros, como paralelogramo, trapézio e losango, bem como para triângulos e círculos. Eles apresentam novamente o que seria um paralelogramo e mostram um processo de como o transformar em um retângulo (Figura 33), mostrando, assim, que a fórmula para as duas figuras são as mesmas, em seguida apresenta exemplos para praticarmos o uso dessa fórmula, inclusive colocando exemplos com situações cotidianas com terrenos para plantio.

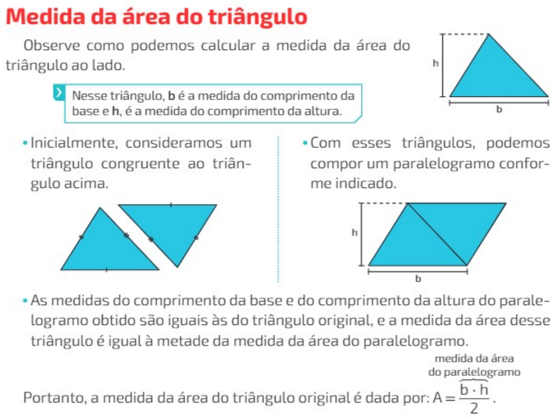
Figura 33 – Cálculo de Área do Paralelogramo



Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção B

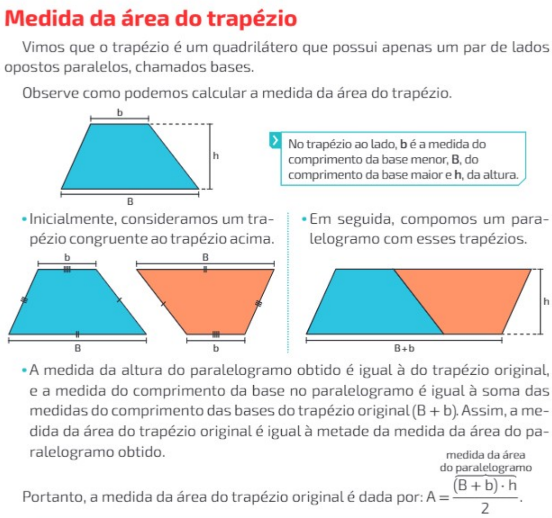
Para apresentar o Cálculo de Áreas de triângulos, eles também apresentam uma forma de transformar o triângulo em outra figura (Figura 34), que, nesse caso, seria um paralelogramo, e mostram que o triângulo é exatamente a metade do paralelogramo em questão, mostrando, assim, o porquê do 2 dividindo na fórmula do Cálculo de Área do triângulo. Para a Área do trapézio, primeiro eles fazem a recordação do que é um trapézio e, em seguida, também mostram o processo (Figura 35) para transformar o trapézio em um paralelogramo e, assim, com a fórmula já conhecida é possível chegar à fórmula para o Cálculo de Área do trapézio.

Figura 34 – Cálculo de Área do Triângulo



Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção B

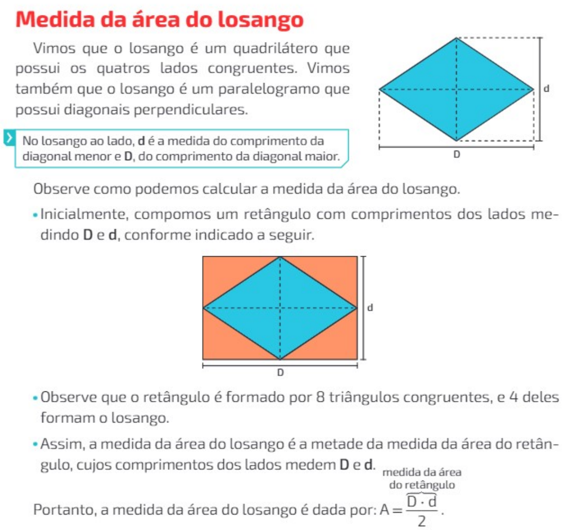
Figura 35 – Cálculo de Área do Trapézio



Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção B

Não é diferente para a fórmula para o Cálculo da Área do losango, pois eles começam lembrando as características de um losango e, em seguida, mostram ,usando triângulos (Figura 36), como chegar em uma fórmula para seu cálculo, mostrando que pode-se usar as diagonais do losango para esse cálculo. Antes de falar sobre o Cálculo de Área de um círculo, devemos ressaltar que eles deixam uma seção do capítulo 10 para falar de perímetro da circunferência, fazendo a aproximação do valor de π usando exemplos de circunferências aleatórias. Com isso, para trabalhar o Cálculo de Área do círculo, eles fazem essa ponte entre o perímetro de uma circunferência e a definição de círculo, transformando um círculo em uma aproximação do que seria um paralelogramo (Figura 37), para, assim, chegar e aplicar uma fórmula para esse cálculo.

Figura 36 – Cálculo de Área do Losango



Medida da área do losango

Vimos que o losango é um quadrilátero que possui os quatros lados congruentes. Vimos também que o losango é um paralelogramo que possui diagonais perpendiculares.

No losango ao lado, **d** é a medida do comprimento da diagonal menor e **D**, do comprimento da diagonal maior.

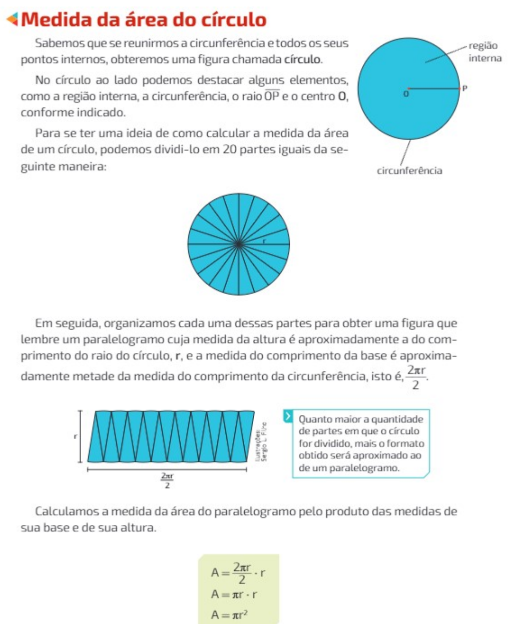
Observe como podemos calcular a medida da área do losango.

- Inicialmente, compomos um retângulo com comprimentos dos lados medindo **D** e **d**, conforme indicado a seguir.
- Observe que o retângulo é formado por 8 triângulos congruentes, e 4 deles formam o losango.
- Assim, a medida da área do losango é a metade da medida da área do retângulo, cujos comprimentos dos lados medem **D** e **d**.

Portanto, a medida da área do losango é dada por: $A = \frac{\overbrace{D \cdot d}^{\text{medida da área do retângulo}}}{2}$.

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção B

Figura 37 – Método para obtenção da fórmula para o Cálculo de Área do Círculo



Medida da área do círculo

Sabemos que se reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obteremos uma figura chamada **círculo**.

No círculo ao lado podemos destacar alguns elementos, como a região interna, a circunferência, o raio $\overline{OP}$ e o centro **O**, conforme indicado.

Para se ter uma ideia de como calcular a medida da área de um círculo, podemos dividi-lo em 20 partes iguais da seguinte maneira:

Em seguida, organizamos cada uma dessas partes para obter uma figura que lembre um paralelogramo cuja medida da altura é aproximadamente a do comprimento do raio do círculo, **r**, e a medida do comprimento da base é aproximadamente metade da medida do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2}$.

Quanto maior a quantidade de partes em que o círculo for dividido, mais o formato obtido será aproximado ao de um paralelogramo.

Calculamos a medida da área do paralelogramo pelo produto das medidas de sua base e de sua altura.

$$A = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$$
$$A = \pi r \cdot r$$
$$A = \pi r^2$$

Fonte: Livro do 8° Ano da Coleção B

De modo geral, esse livro é um bom exemplo para se trabalhar o Cálculo de Área no 8° Ano do Ensino Fundamental, visto que ele aborda o que a BNCC pressupõe para essa etapa, bem como deixa bastante exemplos para os discentes praticarem de forma mais eficiente.

4.3.2.4 Livro do 9° Ano do Ensino Fundamental

Ao analisar o sumário desse livro (Figura 38), temos a nítida impressão que a Habilidade EF09MA16 não será perfeitamente contemplada, pois os autores apresentam, no súmario, que serão abordados os conceitos bases que é apresentado nessa habilidade, mas não deixa claro se irá apresentar o Cálculo de Área com o uso do Ponto Médio de um segmento qualquer e nem do uso da distância entre dois pontos. Nesse livro, podemos encontrar dois capítulos que poderá tratar de Cálculo de Áreas, o capítulo 9, que tem uma seção que falará do plano cartesiano (foco da habilidade em questão), e o capítulo 11, o qual apresentará o Cálculo de Área de um setor circular (que não é foco da habilidade dessa etapa do ensino). Após essa análise inicial, concluímos que:

Figura 38 – Parte do Sumário de Livro

Fonte: Livro do 9° Ano da Coleção B

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo, os autores apresentam uma situação que é utilizada o Teodolito, instrumento muito importante dentro dos cálculos que utilizam ângulos, dando a interpretação ao leitor que o capítulo irá trabalhar bastante figuras geométricas com relação aos seus Ângulos.

b) **Abordagem do conteúdo:** Primeiro os autores abordam triângulo retângulo e suas relações métricas e, a partir daí fazem a construção dos demais contextos, chegando a mostrar a distância entre pontos pelo Teorema de Pitágoras.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** Mais uma vez, o números de exemplos é reduzido, mas deixa uma grande quantidade de exercícios durante do capítulo para praticar.

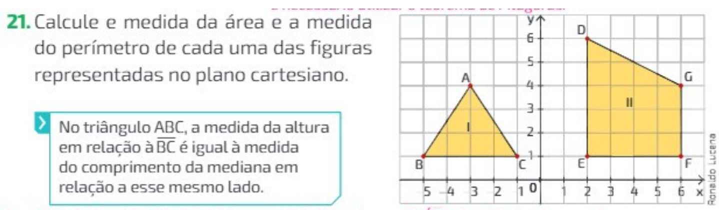
d) **Uso de tecnologias:** Nessa obra, os autores colocam alguns exemplos nos quais deixam bem claro o uso do Teodolito para cálculo de alguns ângulos usado nos mesmos.

e) **Contexto Histórico:** Durante os estudos do triângulo retângulo, os autores abordam o contexto histórico de Pitágoras, falando um pouco da história do Teorema que leva seu nome.

f) **Relação com a BNCC:** Como mencionado anteriormente, nessa obra não fica 100% claro que o discente irá adquirir todas as habilidades concernentes a essa etapa do ensino.

Ao analisarmos o capítulo 9, vemos que os autores apresentam os conceitos de medida da distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento, dentro de uma subseção da seção intitulada Teorema de Pitágoras. Percebemos que isso foi proposital, visto que eles usam o teorema de Pitágoras para realizar os dois cálculos mencionados, não apresentando fórmulas ou expressões gerais para reduzir os processos. No que se refere ao uso desses conceitos para o Cálculo de Área de figuras no plano cartesiano, podemos dizer que o livro deixa o leitor muito triste, pois só traz um único exercício (Figura 39) que ele faz essa ponte entre os conceitos. Seguindo para o capítulo 11, temos que ele é destinado para o estudo de circunferências e círculos, no que se refere a todas as características, inclusive faz referência que no 8° Ano do Ensino Fundamental foi estudado o Cálculo de Área de um círculo, e daí amplia para um setor circular.

Figura 39 – Exercício sobre Cálculo de Área no Plano Cartesiano



Fonte: Livro do 9° Ano da Coleção B

Concluímos, assim, que esse livro é razoável para se trabalhar a habilidade dentro do 9° do Ensino Fundamental, pois deixa a desejar no que se refere à ponte do plano cartesiano com o Cálculo de Área. Ele apresenta alguns exemplos de cálculo de perímetro e outros usos dos conceitos de ponto médio e de distância entre pontos, mas, com relação ao Cálculo de Área, como já foi mencionado, é bem precário, deixando um trabalho maior para o docente buscar em outras fontes mecanismos para ajudar a completar essa habilidade que a BNCC apresenta.

4.3.3 Coleção A x Coleção B

Ao realizarmos uma comparação mais efetiva entre os livros de cada etapa, temos que, nos livros do sexto ano, no ponto **Introdução dos Capítulos**, as duas obras trabalham uma introdução do capítulo com imagens e textos; na Coleção A é trabalhado situações que englobam todo o conteúdo do capítulo nessa introdução, mas, na Coleção B, os autores só trabalham (na introdução do capítulo) o tema Área, e, no capítulo como um todo, é trabalhado também volume, assim temos que essa não é uma boa introdução, pois temos uma noção inicial que no Capítulo só será trabalhado o conteúdo de Área.

Com relação a **Abordagem do Conteúdo**, os dois livros têm métodos similares, pois ambos não apresentam o conteúdo de forma direta, e sim fazem uma construção do conhecimento. Comparando o item **Exemplos, Exercícios e Atividades**, o livro da Coleção A se destaca, pois, além de apresentar exercícios no decorrer do capítulo, ele apresenta alguns exercícios no final do capítulo, apresentando também exercícios de provas nacionais. No ponto **Uso de Tecnologias**, a coleção B se destaca, pois apresenta uma seção (no final do livro) para trabalhar sobre software, onde traz o Geogebra e seu uso na Geometria, já a Coleção A deixa o discente livre para conferir seus cálculo com o uso da calculadora, ou seja, não destaca nenhuma tecnologia específica.

No momento que se refere ao **Contexto Histórico**, a Coleção A, mais uma vez se sobressai em relação à B, pois apresenta contexto históricos ligados às medições, já na outra coleção não conseguimos identificar nenhum contexto histórico ligado à Áreas. Para finalizar esses livros, encontramos a sua **Relação com a BNCC**, onde acreditamos que ambos os livros se saem bem, pois conseguem amparar bem os discentes para conseguirem as habilidades e competências dessa fase.

Continuando nossa comparação, chegamos aos livros do sétimo ano. No ponto **Introdução dos Capítulos**, as duas obras trabalham uma introdução do capítulo de forma distinta: na Coleção A é trabalhado situações que englobam todo o conteúdo do capítulo, que, no caso em questão, deixa claro que será trabalhado perímetro, Área e volume; já na Coleção B, os autores só trabalham o tema Volume e, no capítulo como um todo, é trabalhado também Área, sendo assim, mais uma vez dá a impressão que faltará algo no capítulo.

Com relação a **Abordagem do Conteúdo**, os dois livros têm métodos similares, pois ambos não apresentam o conteúdo de forma direta, e sim fazem uma construção do conhecimento: no livro da Coleção A, ele apresenta as fórmulas de forma gradual; e a Coleção B apresenta formas alternativas, como o uso de multiplicação para o Cálculo de Áreas. Comparando o item **Exemplos, Exercícios e Atividades**, o livro da Coleção A se destaca, como comentado no livro do sexto ano, onde apresenta exemplos e exercícios no decorrer do capítulo,também alguns exercícios no final, além de apresentar exercícios de provas nacionais; já o livro da Coleção B apresenta poucos exemplos, mas coloca um número razoável de exercícios.

No ponto **Uso de Tecnologias**, na Coleção A o discente pode, inicialmente, usar a calculadora para conferir suas respostas, e em um determinado momento o autor apresenta formas práticas para aproximar o valor de π, onde o docente pode aumentar as alternativas das aulas com o uso de outras tecnologias; o livro da Coleção B também se destaca nesse ponto, pois, como no livro do sexto ano, os autores apresentam uma seção no final do livro exclusivo para tratar de alguns *softwares* para ser usado em sala de aula, como o Geogrebra e as planilhas eletrônicas .

No momento em que se refere ao **Contexto Histórico**, a Coleção A, mais uma vez se sobressai em relação a Coleção B, pois apresenta contexto históricos sobre o π, bem como apresentando o Papiro Ahmes, e o "Banho de Arquimedes", e na outra coleção não conseguimos identificar nenhum contexto histórico ligado à Áreas. Para finalizar esses livros, encontramos a sua **Relação com a BNCC**, nesse ponto, acreditamos que o livro da Coleção A é uma melhor opção, pois é bem mais enfático nos exemplos e exercícios para verificação, já na Coleção B, existe uma das habilidades dessa etapa que é só trabalhada em dois exercícios.

Nos livros do oitavo ano, verificamos que ambos trabalham uma introdução do capítulo de forma distinta à dos anteriores, onde eles abordam tudo que vão apresentar no capítulo e ainda mais com problemas do cotidiano. Na **Abordagem do Conteúdo**, os dois livros continuam com métodos similares, pois ambos não apresentam o conteúdo de forma direta, e sim fazem uma construção do conhecimento. Já no quesito **Exemplos, Exercícios e Atividades**, os dois livros divergem, pois o livro da Coleção A continua no mesmo sentido dos anteriores, trabalhando com bons exemplos e vários exercícios, e o livro da Coleção B mais uma vez apresenta poucos exemplos, mas coloca um número razoável de exercícios.

No ponto **Uso de Tecnologias**, a Coleção A apresenta uma nova forma de calcular Áreas, usando proporções e uma balança, e, na Coleção B, eles continuam com a batida, separando seções no final do livro para apresentar tecnologia que ajuda em sala de aula e, mais uma vez, apresenta o Geogebra e as Planilhas Eletrônicas. No que se apresenta sobre **Contexto Histórico**, o livro da Coleção A novamente traz fatos históricos para embasar o texto, já no livro da Coleção B, não conseguimos identificar nada de contextos históricos ligados ao tema Área. Na finalização da análise dessas obras, encontramos a sua **Relação com a BNCC**, onde concluímos que ambos os livros estão a disposição para suprir as habilidades e competências dessa etapa de ensino.

Concluindo as comparações entre os livros das duas coleções, temos o livros do nono ano. No que se refere à **Introdução do Capítulo**, o livro da Coleção A leva uma pequena desvantagem com relação ao outro, pois ele só apresenta imagens ligadas à notação científica, dando a ideia que não falará dentro de outros contexto, já no livro da Coleção B, ele já começa trabalhando com o Teodolito, que dá a ideia que o capítulo vai trabalhar com ângulos. Na **Abordagem do Conteúdo**, os dois livros seguem caminhos distintos, pois, no livro da Coleção A, ele começa fazendo referências sobre o plano cartesiano e daí segue para falar os pontos relacionados ao Cálculo de Área, mas na obra da Coleção B, o autor começa com uma abordagem sobre as relações métricas do triângulo retângulo e, em seguida, faz as demais construções do conhecimento, chegando a mostrar a fórmula da distância entre pontos com o Teorema de Pitágora.

Já falando de **Exemplos, Exercícios e Atividades**, os dois livros seguem o mesmo modelo dos livros anteriores, mas o livro da Coleção A destaca-se em relação ao livro da B. No ponto **Uso de Tecnologias**, a Coleção A deixa um pouco a desejar, pois não trabalha nenhuma tecnologia específica, já no livro da Coleção B, é apresentado alguns exemplos e exercícios nos quais deixa claro o uso do Teodolito.

No que se apresenta sobre **Contexto Histórico**, pela primeira vez encontramos algo relacionado ao Cálculo de Áreas (de forma indireta) dentro do contexto histórico, pois os autores apresentam um pouco da história do Teorema de Pitágoras, e no livro da Coleção A encontramos um pouco de história do plano cartesiano. Na finalização da análise dessas obras, encontramos a sua **Relação com a BNCC**, onde os dois livros ficam devendo um pouco com relação às habilidades dessa etapa, mas, de uma forma geral, o livro da Coleção A consegue suprir mais a necessidades (habilidades e competências) dessa etapa do ensino.

Ao compararmos as análises nas coleções em questão, temos que a Coleção A se destaca com relação à Coleção B, pois ela é mais rica em detalhes no que se refere ao Cálculo de Área de figuras planas, apresentando melhor todas as construções e, de uma forma geral, só ficou devendo uma das habilidades analisadas, mas, mesmo com esse déficit, ela deixa o caminho pronto para o docente abordar os conceitos restantes. Já a Coleção B, ficou devendo nas maioria dos pontos, pois, em alguns momentos, os autores foram muito diretos, isto é, sem fazer uma contextualização antes para ajudar ao discente na sua busca pelo conhecimento.

4.4 Coleções de Livros do Ensino Médio

4.4.1 Coleção C

A coleção aqui analisada está na sua 9^a Edição e foi publicada no ano de 2017. O conteúdo de Cálculo de Área está distribuído da seguinte forma:

Tabela 6 – Distribuição da Coleção C

1^a Série do Ensino Médio
Capítulo 12 - Áreas de figuras planas.
2^a Série do Ensino Médio
Capítulo 8 - Poliedros Capítulo 9 – Corpos Redondos
3^a Série do Ensino Médio
Capítulo 2 – A reta

Fonte: Coleção C

4.4.1.1 Livro da 1^a Série do Ensino Médio

Ao realizar a análise do sumário, temos que o livro separa um capítulo completo (no caso, o capítulo 12) para o Cálculo de Área, e que irá apresentar os casos gerais e também alguns particulares, por isso acreditamos que ele cumprirá a habilidade EM13MAT307.

Após essa análise inicial, concluímos que:

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo, os autores apresentam algumas figuras que mostram o uso das figuras geométricas no dia a dia, em seguida comentam que iram revisar o conteúdo de Cálculo de Área visto no Ensino Fundamental.

b) **Abordagem do conteúdo:** Começam realizando a abordagem do Sistema Internacional de Unidades, em seguida começam a apresentar as áreas das figuras geométricas, sempre levando em consideração uma unidade padrão

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** Os autores apresentam exemplos e exercícios de forma diversificada e, sempre que possível, fazem a ponte entre todos os conteúdos, bem como trazem alguns ligados ao cotidiano.

d) **Uso de tecnologias:** Nesse pontos, os autores não deixam claro o uso de tecnologias, embora deixam a brecha para os discentes usarem calculadores para conferirem alguns resultados.

e) **Contexto Histórico:** Durante o capítulo, os autores abordam o contexto histórico do Papiro de Ahmes.

f) **Relação com a BNCC:** Embora sido projetado antes da promulgação da BNCC, o livro se adequa bem, e supre as necessidades desta etapa de ensino.

Analisando o capítulo em questão, vemos que os autores começam relembrando que os conceitos de Área e as fórmulas já foram estudadas no Ensino Fundamental, e que, agora na 1^a Série do Ensino Médio, seria feita uma revisão de tais. Começam apresentando a Área do retângulo, fazendo primeiro o lembrete da unidade padrão para Cálculo de Áreas, bem como mostram a tabela do Sistema Internacional (SI) (Figura 40), na qual a unidade usada no SI para o Cálculo de Áreas é o m^2 (metros quadrados); ainda dentro do Cálculo de Área do retângulo, eles começam mostrando que essa pode ser calculada usando o princípio multiplicativo com a unidade padrão e logo após essa breve introdução, eles apresentam a fórmula.

Figura 40 – Representação das Unidade de Medidas no Sistema Internacional de Medidas (SI)


Unidade (SI)

Grandeza	Nome	Símbolo
comprimento	metro	m
superfície	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3

Fonte: Livro da 1^a Série da Coleção C

De forma análoga, eles fazem com a Área do quadrado, pois eles lembram que todo quadrado é um retângulo, o que implica que as fórmulas podem ser as mesmas. Mas, como as medidas dos lados quadrado são iguais, eles colocam "lado ao quadrado" (l^2) na fórmula como conhecemos nos dias atuais. Em seguida eles apresentam, de forma análoga (fazendo as construções ou transformando a figura em questão em outra já conhecida), os Cálculos de Áreas do paralelogramo, triângulo, losango, trapézio, círculo e setor circular, sempre, entre um e outro Cálculo de Área ou apresenta das fórmulas, eles deixam exemplos e exercícios para os discentes praticarem, onde é possível observar alguns que englobam situações cotidiana (Figura 41).

Figura 41 – Exercício com situação do cotidiano

8 A figura abaixo mostra a planta baixa da cozinha e da área de serviço de um apartamento. Considerando desprezível a espessura das paredes, determine a área total da superfície das dependências mostradas.

Fonte: Livro da 1 ^{a} Série da Coleção C

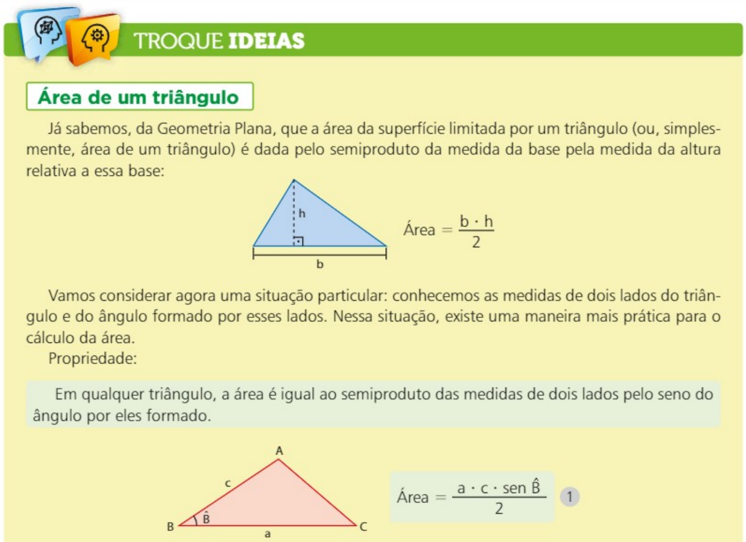
Assim, podemos concluir que esse seria um bom livro para trabalhar o Cálculo de Área de figuras planas dentro do contexto da BNCC, embora sabemos que os próximos livros estarão bem mais trabalhados nesses pontos, pois já tem o documento como critério para aprovação da coleção.

4.4.1.2 Livro da 2^a Série do Ensino Médio

O livro da 2^a Série do Ensino Médio não tem nenhum capítulo destinado exclusivamente para o Cálculo de Área de figuras planas, visto que o principal objetivo dessa etapa está voltada à trigonometria e às figuras espaciais, que vai de encontro com a Habilidade EM13MAT309, assim, pelo sumário, vemos que essa habilidade poderá ser contemplada nesse livro sem muitas dificuldades.

Ao analisarmos o livro, conseguimos perceber que os autores apresentam, dentro do capítulo 3 destinado à Trigonometria de triângulos quaisquer, uma troca de ideias (Figura 42), dando uma opção de Cálculo de Área de triângulos, transformando a fórmula convencional em uma que usa o Seno de um dos ângulos. Nos capítulos 8 e 9, são abordadas as figuras espaciais prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, onde com as apresentações das figuras, eles mostram que é possível sempre fazer a ponte entre as fórmulas conhecidas antes e o Cálculo de Área totais, pois é possível fazer as planificações das figuras ou simplesmente analisando que, em cada lado das figuras espaciais, como poliedros e corpos redondos, são figuras planas já conhecidas. E, como no livro anterior, entre uma apresentação de conceito e outro, eles apresentam alguns exemplos e exercícios para os discentes praticarem e fixarem melhor os conceitos.

Figura 42 – Cálculo de Área do Triângulo



TROQUE IDEIAS

Área de um triângulo

Já sabemos, da Geometria Plana, que a área da superfície limitada por um triângulo (ou, simplesmente, área de um triângulo) é dada pelo semiproduto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Vamos considerar agora uma situação particular: conhecemos as medidas de dois lados do triângulo e do ângulo formado por esses lados. Nessa situação, existe uma maneira mais prática para o cálculo da área.

Propriedade:

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.

$$\text{Área} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\, \hat{B}}{2} \quad (1)$$

Fonte: Livro da 2^a Série da Coleção C

Assim, podemos concluir que, dentro da proposta da BNCC, esse livro já está bem encaminhado para ser trabalhado em anos futuros.

4.4.1.3 Livro da 3^a Série do Ensino Médio

Como no livro anterior, o livro da 3^a Série do Ensino Médio não tem como foco trabalhar as Áreas das figuras planas, e sim trabalhar melhor a Geometria Analítica, a Matemática Financeira, a Estatística, os Números Complexos, os Polinômios e as Equações Algébricas. Mas, dentro da Geometria Analítica, os autores separam uma seção para trabalhar o Cálculo de Área de triângulo, onde a figura é apresentada no plano cartesiano e os vértices são pares ordenados, e eles fazem a construção e mostram que, se conseguirmos modelar a situação para o plano cartesiano, teremos outra opção para Cálculo de Área do triângulo, indo de encontro com à Habilidade EM13MAT307.

Ao analisarmos a seção referida acima, verificamos que eles fazem toda a construção de como transformar a fórmula que conhecemos em outro método para Cálculo de Área, usando principalmente o conceito da distância entre pontos quaisquer, apresentada no 9° Ano do Ensino Fundamental e reforçada nessa etapa do ensino, e o conceito de matrizes, visto na 2^a Série do Ensino Médio.

Logo, de forma geral, no que se refere ao Cálculo de Área e o que preconiza a BNCC, essa também é uma boa obra para se trabalhar dentro da 3^a Série do Ensino Médio.

4.4.2 Coleção D

A coleção aqui analisada está na sua 3^a Edição e foi publicada no ano de 2016. O conteúdo de Cálculo de Área está distribuído, direta ou indiretamente, da seguinte forma:

Tabela 7 – Distribuição da Coleção D

1^a Série do Ensino Médio
Capítulo 08 – Trigonometria no Triângulo Retângulo.
2^a Série do Ensino Médio
Capítulo 6 – Poígonos Inscritos e Áreas Capítulo 8 - Poliedros
3^a Série do Ensino Médio
Capítulo 4 – Geometria Analítica: Ponto e Reta

Fonte: Coleção D

4.4.2.1 Livro da 1^a Série do Ensino Médio

Ao realizarmos a análise do sumário, temos que o autor não trabalha o conteúdo Cálculo de Área em nenhuma parte do livro em detalhes. O autor deixa o 1° livro dessa coleção para trabalhar Conjuntos Numéricos, Funções (Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica), Sequências (em especial Progressão Aritmética e Progressão Geométrica) e Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Ao verificarmos o Capítulo 8 com mais detalhes, vemos que ele pode ir de encontro com à Habilidade EM13MAT307, pois, com ele, podemos explorar algumas ferramentas para trabalhar o Cálculo de Área através de outras vertentes, como semelhanças entre figuras, escala (citando, como exemplo, o caso de mapas) ou usando o Teorema de Tales (que é um caso mais específico de semelhança). Durante algumas partes desse capítulo em especial, o autor apresenta alguns trechos da história da Matemática, que traz riqueza ao material, apresentando que, a cerca de 5 mil anos, os egípcios já utilizavam os triângulos retângulos em algumas situações.

Logo, de forma geral, embora não trabalhando especificamente sobre o Cálculo de Área em nenhum dos seus capítulos, esse livro cumpre um bom papel para essa etapa, pois dá ferramentas necessárias para os docentes e discentes trabalharem o Cálculo de Área com outros olhos.

4.4.2.2 Livro da 2^a Série do Ensino Médio

No segundo livro da coleção já temos algo diferente ao relacionarmos com o primeiro, pois ele tem boa parte de um capítulo para revisar e reforçar os Cálculos de Áreas das figuras planas mais conhecidas, o que ajudará os discentes a contemplarem algumas das Habilidades dessa etapa do ensino. Após essa análise inicial, concluímos que:

a) **Introdução do capítulo:** Na abertura do capítulo, o autor apresenta uma situação ligada ao desmatamento da Floresta Amazônica, onde deixa claro que irá trabalhar o Cálculo de Áreas nesse capítulo, bem como mostrar possíveis transformações Cálculo de Área desconhecida em Áreas de figuras já conhecidas.

b) **Abordagem do conteúdo:** Começa o Cálculo de Área de forma intuitiva o Cálculo, evidenciando que,através da unidade padrão, conseguimos calcular ou aproximar as outras Áreas.

c) **Exemplos, exercícios e atividades:** O autor apresenta exemplos e exercícios de forma diversificada, inclusive apresentando outras do ENEM, bem como questões de algumas universidades espalhadas pelo Brasil.

d) **Uso de tecnologias:** O autor não deixa apresentável nenhuma tecnologia ou mecanismo tecnológico que possa influenciar nos processos ou melhorar o seu entendimento, mas, nesse caso, sempre podemos usar a calculadora para conferir alguns resultados, visto que, nessa etapa do ensino, os discentes já estão familiarizados com todos os conjuntos numéricos e, quando queremos aproximar valores de raízes quadradas, esse uso se faz indispensável para uma melhor agilidade nessas soluções.

e) **Contexto Histórico:** Durante o capítulo, o autor apresenta o contexto histórico de Arquimedes (Figura 43), na qual ele conseguiu uma boa aproximação para o número π que usamos hoje, bem como apresenta o problema do Papiro Rhind (Figura 44), que fala sobre o cálculo de Área de uma região circular.

f) **Relação com a BNCC:** Embora sido projetado antes da promulgação da BNCC, o livro se adequa bem e supri as necessidades dessa etapa de ensino.

Assim, de uma forma geral, vemos que o autor começa reforçando o contexto da unidade padrão para um melhor entendimento das outras fórmulas e unidades a serem utilizadas no decorrer do capítulo. Em seguida, faz a (re)apresentação da fórmula da Área do quadrado e, dela, chega-se à Área do retângulo. Seguindo, ele apresenta a Área do Paralelogramo, que faz a partir da do Retângulo (o autor faz a construção e mostra porque pode-se usar a Área do retângulo). No que se refere a Área do Triângulo, ele apresenta a fórmula geral e também as específica, para o caso do triângulo equilátero, e também apresenta como realizar esse cálculo usando a trigonometria.

Figura 43 – Contexto Histórico de Arquimedes

Comprimento da circunferência

Historicamente, o cálculo do comprimento de uma circunferência sempre foi feito a partir da comparação com o diâmetro. Há cerca de 4 mil anos, os babilônios obtinham o comprimento da circunferência triplicando o diâmetro. Essa razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro dela é conhecida como o número π, ou seja, $\pi = \frac{C}{D}$. Então, para os babilônios, $\pi = 3$. Há cerca de 2 mil anos, Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.), um dos mais importantes geômetras gregos de toda a História, publicou um tratado matemático contendo o cálculo do valor de π como um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$. Isso equivalia a usar $\pi = 3{,}14$, o mesmo que usamos atualmente nos cálculos práticos, um feito notável para a época.

Hoje sabemos que π é o número irracional 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510..., aqui escrito com as cinquenta primeiras casas decimais, mas que já foi obtido com precisão de 8 quatrilhões de casas decimais por poderosos computadores. Porém, mesmo hoje em dia, usar $\pi = 3{,}14$ é suficiente para as nossas necessidades práticas. Em cálculos teóricos, não substituímos π pelo seu valor. Assim, usamos para o comprimento da circunferência a fórmula $C = 2\pi r$, pois:

$$\frac{C}{D} = \pi \Rightarrow \frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

Retrato de Arquimedes.

AB: medida da circunferência ou comprimento da circunferência (*C*)

Fonte: Livro da 2 ª Série da Coleção D

Figura 44 – Papito Rhind

A área do círculo e o número π

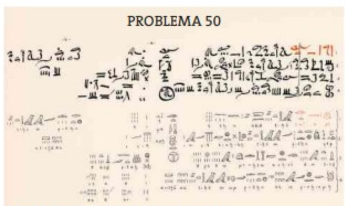
As tentativas para calcular a área de um círculo a partir de um diâmetro dado estiveram sempre presentes em toda a história da Matemática. Provavelmente, a mais antiga está no Papiro de Rhind, um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., que contém a resolução de 80 problemas matemáticos dos mais diferentes tipos.

O problema 50 do papiro de Rhind está escrito da seguinte forma:

> Um campo circular tem diâmetro 9 khet. Qual é sua área?

A resposta dada no papiro é 64 setat (que seria equivalente à unidade de medida khet elevada ao quadrado).

Na matemática do Egito antigo os enunciados e as sentenças não eram colocados à prova, ou seja, não havia demonstrações matemáticas, apenas uma coleção de regras práticas para calcular as coisas que necessitavam na vida diária. Entre essas regras, algumas eram exatas e outras eram simplesmente aproximações; entretanto, funcionavam bem para as exigências da época. Para o problema 50 a solução é apresentada da seguinte maneira:



Tradução do problema 50 do Papiro de Rhind.

> Tire $\frac{1}{9}$ da solução, ou seja, 1, e restam 8. Faça a multiplicação 8 vezes 8; a solução dará 64, o montante dele, ou seja, a área de 64 setat.

Esse texto do antigo Egito está afirmando que a área de um círculo de diâmetro 9 é igual à área de um quadrado de lado 8. Vamos então avaliar qual é o valor de π utilizado na resolução deste problema.

Fonte: Livro da 2 ª Série da Coleção D

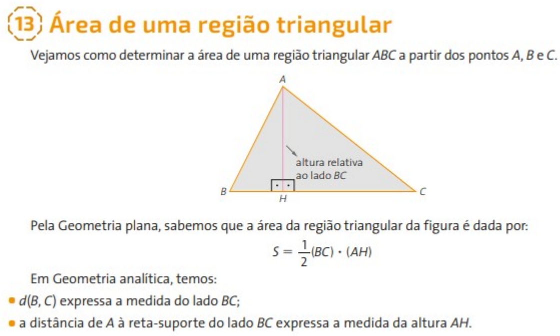
Assim, podemos concluir que esse seria um bom livro para trabalhar o Cálculo de Área de figuras planas dentro do contexto da BNCC, mas não podemos esquecer que essa coleção foi elaborada antes da promulgação da BNCC.

4.4.2.3 Livro da 3^a Série do Ensino Médio

O terceiro livro da coleção, assim como no primeiro, não tem nenhum capítulo com foco principal no Cálculo de Área, pois ele trabalha com Matemática Financeira, Estatística, Geometria Espacial, Geometria Analítica, Números Complexos, Polinômios, Equações Algébricas e Equações Trigonométricas. Mas, dentro da seção de Geometria Analítica, o autor faz uma ressalva no que se refere ao Cálculo de Área do Triângulo, fazendo uma boa ponte para ajudar o discente a completar a Habilidade EM13MAT307.

Ao analisarmos a seção referida acima, verificamos que ele faz duas construções de Cálculo de Área do triângulo quando a figura está dentro do plano cartesiano, uma ele utiliza a distância entre pontos (Figura 45) e a outra usa matrizes (Figura 46), mostrando, com alguns exemplos, que essas fórmulas são válidas. Logo, de forma geral, no que se refere ao Cálculo de Área e o que preconiza a BNCC, essa também é uma boa obra para se trabalhar dentro da 3^a Série do Ensino Médio.

Figura 45 – Cálculo de Área do Triângulo usando a distância entre pontos


13 Área de uma região triangular

Vejamos como determinar a área de uma região triangular *ABC* a partir dos pontos *A*, *B* e *C*.

Pela Geometria plana, sabemos que a área da região triangular da figura é dada por:

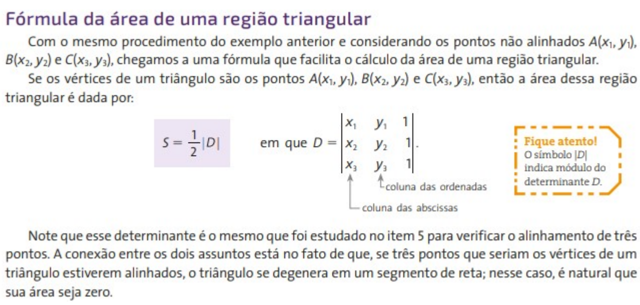
$$S = \frac{1}{2}(BC) \cdot (AH)$$

Em Geometria analítica, temos:

- $d(B, C)$ expressa a medida do lado BC;
- a distância de A à reta-suporte do lado BC expressa a medida da altura AH.

Fonte: Livro da 3 ^{a} Série da Coleção D

Figura 46 – Cálculo de Área do Triângulo usando Matrizes


Fórmula da área de uma região triangular

Com o mesmo procedimento do exemplo anterior e considerando os pontos não alinhados $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, chegamos a uma fórmula que facilita o cálculo da área de uma região triangular.

Se os vértices de um triângulo são os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, então a área dessa região triangular é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|D| \quad \text{em que } D = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{array}.$$

coluna das ordenadas

coluna das abscissas

Fique atento! O símbolo $|D|$ indica módulo do determinante D.

Note que esse determinante é o mesmo que foi estudado no item 5 para verificar o alinhamento de três pontos. A conexão entre os dois assuntos está no fato de que, se três pontos que seriam os vértices de um triângulo estiverem alinhados, o triângulo se degenera em um segmento de reta; nesse caso, é natural que sua área seja zero.

Fonte: Livro da 3 ^{a} Série da Coleção D

4.4.3 Coleção C x Coleção D

Ao compararmos essas coleções, optamos por só fazer do livro da 1^a da Coleção C com o livro da 2^a da Coleção D, pois são ambos escolhidos pelos autores para fazer a revisão e aprofundamento de Área dentro do Ensino Médio. Assim, temos que, na **Introdução do Capítulo**, os dois livros trabalham de forma similar, pois ambos apresentam situações ligados ao cotidiano e o Cálculo de Área. Na **Abordagem do Conteúdo**, os dois livros também seguem caminhos pareceidos, falando sobre as figuras geométricas e construindo como realizar os Cálculos de Áreas, mas não apresentando de forma direta. Um diferencial da Coleção C em relação à D é que, na primeira, ele faz uma apresentação do Sistema Internacional de Medidas, fazendo assim um caminho um pouco mais firme para apresentar textos acadêmicos internacionais em suas aulas.

Já falando de **Exemplos, Exercícios e Atividades**, os dois livros se apresentam de forma similar, apresentando exemplos e exercícios para os discentes praticarem. Um diferencial da Coleção D em relação a C que podemos destacar é que, na Coleção D, o autor também apresenta questões do ENEM. No ponto **Uso de Tecnologias**, mais uma vez os autores seguem o mesmo procedimento, mas não deixam claro nenhuma tecnologia ou procedimentos tecnológicos que possam influenciar direta ou indiretamente o processo de Ensino e Aprendizagem dos discentes.

No que se apresenta sobre **Contexto Histórico**, ambos os autores apresentam fatos históricos para melhor entendimento do período, com um diferencial entre eles, no sentide de que a Coleção C apresenta o Papiro Rhind, já a Coleção D, além de falar sobre o Papiro de Ahmes, fala sobre Arquimedes, bem como um dos seus grandes feitos, que foi conseguir uma boa aproximação do valor de π. Na conclusão desta análise, encontramos a sua **Relação com a BNCC**, os dois livros, embora elaborados antes da BNCC, podemos concluir que os dois livros suprem bem as habilidades e as competências desta etapa de ensino.

Ao compararmos as duas coleções, temos que as duas se destacam nos pontos trabalhados, uma vez que, em ambas, trabalhamos os mesmos pontos, mas em momentos diferentes: a Coleção C prefere trabalhar a revisão geral do Cálculo de Área na 1^a Série, já a Coleção D deixa para a 2^a, mas ambas não deixam a desejar no que se pretendem trabalhar. As duas coleções são bem escolhidas e desejadas dentro das escolas da nossa região, então, com as novas adequações que a BNCC vai trazer também para o Ensino Médio, estas coleções precisarão de poucos ajustes e teremos boas coleções para continuarmos trabalhando bem e adequadamente a realidade de cada etapa de ensino.

5 Propostas de Atividades

Neste capítulo, apresentaremos algumas propostas de atividades com o intuito de serem aplicados em sala de aula para ajudar a desenvolver as habilidades e as competências sobre os conceitos alvos do nosso trabalho. Nessas proposta levaremos sempre em consideração a BNCC e, como principal ferramenta motivadora na confecção dessas atividades, usamos a História da Matemática.

5.1 **Atividade 01:** Habilidade EF06MA24 e EF06MA29

5.1.1 Objetivos

- Determinar a medida de áreas de figuras planas pela contagem das unidades de medidas;
- Compreender que diferentes figuras podem ter medidas de Áreas iguais, mas serem expressas por números diferentes em unidades de medidas diferentes;
- Resolver situações-problemas envolvendo medidas de Áreas;
- Comparar as medidas de Áreas de 2 figuras.

5.1.2 Metodologia

Para uma melhor otimização das atividades propostas nessa seção, o docente começará apresentando o Vídeo intitulado "Pato Donald no País da Matemágica"[1] (Figura 47). Com a apresentação desse vídeo, o docente conseguirá atrair, de forma mais efetiva, a visão dos alunos na matemática, pois ele trata de um curta metragem, onde apresenta o curioso Pato Donald em aventuras pelo mundo da fantasia, em um lugar onde árvores têm raízes quadradas e os rios estão repletos de números, também mostra como a Matemática está presente no nosso cotidiano, bem como na arte, na engenharia, na verdade em todo lugar.

No vídeo encontramos a apresentação de várias figuras geométricas, e também de algumas curiosidades dos jogos usando a Matemática, além de fatos históricos que vão aguçar a curiosidade dos discentes, como, por exemplo, o que Pitágoras fez para criar a escala musical que usamos hoje na música, e como as figuras geométricas estão presentem nos todos os lugares. Após a apresentação do vídeo e um debate sobre

[1] Disponível de forma gratuita no Youtube, através do link: <https://www.youtube.com/watch?v=g8oqgrVhA_8>

ele, o docente dar continuidade ao conteúdo e aplica alguns exemplos seguindo o livro didático. As atividades posteriores servirão para avaliar se os discentes completaram ou não as habilidade e competências dessa etapa do ensino.

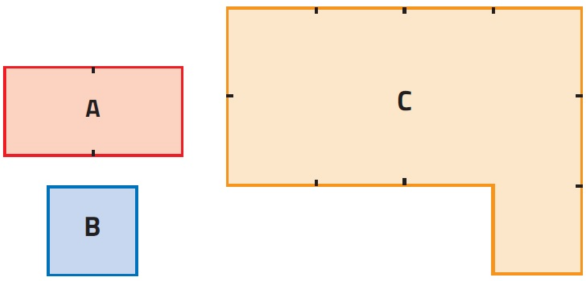
Figura 47 – Pato Donald no País da Matemágica

Fonte:<https://www.youtube.com/watch?v=g8oqgrVhA_8>

5.2 Exercícios

Questão 1.1 – (DANTE, 2019a) Observe as regiões planas A, B e C. Faça uma estimativa de medida de Área indicada em cada item. Depois, calcule a medida de Área, indique-a e verifique se suas estimativas foram boas ou não.

Figura 48 – Questão 1.1



Fonte: (DANTE, 2019a)

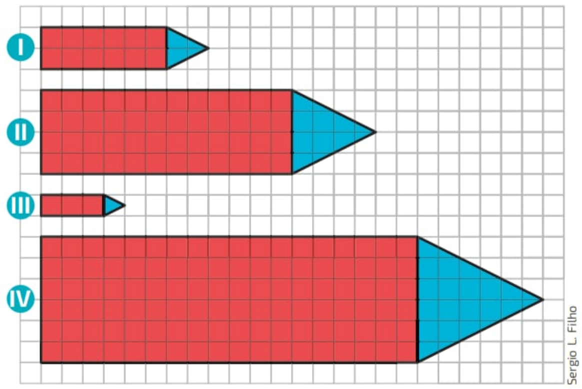
a) A medida de Área da região C usando a Área da região B como unidade de medida.

b) A medida de Área da região C usando a Área da região A com unidade de medida.

c) A medida de Área da região A usando a Área da região B com unidade de medida.

Questão 1.2 – (Adaptado de Balestri e Pataro (2019a)) Observe as figuras na malha quadriculada.

Figura 49 – Questão 1.2



Fonte: (BALESTRI; PATARO, 2019a)

a) As figuras apresentadas na malha são semelhantes? Justifique.

b) Quais figuras representam uma redução em relação a figura II?

c) Quais figuras representam uma ampliação em relação à figura I?

d) O que ocorrerá com os perímetros ao realizarmos uma comparação entre a figura I e III? E com a Área?

Para realização da Questão 1.1, o docente deve realizar primeiro uma introdução do que é Área usando as unidades padrões e, daí, poderá usar esse exemplo como mecanismo verificador da Habilidade EF06MA24, pois, com ele, poderá verificar se ele consegue comparar e/ou encontrar a Área de figuras usando diferentes unidades padrões. Para a realização da Questão 1.2, o docente deve primeiro fazer a ampliação dos conceitos de proporção, ampliação e redução entre figuras, daí ele poderá verificar se os discentes alcançaram a Habilidade EF06MA29, pois poderá analisar as proporções que ocorrem entre os perímetros das figuras, além de verificar que isso não ocorre com o Cálculo de Área.

5.3 **Atividade 02:** Habilidades EF07MA31 e EF07MA32

5.3.1 Objetivos

- Retomar o Conceito de Área;

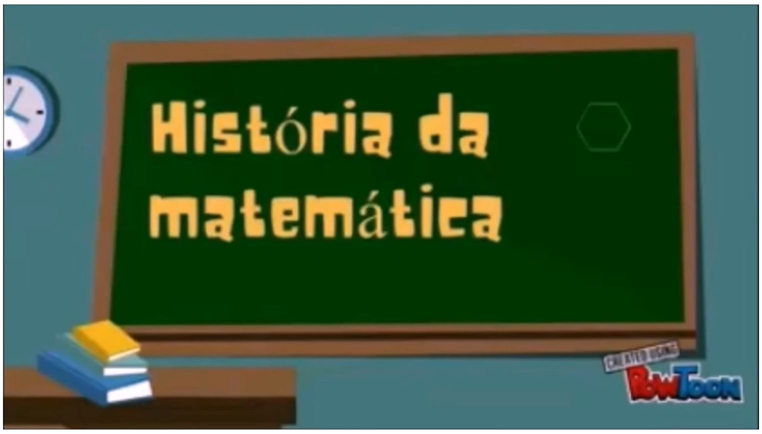
- Compreender o conceito de equivalência de Áreas;
- Decompor regiões planas em regiões mais simples para facilitar o cálculo da medida de Área da região original.

5.3.2 Metodologia

Os exercícios aqui propostos devem ser utilizados também como uma forma de verificação se os discentes conseguiram alcançar as habilidade e competências dessa etapa do ensino. Sugerimos o vídeo "A História da Matemática - O Início"[2] (Figura 50), para começar a introdução do conteúdo, não só de Áreas, mas de todos os conteúdos, pois ele mostra, de uma forma bem criativa, como podemos conseguir a atenção dos discentes que estão dispersos e/ou não tem interesse na disciplina, pois trabalha com uma viagem no tempo, mostrando vários momentos históricos importantes para o desenvolvimento da Matemática e do mundo de uma forma geral.

Assim, podemos dar asas a imaginação fértil que nossas crianças e adolescentes têm, gerando curiosidades e interesse neles, em descobrir qual o próximo conteúdo a ser visto, e tentar imaginar como ele começou a ser usado ou criado. Após a apresentação do vídeo, o professor segue com a introdução do conteúdo e, após fazer os exemplos e exercícios propostos no livro didático, o docente utilizará esses como forma de complemento e verificação das habilidades e competências.

Figura 50 – História da Matemática



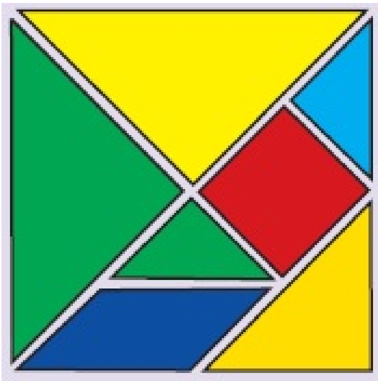
Fonte:<https://youtu.be/xxM_acVc5-0>

Outra forma de ajudar nossos discentes na obtenção dessas habilidades é usando o material manipulável, no caso da Habilidade EF07MA32, que trata de comparações

[2] Disponível de forma gratuita no Youtube, através do link: <https://youtu.be/xxM_acVc5-0>

entre figuras, podemos usar o Tangram[3] (Figura 51), pois a partir dele podemos construir regiões planas diferentes com mesma medida de Área, e ajudando aos nossos discentes a entender melhor as comparações entre Área e a transformar várias figuras em triângulos e quadrados, etc.

Figura 51 – Tangram

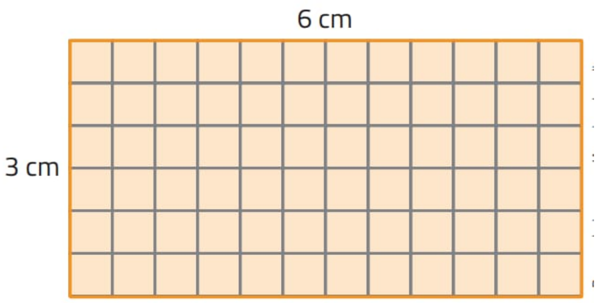


Fonte: (DANTE, 2019b)

5.4 Exercícios

Questão 2.1 – (Adaptada de Dante (2019b))Observe esta região retangular que tem medida de Área de $18cm^2$.

Figura 52 – Questão 2.1



Fonte: (DANTE, 2019b)

[3] Na internet, encontramos vários vídeos mostrando de forma prática como construir um Tangram, sugerimos o vídeo “Como fazer um Tangram em casa?” da página do Youtube Museu da Vida/Fiocruz, que está disponível de forma gratuita, através do link: <https://youtu.be/7mtf0NVWPFU>

a) Usando apenas números naturais para as medidas de comprimento dos lados, em centímetros, escreva quantas e quais regiões retangulares podem ser construídas usando decomposições da figura acima?

b) Desenhe uma delas em papel quadriculado.

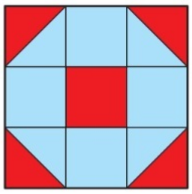
c) Calcule a nova Área dessa figura desenhada no item b.

d) O que podemos concluir com relação as demais regiões retangulares pensadas no item a, no que se refere ao Cálculo de Áreas.

e) Exiba uma possível fórmula para obtenção das demais Áreas expressas no item a, justificando o seu processo.

Questão 2.2 – (OBMEP, 2019) O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede $6cm^2$. Quanto mede a área pintada de azul?

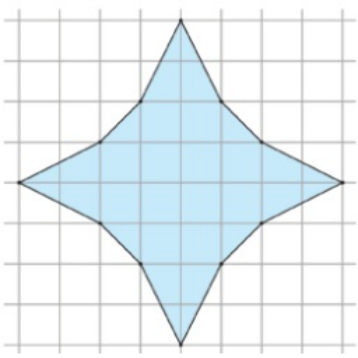
Figura 53 – Questão 2.2



Fonte: (OBMEP, 2019)

Questão 2.3 – (OBMEP, 2017) A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?

Figura 54 – Questão 2.3



Fonte: (OBMEP, 2017)

Questão 2.4 - (Adaptado de Dante (2019b)) Usando o Tangram, encontre e/ou verifique o que se pede:

a) Identifique a região plana triangular menor. Ela é a peça do tangram com a menor medida de Área. Indique a medida de Área de cada peça utilizando a região plana triangular menor como unidade de medida de Área.

 – Região plana quadrada

 – Região triangular média

 – Região plana delimitada por um paralelogramo

b) Realize a comparação entre as medidades de Área das 3 regiões encontradas no item anterior. Elas tem formas diferentes, mas existe alguma caracterísca comum as três? Justifique sua resposta.

c) Usando as peças do tangram, montem 2 regiões planas diferentes, ambas com medida de Área de 3 unidades.

Para a realização da Questão 2.1, podemos mostrar aos alunos um caminho para obtenção de uma fórmula ou expressão geral para o Cálculo de Área do retângulo, cumprindo, assim, o que apresenta a Habilidade EF07MA31, pois montamos o caminho para o próprio discente fazer as comparações de Áreas usando a mesma quantidade de quadrados ou unidades padrões, para que percebam que essas Áreas podem ser encontradas multiplicando a quantidade de quadradinhos da largura pela a quantidade da altura. Já para a Questão 2.2, apresentamos um caminho para decompor uma figura qualquer em quadriláteros e/ou triângulos, mostrando que a Área é mesma ao decompor a figura, que segue o mesmo processo na Questão 2.3, mas, dessa vez, não realizamos a decomposição antes, pois eles mesmo iram realizar para chegar a conclusão se eles alcançaram a Habilidade EF07MA32. A Questão 2.4 vem para finalizar a atividade, mostrando, de forma lúdica, algumas formas de encontrar ou decompor Áreas de figuras diferente.

5.5 **Atividade 03:** Habilidade EF08MA19

5.5.1 Objetivos

- Compreender algumas situações do cotidiano que envolvem medidas de Áreas;
- Resolver situações-problemas envolvendo medidas de Áreas;
- Compreender o cálculo de medida de Área de uma região por decomposição em regiões com medidas de Área conhecidas;

- Compreender que regiões planas diferentes podem ter medidas de Área iguais.

5.5.2 Metodologia

Em um primeiro momento, o docente deve questionar os alunos sobre as fórmulas de Cálculo de Área que eles lembram, para, a partir desse questionamento inicial, conseguir introduzir novas fórmulas ou mecanismos parar ampliar os conhecimentos dos discentes. Nesse momento, sugerimos a reprodução do vídeo “Era Uma Vez Os Inventores E03 Heron de Alexandria”[4] (Figura 55), pois no vídeo os discentes poderão ver e conhecer alguns feitos do mundo antigo (como, por exemplos, grande embarcações e a Grande Biblioteca de Alexandria), bem como alguns dos grandes inventores da Grécia Antiga, como Aristóteles, Ptolomeu e Heron de Alexandria. Embora o vídeo não aborde muita Matemática, recomendamos o uso dele, pois irá apresentar aos discentes o matemático e inventor Heron, que foi o responsável por desenvolver outra fórmula para o Cálculo de Área de regiões triangulares, contribuindo de forma mais significativa para que consigam contemplar a Habilidade EF08MA19. Após o vídeo, o docente pode apresentar novamente todas as fórmulas já conhecidas e começar a introduzir as novas fórmulas, além de mostrar novos mecanismos para obtenção da medida de Área de figuras planas, como a fórmula de Heron, e como também usar uma balança para realizar as aproximações de Áreas. Nesse momento, eles provavelmente vão questionar: “Uma balança para calcular Área?” Sim, podemos usar uma balança para ajudar o Cálculo aproximado de Área de qualquer figura plana.

Figura 55 – Era Uma Vez Os Inventores E03 Heron de Alexandria

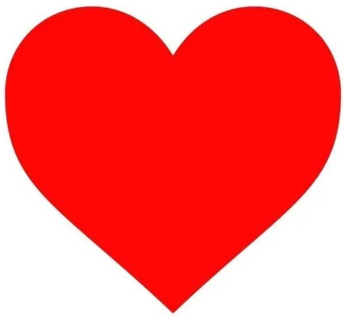
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=HwAgWUyZV98>

[4] Disponível de forma gratuita no Youtube, através do link: <https://www.youtube.com/watch?v=HwAgWUyZV98>

Os autores (LIMA et al., 2016) nos apresentam o passo a passo de como conseguirmos encontrar a medida da Área de qualquer figura usando uma balança:

> Considere a Figura 56
>
> Que Área ela tem?
>
> Naturalmente não como verificar quantas vezes o quadrado unitário cabe dentro dela. Mas, se no laboratório do colégio você puder usar uma balança de dois pratos que se usa para comparar pesos pequenos, faça o seguinte.
>
> Recorte a figura cuja área você deseja medir em uma folha de cartolina e, usando a mesma folha de cartolina recorte uma tira comprida com $1cm$ de largura. A tira deve ser comprida o suficiente para que, se a figura e a tira foram colocadas nos pratos da balança, a tira seja mais pesada.
>
> Comece agora a cortar com a tesoura pedaços pequenos da tira, colocando a tira na balança após cada corte. Você vai reparar que a balança vai começar a balançar quando estiver tendendo ao equilíbrio. Faça cortes cada vez menores até que você consiga o equilíbrio perfeito. Muito bem, neste momento, a Figura 56 e a tira têm mesma massa e, como são feitas do mesmo material, possuem mesma Área. Tudo o que você tem a fazer é medir agora o comprimento da tira.
>
> A Área da Figura 56 é de x centímetros quadrados. Uma medida bastante aproximada. (LIMA et al., 2016, p. 82)

Figura 56 – Coração



Fonte:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Cora%C3%A7%C3%A3o_(s%C3%ADmbolo)
>

Seguindo esse passo a passo, conseguiremos encontrar qualquer Área, podemos até conseguir aproximar Área de cidades, pois podemos usar proporção e escala e, assim, transformar a cidade em um mapa tão agradável quanto se queira, e assim repetir o processo acima, e depois usar a mesma escala e voltar o processo, e aproximar a Área da cidade ou de uma localidade dela. Um detalhe a ressaltar é que não precisa ser necessariamente uma balança de dois pratos, podemos usar balança digitais também, mas quanto mais precisão elas terem, mais o valor da Área será aproximado.

5.6 Exercícios

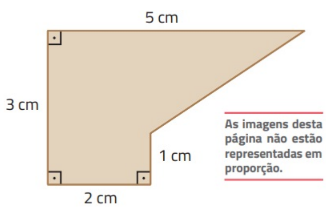
Questão 3.1 – Calcule a medida de Área de cada região triangular descrita, usando a fórmula que julgar mais conveniente.

a) Arnaldo tem uma fazenda na cidade B, ele está destinando uma parte do terreno da sua propriedade para a construção de um galinheiro, mas, curiosamente, ele pretende construir ele de forma triangular. Sabendo que as medidas dos lados do galinheiro são $10m, 26m$ e $24m$, encontre a Área total que ele ocupará dentro do terreno da fazenda.

b) João tem um terreno triangular, que tem medida de lado $12m, 16m$ e $20m$, e um dos ângulo é reto. Qual a Área do terreno?

Questão 3.2 – (DANTE, 2019c) Esta figura representa um terreno cujas medidas das dimensões estão na escala 1 : 800. Calcule a medida de Área desse terreno, em metro quadrados.

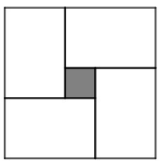
Figura 57 – Questão 3.2



Fonte: (DANTE, 2019c)

Questão 3.3 – (ASSIS; MIRANDA; FEITOSA, 2018) Um quadrado está dividido em 4 retângulos iguais e um quadrado, como mostra a figura abaixo. O quadrado sombreado possui área de $36m^2$. Cada retângulo possui área de $216m^2$. Determine as dimensões dos retângulos.

Figura 58 – Questão 3.3



Fonte: (ASSIS; MIRANDA; FEITOSA, 2018)

Na resolução da Questão 3.1, poderemos perceber, nos discentes, se eles conseguiram absorver outros mecanismos para a resolução de Cálculo de Área, nesse caso, por exemplo, será mais conveniente usar a fórmula de Heron, bem como usar uma balança para moldar e calcular a Área da região procurada. Já para a Questão 3.2, colocamos uma questão para analisar se os alunos conseguem decompor as figuras em outras já conhecidas, sendo assim, eles encontram caminhos diferentes para resolução de uma mesma questão, e também mostrando que, nesses casos mais específicos, podemos juntar as fórmulas e surgirá uma nova expressão que pode resolver essa questão. E a Questão 3.3 vem para fechar essa proposta, pois ela será responsável por fazer o caminho inverso dos demais, pois trará a Área da figura e pedirá para os discentes encontrarem as medidas originais levando em consideração algumas características, sendo assim, irá mostrar se os alunos conseguiram ou não contemplar a Habilidade EF08MA19.

5.7 **Atividade 04:** Habilidade EF09MA16

5.7.1 Objetivos

- Retomar o conceito de plano cartesiano e os elementos nele;
- Compreender o conceito de medida da distância entre 2 pontos no plano cartesiano;
- Usar o conceito de medida de distância entre 2 pontos no plano cartesiano para calcular a medida da Área de polígonos;
- Compreender o conceito de ponto médio de um segmento de reta.

5.7.2 Metodologia

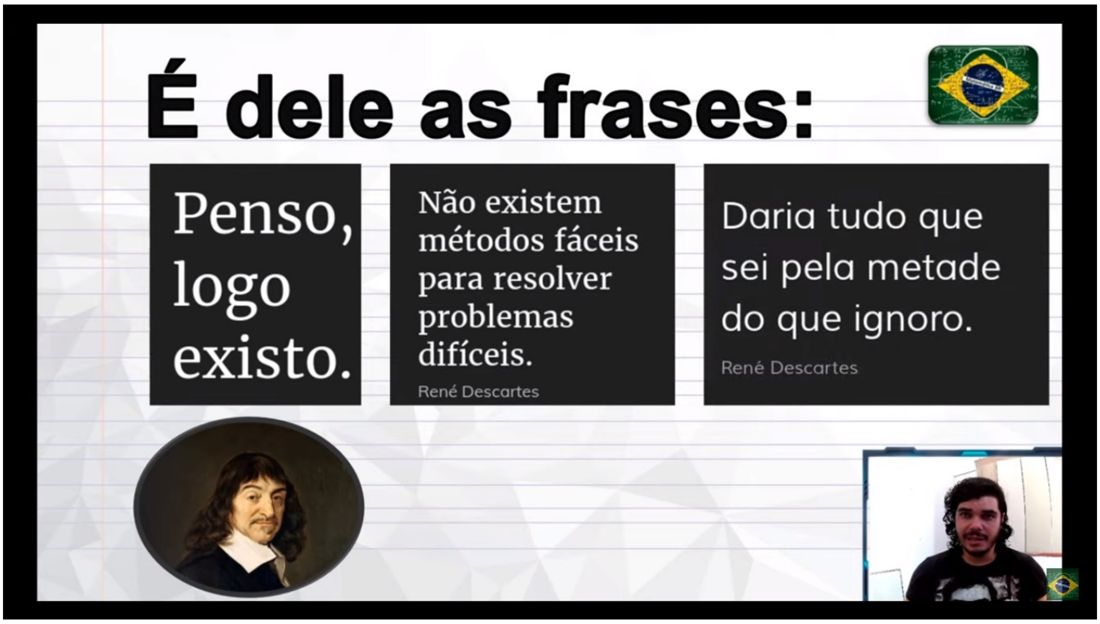
Para iniciarmos nossa proposta, sugerimos que seja reproduzido o vídeo "René Descartes - Sua história, o Plano Cartesiano e a Geometria Analítica"[5] (Figura 59), pois nesse vídeo é tratado um pouco da história de René Descarte, que foi o matemático que sintetizou e desenvolveu o plano cartesiano que usamos hoje, que é a base para a obtenção da habilidade dessa etapa de ensino. Além de falar da história de René no vídeo, ele apresenta como foi pensado por ele inicialmente o plano cartesiano, faz alguns exemplos para encontrar pontos no plano cartesiano, e ainda dá uma introdução à Geometria Analítica, apresentando as contribuições de René.

Após término do vídeo, o professor pode gerar um pequeno debate para ver o que eles lembram de plano cartesiano e também vê-lo em situações do dia-a-dia. Como

[5] Disponível de forma gratuita no Youtube, através do link: <https://youtu.be/M6BEWnLKECE>

no vídeo já mostra o básico deste conteúdo, que é traçar pontos, o docente pode fazer a ponte e já mostrar que também podemos analisar essa distância entre eles, podendo usar como exemplo o GPS, pois o globo terrestre é um grande plano cartesiano. Dando continuidade, o docente vai mostrar que, usando os pontos do plano cartesiano, conseguimos construir vários polígonos e, usando o conceito de distância entre pontos e de ponto médio de um segmento, calcular a Área desses polígonos. As atividades propostas aqui, serviram de base para treino e observação se os discentes conseguiram obter a habilidade dessa etapa do ensino.

Figura 59 – René Descartes - Sua história, o Plano Cartesiano e a Geometria Analítica

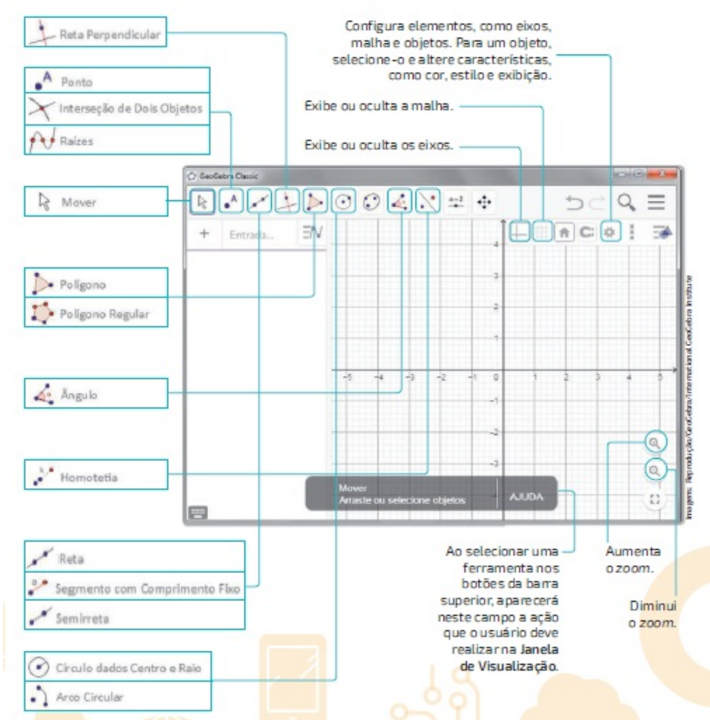


Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=M6BEWnLKECE>

Outro mecanismo que pode ser utilizado para potencializar o ensino do docente e a aprendizagem do discente é o GeoGebra[6]. Com essa ferramenta, o docente pode explorar desde as construções mais simples até as construções mais complexas, podendo, assim, ativar mais uma vez a curiosidade do discente em buscar o novo, e cada vez mais aprender novas coisas para testar no GeoGebra e ver os novos resultados obtidos. A Figura 60 apresenta um resumo das configurações básica do GeoGebra.

[6] GeoGebra é um programa para computadores, ele é gratuito e apresenta várias ferramentas para ajudar no ensino do plano cartesiano, como: Construções geométrica, algébricas, gráficos, tabelas e cálculos. Podemos encontrar ele para *download* no link: <https://www.geogebra.org/>

Figura 60 – GeoGebra

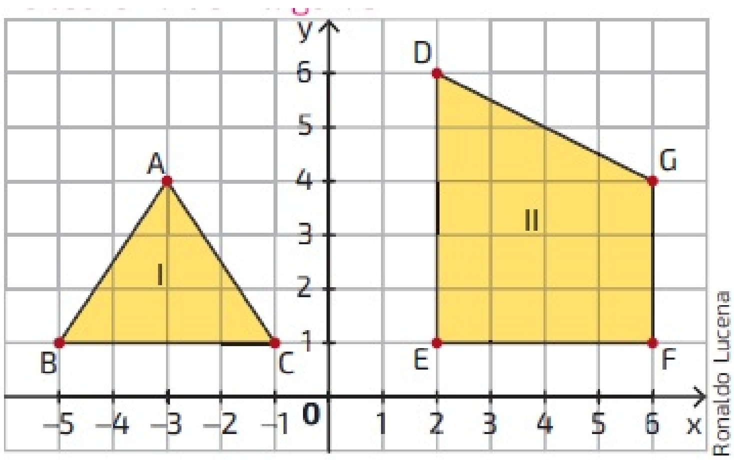


Fonte: (BALESTRI; PATARO, 2019b)

5.8 Exercícios

Questão 4.1 – (BALESTRI; PATARO, 2019b) Calcule a medida da Área e a medida do perímetro de cada uma das figuras representadas no plano cartesiano.

Figura 61 – Questão 4.1



Fonte: (BALESTRI; PATARO, 2019b)

Questão 4.2 – (DANTE, 2019d) Em uma malha quadriculada em centímetros, desenhe um sistema de eixos cartesianos e uma região retangular com medida de perímetro de

20 cm e medida de Área de 24 cm^2.

Ao propormos a Questão 4.1 tão direta, pretendemos deixar o caminho livre para o discente pensar e refletir seus conhecimentos e, assim, analisar se eles conseguem assimilar o caminho mais viável, que é usando a distância entre dois pontos e o ponto médio de um segmento, se ele conseguir realizar essa assimilação, podemos considerar que ele está bem encaminhado no que se diz respeito à habilidade dessa etapa. Ao propormos a Questão 4.2, queremos verificar se eles entenderam o suficiente dos conceitos estudados, para também realizar o processo inverso, isto é, dado a Área, encontrar a figura no plano cartesiano. E, para um melhor aproveitamento de material, o docente pode sugerir o uso do GeoGebra nessa questão, pois, com este *software*, eles terão a oportunidade de fazer vários testes e, em seguida, comparar com seus colegas. Para finalizar, o docente poderá comparar as figuras também, mostrando para o Cálculo de Área de figuras planas no plano cartesiano, não depende da posição da figura, ou seja, ela pode estar em qualquer dos quadrantes do planos, inclusive em mais de um, o que vai influenciar mesmo é a distância entre os pontos (vértice) da figura.

5.9 **Atividade 05:** Habilidades EM13MAT307 e EM13MAT309

5.9.1 Objetivos

- Explorar situações relacionadas à medida de Área;
- Utilizar diferentes métodos para a obtenção de medida de Área de uma região plana;
- Calcular a Área de figuras planas;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de medida de Área da superfície de um sólido geométrico.

5.9.2 Metodologia

Na etapa de ensino conhecida como Ensino Médio, julga-se que os discentes já estão bem mais maduros no contexto matemático, visto que eles já viram toda a base dos conhecimentos matemáticos, assim orientamos começar nossa proposta com a apresentação do vídeo "A História da Matemática Completo"[7] (Figura 62), pois esse vídeo dará para os discente analisarem ou refletirem em vários contextos o que eles viram no Ensino Fundamental. No vídeo é apresentado, entre outros coisas, os motivos pelos

[7] Disponível de forma gratuita no Youtube, através do link: <https://www.youtube.com/watch?v=Ztz6VX0kIPc>

quais sugere-se que o Cálculo de Área começou, que são as cheias do Rio Nilo lá no Egito. Também é apresentado como possivelmente começou o sistema de numeração egípcio, bem como o possível começo das medidas. A partir do vídeo, por ser tão completo dentro de vários pontos da História da Matemática, o professor pode iniciar um debate para ver quais daqueles contextos os alunos ainda se lembram, e reforçar dentro do contexto de Cálculo de Áreas, para analisar o que eles realmente se lembram e o quanto eles estavam atentos no vídeo. Em seguida a esse debate, o professor apresentará o conteúdo de Cálculo de Área e, após resolver alguns exemplos e exercícios, o docente pode aplicar as atividades aqui propostas para analisar se os discentes conseguiram alcançar as habilidades desta etapa.

Figura 62 – A História da Matemática

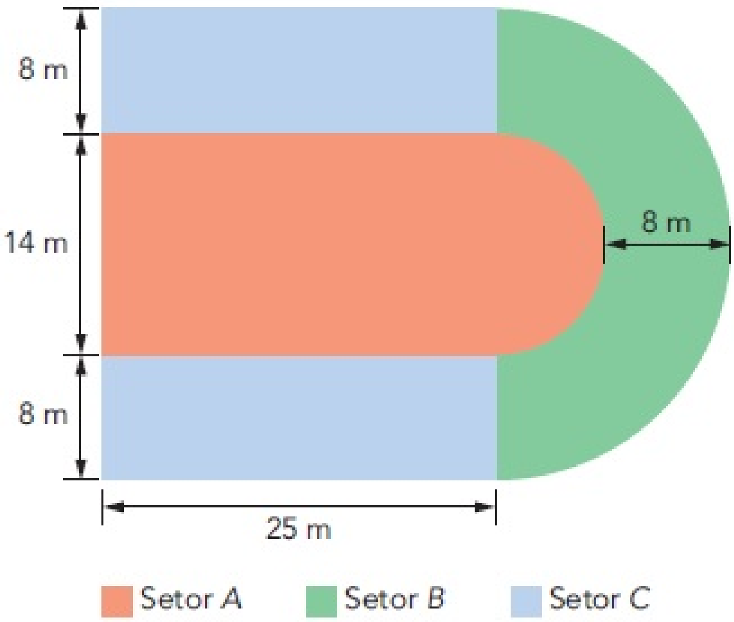
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=Ztz6VX0kIPc>

Para ser mais gratificante para os alunos, o docente pode usar, como forma de apoio, o GeoGebra e o Tangram, para ativar mais a curiosidade dos discentes, bem como dinamizar a aula, tornando-a mais proveitosa para ambos. Para diversificar um pouco a nossa proposta, apresentamos também o uso de um contexto que eles usam muito, mas a maioria não conhece de fato o que é, e nem sabe o real significado, que é o *Pixel*. O *Pixel* está diretamente ligado ao Cálculo de Área, principalmente ligado ao Cálculo de Área de uma região quadrada, com isso pode ativar a curiosidade dos discentes em ver que a Matemática está mais presente deles, do que eles podem imaginar. Muitos dos jovens são apaixonados por registrar seus momentos em imagens, e, aproveitando isso, o docente vai mostrar o porquê a foto da câmera A é melhor do que a da câmera B.

5.10 Exercícios

(FCMSCSP apoud Dante e Viana (2020)) Leia o texto para responder às questões 5.1 e 5.2. O ginásio de esportes de uma cidade irá receber um evento musical. Os organizadores decidiram dividir o espaço destinado ao público em três setores, conforme mostra a figura.

Figura 63 – Contexto para as Questões 5.1 e 5.2



Fonte: FCMSCSP apoud (DANTE; VIANA, 2020)

O setor A é formado por uma região retangular e um semicírculo; o setor B é formado por meia coroa circular e o setor C por dois retângulos congruentes.

Para as questões 5.1 e 5.2, considerar $\pi = 3$.

Questão 5.1 - (FCMSCSP apoud Dante e Viana (2020)) Sabendo-se que serão disponibilizados 5 000 ingressos para esse evento, o número máximo previsto de pessoas, por metro quadrado, em média, está compreendido entre:

a) 3 e 4

b) 5 e 6

c) 4 e 5

d) 2 e 3

e) 6 e 7

Questão 5.2 - (FCMSCSP apoud Dante e Viana (2020)) Considerando que, tanto para o setor B quanto para o setor C, será disponibilizado o mesmo número de ingressos por metro quadrado, e que todos os ingressos serão vendidos, para que a quantia arrecadada com a venda dos ingressos do setor B seja igual à quantia arrecadada com a venda dos ingressos do setor C, é necessário que a razão entre os preços dos ingressos dos setores B e C, nessa ordem, seja aproximadamente igual a:

a) 1,40

b) 1,2

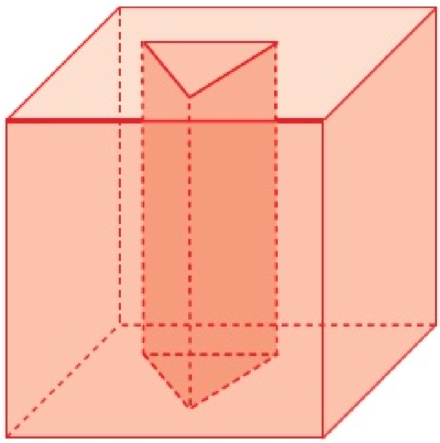
c) 1,51

d) 1,15

e) 1,32

Questão 5.3 - ((DANTE; VIANA, 2020)) A figura abaixo representa uma peça de enfeite. A cavidade, em forma de prisma regular de base triangular, cujo comprimento da aresta mede 5 cm, estende-se da face inferior à face superior da peça. Já o restante da peça tem a forma de um cubo cujo comprimento da aresta mede 20 cm. Determine a medida de área total da peça.

Figura 64 – Questões 5.3



Fonte: (DANTE; VIANA, 2020)

Questão 5.4 - ((DANTE; VIANA, 2020)) *Pixel* Você já ouviu falar em pixel? Sabe o que é isso?

O pixel é o menor elemento de uma imagem digital. Isso significa que fotografias digitais e vídeos, por exemplo, são formados por uma grande quantidade de pixels.

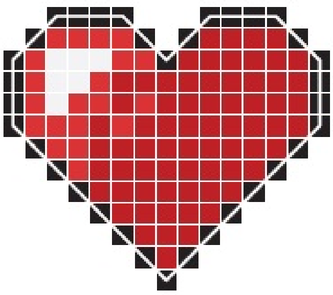
O termo pixel originou-se da combinação das palavras da expressão *picture elemento*, que em português significa “elemento da imagem”.

Quando ampliamos uma imagem digital além da resolução adequada para impressão ou da tela em que ela é exibida, é possível observar vários *pixels*, que parecem pequenas regiões quadradas. Suponha que uma gráfica tenha recebido um desenho de coração ilustrado, como ao lado, com pequenas regiões quadradas que lembram *pixels* e precisa adaptá-lo para que o resultado seja um coração completo, sem as bordas pontiagudas das regiões quadradas. Sendo assim, um profissional da gráfica deve contornar, com um fio contínuo, o desenho do coração, para que fique no formato desejado.

a) Qual estratégia poderíamos utilizar para determinar a medida de área aproximada do modelo final do desenho de coração?

b) Qual é a medida de área aproximada do modelo final do desenho de coração? Considere que cada pequena região quadrada é uma unidade de área.

Figura 65 – Questões 5.4



Fonte:(DANTE; VIANA, 2020)

Ao propormos as Questões 5.1 e 5.2, pretendemos mostrar um caminho para o docente analisar se os discentes conseguiram completar ou não a Habilidade EM13MAT307, pois ela fala em usar diferentes métodos para o Cálculo de Área de uma superfície, seja esse método por reconfiguração, aproximação por cortes, etc., com essa Questão 5.1, já teremos uma boa noção se o discente está se saindo bem ou não com relação à habilidade destacada. Já na Questão 5.3, teremos uma noção se o discente comtemplou ou não à Habilidade EM13MAT309, pois ela trata de analisar se o aluno consegue resolver problemas ligado ao Cálculo de Área totais de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais. E, para finalizar essa proposta, sugerimos a Questão 5.4, para justamente trazer à tona o diálogo sobre o *Pixel*, deixando os alunos bem informados sobre mais uma coisa que eles utilizam com frequência e muitas vezes não sabe o que é.

6 Conclusões

Partindo para a conclusão do nosso trabalho, nos encontramos capazes de falar e apresentar o quão foi e é importante (ao longo da história, bem como nos dias atuais) o Cálculo de Área, pois foi em consequência desses cálculos que os faraós do Antigo Egito conseguiram ser mais justos com seus povos, pois toda vez que tinha inundação no rio Nilo, eles recalculavam a Área dos moradores que produziam próximo ao rio e faziam um ajuste no valor dos impostos.

Pela análise dos Documentos Norteadores da Educação Brasileira, vimos que ainda tem muito caminho a ser percorrido. Sabemos que, com a BNCC, muita coisa tende a melhorar, pois ela amarra e unifica as habilidades por série, deixando assim o docente e o discente amparados no que se refere à um bom ano letivo.

Com relação as análises dos livros didáticos, vimos que podemos encontrar, em nossas escolas, livros adequados para cada etapa de ensino. Também conseguimos perceber que apenas uma ou outra habilidade é que nossos livros deixam a desejar, mas, de uma forma geral, estamos bem amparados.

As propostas de atividades entram em nosso trabalho com um belo destaque, pois não são atividades soltas e nem aleatórias, estão todas amarradas à BNCC, deixando o caminho livre para docentes utilizarem. Por utilizar metodologias diferentes, entendemos que essas propostas serão mais proveitosas, pois trará o aluno cada vez mais para próximo das aulas de matemática.

A partir das propostas aqui apresentadas, sugerimos uma possiblidade de continuação do trabalho apresentado: aplicar as atividades em sala e analisar os resultados, sempre tomando por base a BNCC, tendo em vista que não foi possível para nós aplicarmos esse trabalho em sala, por alguns motivos, dentre os quais se destaca a pandemia da COVID 19.

Referências

AQUARELA MATEMÁTICA. Aquarela Matemática. 2018. Disponível em: <http://aquarelamatematica.com.br/>. Acesso em: 11 mai 2021. Citado 3 vezes nas páginas 48, 49 e 50.

ASSIS, C.; MIRANDA, T.; FEITOSA, S. OBMEP – Banco de Questões 2018. IMPA, 2018. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2018.pdf>. Acesso em: 20 jun 2021. Citado na página 100.

BALESTRI, R.; PATARO, P. M. Matemática Essencial 6°: Ensino Fundamental, Anos finais. São Paulo: Editora Scipione, 2019. Citado na página 93.

BALESTRI, R.; PATARO, P. M. Matemática Essencial 9°: Ensino Fundamental, Anos finais. São Paulo: Editora Scipione, 2019. Citado na página 103.

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. Citado 8 vezes nas páginas 14, 15, 16, 22, 23, 30, 31 e 32.

BRAGAGNOLLO, K. F.; RODRIGUES, M. U.; BRITO, A. de J. Matemática no 8° Ano do Ensino Fundamental na Perspectiva das Habilidades da BNCC e DRC/LRV - Lucas do Rio Verde/MT. 2020. Disponível em: <https://www.lucasdorioverde.mt.gov.br/arquivos/userfiles/educacao/MATERIAL_DIDATICO/LIVRO_8_ANO_EF_Lucas_do_Rio_Verde_final.pdf>. Acesso em: 05 jun 2021. Citado na página 53.

BRASIL. Constituição (1988). Constituição da Repúbica Federativa do Brasil. Brasília,DF: Centro Gráfico, 1988. Citado na página 36.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília,DF: MEC/SEF, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 41, 42, 43 e 44.

BRASIL. ENEM 2010 - Exame Nacional do Ensino Médio. Ministério da Educação, 2010. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 20 mar 2021. Citado na página 42.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília,DF: MEC, SEB, DICEI, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

BRASIL. ENEM 2013 - Exame Nacional do Ensino Médio. Ministério da Educação, 2013. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 20 mar 2021. Citado na página 43.

BRASIL. LEI N 13.005, de 25 de Junho de 2014 - Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Brasília,DF: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2014. Citado na página 39.

BRASIL. Decreto no 9.099, de 18 de Julho de 2017). Brasília,DF: Diário Oficial da União - Seção 1 - 19/7/2017, Página 7, 2017. Citado na página 56.

BRASIL. Lei n^o 9.394, de 20 de dezembro de 1996. LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Constituição da Repúbica Federativa do Brasil. Brasília,DF: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017. Citado na página 37.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. [S.l.]: MEC/SEB, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 11, 44, 45 e 47.

CARVALHO, J. B. P. de; ROQUE, T. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Citado 12 vezes nas páginas 15, 20, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 e 34.

DANTE, L. R. Teláris Matemática, 6°: Ensino Fundamental, Anos finais. São Paulo: Editora Ática, 2019. Citado na página 92.

DANTE, L. R. Teláris Matemática, 7°: Ensino Fundamental, Anos finais. São Paulo: Editora Ática, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.

DANTE, L. R. Teláris Matemática, 8°: Ensino Fundamental, Anos finais. São Paulo: Editora Ática, 2019. Citado na página 100.

DANTE, L. R. Teláris Matemática, 9°: Ensino Fundamental, Anos finais. São Paulo: Editora Ática, 2019. Citado na página 103.

DANTE, L. R.; VIANA, F. Matemática em Contextos: Geometria Plana e Espacial. 1^a São Paulo: Editora Ática, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 106, 107 e 108.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 5^a Ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 16, 22, 23, 24, 27, 29, 30, 32 e 33.

LIMA, E. L. et al. Temas e Problemas Elementares. 4^a Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 99.

MATEMáTICA NA ESCOLA. Matemática na Escola. 2018. Disponível em: <https://matematicanaescola.com/>. Acesso em: 11 mai 2021. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 53.

NEWS, B. Por que o mundo levou 2 mil anos para descobrir o avanço de Arquimedes no estudo da Matemática. 2017. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-42494730>. Acesso em: 01 fev 2021. Citado na página 26.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas e Privadas. IMPA, 2017. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 20 jun 2021. Citado na página 96.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas e Privadas. IMPA, 2019. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 20 jun 2021. Citado na página 96.

OLIVEIRA, R. A. de; RODRIGUES, M. U. Matemática no 7° Ano do Ensino Fundamental na Perspectiva das Habilidades da BNCC e DRC/LRV - Lucas do Rio Verde/MT. 2020. Disponível em: <https://www.lucasdorioverde.mt.gov.br/arquivos/userfiles/educacao/MATERIAL_DIDATICO/LIVRO_7_ANO_EF_Lucas_do_Rio_Verde.pdf>. Acesso em: 05 jun 2021. Citado na página 53.

SANTOS, M. A. S.; SILVA, A. A. da. As Cônicas de Apolônio. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, p. 1 - 8, São Paulo: Artigo. São Paulo, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5062_3970_ID.pdf>. Acesso em: 15 fev 2021. Citado na página 33.

SANTOS, M. C. dos. Um exemplo de Situação-Problema: O Problema do Bilhar. RPM 50: Artigo. Rio de Janeiro, Revista do Professor de Matemática, 2002. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/50/7.htm>. Acesso em: 10 mar 2021. Citado na página 42.

SANTOS, R.; VEIGA, A. Papiro de Rhind (2002). Site: Olga Pombo, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 16, 18, 19, 20 e 21.

SILVA, A. P. da. Jogos de Loteria: Uma aplicação de probabilidade. Rio de Janeiro: PROFMAT/UNIRIO, 2018. Citado na página 57.