



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Wirander Pereira Rosa de Oliveira

Polígonos Equidecomponíveis: Um pouco de História, Resultados Fundamentais e Prática Escolar

Campina Grande - PB

Julho/2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



Wirander Pereira Rosa de Oliveira

Polígonos Equidecomponíveis: Um pouco de História, Resultados Fundamentais e Prática Escolar

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB

Julho/2023

O48p

Oliveira, Wirander Pereira Rosa de.

Polígonos equidecomponíveis: um pouco de História, resultados fundamentais e prática escolar / Wirander Pereira Rosa de Oliveira. – Campina Grande, 2023.

155 f. il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima."

Referências.

1. Polígonos Equidecomponíveis. 2. Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. 3. Área de Polígonos. 4. Sequência Didática. I. Melo, Clóvis Alberto Vieira de. II. Título.

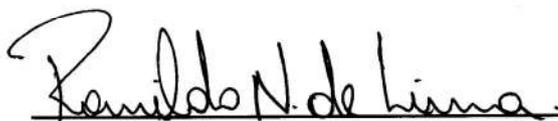
CDU 519.145.4(043)

Wirander Pereira Rosa de Oliveira

Polígonos Equidecomponíveis: Um pouco de História, Resultados Fundamentais e Prática Escolar

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 28 de julho de 2023:



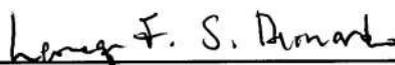
Dr. Romildo Nascimento de Lima

Orientador



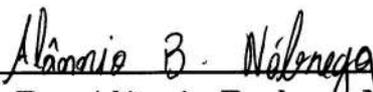
Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

Membro externo



**Dr. Leomaques Francisco Silva
Bernardo**

Membro interno



Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Membro interno

Campina Grande - PB
Julho/2023

Dedico esse trabalho a Deus e a maior dádiva que me concedeu, minha família: Maria de Lourdes (esposa), Lwdmyla (filha), Wirander (filho), Samyla (filha), Vera (mãe) e José (pai)...

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradecer a Deus, por ter concedido a dádiva da vida e que durante toda a jornada sempre me manteve forte nos momentos mais difíceis.

A minha amada esposa, Maria de Lourdes e aos meus amados filhos, Lwdmyla, Wirander Filho e Samyla por todo apoio emocional, compreensão, paciência e companheirismo durante toda jornada, algo imprescindível para tornar esse sonho algo real.

Aos amigos José Lopes, Carlos Gonzaga e em especial Bruno Lopes que sempre me acolheu em sua residência e me tratou como um membro da família, as nossas discussões durante os estudos que ocorriam sempre aos sábados, foram essenciais para meu crescimento intelectual e pessoal.

Aos colegas do curso, pela união e ajuda mútua em nosso grupo de estudos, onde pudemos aprender e ensinar uns com os outros, o que foi crucial para essa conquista.

Aos professores do programa, que contribuíram imensamente com momentos de muito aprendizado, em especial ao meu orientador o professor Dr. Romildo Nascimento, pela compreensão, paciência e confiança em mim depositada, além das contribuições prestadas na elaboração desse trabalho.

À EREJEM-Escola de Referência em Ensino Médio José Emílio, pela recepção, parceria e contribuição dada para a elaboração deste trabalho.

Aos alunos que participaram deste trabalho. Sem eles, nada disso teria sentido.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste sonho.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

O principal objetivo desse trabalho é propor uma abordagem diferenciada envolvendo área de polígonos nos respaldando na equidecomposição de polígonos. Apresentaremos a demonstração do Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, que fundamenta a teoria dos polígonos equidecomponíveis. Também demonstraremos as fórmulas da área dos principais polígonos (retângulo, quadrado, triângulo, paralelogramo, trapézio e losango) por meio de equidecomposição. Analisaremos alguns livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio, cujo objetivo é identificarmos o quanto os autores utilizam a equidecomposição de polígonos ao abordarem cálculo de área. Além disso, apresentaremos uma sequência didática embasada na equidecomposição de polígonos, cuja finalidade é instigar os alunos a deduzirem e justificarem as fórmulas da área dos principais polígonos. Por fim, descreveremos os resultados obtidos da aplicação dessa sequência didática em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Polígonos equidecomponíveis. Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Área de polígonos. Sequência Didática.

Abstract

The main objective of this work is to propose a different approach involving the area of polygons based on the equidecomposition of polygons. We will present the proof of the Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem, which is the basis of the theory of equidecomposable polygons. We will also demonstrate the formulas for the area of the main polygons (rectangle, square, triangle, parallelogram, trapezoid, and rhombus) by means of equidecomposition. We will analyze some first year high school textbooks in order to identify how much the authors use the equidecomposition of polygons when they talk about area calculation. In addition, we will present a didactic sequence based on the equidecomposition of polygons, whose purpose is to encourage students to deduce and justify the formulas for the area of major polygons. Finally, we will describe the results obtained from the application of this didactic sequence in a first year high school class.

Keywords: Equidecomposable polygons. Wallace-Bolyai-Gerwien theorem. Area of polygons. Didactic Sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$	17
Figura 2 – Polígono simples $B_1B_2B_3B_4B_5$	18
Figura 3 – Polígono não simples $A_1A_2A_3A_4A_5$	18
Figura 4 – Polígono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5$	19
Figura 5 – Polígono côncavo $B_1B_2B_3B_4B_5$	19
Figura 6 – Triângulos congruentes ABC e DEF ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$).	20
Figura 7 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LAL).	22
Figura 8 – Triângulo ABC (Isósceles).	22
Figura 9 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (ALA).	23
Figura 10 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LLL).	24
Figura 11 – $\triangle ABC \equiv \triangle D'BC$, pelo caso (LLL).	25
Figura 12 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LLL).	25
Figura 13 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LAA_o).	26
Figura 14 – Triângulos ABC e $A'BC$ não congruentes.	27
Figura 15 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (CH).	27
Figura 16 – Triângulos semelhantes ABC e EFG	28
Figura 17 – $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, pelo caso (AA).	29
Figura 18 – $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, pelo caso (LAL).	30
Figura 19 – Triângulos $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, pelo caso (LLL).	31
Figura 20 – Uma possível decomposição do polígono $ABCD$	32
Figura 21 – Polígono convexo $ABCDEFGH$, com duas formas distintas de triangulação.	33
Figura 22 – Polígono côncavo $ABCDEFG$, com duas formas distintas de triangulação.	33
Figura 23 – Área de um retângulo cujas dimensões medem $5cm$ e $3cm$	35
Figura 24 – Polígono equivalentes A e B ($A \approx B$).	36
Figura 25 – Polígono $F \equiv F'$, por meio de uma translação paralela.	37
Figura 26 – Polígono $F \equiv F'$, por meio de uma simetria central	38
Figura 27 – Rotação	38
Figura 28 – Transformação da figura F em F' por meio de um movimento arbitrário	39
Figura 29 – Tablete YBC 7290.	41
Figura 30 – Papiro de Moscou.	41
Figura 31 – Papiro de Rhind (Ahmes)	42
Figura 32 – Problema de número 51.	42

Figura 33 – Problema de número 52.	43
Figura 34 – Paralelogramo $ABCD$	44
Figura 35 – Polígonos P e P' (equidecomponíveis)	48
Figura 36 – Polígonos equidecomponíveis P, P' e P''	49
Figura 37 – Triângulo retângulo ABC e o retângulo $FGHJ$	50
Figura 38 – Retângulo $BCJD$ sobreposto ao triângulo retângulo ABC	51
Figura 39 – Triângulo acutângulo ABC e o retângulo $GJLK$	52
Figura 40 – Retângulo $BCLK$ sobreposto ao triângulo acutângulo ABC	53
Figura 41 – Triângulo obtusângulo ABC e o retângulo $GHIL$	54
Figura 42 – Triângulo obtusângulo ABC	54
Figura 43 – Sobreposição do retângulo $GHAB$ no triângulo obtusângulo ABC	55
Figura 44 – Paralelogramo $ABCD$ e retângulo $FGHI$	56
Figura 45 – Paralelogramo $ABCD$ de altura h	57
Figura 46 – Paralelogramo $ABCD$ e retângulo $JLMN$	58
Figura 47 – Paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$	59
Figura 48 – Paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$ com $\overline{DE} \cap \overline{BC} = \emptyset$	59
Figura 49 – Paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$ com $B = E$	60
Figura 50 – Paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ com mesma área.	61
Figura 51 – Polígono A_1, A_2, \dots, A_7 equidecomponível ao retângulo de base b	62
Figura 52 – Retângulo $R=ABCD$	64
Figura 53 – Retângulo $R=ABCD$ equidecomponível ao paralelogramo $FGIJ$	65
Figura 54 – Retângulos $R=ABCD$ TR-equidecomponível a $R''=LMNO$	65
Figura 55 – Construção do ponto $M = \frac{a+b}{2}$, ponto médio de \overline{AC}	67
Figura 56 – $\overline{BX} = \sqrt{a \cdot b}$, lado do quadrado desejado.	68
Figura 57 – Retângulo $ABCD$ sobreposto ao quadrado $AEJI$	68
Figura 58 – Retângulo $ABCD$ equidecomponível com o quadrado $AEJI$	69
Figura 59 – Quadrados $ABCD$ e $DEFG$	70
Figura 60 – Construção do quadrado $AHIG$	71
Figura 61 – polígono $ABCGFE$ equidecomponível ao quadrado $AHIG$	72
Figura 62 – Triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c e o quadrado cujo lado mede $b + c$	72
Figura 63 – Decomposição do quadrado de lado $b + c$ de dois modos distintos	73
Figura 64 – Quadrado $ABCD$	74
Figura 65 – Demonstração de Perigal	75
Figura 66 – Formando o quadrado $BCNM$ por equidecomposição	77
Figura 67 – Decomposição do quadrado $BCHI$ nos retângulos $BJLI$ e $JCHL$ de áreas c^2 e b^2 , respectivamente.	78
Figura 68 – (a^2 equidecomponível a $b^2 + c^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$).	79

Figura 69 – Quadrado $ABCD$ decomposto em $4^2 = 16$ quadrados unitários.	80
Figura 70 – Quadrado $ABCD$ de lado medindo $\frac{1}{2}$ e a unidade de área.	81
Figura 71 – Quadrado $ABCD$ de lado medindo $\frac{4}{3}$ e a unidade de área.	82
Figura 72 – Retângulo $ABCD$ decomposto em $7 \cdot 2 = 14$ unidades de área.	83
Figura 73 – Retângulo $ABCD$ de área S e dimensões b e a	83
Figura 74 – Quadrado de lado $b + a$	84
Figura 75 – Triângulo ABC de base b e altura a	85
Figura 76 – Triângulo ABC equidecomponível ao retângulo $BCFF'$	85
Figura 77 – Paralelogramo $ABCD$ de base b e altura a	86
Figura 78 – Paralelogramo $ABCD$ equidecomponível ao retângulo $ABHH'$	86
Figura 79 – Trapézio $ABCD$ decomposto nos triângulos ABD e BCD	87
Figura 80 – Trapézio $ABCD$ de base média \overline{MN}	87
Figura 81 – Trapézio $ABCD$ equidecomponível ao retângulo $XYZT$	88
Figura 82 – Losango $ABCD$ de diagonais $\overline{AC} = d'$ e $\overline{BD} = d$	89
Figura 83 – Losango $ABCD$ equidecomponível ao retângulo $ACGF$	89
Figura 84 – Área do retângulo.	92
Figura 85 – Área do retângulo.	93
Figura 86 – Área do retângulo.	94
Figura 87 – Área do quadrado.	95
Figura 88 – Área do quadrado.	95
Figura 89 – Área do quadrado.	95
Figura 90 – Área do paralelogramo.	96
Figura 91 – Área do paralelogramo.	97
Figura 92 – Área do paralelogramo	97
Figura 93 – Área do triângulo.	98
Figura 94 – Área do triângulo.	98
Figura 95 – Área do triângulo.	99
Figura 96 – Área do trapézio.	100
Figura 97 – Área do trapézio.	100
Figura 98 – Área do trapézio.	101
Figura 99 – Área do losango.	102
Figura 100 – Área do losango.	102
Figura 101 – Área do losango.	103
Figura 102 – Área do losango.	104
Figura 103 – Área do losango.	104
Figura 104 – Área do losango.	105
Figura 105 – Área do losango.	106
Figura 106 – Cronograma de aplicação da sequência didática.	117

Figura 107 – Questionário Prévio.	118
Figura 108 – Questionário prévio (Retângulo).	119
Figura 109 – Questionário prévio (Retângulo).	119
Figura 110 – Questionário prévio (Quadrado).	120
Figura 111 – Questionário prévio (Triângulo).	121
Figura 112 – Questionário prévio (Triângulo).	121
Figura 113 – Questionário prévio (Paralelogramo).	122
Figura 114 – Questionário prévio (Trapézio).	122
Figura 115 – Questionário prévio (Losango).	123
Figura 116 – Questionário prévio, segundo quesito.	123
Figura 117 – Construção do retângulo e do quadrado.	126
Figura 118 – Decomposição do retângulo e do quadrado em quadradinhos que representam uma unidade de área.	127
Figura 119 – Relação entre as áreas do retângulo e do quadrado com suas dimensões.	128
Figura 120 – Fórmulas do retângulo, do quadrado e suas justificativas.	128
Figura 121 – Decomposição do triângulo retângulo e composição de um retângulo equidecomponível.	132
Figura 122 – Decomposição do triângulo acutângulo e composição de um retân- gulo equidecomponível.	133
Figura 123 – Decomposição do triângulo obtusângulo e composição de um retân- gulo equidecomponível.	134
Figura 124 – Justificativa para a fórmula que determina a área do triângulo. . . .	135
Figura 125 – Decomposição do paralelogramo e composição de um retângulo equi- decomponível.	136
Figura 126 – Justificativa para a fórmula que determina a área do paralelogramo.	137
Figura 127 – Decomposição do trapézio e composição de um retângulo equide- componível.	140
Figura 128 – Justificativa para a fórmula que determina a área do trapézio. . . .	141
Figura 129 – Decomposição do losango e composição de um retângulo equidecom- ponível.	142
Figura 130 – Justificativa para a fórmula que determina a área do losango. . . .	143
Figura 131 – Momento de Interação	150
Figura 132 – Momento de Interação	151
Figura 133 – Código alfanumérico para o Ensino Fundamental	153
Figura 134 – Código alfanumérico para o Ensino Médio	154

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	15
1.1.1	Objetivo Geral	15
1.1.2	Objetivos Específicos	15
1.2	Organização	16
2	PRÉ-REQUISITOS AO ESTUDO DOS POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS	17
2.1	Polígono convexo e polígono côncavo	19
2.2	Congruência e semelhança de triângulos	20
2.3	Decomposição de polígonos	32
2.4	Triangulação de polígonos	32
2.5	Área	34
2.6	Polígonos equivalentes ou equidecomponíveis	35
2.7	Isometria	36
2.7.1	Translação paralela	36
2.7.2	Simetria Central	37
2.7.3	Rotação	38
3	CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA	40
3.1	Surgimento do conceito de área: Babilônia, Egito e Grécia	40
3.2	Farkas Wolfgang Bolyai, Paul Gerwien, Willam Wallace, H. Hadwiger e P. Glur e a origem dos polígonos equidecomponíveis.	45
4	TEORIA DOS POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS	47
4.1	A equidecomposição de polígonos em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras	66
4.2	Área de Polígonos por Equidecomposição	80
4.2.1	ÁREA DO QUADRADO	80
4.2.2	ÁREA DO RETÂNGULO	82
4.2.3	ÁREA DO TRIÂNGULO	84
4.2.4	ÁREA DO PARALELOGRAMO	85
4.2.5	ÁREA DO TRAPÉZIO	86
4.2.6	ÁREA DO LOSANGO	88

5	ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO	91
5.1	ÁREA	91
5.1.1	ÁREA DO RETÂNGULO E DO QUADRADO	91
5.1.2	ÁREA DO PARALELOGRAMO	96
5.1.3	ÁREA DO TRIÂNGULO	97
5.1.4	ÁREA DO TRAPÉZIO	99
5.1.5	ÁREA DO LOSANGO	101
6	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	108
6.1	Descrição da sequência didática e dos objetivos	108
6.2	Descrição e análise de dados	117
6.2.1	Questionário Prévio	118
6.2.2	1º Exercício	125
6.2.3	2º e 3º Exercícios	129
6.2.4	4º e 5º Exercícios	138
6.2.5	Comentários finais do Capítulo	143
7	CONCLUSÕES	145
	REFERÊNCIAS	147
	APÊNDICES	149
	APÊNDICE A – MOMENTOS DA REALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	150
	ANEXOS	152
	ANEXO A – DESCRIÇÃO DOS CÓDIGOS ALFANUMÉRICOS DA BNCC	153

1 Introdução

A necessidade de inserção da Geometria no Ensino Básico é algo indiscutível, isso se deve as suas várias aplicações nas ciências e no nosso cotidiano, além de favorecer na compreensão do mundo, desenvolver o raciocínio lógico e proporcionar um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento, especificamente, segundo a BNCC: ¹

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamento no espaço, formas entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. (BRASIL, 2018, p.271)

Os alunos ao concluírem o Ensino Fundamental devem adquirir as habilidades de “... calcular a área de figuras planas pela decomposição e/ou composição de figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas”. (PCNS, 1998, p.74) ²

De acordo com a BNCC, já no Ensino Fundamental os alunos devem desenvolver algumas habilidades em Geometria, conforme é descrito na Habilidade: (EF07MA31) ³ Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros; e, a partir dessa vai fazendo a interligação entre as próximas etapas até se desenvolver por completo no Ensino Médio com a Habilidade: (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros) com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Sendo a BNCC e os PCNS dois dos principais documentos oficiais que regem a educação, podemos concluir o quanto é importante que essa unidade temática seja bem vivenciada durante todo o Ensino Básico.

No entanto, nas discussões envolvendo cálculo de áreas de polígonos nas salas de aula do Ensino Médio, as quais já tive a oportunidade de ministrar é notável as dificuldades que os alunos apresentam, em alguns casos não lembram das fórmulas, em outros

¹ BNCC - Base Nacional Comum Curricular, trata-se de um conjunto de orientações elaboradas pelo Ministério da Educação (MEC) para nortear a educação geral básica nas escolas brasileiras.

² PCNS - Parâmetros Curriculares Nacionais, constituem um referencial de qualidade para a educação Básica em todo o País. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual.

³ Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja descrição está representada no Anexo A.

casos utilizam as fórmulas de modo inadequado e quando questionados sobre uma justificativa para alguma delas normalmente não obtêm respostas, o que nos faz concluir que mesmo se tratando de um tema já vivenciado durante o Ensino Fundamental, eles ainda chegam ao Ensino Médio sem compreenderem esses conceitos. Diante dessa realidade, decidimos que a dissertação seria relacionada com área de polígonos. Para obtermos os resultados desejados, resolvemos trabalhar com Polígonos Equidecomponíveis (são polígonos que se, e somente se, têm mesma área). Abordaremos este tema com mais ênfase no Capítulo 4, ao realizarmos pesquisas sobre este tema percebemos que seria possível realizar um trabalho interessante envolvendo os conceitos de cálculo de área de polígonos, apesar de acreditarmos que a decomposição e composição de polígonos seja algo já utilizado pelos professores em sala de aula, no entanto, a maioria desconhece que essa teoria é fundamentada no Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. A partir daí, elaboramos uma sequência didática embasada nesse teorema e pensando de que maneira poderíamos transformar a sala de aula em um ambiente onde os alunos seriam provocados a buscarem soluções, testarem suas ideias, fazerem deduções, desenvolverem raciocínios e apresentarem justificativas exitosas para as fórmulas que determinam as áreas dos principais polígonos (retângulo, quadrado, triângulo, paralelogramos, trapézio e losango), seja por escrito ou oral, com isso, esperamos contribuir com o processo de ensino-aprendizagem no ensino de Geometria.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

- Compreender a definição e resultados de polígonos equidecomponíveis, estabelecendo relações que auxiliam no cálculo de área.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Levar os alunos e/ou professores a fixarem o conceito de polígonos equivalentes, por meio da equidecomposição;
- Conduzir os alunos a compreenderem os fundamentos lógicos das fórmulas que nos possibilitam determinar o cálculo da área de polígonos;
- Calcular área de figuras planas pela decomposição e/ou composição de polígonos de áreas conhecidas.

1.2 Organização

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: Capítulo 1 (é a introdução geral do trabalho). No Capítulo 2, apresentamos os pré-requisitos ao estudo dos polígonos equidecomponíveis, como: Polígono convexo e polígono côncavo, Congruência e Semelhança de triângulos, Decomposição de polígonos, Triangulação de polígonos, Áreas e Isometria, que foram de extrema importância nas demonstrações dos resultados do Capítulo 4.

No Capítulo 3, apresentamos um pouco da história do surgimento do conceito de área, considerando os conhecimentos dos povos antigos da Babilônia, do Egito e da Grécia.

No Capítulo 4, tratamos exclusivamente sobre a Teoria dos Polígonos Equidecomponíveis, enunciamos alguns resultados que servem de base para a demonstração do Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien: Dois polígonos com a mesma área são equidecomponíveis. Relatamos a participação dos matemáticos suíços H. Hadwiger e P. Glur, que após mais de um século refinaram o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Apresentamos a equidecomposição de polígonos em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, além disso, utilizamos a equidecomposição nas demonstrações das fórmulas que determinam a área dos principais polígonos.

No Capítulo 5, analisamos alguns livros didáticos de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio e relatamos como os autores utilizaram a equidecomposição de polígonos, para auxiliar na dedução das fórmulas que determinam as áreas dos principais polígonos, além disso, como exploram essa teoria nos exercícios propostos.

No Capítulo 6, apresentamos e vivenciamos uma sequência didática envolvendo a equidecomposição de polígonos, a qual teve como objetivo instigar os alunos a deduzirem e justificarem as fórmulas que determinam a área dos principais polígonos. Descrevemos a análise, realizada durante todo desenvolvimento da sequência didática (questionário prévio e exercícios) e apresentamos os comentários finais do capítulo.

E por fim, no Capítulo 7 apresentamos nossas considerações finais referentes ao nosso trabalho.

2 Pré-Requisitos ao estudo dos Polígonos Equidecomponíveis

Apresentaremos neste capítulo, um embasamento teórico o qual será de suma importância para uma melhor compreensão do foco do nosso estudo, que são os **polígonos equidecomponíveis**. A teoria apresentada é baseada principalmente em (DOLCE; POMPEO, 1985), (NETO; CAMINHA, 2013), (REZENDE; QUEIROZ, 2008), (BARBOSA, 2012), (BOLSTIANSKI, 1996) e (LIMA et al., 2007).

Inciaremos essa sessão, apresentando a definição formal de Polígono:

Definição 2.1. (*Polígono*)

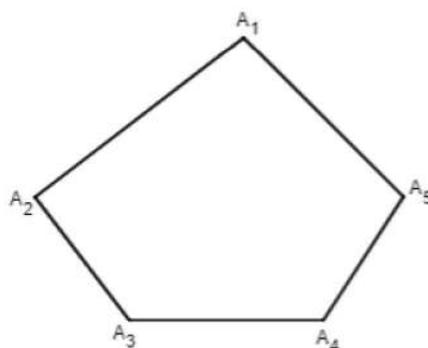
Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n \geq 3$, todos distintos entre si, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1} , A_n e A_1 , assim como A_n , A_1 e A_2 , chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Indicação:

Polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$.

Vejam um exemplo, exibido na Figura 1.

Figura 1 – Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

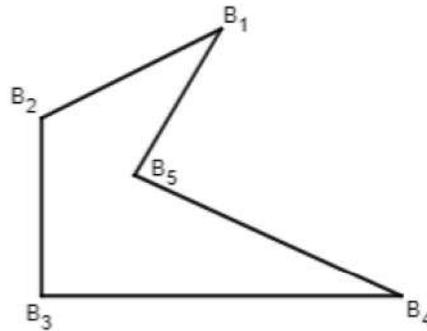
Agora, apresentaremos os conceitos referentes a polígono convexo e polígono côncavo, mas antes, esclareçamos que a palavra polígono significará sempre polígono simples, isto é, uma linha poligonal fechada que pode ser inteiramente percorrida sem que se passe mais de uma vez por qualquer de seus pontos. Algumas vezes, polígono significará também a porção do plano limitada por essa linha poligonal.

Definição 2.2. (Polígono simples)

Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia.

A Figura 2, ilustra um exemplo de polígono simples.

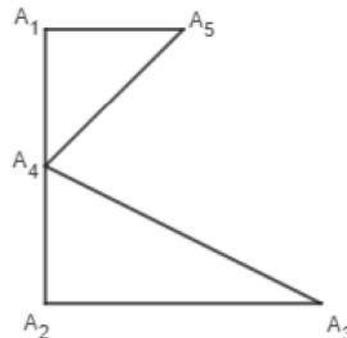
Figura 2 – Polígono simples $B_1B_2B_3B_4B_5$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Caso um polígono não satisfaça essa condição, então teremos um polígono não simples, conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Polígono não simples $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Fonte: O autor via Software Geogebra

Perceba que, se contornarmos o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$, passaremos mais de uma vez sobre o vértice A_4 . Além disso, se considerarmos os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_3A_4}$, a interseção entre eles é não vazia, ou seja, $\overline{A_1A_2} \cap \overline{A_3A_4} = \{A_4\}$, o que contraria a definição.

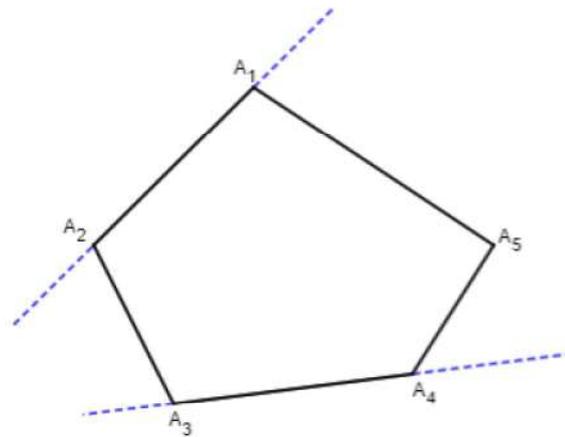
2.1 Polígono convexo e polígono côncavo

Definição 2.3. (*Polígono convexo*)

Um polígono simples é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer, deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

A Figura 4, ilustra um exemplo de polígono convexo.

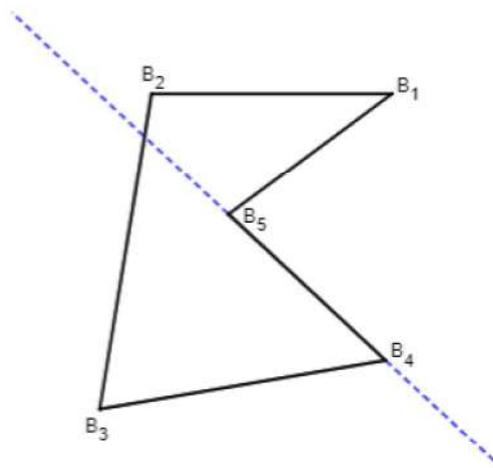
Figura 4 – Polígono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Se um polígono não é convexo, diremos que ele é côncavo, conforme ilustra a Figura 5.

Figura 5 – Polígono côncavo $B_1B_2B_3B_4B_5$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Considerando a reta determinada pelos vértices B_4 e B_5 , perceba que os demais vértices, isto é, B_1 , B_2 e B_3 pertencem a semiplanos distintos.

2.2 Congruência e semelhança de triângulos

Nesta seção, serão apresentadas definições de congruência e semelhança de triângulos, além das demonstrações dos casos que nos possibilitam identificar quando dois ou mais triângulos são congruentes ou semelhantes. Mas antes, vejamos o conceito de congruência o qual será muito mencionado nesse trabalho, o símbolo \equiv será usado para representá-la.

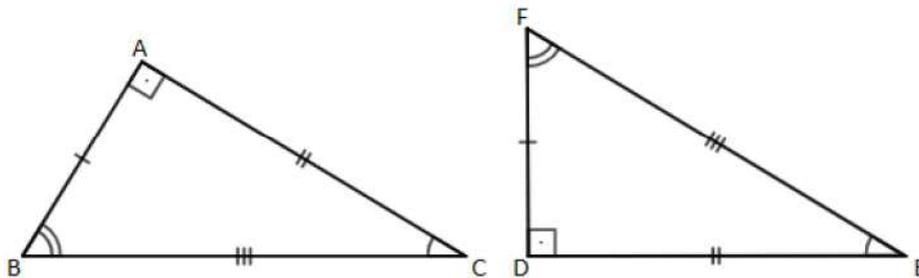
Duas figuras planas serão definidas como congruentes, se uma delas puder ser movimentada, sem que haja modificação em sua forma, ou em suas medidas, até que venha a coincidir com a outra em todos os seus elementos.

Segundo Neto (NETO, 2013, p.23):

Dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo até fazê-lo coincidir com o outro.

Definição 2.4 (Congruência de Triângulo). *Dois triângulos são congruentes se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definida a correspondência $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow F$ e $C \longleftrightarrow E$ entre os triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{F}$, $\hat{C} \equiv \hat{E}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{FE}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DE}$, dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotaremos por $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, conforme ilustra a Figura 6.*

Figura 6 – Triângulos congruentes ABC e DEF ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Nos Elementos de Euclides, ele não define congruência de triângulos, mas no Livro I, menciona proposições referentes a alguns casos de congruência de triângulos. Segundo

Euclides: ¹

“Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, [cada um a cada um,] e o ângulo restante ao ângulo restante.” (BICUDO, 2009, p.117)

Note que, Euclides menciona dois casos de congruência: lado, ângulo, ângulo oposto (LAA_o) e ângulo, lado, ângulo (ALA). Abordaremos esses dois casos com mais ênfase, mais adiante.

Em decorrência da congruência entre triângulos segue as três propriedades a seguir:

1. **Reflexiva:** Essa propriedade afirma que qualquer triângulo é congruente a si próprio, isto é, $\triangle ABC \equiv \triangle CBA$.
2. **Simétrica:** Se temos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, então $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$. Isso porque, se pudermos movimentar $\triangle ABC$, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com $\triangle DEF$, então certamente poderemos fazer o movimento contrário com $\triangle DEF$, até sobrepô-lo ao $\triangle ABC$.
3. **Transitiva:** Se $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ e $\triangle DEF \equiv \triangle GHI$, então $\triangle ABC \equiv \triangle GHI$. Pois, podemos movimentar $\triangle ABC$ de maneira a coincidir com o $\triangle GHI$ por partes, primeiro movimentamos $\triangle ABC$, até que ele coincida com $\triangle DEF$ em seguida, continuamos a movimentá-lo até que coincida com $\triangle GHI$.

Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes é o que chamamos de casos de congruência de triângulos. Agora, passaremos a explorar esses casos. Consideraremos o caso lado, ângulo, lado (LAL) como um axioma ² e os demais casos: ângulo, lado, ângulo (ALA), lado, lado, lado (LLL), lado, ângulo, ângulo oposto (LAA_o) e cateto hipotenusa (CH), como teoremas. ³

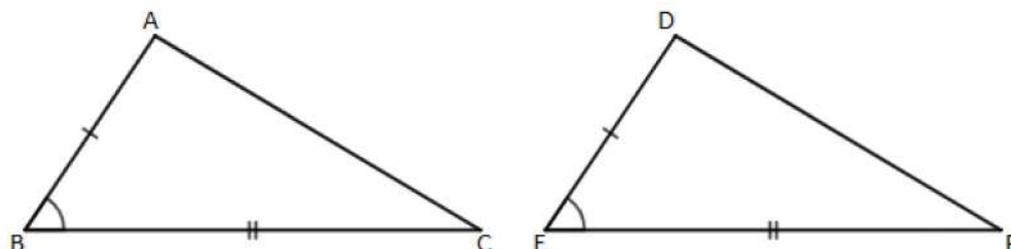
Axioma. (Caso - LAL)

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, conforme ilustra a Figura 7.

¹ Euclides foi um matemático de Alexandria, no Egito. É chamado o pai da Geometria. Escreveu o livro “Elementos de Euclides” sua principal obra. Além disso, Euclides também escreveu sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor. Foi professor de Matemática na Escola Real de Alexandria, no Egito.

² Axioma é uma sentença matemática, que não é uma definição, e é aceita sem precisar justificativa. (FILHO, 2012, p.164)

³ Teorema é uma sentença matemática válida, cuja validade é garantida por uma demonstração matemática. (FILHO, 2012, p.114)

Figura 7 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LAL).

Fonte: O autor via Software Geogebra.

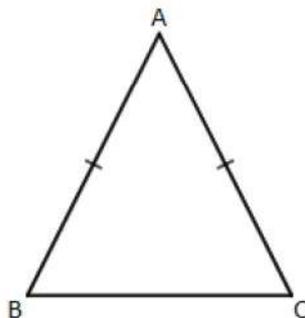
Este axioma é o primeiro caso de congruência de triângulos. Os demais casos serão apresentados mais adiante, pois, antes de prosseguirmos nessa discussão, demonstraremos um teorema muito importante envolvendo os triângulos isósceles,⁴ visto que, será relevante em diversos momentos do texto.

Mostraremos utilizando o caso de congruência de triângulos (LAL) que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, é o chamado **Teorema do Triângulo Isósceles**.

Teorema 2.1. *Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles com base \overline{BC} , conforme ilustra a Figura 8. Mostraremos que $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Para tal finalidade, considere a correspondência que leva o triângulo ABC nele mesmo, de modo que $A \longleftrightarrow A$, $B \longleftrightarrow C$, e $C \longleftrightarrow B$. Por hipótese, obtemos $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ e, como $\hat{A} \equiv \hat{A}$, segue-se pelo caso de congruência de triângulos (LAL) que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$. Consequentemente, $\hat{B} \equiv \hat{C}$. ■

Figura 8 – Triângulo ABC (Isósceles).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

⁴ Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais, e o terceiro lado é chamado de base. (BARBOSA, 2012, p.58)

A recíproca desse teorema, ou seja, “todo triângulo que tem dois ângulos congruentes é um triângulo isósceles” é verdadeira, porém, não faremos essa demonstração nesse trabalho, o leitor interessado, vide, por exemplo, (BARBOSA, 2012, p.59).

Daí, podemos enunciar o seguinte **Corolário**⁵:

Corolário 2.2. *Todo triângulo equilátero possui três ângulos com a mesma medida.*

Agora, retomaremos a discussão sobre os demais casos de congruência de triângulos, vejamos o segundo caso.

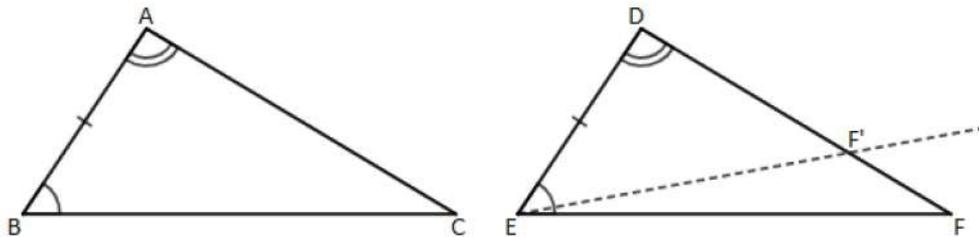
Teorema 2.3 (Caso - ALA). *Considere dois triângulos ABC e DEF , se $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, então, os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Tome os triângulos ABC e DEF satisfazendo as hipóteses do teorema e considere o ponto F' na semi-reta \overrightarrow{DF} de modo que $\overline{DF'} \equiv \overline{AC}$, conforme ilustra a Figura 9. Agora, compare os triângulos ABC e DEF' , com isso, obtemos $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF'}$, pelo caso de congruência de triângulos (LAL) conclui-se que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF'$.

Desta forma, segue que $\widehat{DEF} \equiv \widehat{DEF'}$; mais ainda pelo Axioma da Construção do ângulo⁶, \overrightarrow{EF} e $\overrightarrow{EF'}$ coincidem.

Portanto, pela definição de retas concorrentes,⁷ temos que F e F' são o mesmo ponto. Logo, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. ■

Figura 9 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (ALA).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

⁵ Chamamos de corolário a um teorema obtido como consequência de outro recém-provado. Nesse caso, o segundo teorema é chamado **corolário do teorema** provado. (FILHO, 2012, p.137)

⁶ Seja \overrightarrow{AB} uma semi-reta da reta origem de um semiplano Γ . Para cada número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta \overrightarrow{AP} com P em Γ , tal que $m\widehat{PAB} = r$. (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p.23)

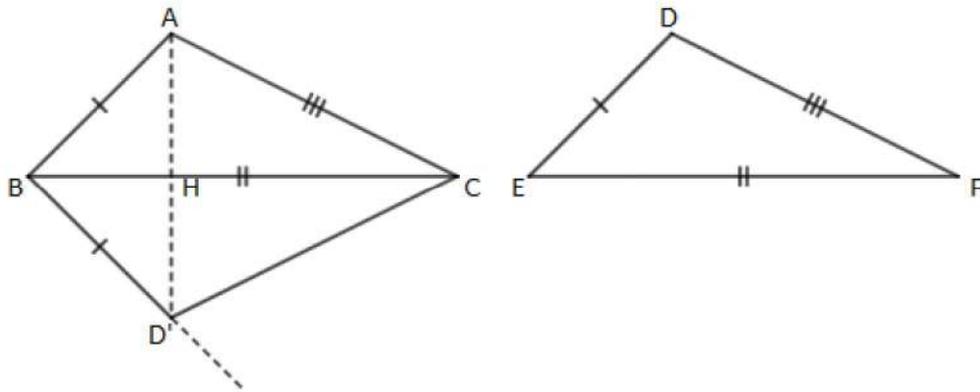
⁷ Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum. (GONÇALVES, 1995, p.30)

Agora, vejamos o teorema que trata do terceiro caso de congruência de triângulos.

Teorema 2.4 (Caso - LLL). *Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes, estão, são triângulos congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{CA} \equiv \overline{FD}$, conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LLL).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, considere o semiplano π , determinado por \overleftrightarrow{BC} de modo que o vértice $A \notin \pi$, considere uma semi-reta de origem B formando com \overleftrightarrow{BC} um ângulo congruente ao ângulo \widehat{DEF} . Tome sobre ela, um ponto D' de modo que tenhamos $\overline{BD'} \equiv \overline{DE}$. Dessa forma, pelo caso de congruência de triângulos (LAL), obtemos $\triangle D'BC \equiv \triangle DEF$.

Neste instante, mostraremos que $\triangle ABC \equiv \triangle D'BC$. Seja H o ponto em que $\overline{AD'}$ intersecta \overleftrightarrow{BC} . Considere o caso em que H está entre os vértices B e C , conforme a Figura 10. Pelo Teorema do Triângulo Isósceles aplicado aos triângulos $BD'A$ e CAD' respectivamente, obtemos $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{BD'A}$ e $\widehat{CAD'} \equiv \widehat{CD'A}$. Utilizando o Axioma da Adição de Ângulos⁸, conclui-se que:

$$m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD'} + m\widehat{D'AC} = m\widehat{BD'A} + m\widehat{AD'C} = m\widehat{BD'C}.^9$$

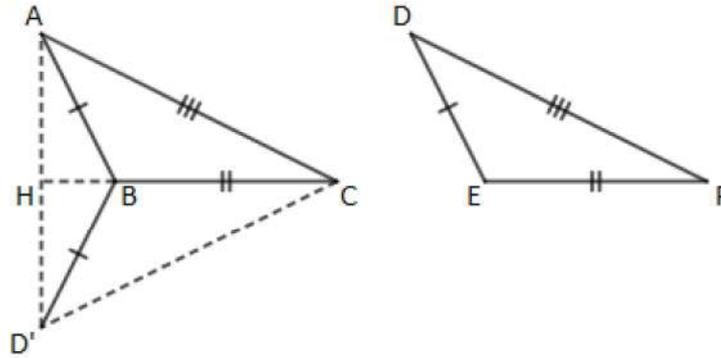
Logo, pelo caso de congruência de triângulos (LAL), segue-se que $\triangle ABC \equiv \triangle D'BC$.

Analogamente, se B está entre H e C , conforme ilustrado na Figura 11, conclui-se que $\triangle D'BC \equiv \triangle DEF$ e $\triangle ABC \equiv \triangle D'BC$.

⁸ Se D é um ponto interior do ângulo \widehat{BAC} , então, $m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD} + m\widehat{DAC}$. (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p.23)

⁹ $m\widehat{ABC}$ se refere a medida do ângulo, formado pelas semirretas de origem no ponto B .

Figura 11 – $\triangle ABC \equiv \triangle D'BC$, pelo caso (LLL).

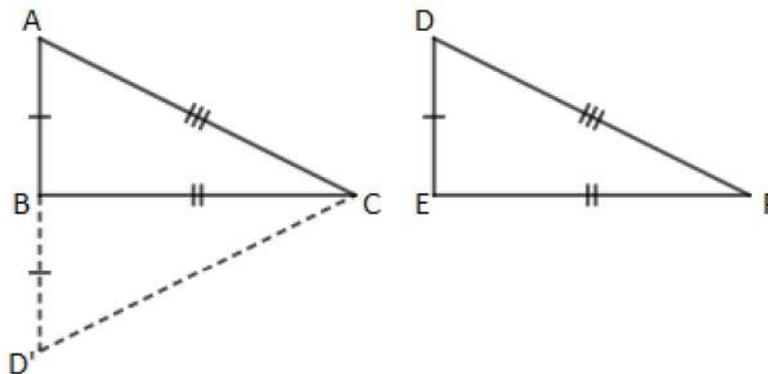


Fonte: O autor via Software Geogebra.

Note que, em ambos os casos por transitividade, obtemos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Analisaremos agora, o caso em que $H = B$, isto é, A, B e D' são colineares, conforme ilustra a Figura 12.

Figura 12 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LLL).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Por meio do Teorema do Triângulo Isósceles, obtemos que $\widehat{A} \equiv \widehat{D'}$, e por transitividade, temos que $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e mais uma vez, pelo caso de congruência de triângulos (LAL) e por transitividade, conclui-se que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Os outros dois casos, $H = C$ ou $B - C - H$ (C entre B e H) nessa ordem, são inteiramente análogos aos casos anteriores.

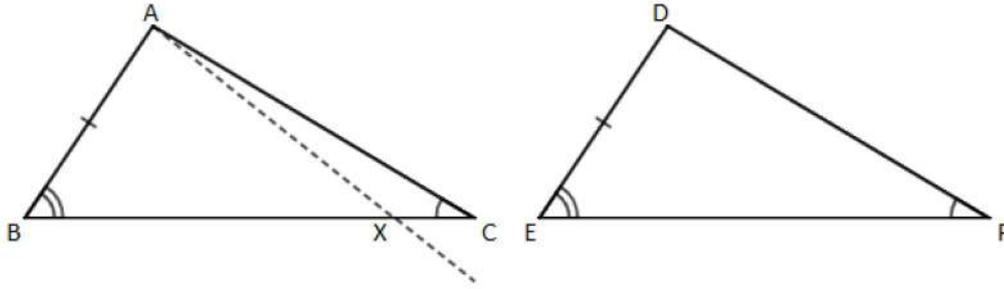
■

Nesse momento, demonstraremos o quarto caso de congruência de triângulos, do qual decorre importantes consequências, como por exemplo o Teorema da Hipotenusa e do Cateto.

Teorema 2.5 (Caso - LAA_o). *Dados dois triângulos ABC e DEF de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos satisfazendo as hipóteses do teorema e X um ponto da semi-reta \overrightarrow{BC} tal que $\overline{BX} \equiv \overline{EF}$. Considere inicialmente o caso em que X está entre B e C , conforme ilustra a Figura 13.

Figura 13 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (LAA_o).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Pelo caso de congruência de triângulos (LAL), obtemos $\triangle ABX \equiv \triangle DEF$. Com isso, obtemos:

$$\widehat{AXB} \equiv \widehat{DFE} \quad (I).$$

Mas, \widehat{AXB} é um ângulo externo do triângulo AXC , do qual \widehat{ACX} é ângulo interno não adjacente. Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo¹⁰, $\widehat{AXB} > \widehat{ACX}$, porém, pela hipótese $\widehat{AXB} > \widehat{DFE}$ o que gera uma contradição com (I).

No caso em que tivéssemos C entre B e X , demonstraríamos de modo análogo que $\widehat{AXB} < \widehat{DFE}$, o que novamente contradiz (I).

Portanto, o ponto X coincide com C , conseqüentemente, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. ■

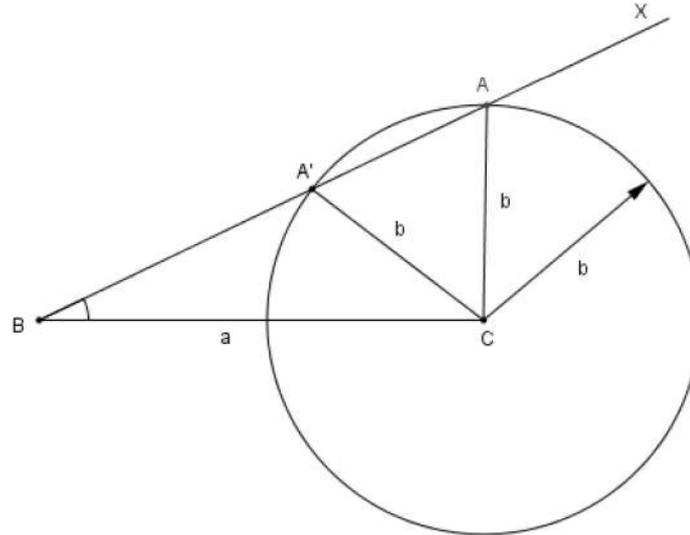
Agora analisaremos o caso lado, lado, ângulo (LLA) que em geral não garante um caso de congruência de triângulos. Mostraremos a seguir, uma situação em que esse caso “falha”.

Considere o problema de construir o triângulo ABC dados o lado \overline{BC} , o lado \overline{CA} e o ângulo \widehat{B} , conforme ilustra a Figura 14. Perceba que, a circunferência de raio b seccionou a semirreta \overrightarrow{BX} nos pontos A e A' . Daí, podemos concluir que $\overline{CA} = b = \overline{CA'}$ (raios da circunferência). Analisando os triângulos ABC e $A'BC$,

¹⁰ Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes. (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p.44)

note que ambos possuem os mesmos três elementos correspondentes (lado, lado, ângulo) e obviamente não são congruentes. Portanto, como queríamos mostrar o caso (*LLA*) não assegura uma congruência de triângulos.

Figura 14 – Triângulos ABC e $A'BC$ não congruentes.



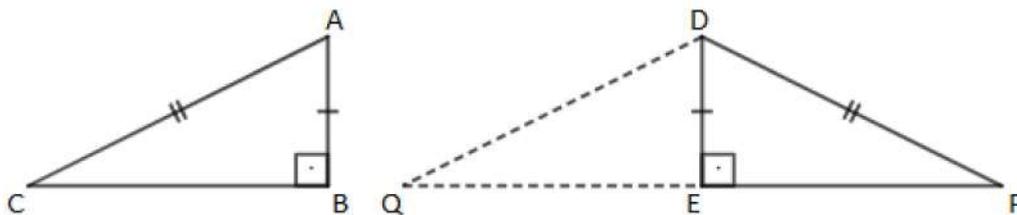
Fonte: O autor via Software Geogebra.

Mas, para este caso (*LLA*) há uma situação que ocorre a congruência, que é quando os triângulos envolvidos são retângulos, vejamos a demonstração a seguir.

Teorema 2.6 (Caso Especial de Congruência de Triângulo Retângulo (*CH*)). *Considere ABC e DEF dois triângulos retângulos. Se a hipotenusa e um cateto do triângulo ABC são congruentes com as partes correspondentes do triângulo DEF , então, os dois triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF , triângulos retângulos com $\hat{B} \equiv \hat{E} = 90^\circ$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, conforme ilustra a Figura 15.

Figura 15 – $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, pelo caso (*CH*).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Considere o ponto Q na semi-reta oposta a \overrightarrow{EF} de modo que $\overline{EQ} \equiv \overline{BC}$. Pelo caso de congruência (LAL), obtemos:

$$\triangle DEQ \equiv \triangle ABC \quad (1).$$

Perceba que, o triângulo DQF é um triângulo isósceles. De (1) e pela hipótese, $\overline{DQ} \equiv \overline{DF}$, obtemos, $\widehat{EFD} \equiv \widehat{EQD}$ (2). De (1) e (2) conclui-se que $\widehat{EFD} \equiv \widehat{BCA}$. Portanto, pelo Teorema 2.5, obtemos que $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$. ■

Agora, daremos ênfase a discussão voltada a semelhança de triângulos, utilizaremos o símbolo \sim para representá-la.

Semelhança de Triângulos

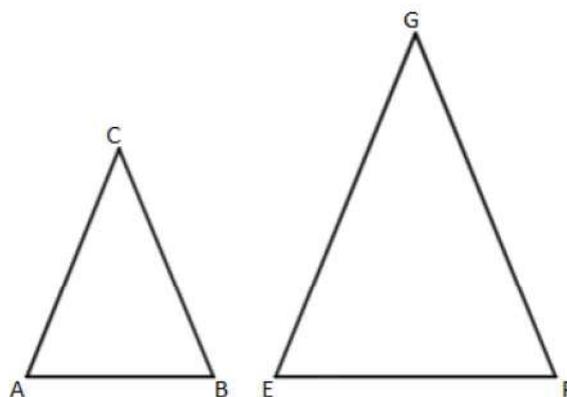
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Segundo Barbosa (BARBOSA, 2012, p.127):

Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Considere os triângulos semelhantes ABC e EFG , isto é, $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, conforme ilustra a Figura 16.

Figura 16 – Triângulos semelhantes ABC e EFG .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

O quociente comum entre as medidas dos dados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

Então, por definição, valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} \equiv \hat{E}, \quad \hat{B} \equiv \hat{F}, \quad \hat{C} \equiv \hat{G} \quad \text{e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

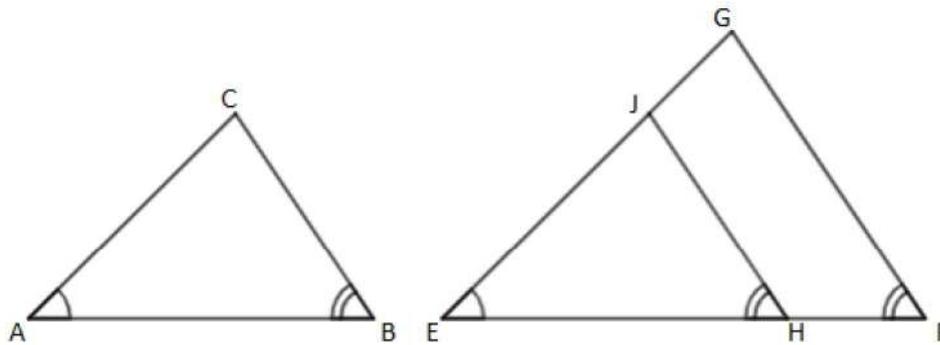
Daí, podemos concluir que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um, são congruentes.

Existem condições suficientes, as quais nos faz perceber, se dois triângulos são ou não, semelhantes. São conhecidas em nossa literatura como **casos de semelhança de triângulos**, elas são: ângulo, ângulo (*AA*), lado, ângulo, lado (*LAL*) e lado, lado, lado (*LLL*). Conforme trataremos a seguir.

Teorema 2.7 (Caso - *AA*). *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, então, os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Considere os triângulos *ABC* e *EFG* com $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, sendo a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180° , então, podemos concluir que $\hat{C} \equiv \hat{G}$, conforme ilustra a Figura 17.

Figura 17 – $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, pelo caso (*AA*) .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, mostraremos que os lados são proporcionais. Para isto, tome no lado \overline{EF} o ponto *H*, de maneira que $\overline{EH} \equiv \overline{AB}$. Pelo ponto *H*, trace uma reta paralela a \overline{FG} , a qual intersecta o lado \overline{EG} num ponto *J*, formando um triângulo *EHJ*, que pelo Teorema 2.3 teremos $\triangle ABC \equiv \triangle EHJ$, pois $\hat{A} \equiv \hat{E}$, $\overline{AB} \equiv \overline{EH}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F} \equiv \widehat{EHJ}$. Esta última congruência deve-se ao Teorema do paralelismo¹¹ entre \overline{JH} e \overline{GF} . Daí, obtemos que $(\overline{EH}/\overline{EF}) = (\overline{EJ}/\overline{EG})$.

¹¹ Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então, o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro. (DOLCE; POMPEO, 1985, p.200)

Como $\overline{EH} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{EJ} \equiv \overline{AC}$, então, da igualdade anterior, obtém-se:

$$(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG}).$$

De modo análoga, demonstra-se que $(\overline{AC}/\overline{EG}) = (\overline{CB}/\overline{GF})$. Consequentemente, obtemos:

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG.$$

■

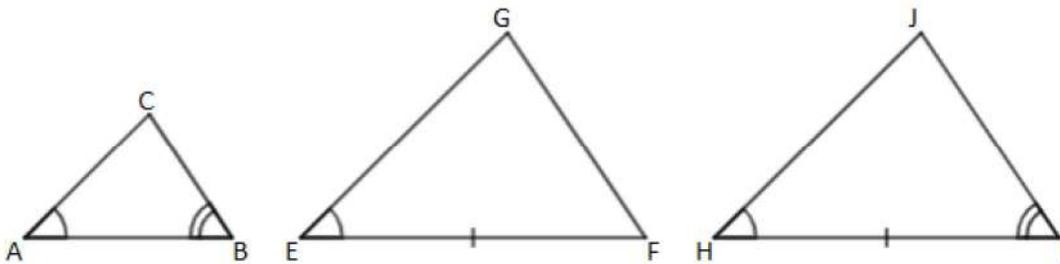
Este teorema, será anunciado como “segundo caso de semelhança de triângulos”, com o intuito de que haja correspondência, entre os casos de semelhança e os casos de congruência.

A seguir, demonstraremos o primeiro caso de semelhança de triângulos.

Teorema 2.8 (Caso - LAL). *Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$, então, os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG com $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$. Agora, tome o triângulo HIJ de modo que $\overline{HI} \equiv \overline{EF}$, $\hat{H} \equiv \hat{A}$ e $\hat{I} \equiv \hat{B}$, conforme ilustra a Figura 18.

Figura 18 – $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, pelo caso (LAL) .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Pelo Teorema 2.7, temos que os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Daí, obtemos:

$$(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{AC}/\overline{HJ}).$$

Como $\overline{HI} \equiv \overline{EF}$ por construção, da hipótese temos $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$ e considerando a igualdade acima, concluímos que:

$$\overline{HJ} \equiv \overline{EG}.$$

Como $\overline{HI} \equiv \overline{EF}$ e $\hat{H} \equiv \hat{A} \equiv \hat{E}$, pelo caso de congruência de triângulos (*LAL*), teremos $\triangle EFG \equiv \triangle HIJ$. Sendo $\triangle ABC \sim \triangle HIJ$, então, podemos concluir que os triângulos ABC e EFG são semelhantes. ■

Agora, vejamos o terceiro caso de semelhança de triângulos.

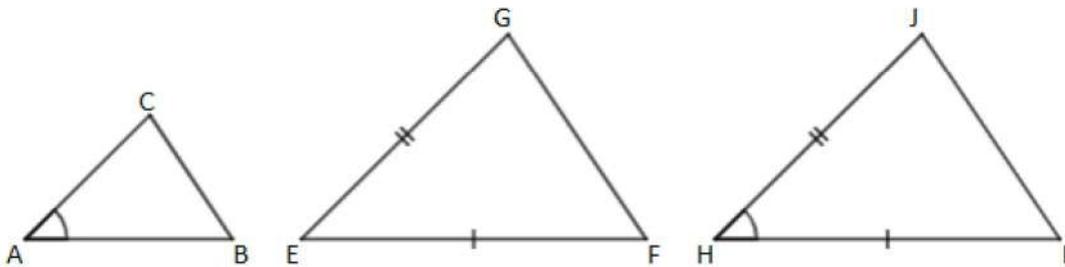
Teorema 2.9 (Caso - *LLL*). *Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então, os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG satisfazendo as hipóteses do teorema. Agora, tome um triângulo HIJ de modo que tenhamos $\hat{H} \equiv \hat{A}$, $\overline{HI} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{HJ} \equiv \overline{EG}$, conforme ilustra a Figura 19.

Figura 19 – Triângulos $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, pelo caso (*LLL*).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Pela hipótese teremos:

$$(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{AC}/\overline{HJ}).$$

Portanto, de acordo com o Teorema 2.8, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Com isso, podemos concluir que além da igualdade acima, também ocorre:

$$(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{BC}/\overline{IJ}).$$

Considerando essa informação e a hipótese do teorema, tem-se ($\overline{IJ} \equiv \overline{FG}$). Como já tínhamos que $\overline{HI} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{HJ} \equiv \overline{EG}$ (por construção) logo, pelo Teorema 2.4 obtemos que $\triangle HIJ \equiv \triangle EFG$. Sendo HIJ e ABC triângulos semelhantes, consequentemente,

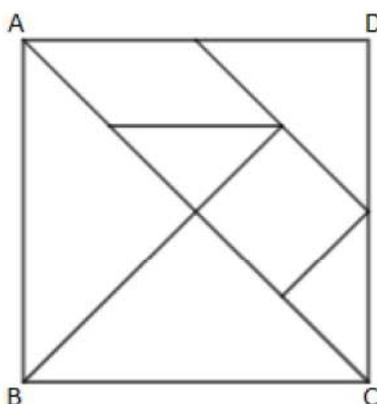
$$\triangle ABC \sim \triangle EFG.$$

■

2.3 Decomposição de polígonos

Um polígono é decomponível quando são realizadas várias subdivisões, isto é, o polígono inicial é decomposto em vários polígonos menores. A Figura 20, ilustra uma possibilidade de decomposição do polígono ABCD.

Figura 20 – Uma possível decomposição do polígono ABCD.

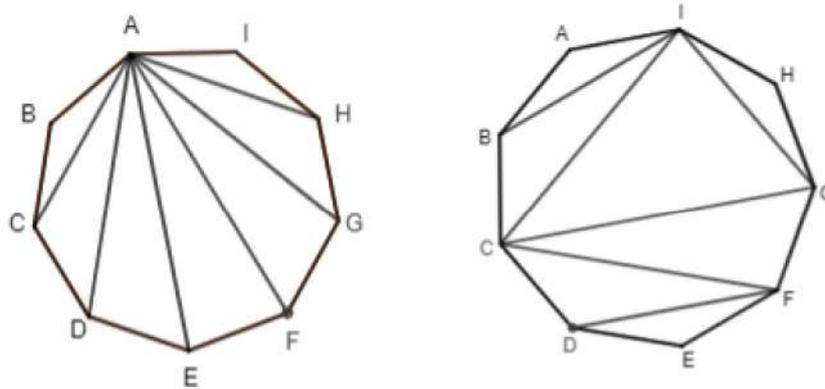


Fonte: O autor via Software Geogebra.

2.4 Triangulação de polígonos

Definição 2.5. *Seja P um polígono. Um segmento que liga dois vértices não consecutivos denomina-se diagonal. Se uma diagonal, com exceção de seus extremos, estiver contida no interior de P , chama-se diagonal interior de P . Uma triangulação de P é uma coleção de triângulos cujos lados são lados de P ou diagonais interiores, de modo que esses triângulos, quando se intersectam, o fazem em lados comuns ou em vértices de P , e a reunião desses triângulos e seus interiores é a região determinada por P . Conforme ilustra a Figura 21.*

Figura 21 – Polígono convexo ABCDEFGHI, com duas formas distintas de triangulação.

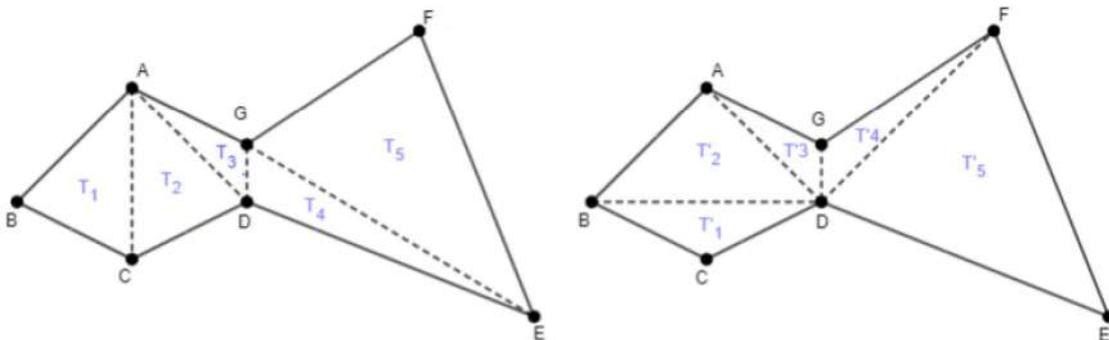


Fonte: O autor via Software Geogebra.

Diante dessa definição, podemos obter o seguinte teorema:

Teorema 2.10 (Triangulação de polígonos). *Quando, traçando-se diagonais internas que não se cortam, um polígono P de n lados é decomposto em triângulos justapostos, o número de triângulos é sempre $n - 2$ e o número de diagonais é $n - 3$, conforme ilustra a Figura 22.*

Figura 22 – Polígono côncavo ABCDEFG, com duas formas distintas de triangulação.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Perceba que, no polígono $ABCDEFG$, temos $n = 7$, logo podemos obter 5 triângulos e 4 diagonais, pois segundo o Teorema 2.10 o número de triângulos e o número de diagonais de um certo polígono é sempre $n - 2$ e $n - 3$ respectivamente, conforme demonstraremos a seguir, nos referenciando em (LIMA et al., 2007).

Demonstração. Suponha por absurdo, que o teorema seja falso, considere P um polígono com o menor número n de lados para o qual o teorema não seja válido. Então, P

decompõem-se, com $t \neq n - 2$ ou $d \neq n - 3$. Tome uma dessas diagonais. Ela decompõe P em dois polígonos adjacentes P' e P'' , com n' e n'' lados respectivamente. Como $n' < n$ e $n'' < n$, o teorema se aplica para P' e P'' com o número correto de triângulos e diagonais. Levando em conta que $n = n' + n'' - 2$, que $t = t' + t''$ e que $d = d' + d'' + 1$, as relações $t' = n' - 2$, $d' = n' - 3$, $t'' = n'' - 2$ e $d'' = n'' - 3$, realizando algumas manipulações algébricas, essas igualdades implicam imediatamente, que $t = n - 2$ e $d = n - 3$. Essa contradição prova o teorema. ■

2.5 Área

Nessa sessão enfatizaremos a medição da porção do plano limitada por sua linha poligonal, isto é, a porção do plano ocupada por uma figura. Esta medida é a sua área.

Para determinarmos a área de uma figura F comparamos sua superfície (a porção do plano que ela ocupa) com a de uma outra figura tomada como unidade. Podemos estabelecer uma noção intuitiva de área, considerando como unidade de área o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado de quadrado unitário. Além disso, utilizaremos a simbologia $\mathcal{A}(ABCD\dots)$ para representar a área do polígono $ABCD\dots$

Definição 2.6. (Área)

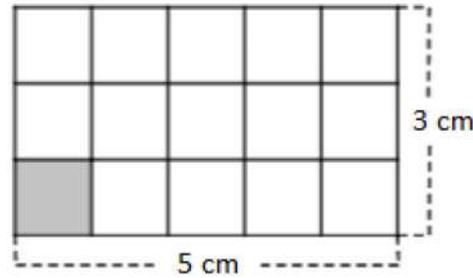
A área de um polígono P é um número real positivo $\mathcal{A}(P)$, satisfazendo as seguintes condições:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se um polígono é convexo (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então, a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então, a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2 .

Com isso, temos que a área de uma figura exprime quantas vezes essa figura contém a unidade de área, que normalmente consideramos a quarta condição acima. Vejamos um exemplo, suponha que desejamos determinar a área de um retângulo de área S , cujas dimensões ¹² medem 5cm e 3cm , conforme a ilustra a Figura 23.

¹² As dimensões de um retângulo são: comprimento ou base e largura ou altura.

Figura 23 – Área de um retângulo cujas dimensões medem 5cm e 3cm .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Observe que, a unidade de área cabe 15 vezes no retângulo e, portanto, sua área é de 15 centímetros quadrados, isto é, $S = 15\text{cm}^2$.

Dessa maneira, fica evidente que se as medidas das dimensões de um retângulo são números a e b com a e $b \in \mathbb{N}^*$, a sua área é determinada pelo produto dessas dimensões, ou seja, $S = ab$. Em particular, se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro n , sua área é igual a n^2 .

No capítulo 4, faremos uma abordagem mais ampla sobre o cálculo de área de polígonos.

2.6 Polígonos equivalentes ou equidecomponíveis

Dois polígonos quaisquer são equivalentes ou equidecomponíveis se, somente se, forem somas de igual número de polígonos dois a dois congruentes entre si.

Simbolicamente:

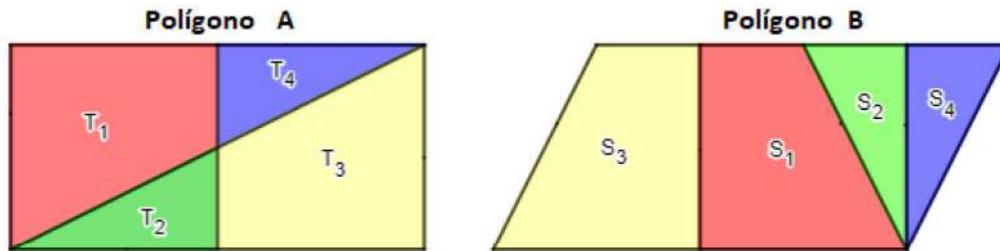
$$\left(T_i \equiv S_i, A = \sum_{i=1}^n T_i, B = \sum_{i=1}^n S_i \right) \iff A \approx B$$

Note que, A e B são somas de n polígonos e que cada polígono-parcela T_i de A é congruente a um polígono-parcela S_i de B e reciprocamente.

O símbolo \approx está sendo usado para a equivalência.

De acordo com o exposto acima, analisando os polígonos A e B , ilustrados na Figura 24.

Figura 24 – Polígono equivalentes A e B ($A \approx B$).



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Teremos, $T_1 \equiv S_1$, $T_2 \equiv S_2$, $T_3 \equiv S_3$ e $T_4 \equiv S_4$. Sendo $A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ e $B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Portanto, $A \approx B$.

No Capítulo 4, abordaremos esse tema com mais ênfase.

2.7 Isometria

Nesse momento, apresentaremos algumas Isometrias¹³ (translação paralela, rotação e simetria central, que é um caso particular de rotação). Descreveremos as isometrias segundo (BOLSTIANSKI, 1996) e (LIMA et al., 2007).

As isometrias são transformações que, em particular, levam segmentos em segmentos, ângulos em ângulos, além de preservarem suas medidas, conseqüentemente, preservam forma e tamanho dos polígonos envolvidos. Um polígono e sua imagem provocada por uma isometria são chamadas de polígonos congruentes, pois têm a mesma forma e tamanho. A ação de uma isometria sobre um polígono P , altera eventualmente, sua posição e origina um polígono P' , com $P \equiv P'$.

2.7.1 Translação paralela

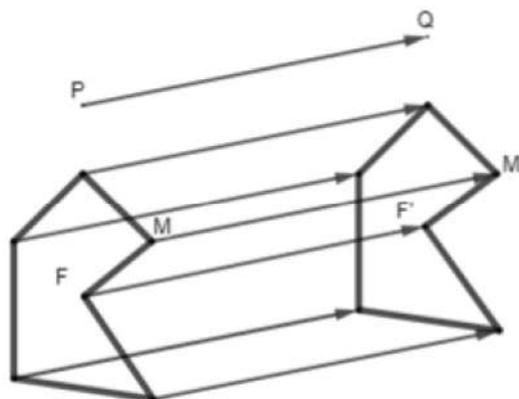
Antes de descrevermos, o que é uma **translação paralela**, lembramos que ao mencionarmos a expressão vetor, estaremos tratando de uma classe de equipolência de segmentos orientados, o qual será muito mencionado a seguir.

Seja \vec{PQ} um segmento de reta orientado (vetor); conforme ilustrado na Figura 25, sua direção e sentido estão indicados por uma flecha. A partir de um ponto arbitrário M , trace o segmento MM' congruente e paralelo ao segmento \vec{PQ} e tendo o mesmo sentido; dizemos então que o ponto M' se obtém do ponto M , por meio da translação paralela ao segmento \vec{PQ} . Ao aplicar a todos os pontos de uma figura F a translação paralela ao segmento \vec{PQ} , obtemos uma nova figura F' ; dizemos então, que F' é obtida

¹³ Transformação geométrica que preserva distância entre pontos.

da F por meio da translação paralela ao segmento \overrightarrow{PQ} . É claro, que para realizar o processo inverso, isto é, obter a figura F a partir da figura F' , é preciso empregar a translação paralela ao segmento \overrightarrow{QP} , que coincide com o segmento \overrightarrow{PQ} , mas tem sentido oposto. Note que, a passagem da figura F para ela mesma, também pode ser considerada como uma translação paralela (a translação segundo o “segmento nulo”), o que resulta na transformação identidade.

Figura 25 – Polígono $F \equiv F'$, por meio de uma translação paralela.



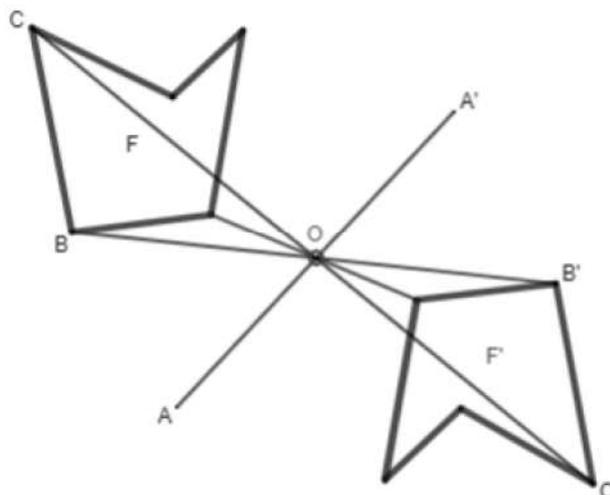
Fonte: O autor via Software Geogebra.

2.7.2 Simetria Central

A Simetria central é um caso particular de rotação: para substituir uma figura por sua simétrica central, é suficiente girá-la de 180° em torno do centro de simetria. Vejamos a seguir, como obtemos uma figura simétrica central a outra.

Considere um ponto O , de modo que este seja o centro de simetria. Seja AA' um segmento de reta cujo ponto médio é o ponto O , então, suas extremidades A e A' dizem-se simétricas com relação ao centro O . Substituindo todos os pontos de uma figura F pelos pontos simétricos com relação ao centro O , obtemos uma nova figura F' . O que nos leva a concluir que as figuras F e F' , em relação ao ponto O dizem-se centralmente simétricas uma da outra. Portanto, nessas condições a transformação que leva a figura F á figura F' chama-se simetria central, conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Polígono $F \equiv F'$, por meio de uma simetria central



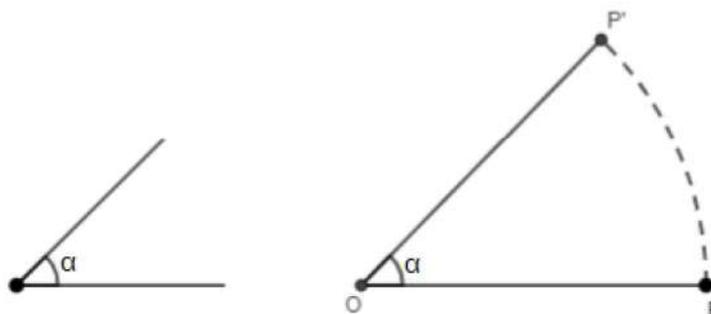
Fonte: O autor via Software Geogebra.

2.7.3 Rotação

A rotação é o “giro” de uma forma ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A distância ao centro de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamada ângulo de rotação.

Uma rotação caracteriza-se por um centro de rotação O e por uma amplitude α . Assim, se a rotação de centro O e amplitude α for aplicada a um ponto P , sendo $P \neq O$ obtém-se P' tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, e o ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}) = \alpha$, conforme ilustra a Figura 27.

Figura 27 – Rotação



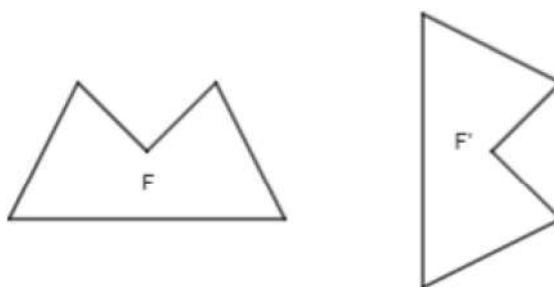
Fonte: O autor via Software Geogebra.

O centro da rotação O permanece invariante. Relativamente ao sentido da rotação, considera-se que se $\alpha > 0$, a rotação é feita no sentido positivo ou anti-horário, e se

$\alpha < 0$, a rotação é feita no sentido horário. (PINTO, 2012, p.32)

A translação paralela, a simetria central e a rotação são exemplos de movimentos. Um movimento arbitrário pode ser representado do seguinte modo: certa Figura F é “tirada” de seu plano e transladada “como um sólido rígido” a uma nova posição F' ; essa transformação da figura F na figura F' chama-se movimento ¹⁴, conforme ilustra a Figura 28.

Figura 28 – Transformação da figura F em F' por meio de um movimento arbitrário



Fonte: O autor via Software Geogebra.

¹⁴ Aqui se trata do movimento de uma única figura (a figura F). Com frequência é preferível pensar em termos de um movimento de todo o plano (com todas as figuras que estão contidas no plano). Por exemplo, “uma translação paralela ao segmento \overrightarrow{PQ} ” pode ser aplicada a qualquer figura no plano, isto é, o plano todo é encarado como se mudasse de posição: “uma simetria central com relação ao centro O ” também significa movimento do plano todo, etc. (BOLSTIANSKI, 1996, p.13)

3 Contextualização Histórica

3.1 Surgimento do conceito de área: Babilônia, Egito e Grécia

Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos sobre a Geometria, nessas civilizações o conhecimento geométrico foi surgindo exclusivamente para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes, porém, a preocupação com os porquês, ou seja, argumentações consistentes e demonstrações, daquilo que se aplicava, só veio surgir com a Matemática teórica praticada pelos gregos.

A geometria **Babilônica** se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos, infere-se que os babilônios do período 2000 a.C a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente do volume de um prisma reto de base trapezoidal. (EVES, 1995, p.60)

No **Egito** o desenvolvimento da geometria teve todo um impulso, graças às demarcações das terras próximas ao Rio Nilo, sempre que estas demarcações eram desfeitas, em função das cheias do rio, os povos tinham que refazê-las, conseqüentemente, desenvolviam técnicas de medição de terras. Essas divisões, eram realizadas de modo proporcional aos impostos pagos e foi diante dessa necessidade puramente humana, que veio a surgir o cálculo de área. Esta hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto:

“Quando das inundações do Nilo, o rei Sésotris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou mais tarde, para a Grécia.” (Heródoto, Oeuvres complètes II 109, p.183. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.60)

O que se sabe sobre a Matemática dessas civilizações é graças às descobertas de alguns tabletas e papiros ao longo do tempo. Como por exemplo, o tablete YBC 7290, conforme ilustra a Figura 29, no qual consta um exercício sofisticado envolvendo o calcular da área de um trapézio realizado por um escriba babilônico.

Figura 29 – Tablete *YBC 7290*.

Fonte: encurtador.com.br/bevU1

Segundo (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.48), o tablete *YBC 7290* ilustrado na Figura 29, mostra um trapézio em que sua base maior e um dos lados são iguais a 2,20 (no sistema sexagesimal) e que a base menor é igual a 2. O escriba supõe que o trapézio é reto e, então, sua área é calculada fazendo (sem os símbolos):

$$a = 2,20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2,20 + 2) \right].$$

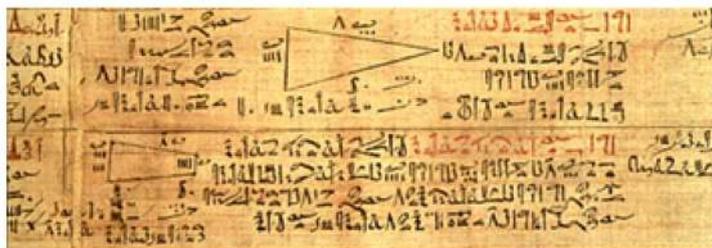
Nos papiros de Moscou e de Rhind (Ahmes) constam 110 problemas, dos quais 26 enfatizam geometria. A seguir, temos a Figura 30, que mostra alguns desses problemas no papiro de Moscou e a Figura 31, que traz os problemas de números 51 e 52 do papiro de Rhind.

Figura 30 – Papiro de Moscou.



Fonte: encurtador.com.br/eqJSU

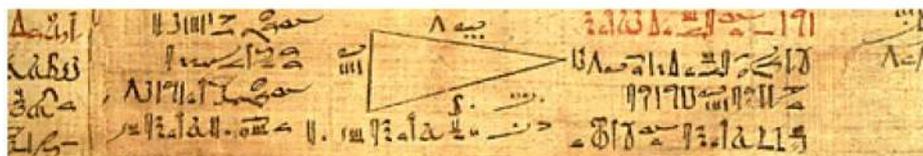
Figura 31 – Papiro de Rhind (Ahmes)



Fonte: 11nq.com/HurII

Neste instante, faremos uma abordagem sobre estes dois problemas, os quais analisaremos isoladamente, conforme ilustram as Figuras 32 e 33.

Figura 32 – Problema de número 51.



Fonte: 11nq.com/HurII

Vejam os problemas de número 51 e sua solução, que consiste em achar a área de um triângulo isósceles cuja altura é 10 e a base é 4.

“Capítulo para calcular um triângulo de campo. Si te dizem: Um triângulo de 10 medidas em seu merit (altura), 4 medidas em seu tepro (base). Qual é a sua extensão? Faz como isto é. Faz a metade de 4, isto é, 2 afim de fazer seu quadrilátero. Multiplica o número: 10 duas vezes. Sua extensão é isso”. (MARTINS, 2015, p.125)

Perceba que, Ahmes toma a metade da base e o resultado multiplica pela altura, é exatamente o que se faz atualmente. O que nos leva a concluir que o escriba sabia que o triângulo isósceles é a metade de um quadrilátero, cuja área obtém-se pelo produto das suas dimensões.

O problema 51, mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos de base e multiplicando isso pela altura. Ahmes justifica seu método para achar a área, sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formem um retângulo. (BOYER; MERZBACH, 2019, p.31)

Já o problema de número 52, envolve o cálculo da área de um trapézio isósceles, o argumento é semelhante ao aplicado no triângulo isósceles.

Figura 33 – Problema de número 52.



Fonte: 11nq.com/6ExE8

Vejamos o texto do problema 52 e sua solução: “Capítulo para fazer uma secção (kakt) de campo. Se te dizem: Uma secção de campo de 20 medidas em seu merit (altura), de 6 medidas em seu tepro (base maior), de 4 medidas em seu kakt (base menor). Qual a sua extensão? Adiciona-se o tepro a seu kakt, isso dá agora 10. Faz a metade de 10; isto é, 5, a fim de fazer seu quadrilátero. Multiplica o número 20 por 5; isto dá agora 100. Sua extensão é isso”. (MARTINS, 2015, p.127)

Note que, Ahmes faz a semissoma das bases e depois multiplica pela altura, que é o procedimento aplicado atualmente.

Pela expressão “ a fim de fazer seu quadrilátero ” depois de obtida a semissoma das bases, parece que Ahmes sabia que o trapézio isóscele era equivalente ao retângulo de mesma altura e de base igual a semissoma das bases do trapézio.

O trapézio isósceles era tratado de modo semelhante, em relação ao triângulo isósceles, em que a base maior de um trapézio é 6, a menor é 4 e a distância entre elas é 20. Tomando $1/2$ da soma das bases “de modo a fazer um retângulo”, Ahmes multiplicava isso por 20 para achar a área. (BOYER; MERZBACH, 2019, p.31)

Com isso, conclui-se que os egípcios já utilizavam a ideia de decomposição e de equivalência de figuras para auxiliar no cálculo da área. Diante desse raciocínio envolvendo a ideia de decomposição, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, percebe-se um certo indício de noção de congruência e de demonstração em geometria, porém, não existe evidências que confirmem, que os egípcios tenham avançado nesse propósito.

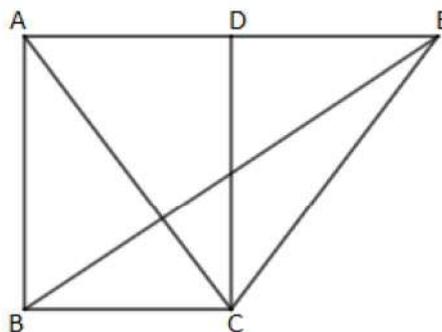
Na **Grécia**, a Geometria se desenvolveu com a preocupação de se justificar os “porquês” na resolução de problemas, o que contribuiu para o surgimento de uma Matemática dedutiva. Para medição de área os gregos utilizavam um método chamado “quadratura”. Esse método consistia em decompor qualquer polígono dado em triângulos, transformar cada triângulo em retângulo, transformar cada retângulo em quadrado e finalmente transformar cada par de quadrados em um quadrado, que continuando o processo vai resultar em um único quadrado de área equivalente ao do polígono inicial.

Os Elementos de Euclides escrito em torno de 300 a.C., reuniu os maiores conhecimentos matemáticos da época, organizado como sistema dedutivo. Euclides utiliza-se

das figuras geométricas de áreas iguais em muitas demonstrações nos Elementos (conforme o exemplo a seguir). “ Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.”

Tenha, pois, o paralelogramo ABCD tanto a mesma base BC que o triângulo EBC quanto esteja nas mesmas paralelas BC, AE; digo que o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo BEC. Conforme ilustra a Figura 34.

Figura 34 – Paralelogramo ABCD.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Fique, pois, ligada a AC. Então, o triângulo ABC é igual ao triângulo EBC; pois, está tanto sobre a mesma base BC que ele quanto nas mesmas paralelas BC e AE. Mas o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo ABC; pois, a diagonal AC corta-o em dois; desse modo, o paralelogramo ABCD também é o dobro do triângulo EBC. Portanto, caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo, quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo; o que era preciso provar. (BICUDO, 2009, p.128)

Neste livro, Euclides mostra como a partir de qualquer polígono, é possível construir com régua e compasso um quadrado de área igual a figura inicial. Omitiremos um exemplo para não prolongarmos demasiadamente esta exposição, para o leitor interessado, vide, por exemplo (ROQUE; CARVALHO, 2012, pp.90-99).

Nos Elementos, a quadratura é tratada a partir da questão das aplicações de área, nele Euclides ensina, particularmente, a transformar qualquer figura plana poligonal num retângulo de igual área e com um lado arbitrariamente escolhido. Portanto, para transformar qualquer figura plana poligonal num quadrado de igual área, bastará saber transformar qualquer retângulo num quadrado de igual área. (ESTRADA et al., 2000, p.269)

A obra de Euclides, foi a principal referência para os matemáticos de todas as épocas, como exemplo de proceder quanto ao desenvolvimento de uma teoria e como modelo de como raciocinar e demonstrar matematicamente, além de apresentar um

compêndio de resultados e verdades matemáticas aceitas, que seriam essenciais no desenvolvimento da matemática. (CUARTERO; GARAY; GASCA, , p.23)

3.2 Farkas Wolfgang Bolyai, Paul Gerwien, Willam Wallace, H. Hadwiger e P. Glur e a origem dos polígonos equidecomponíveis.

Diante do exposto, percebe-se que Euclides há mais de dois mil anos já aplicava a ideia de decomposição, método que consiste em calcular a área de uma figura decompondo-a num número finito de partes, de tal modo que essas partes possam ser rearranjadas para formar uma figura mais simples, cuja área seja conhecida. Apesar desse raciocínio está relacionado com a ideia de polígonos equidecomponíveis, ou seja, a ideia de decompor um polígono num número finito de partes e rearranjando essas partes compor outro. O teorema que trata da recíproca desse tema, só veio a ser descoberto e demonstrado em 1832 por Farkas Wolfgang Bolyai e independentemente, em 1833 por Paul Gerwien. Descobriu-se mais tarde, que William Wallace, já havia demonstrado o teorema em 1807. Este teorema é conhecido como o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, conforme enunciaremos a seguir.

Teorema 3.1 (Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien). *Dois polígonos com a mesma área são equidecomponíveis.*

Farkas Wolfgang Bolyai, foi um matemático húngaro interessado nos fundamentos da geometria e no axioma das paralelas. Seu trabalho principal, o Tentamen, foi uma tentativa de estabelecer uma base rigorosa e sistemática para geometria, aritmética, álgebra e análise. Era o pai do famoso matemático Janos Bolyai, descobridor da geometria hiperbólica (que também foi descoberta por Lobatchevski e Gauss). Paul Gerwien, matemático alemão amador. William Wallace, matemático e astrônomo escocês, inventor do pantógrafo um instrumento geralmente feito de madeira utilizado para reproduzir desenhos em diferentes escalas. Entre 1801 e 1810, contribuiu com artigos sobre álgebra, seções cônicas e trigonometria, dentre outros, para a quarta edição da Enciclopédia Britânica.

Em 1951, passados mais de um século após a demonstração do teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, os matemáticos suíços H. Hadwiger e P. Glur refinaram esse teorema. Eles perceberam que o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien abre um leque de possibilidades a serem investigadas, das quais, temos a seguinte: É possível impor condições extras, sobre o número ou a disposição das partes com as quais se compõem os polígonos equivalentes?

Estabeleceram que no Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien se podia exigir a condição extra de que as partes em que um dos polígonos equivalentes é decomposto e as partes correspondentes do segundo polígono tenham respectivamente lados paralelos. (BOLSTIANSKI, 1996, p.11), conforme trataremos com mais ênfase no Capítulo 4.

4 Teoria dos Polígonos Equidecomponíveis

Neste capítulo, estaremos tratando exclusivamente sobre polígonos equidecomponíveis, os quais estão diretamente relacionados com equivalência entre área de polígonos. Toda teoria apresentada a partir desse momento, baseia-se principalmente em (BOLSTIANSKI, 1996) e (LIMA et al., 2007). Quando a expressão **rearranjo** for mencionada, estará associada a translações paralelas, simetria central ou rotação, conceitos que foram apresentados em detalhe no Capítulo 2

Definição 4.1. *Dizemos que duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras num número finito de partes, e por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura.*

Segundo Lima (LIMA et al., 2007, p.29):

Dois polígonos P e P' dizem-se equidecomponíveis quando existem decomposições

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \text{ e } P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$$

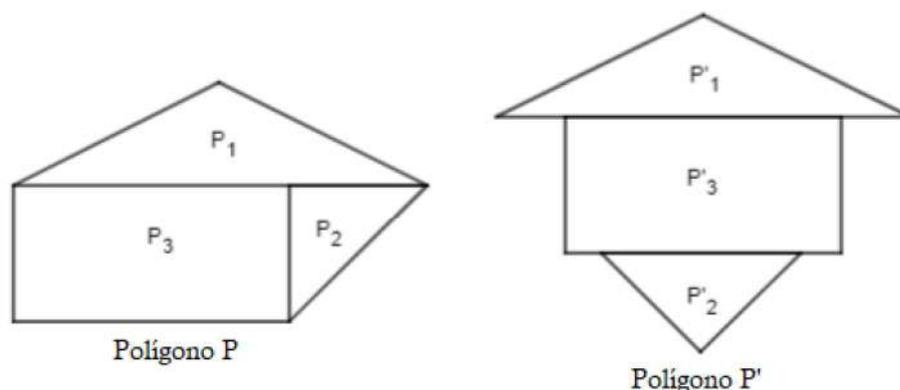
de tal modo, que cada polígono P_i é congruente ao polígono P'_i com $(i = 1, 2, \dots, n)$. Além disso, exige-se que os polígonos P_i tenham seus interiores dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os P'_i .

Em (GONÇALVES, 1995, p.156), o autor define polígonos equidecomponíveis da seguinte maneira:

Dois superfícies poligonais ¹ são equidecomponíveis se, e somente se, elas são somas de superfícies poligonais congruentes.

Vejamos um exemplo, ilustrado na Figura 35.

¹ Superfície poligonal é uma figura plana composta da união de um polígono com os pontos de seu interior. (GONÇALVES, 1995, p.156)

Figura 35 – Polígonos P e P' (equidecomponíveis)

Fonte: O autor via Software Geogebra.

Analisando os polígonos P e P' da Figura 35, note que o polígono P foi decomposto em polígonos menores (os triângulos P_1 e P_2 e o retângulo P_3) e por meio de rearranjos, obtemos o polígono P' . Com isso, fica evidente que dois polígonos equidecomponíveis têm a mesma área.

David Hilbert ² (HILBERT, 2003, p.68), apresenta uma definição para polígonos equidecomponíveis, a qual será de grande valia para nosso trabalho:

Definição 4.2. (Polígono equidecomponíveis) “Dois polígonos dizem-se equidecomponíveis se puderem decompor num número finito de triângulos congruentes entre si dois a dois”.

Nesse instante, abordaremos **seis lemas** ³ os quais nos auxiliarão na demonstração do Teorema 3.1, o principal do nosso trabalho. Os conceitos que serão utilizados nas demonstrações, estão exibidos no Capítulo 2.

Lema 4.1. *Se P , P' e P'' são polígonos equidecomponíveis, então, as seguintes relações são satisfeitas:*

1. Reflexiva: O polígono P é equidecomponível a ele mesmo.
2. Simétrica: Dados dois polígonos P e P' , se P é equidecomponível com P' , então, P' é equidecomponível com P .

² David Hilbert foi um matemático alemão, eleito membro estrangeiro da Royal Society em 1928 e sem dúvida, foi um dos mais notáveis matemáticos, os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual.

³ Um lema é normalmente um teorema auxiliar, utilizado para provar outros teoremas.

3. Transitiva: Se o polígono P for equidecomponível ao polígono P' e P' for equidecomponível ao polígono P'' , então, os polígonos P e P'' são equidecomponíveis.

Vejam os a demonstração dessas relações:

Demonstração.

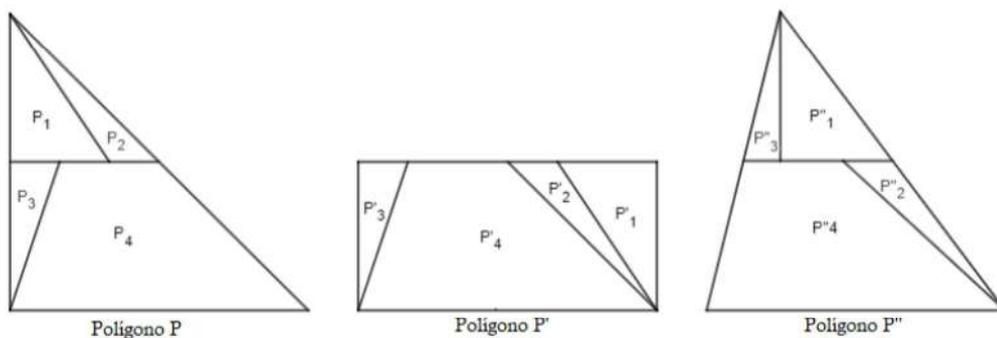
1. Considere o polígono P , decomposto nos polígonos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Pela propriedade reflexiva de congruência de triângulos, temos que o polígono P_i com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, é congruente a ele mesmo. Portanto, $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \dots \cup P_n = P$.
2. Considere um polígono P equidecomponível ao polígono P' , com $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \dots \cup P'_n$. Por definição, temos que P_i é congruente a P'_i com $i = 1, 2, \dots, n$. Pela propriedade simétrica de congruência de triângulos, obtemos que P'_i é congruente a P_i . Portanto, P' é equidecomponível a P .
3. Considere o polígono P equidecomponível a P' e P' equidecomponível a P'' , com $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \dots \cup P_n$, $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \dots \cup P'_n$ e $P'' = P''_1 \cup P''_2 \cup P''_3 \dots \cup P''_n$. Por definição, temos que P_i é congruente a P'_i que é congruente a P''_i com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Pela propriedade transitiva de congruência de triângulos, obtemos que P_i é congruente a P''_i . Portanto, P é equidecomponível a P'' .

■

Daremos um exemplo, com o intuito de tornar essa terceira propriedade mais evidente.

Suponha que o polígono P , seja equidecomponível ao polígono P' que é equidecomponível ao polígono P'' , conforme ilustra a Figura 36.

Figura 36 – Polígonos equidecomponíveis P, P' e P'' .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

De acordo com a definição de polígonos equidecomponíveis, perceba que rearranjando as partes de $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup P'_4$, podemos compor o polígono P e o polígono P'' . Daí, concluímos que $P_1 \equiv P'_1$, $P_2 \equiv P'_2$, $P_3 \equiv P'_3$ e $P_4 \equiv P'_4$. Portanto, os polígonos P e P'' são equidecomponíveis.

Lema 4.2. *Todo triângulo é equidecomponível a um retângulo.*

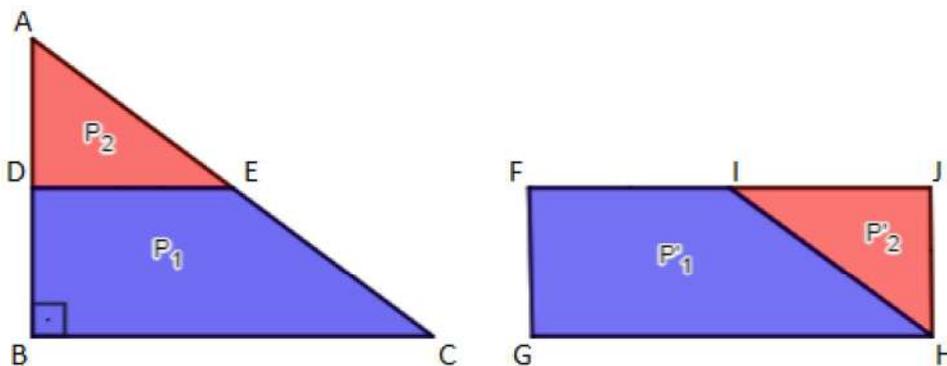
Apresentaremos esta demonstração, dividindo-a nos três casos possíveis:

1. O caso em que o triângulo é retângulo. ⁴
2. O caso em que o triângulo é acutângulo. ⁵
3. O caso em que o triângulo é obtusângulo. ⁶

Vejamos o caso, em que o triângulo é retângulo.

Demonstração. Considere ABC um triângulo retângulo em \hat{B} e $FGHJ$ um retângulo de mesma área, conforme ilustra a Figura 37.

Figura 37 – Triângulo retângulo ABC e o retângulo $FGHJ$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Sejam D e E os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente, traçando o segmento \overline{DE} , decomponemos o triângulo ABC em duas partes (o trapézio P_1 e o triângulo P_2) as quais são reposicionadas em P'_1 e P'_2 , por meio de translações paralelas e simetria central, com isso, formam um retângulo com base igual a do triângulo e altura metade. Portanto, o triângulo ABC é equidecomponível ao retângulo $FGHJ$. ■

⁴ Um triângulo é retângulo se, e somente se, tem um ângulo reto. (DOLCE; POMPEO, 1985, p.38)

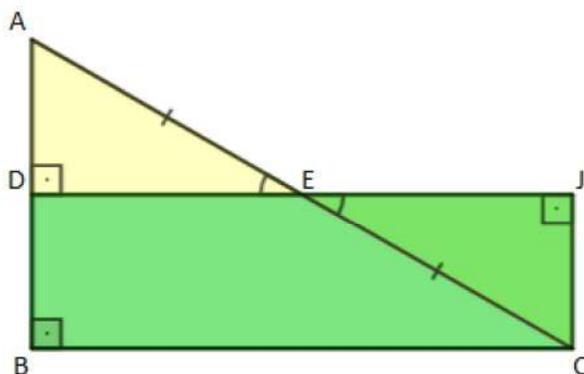
⁵ Um triângulo é acutângulo se, e somente se, tem os três ângulos agudos. (DOLCE; POMPEO, 1985, p.38)

⁶ Um triângulo é obtusângulo se, e somente se, tem um ângulo obtuso. (DOLCE; POMPEO, 1985, p.38)

Apresentaremos uma outra maneira de realizar essa demonstração, utilizando alguns dos conceitos apresentados no Capítulo 2.

Demonstração. Considere o retângulo $BCJD$ sobreposto ao triângulo retângulo ABC , de modo que D e E sejam pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente, conforme ilustra a Figura 38 .

Figura 38 – Retângulo $BCJD$ sobreposto ao triângulo retângulo ABC .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

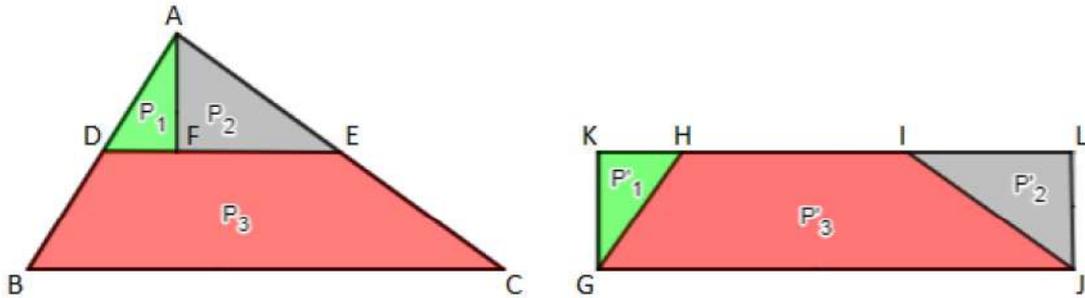
Analisando os triângulos AED e CEJ temos, $\overline{AE} \equiv \overline{CE}$, pois E é ponto médio de \overline{AC} , além disso tem-se $\widehat{AED} \equiv \widehat{CEJ}$, pois são ângulos opostos pelo vértice ⁷ e $\widehat{ADE} \equiv \widehat{CJE} = 90^\circ$, então, pelo Teorema 2.5, concluímos que $\triangle AED \equiv \triangle CEJ$. Daí, podemos concluir que rearranjando as duas partes em que foi decomposto o triângulo ABC , ou seja, o triângulo ADE e o trapézio $BCED$, formamos o retângulo $BCJD$. Portanto, o triângulo retângulo ABC é **equidecomponível** ao retângulo $BCJD$. ■

Agora, vejamos o caso em que o triângulo é acutângulo.

Demonstração. Considere ABC um triângulo acutângulo e $GJLK$ um retângulo de mesma área, conforme ilustra a Figura39.

⁷ Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. (BARBOSA, 2012, p.40)

Figura 39 – Triângulo acutângulo ABC e o retângulo $GJLK$.



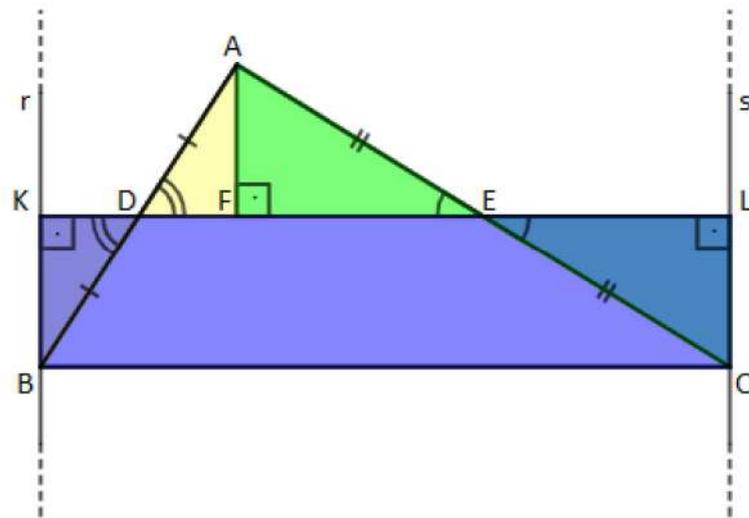
Fonte: O autor via Software Geogebra.

Tome os pontos D e E , pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente, posteriormente, trace o segmento \overline{DE} e marque o ponto F , pé da perpendicular baixada de A em relação a \overline{DE} , e assim, obtemos \overline{AF} uma das altura do triângulo ADE . Perceba que, o triângulo ABC foi decomposto em três partes (o triângulo P_1 , o triângulo P_2 e o trapézio P_3), os quais são reposicionados em P'_1 , P'_2 e P'_3 , por meio de translações paralelas, simetria central ou rotação, com isso, formando o retângulo $GJLK$ com a mesma área de ABC . O que mostra que o triângulo acutângulo ABC é **equidecomponível** ao retângulo $GJLK$. ■

Também podemos chegar a essa conclusão, da seguinte maneira:

Demonstração. Considere o triângulo ABC atendendo as mesmas condições da Figura 39. Trace a reta r passando pelo ponto B com $r \cap \overleftrightarrow{DE} = \{K\}$ e a reta s passando pelo ponto C com $s \cap \overleftrightarrow{DE} = \{L\}$, com isso, obtemos o retângulo $BCLK$ sobreposto ao triângulo acutângulo ABC , conforme ilustra a Figura 40.

Figura 40 – Retângulo $BCLK$ sobreposto ao triângulo acutângulo ABC .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Analisando os triângulos AFD e BKD , note que, $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$, pois D é ponto médio de \overline{AB} , $\widehat{ADF} \equiv \widehat{BDK}$, pois são ângulos opostos pelo vértice, além disso, $\widehat{AFD} \equiv \widehat{BKD} = 90^\circ$, então, pelo Teorema 2.5, obtemos $\triangle AFD \equiv \triangle BKD$.

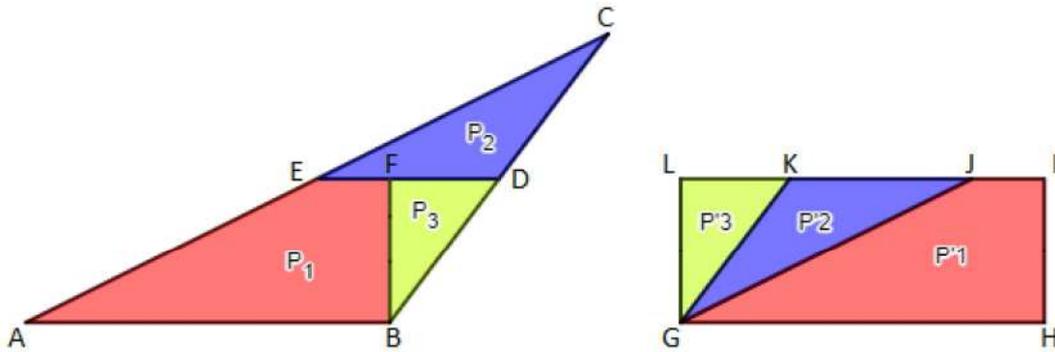
De modo análogo, também obtemos que $\triangle AFE \equiv \triangle CLE$. Com isso, concluímos que as partes em que o triângulo acutângulo foi decomposto, ou seja, o trapézio $BCED$ e os triângulos AFD e AFE , se encaixam no retângulo $BCLK$, por meio de simetria central. Portanto, o triângulo acutângulo ABC é **equidecomponível** ao retângulo $BCLK$.

■

E por fim, veremos o caso envolvendo o triângulo obtusângulo.

Demonstração. Seja ABC um triângulo obtusângulo e $GHIL$ um retângulo de mesma área, conforme ilustra a Figura 41.

Figura 41 – Triângulo obtusângulo ABC e o retângulo $GHIL$.



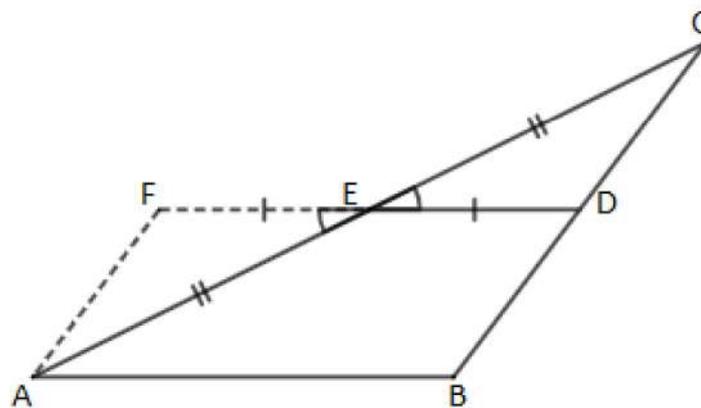
Fonte: O autor via Software Geogebra.

Considere os pontos E e D , pontos médios dos segmentos \overline{AC} e \overline{BC} respectivamente. Trace os segmentos \overline{DE} e \overline{BF} , com \overline{BF} perpendicular à \overline{DE} . Com isso, decomponemos o triângulo obtusângulo ABC nas partes: P_1 , P_2 e P_3 , ou seja, o trapézio retângulo $ABFE$, e os triângulos CDE e BFD , que recolocados em P'_1 , P'_2 e P'_3 , por meio de translações paralelas, simetria central ou rotação, formam o retângulo $GHIL$ de mesma área que o triângulo ABC . O que prova que o triângulo obtusângulo ABC é **equidecomponível** com o retângulo $GHIL$. ■

Vejamos uma outra maneira, de demonstrar esse caso.

Demonstração. Considere o triângulo ABC com D e E pontos médios dos lados \overline{BC} e \overline{AC} , conforme ilustra a Figura 42.

Figura 42 – Triângulo obtusângulo ABC .

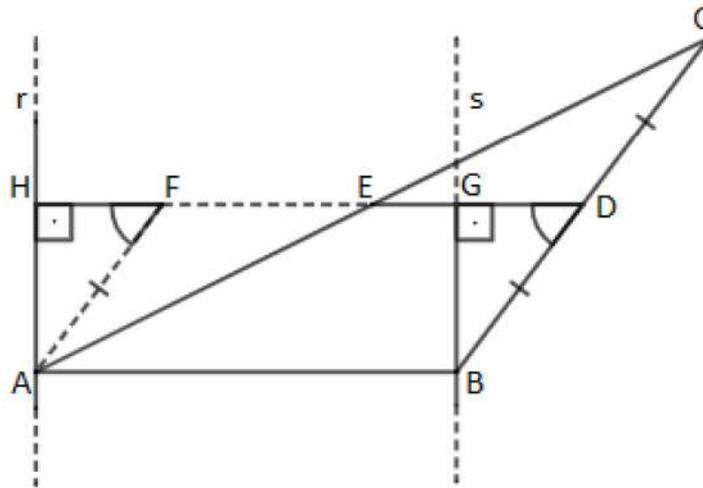


Fonte: O autor via Software Geogebra.

Tome o ponto F pertencente a semirreta \overrightarrow{DE} , de modo que tenhamos $\overline{EF} \equiv \overline{ED}$. Com isso, obtemos $\widehat{AEF} \equiv \widehat{CED}$, pois são ângulos opostos pelo vértice, além disso, $\overline{AE} \equiv \overline{CE}$, visto que, E é ponto médio de \overline{AC} . Portanto, pelo caso de congruência de triângulos (LAL), temos que $\triangle AEF \equiv \triangle CED$.

Agora, trace as retas r e s passando pelos pontos A e B de modo que r e s sejam perpendiculares a reta \overleftrightarrow{DE} , com $r \cap \overleftrightarrow{DE} = \{H\}$ e com $s \cap \overleftrightarrow{DE} = \{G\}$, conforme ilustra a Figura 43.

Figura 43 – Sobreposição do retângulo $GHAB$ no triângulo obtusângulo ABC .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Com isso, obtemos $\widehat{AHF} \equiv \widehat{BGD} = 90^\circ$. Sendo $\overline{BD} \equiv \overline{CD}$, pois D é ponto médio do segmento \overline{BC} e $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$, pois $\triangle AEF \equiv \triangle CDE$, como consequência temos $\overline{AF} \equiv \overline{BD}$, além disso, obtemos:

$$\widehat{GDB} = (\widehat{DEC} + \widehat{ECD}) = (\widehat{FEA} + \widehat{EAF}) = \widehat{HFA},$$

visto que, são ângulos externos dos triângulos CED e AEF . Portanto, pelo Teorema 2.5, obtemos $\triangle AHF \equiv \triangle BGD$. Dessa maneira, concluímos que o triângulo obtusângulo ABC é **equidecomponível** com o retângulo $ABGH$. ■

Lema 4.3. *Todo paralelogramo é equidecomponível a um retângulo que contenha mesma base e mesma altura.*

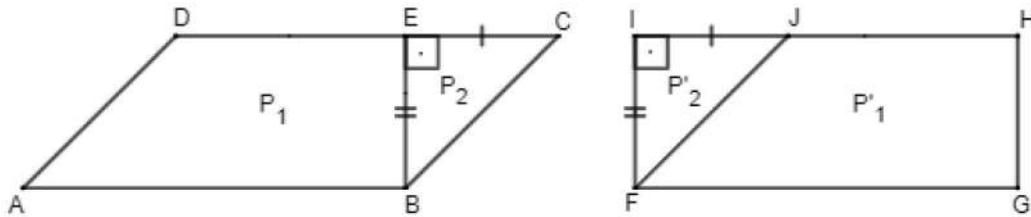
Apresentaremos a demonstração dividindo-a nos dois casos possíveis:

1. Quando a base do paralelogramo é o seu maior lado.
2. Quando a base do paralelogramo é o seu menor lado.

A princípio, vejamos o caso em que a base do paralelogramo é o seu maior lado.

Demonstração. Considere $ABCD$ um paralelogramo e $FGHI$ um retângulo de mesma base e altura, perceba que, nesse caso é sempre possível traçar uma altura interior ao paralelogramo, como por exemplo o segmento \overline{BE} representado no paralelogramo $ABCD$, conforme ilustra a Figura 44.

Figura 44 – Paralelogramo $ABCD$ e retângulo $FGHI$.



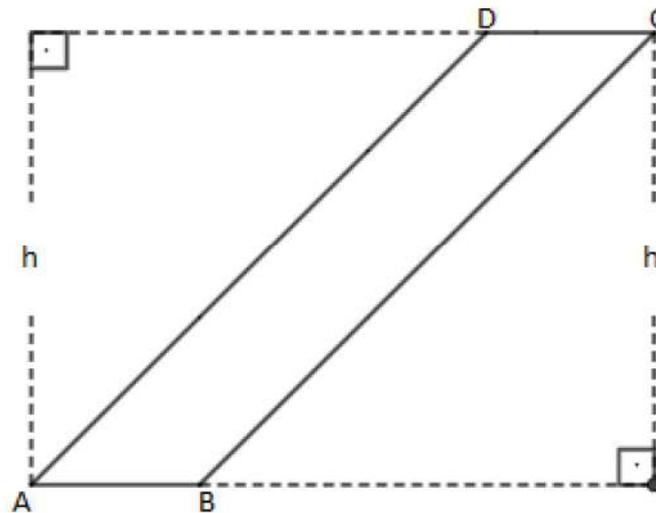
Fonte: O autor via Software Geogebra.

Seja E o ponto que representa o pé da perpendicular baixada de B , em relação ao segmento \overline{CD} do paralelogramo $ABCD$. No retângulo $FGHI$, tome o ponto J entre os pontos I e H de modo a obtermos $\overline{IJ} \equiv \overline{EC}$. Analisando os triângulos BCE e FJI teremos $\overline{BE} \equiv \overline{FI}$ pois, são alturas de $ABCD$ e $FGHI$ respectivamente, e ainda $\widehat{BEC} \equiv \widehat{FIJ} = 90^\circ$, então, pelo caso de congruência de triângulo (LAL), obtemos que $\triangle BCE \equiv \triangle FJI$. Sendo $ABCD = P_1 \cup P_2$ e $FGHI = P'_1 \cup P'_2$, concluímos que $P_1 \equiv P'_1$ e $P_2 \equiv P'_2$, uma vez que o paralelogramo e o retângulo possuem mesma área. Portanto, o paralelogramo $ABCD$ é **equidecomponível** com o retângulo $FGHI$ de mesma base e mesma altura. ■

Agora, vejamos o caso em que a base do paralelogramo é o seu menor lado.

Demonstração. Considere o paralelogramo $ABCD$ e o retângulo $JLMN$ de mesma base e altura, note que, nesse caso qualquer altura do paralelogramo ocorre no seu exterior, conforme ilustra a Figura 45.

Figura 45 – Paralelogramo $ABCD$ de altura h .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

No paralelogramo $ABCD$, tome os pontos E e G em \overline{AD} , os pontos F e H em \overline{BC} e o ponto I entre os pontos C e D , de modo que tenhamos:

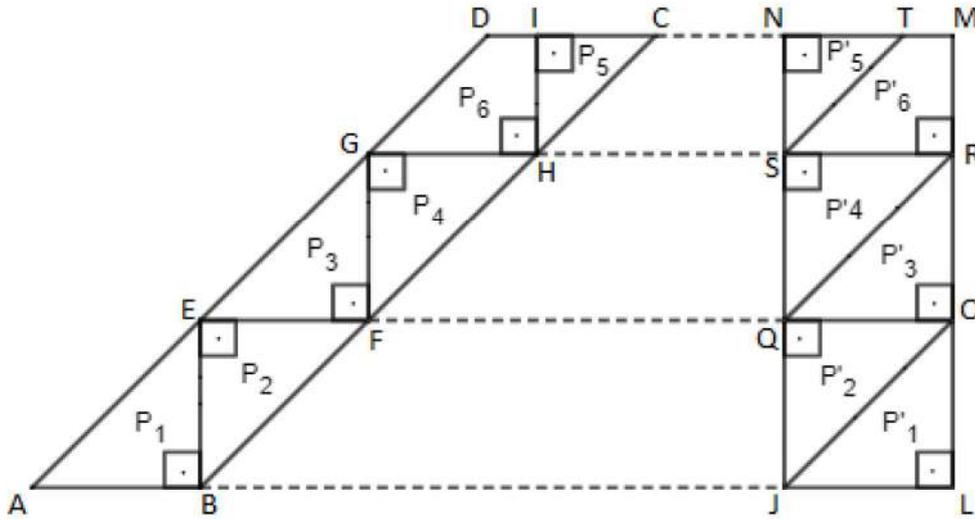
$$\widehat{EBA} \equiv \widehat{BEF} \equiv \widehat{GFE} \equiv \widehat{FGH} \equiv \widehat{GHI} \equiv \widehat{HIC} = 90^\circ.$$

No retângulo $JLMN$ tome os pontos Q e S em \overline{JN} , os pontos O e R em \overline{LM} e o ponto T entre os pontos N e M , de modo a obtermos:

$$\overline{LO} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{JQ}, \overline{OR} \equiv \overline{FG} \equiv \overline{QS}, \overline{NS} \equiv \overline{HI} \text{ e } \overline{NT} \equiv \overline{IC},$$

conforme ilustra a Figura 46.

Figura 46 – Paralelogramo $ABCD$ e retângulo $JLMN$.



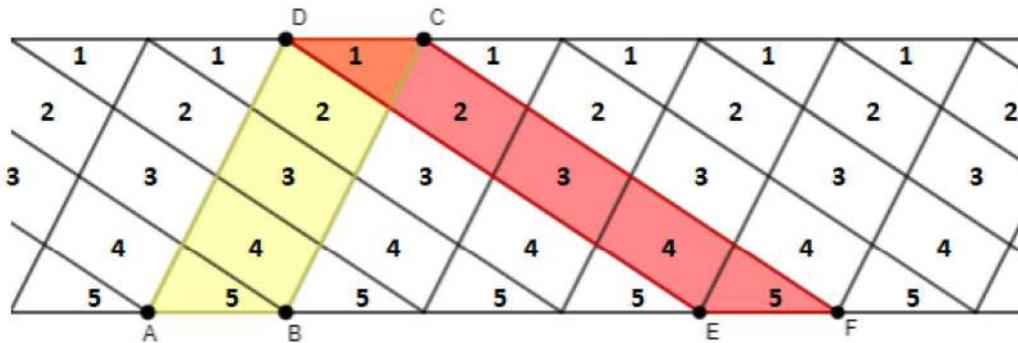
Fonte: O autor via Software Geogebra.

Dessa maneira, o paralelogramo $ABCD$ e o retângulo $FGHI$ admitem as decomposições $ABCD = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6$ e $FGHI = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup P'_4 \cup P'_5 \cup P'_6$. Analisando as partes P_1 e P'_1 , isto é, os triângulos ABE e JLO , temos que $\overline{AB} \equiv \overline{JL}$, por hipótese, $\widehat{EBA} \equiv \widehat{OLJ} = 90^\circ$ e $\overline{BE} \equiv \overline{LO}$ por construção, então, pelo caso de congruência de triângulos (LAL), resulta que $\triangle ABE \equiv \triangle JLO$. Procedendo de maneira análoga, conclui-se que $\triangle BEF \equiv \triangle JQO$, $\triangle EFG \equiv \triangle QOR$, $\triangle FGH \equiv \triangle QSR$ e $\triangle HIC \equiv \triangle SNT$. Sendo $ABCD$ e $JLMN$ polígonos de mesma área, daí obtemos $GHID \equiv SRMT$. Portanto, o paralelogramo $ABCD$ é **equidecomponível** ao retângulo $JLMN$ de mesma base e mesma altura. ■

Lema 4.4. *Se dois paralelogramos têm áreas iguais e têm uma base comum, então, são equidecomponíveis.*

Demonstração. Sejam $ABCD$ e $CDEF$ dois paralelogramos de áreas iguais e \overline{CD} a base comum entre eles, conforme ilustra a Figura 47.

Figura 47 – Paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$.

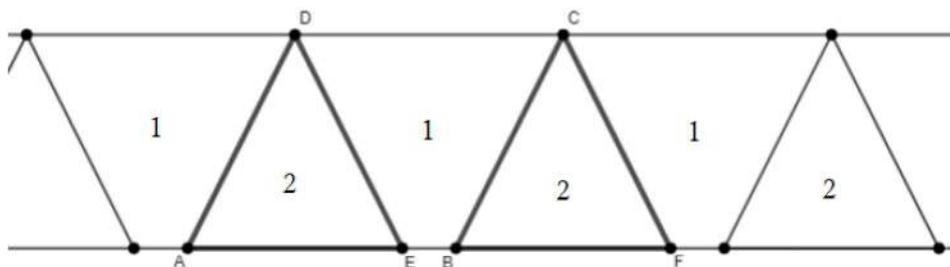


Fonte: O autor via Software Geogebra.

Perceba que, os lados \overline{AB} e \overline{EF} dos paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$ respectivamente, estão contidos na mesma reta o que nos leva a concluir que eles têm mesma altura. Trace de maneira consecutiva na reta \overleftrightarrow{DC} , uma série de segmentos congruentes a \overline{CD} e por cada ponto que representa os extremos desses segmentos, trace retas paralelas à \overline{AD} e \overline{DE} . Note que, as faixas entre as retas paralelas a \overline{CD} e \overline{AF} , determinam uma série de polígonos, conforme a Figura 47. Perceba que, cada um desses polígonos ao serem submetidos a translações paralelas na horizontal, a uma distância igual ao comprimento \overline{CD} , ele coincidirá com um polígono congruente, então, seguindo esse raciocínio podemos concluir que os polígonos congruentes ficam determinados com o mesmo número de acordo com a Figura 47. Dessa maneira, os paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$, podem ser decompostos nos polígonos menores de números 1, 2, 3, 4 e 5, isto é, $ABCD \equiv 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \equiv CDEF$. Portanto, os paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$ são **equidecomponíveis**.

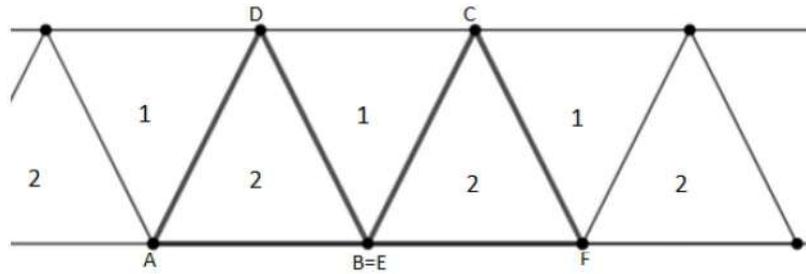
Se ocorrerem os casos em que os lados \overline{DE} e \overline{BC} dos paralelogramos, não se intersectarem ou os vértices B e E coincidirem, conforme ilustram as Figuras 48 e 49 respectivamente.

Figura 48 – Paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$ com $\overline{DE} \cap \overline{BC} = \emptyset$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Figura 49 – Paralelogramos $ABCD$ e $CDEF$ com $B = E$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Perceba que, pelo Teorema 2.3 os triângulos AED e BFC são congruentes, pois $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$ por construção, $\widehat{DEA} \equiv \widehat{CFB}$ e $\widehat{EAD} \equiv \widehat{FBC}$ pelo paralelismo.

Na situação ilustrada pela Figura 48, basta supor o paralelogramo $ABCD$ decomposto no triângulo AED e no trapézio $CDEB$, com essas duas partes obtidas podemos rearranjá-las e formar o paralelogramo $CDEF$.

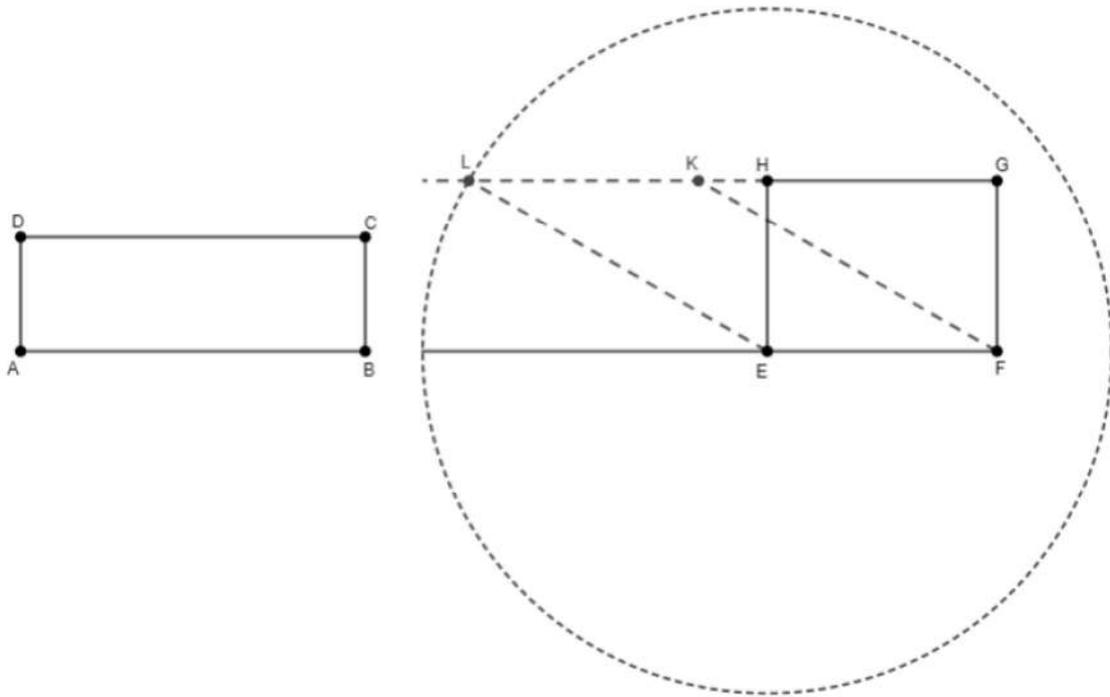
Já na situação ilustrada na Figura 49, é suficiente decompor o paralelogramo nos triângulos AED e CDB , rearranjando essas duas partes podemos formar o paralelogramo $CDEF$, pois o triângulo CDB é comum e $\triangle AED \equiv \triangle BFC$.

Portanto, nesses casos o Lema 4.4 também é válido. ■

Lema 4.5. *Dois retângulos que têm áreas iguais são equidecomponíveis.*

Demonstração. Considere os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ ambos com mesma área. Suponha sem perda de generalidade, que o lado \overline{AB} , seja o maior entre os lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{EF} e \overline{FG} . Agora, considere a semirreta \overrightarrow{GH} e a circunferência de centro E e raio \overline{AB} a qual intersecta a semirreta \overrightarrow{GH} no ponto L , pois $\overline{EH} = \overline{FG} < \overline{AB}$ e assim, obtemos $\overline{EL} \equiv \overline{AB}$. Tome o ponto K entre os pontos L e H , de modo a obtermos o segmento $\overline{LK} \equiv \overline{EF}$ dessa maneira, construímos o paralelogramo $EFKL$, conforme ilustra a Figura 50.

Figura 50 – Paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ com mesma área.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

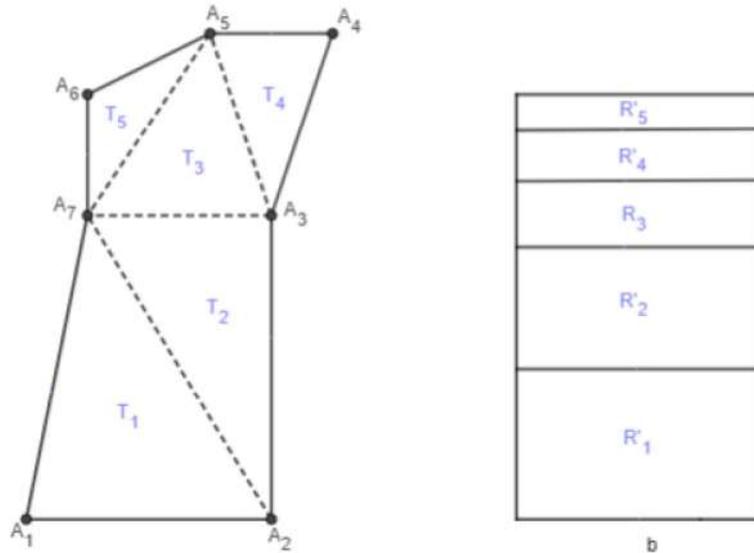
Note que, os paralelogramos $EFKL$ e $EFGH$ possuem mesma área e têm \overline{EF} (base comum), então, pelo Lema 4.4 eles são equidecomponíveis. Além disso, perceba que os paralelogramos $ABCD$ e $EFKL$ possuem mesma área (por hipótese) e $\overline{AB} \equiv \overline{EL}$ (por construção), aplicando uma rotação em $EFKL$ de modo que tenhamos \overline{EL} paralelo a \overline{AB} , podemos concluir que também em virtude do Lema 4.4, eles são equidecomponíveis. Portanto, como o paralelogramo $EFKL$ é equidecomponível a cada um dos retângulos $ABCD$ e $EFGH$, pelo Lema 4.1 conclui-se que os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ são equidecomponíveis. ■

Lema 4.6. *Todo polígono é equidecomponível com algum retângulo.*

Demonstração. Seja P um polígono qualquer de vértices A_1, A_2, \dots, A_n . Pelo Teorema 2.10, podemos decompô-lo em triângulos adjacentes uns aos outros. De acordo com o Lema 4.2, esses triângulos são equidecomponíveis a retângulos. Pelo Lema 4.5, cada um desses retângulos são equidecomponíveis a um retângulo de mesma área. Suponha que b seja a medida da base de cada um desses retângulos. Por transitividade, os triângulos em que o polígono P foi decomposto são equidecomponíveis a retângulos de mesma base b . Empilhando esses retângulos uns sobre os outros, obtemos um retângulo de base b , o qual é equidecomponível ao polígono P , conforme ilustra a Figura 51.



Figura 51 – Polígono A_1, A_2, \dots, A_7 equidecomponível ao retângulo de base b .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Após as discussões apresentadas até o momento nesse capítulo, agora provaremos o Teorema 3.1, ou seja:

Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Dois polígonos com a mesma área são equidecomponíveis

Demonstração. Considere os polígonos P e P' de mesma área. Tome arbitrariamente um segmento de comprimento b . Pelo Lema 4.6, todo polígono é equidecomponível com algum retângulo, então, P é equidecomponível com um retângulo R de base b . Do mesmo modo, P' é equidecomponível a um retângulo R' de mesma base b . Por hipótese, temos que P e P' possuem mesma área, conseqüentemente, R e R' têm mesma área. Sendo b a medida das bases desses retângulos, segue-se que as suas alturas também são iguais, então, de acordo com os Lemas 4.3, 4.4 ou 4.5, obtemos que R e R' são equidecomponíveis. Portanto, pelo Lema 4.1, concluímos que P e P' são equidecomponíveis.



Diante dessa discussão, é comum nos questionarmos se não existe um teorema análogo para poliedros. No Congresso Internacional de Matemática ocorrido em Paris, em agosto de 1900, o grande matemático David Hilbert incluiu como terceiro problema da sua famosa lista de 23 problemas o seguinte: “Determinar se dois poliedros com

o mesmo volume são sempre equidecomponíveis”. Seis meses depois, seu aluno Max Dehn demonstrou que um tetraedro regular e um cubo com o mesmo volume, não são equidecomponíveis.

Teorema de Denh. O cubo e o tetraedro regular de mesmo volume não são equidecomponíveis

Demonstração. Vide, (BOLSTIANSKI, 1996, p.42). ■

O Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, mostra que os conceitos de equivalência e equidecomposição são idênticos para polígonos, é muito comum encontrarmos os dois como sinônimos, conforme apresentamos a definição de polígonos equivalentes no Capítulo 2. Dessa maneira, esse teorema abre um leque de possibilidade a serem investigadas, das quais destacaremos a seguinte situação: “É possível impor condições extras sobre o número ou a disposição das partes, com as quais se compõe os polígonos equivalentes?” Em 1951 mais de um século depois da demonstração original, os matemáticos suíços H. Hadwiger e P. Glur estabeleceram que no Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, se podia exigir a condição extra de que as partes em que um dos polígonos equivalentes é decomposto e as partes correspondentes do segundo polígono tenham respectivamente lados paralelos. E assim, fizeram um refinamento no teorema, ficando do seguinte modo:

Teorema 4.7 (Teorema de Hadwiger e Glur). “Dois polígonos com áreas iguais são sempre TR-equidecomponíveis”.

Segundo Lima (LIMA et al., 2007, p.35):

Diremos que os polígonos P e P' são TR-equidecomponíveis quando eles admitem decomposições

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \text{ e } P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n,$$

tais que, para $i = (1, 2, \dots, n)$, pode-se obter P'_i a partir de P_i por meio de uma translação ou de uma rotação de 180° (com centro num ponto qualquer do plano).

Analisando os polígonos envolvidos nas Figuras 37, 39 e 41, note que os triângulos à esquerda são TR-equidecomponíveis aos retângulos à direita, visto que os trapézios são transladados, os triângulos são girados de 180° e depois ocorre a translação.

Agora, verificando as Figuras 44 e 46 percebe-se que, os paralelogramos à esquerda são TR-equidecomponíveis aos retângulos à direita. Na realidade, nessas situações só foram utilizadas translações, o que implica em um caso ainda mais restrito de equidecomponibilidade. Diz-se, nesse caso, que esses polígonos são T-equidecomponíveis.

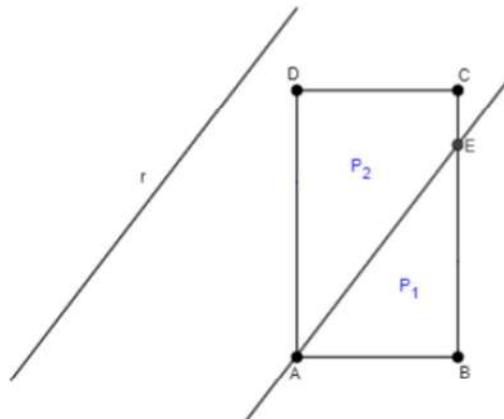
Se averiguarmos os passos realizados na demonstração apresentada para o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, ficará evidente que apenas em um momento foram utilizadas congruências, nas quais uma figura foi levada a coincidir com outra se submetendo a um movimento que pode não ser uma translação ou uma simetria central. Note que, esse fato ocorre no final da demonstração: decompõem o polígono P em triângulos T_i para $i = 1, 2, \dots, n$, em seguida cada triângulo é TR-equidecomponível a um retângulo R_i , cada retângulo R_i é TR-equidecomponível a um retângulo R'_i cuja base tem comprimento b , e por fim, são empilhados uns sobre os outros, formando um retângulo de base b , TR-equidecomponível ao polígono P . Perceba que, nesse último momento antes de ocorrer o empilhamento, talvez seja necessário realizar algumas rotações de ângulos diferente de 180° .

Diante dessa conclusão, para completar a demonstração do Teorema de Hadwiger-Glur, é suficiente mostrar o seguinte:

“Todo retângulo R é TR-equidecomponível a outro retângulo R' cuja base é paralela a uma reta r .”

Demonstração. Considere um retângulo $R=ABCD$, uma reta r e um segmento de reta \overline{AE} , com $E \in \overline{BC}$ e $\overline{AE} \parallel r$. Dessa maneira, teremos \overline{AE} fornecendo uma decomposição $R=P_1 \cup P_2$, conforme ilustra a Figura 52.

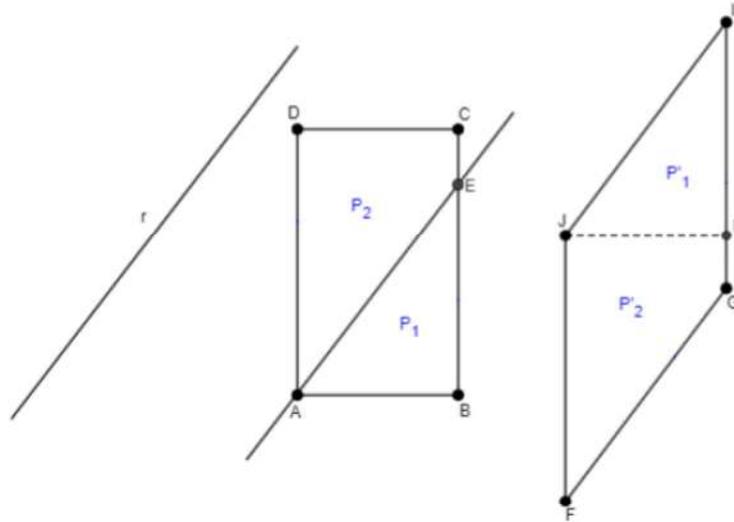
Figura 52 – Retângulo $R=ABCD$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Transladando o triângulo P_1 para outra extremidade de R obtemos o paralelogramo $FGIJ=P'_1 \cup P'_2$, que por definição é TR-equidecomponível a R , conforme ilustra a Figura 53.

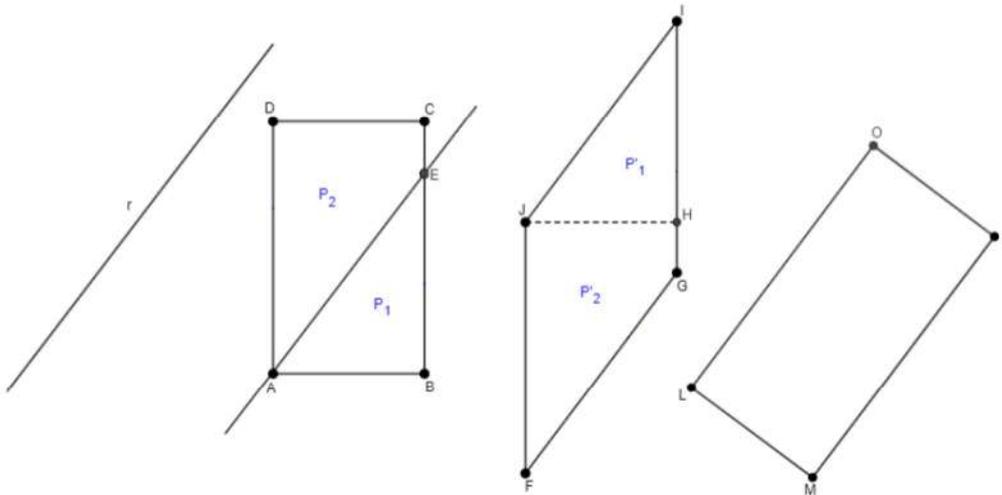
Figura 53 – Retângulo $R=ABCD$ equidecomponível ao paralelogramo $FGIJ$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Por meio do Lema 4.3 e do Lema 4.5, o paralelogramo $FGIJ$ é TR-equidecomponível a um retângulo R' , cuja base tem comprimento b e é paralela a r , conforme ilustra a Figura 58.

Figura 54 – Retângulos $R=ABCD$ TR-equidecomponível a $R''=LMNO$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.



4.1 A equidecomposição de polígonos em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras ⁸ é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático. Desde o século 4 a.C. até o século 20 d.C. inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras apareceram. Em 1940, o matemático americano E.S. Loomis publicou 370 demonstrações, mas ainda há mais. (LIMA et al., 2012, p.71)

O objetivo dessa seção é analisarmos a equidecomposição de polígonos em algumas demonstrações clássicas do Teorema de Pitágoras. Porém, antes disso, demonstraremos **dois teoremas** que nos auxiliarão na demonstração.

Teorema 4.8. *Todo retângulo pode ser decomposto em um quadrado de mesma área*

A princípio, mostraremos que sempre existe um quadrado que possui a mesma área de um dado retângulo com dimensões a e b . Descreveremos como construir com régua e compasso o lado desse quadrado, posteriormente, mostraremos a equidecomposição entre o retângulo e o quadrado de mesma área.

Demonstração. Considere três pontos colineares ⁹ A , B e C , de modo que B esteja entre A e C , $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$ com $a > b$, os demais casos são inteiramente análogos. Trace duas circunferências de raio $a + b$, uma com centro em A e outra com centro em C e denomine de D e E os pontos de interseção entre elas. Trace a reta \overleftrightarrow{DE} e chame de M a interseção dessa reta com o segmento \overline{AC} . Logo, o segmento \overline{AM} mede $\frac{a+b}{2}$, uma vez que \overline{DM} é altura do triângulo equilátero ¹⁰ ACD e portanto, é mediana ¹¹ conforme ilustra a Figura 55.

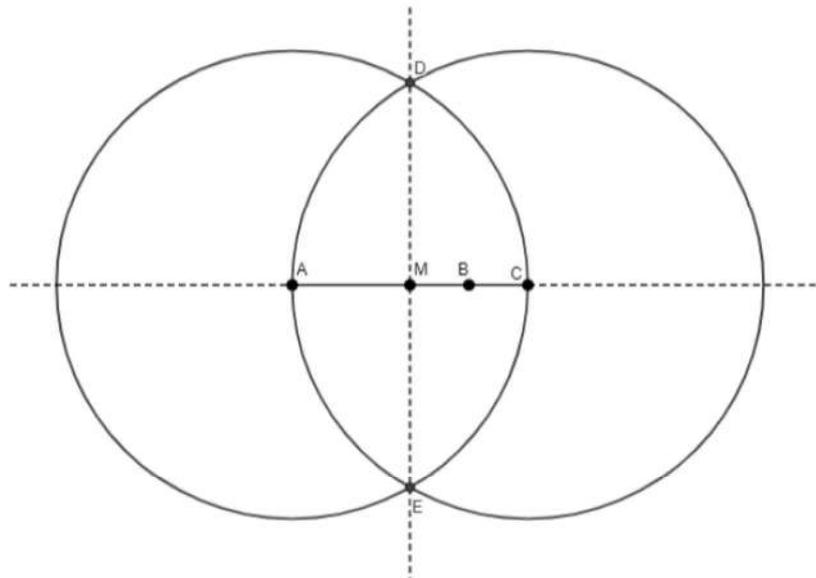
⁸ Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. (LIMA et al., 2012, p.73)

⁹ Pontos colineares são os que pertencem a uma mesma reta. (GONÇALVES, 1995, p.12)

¹⁰ Um triângulo ABC é denominado **equilátero**, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$. (NETO, 2013, p.21)

¹¹ Mediana de um triângulo é um segmento que possui uma das extremidades em um vértice do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice. (GONÇALVES, 1995, p.61)

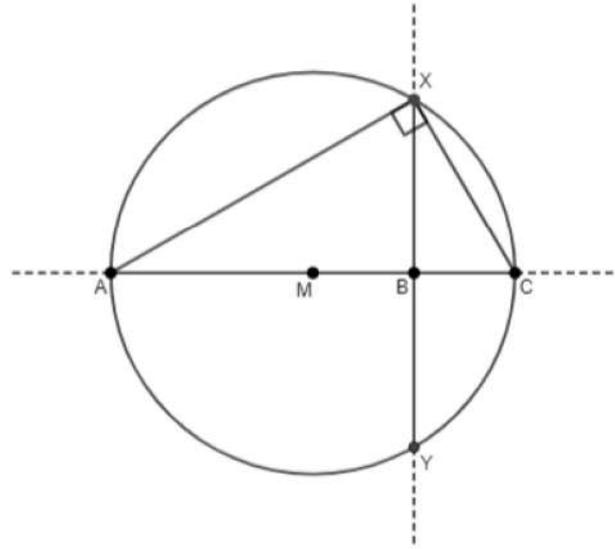
Figura 55 – Construção do ponto $M = \frac{a+b}{2}$, ponto médio de \overline{AC} .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, trace uma circunferência de centro no ponto médio M e raio $\frac{a+b}{2}$. Trace uma reta perpendicular à \overline{AC} passando por B e chame de X e Y as interseções dessa perpendicular com a circunferência. Com isso, obtemos que o segmento \overline{BX} é altura do triângulo retângulo AXC , visto que, nesse triângulo o ângulo $\widehat{AXC} = 90^\circ$ pois, é um ângulo inscrito na semicircunferência. Das relações métricas em AXC , obtemos $\overline{BX}^2 = a \cdot b$, o que implica $\overline{BX} = \sqrt{a \cdot b}$ que é a medida do lado do quadrado desejado, conforme ilustra a Figura 56.

Figura 56 – $\overline{BX} = \sqrt{a \cdot b}$, lado do quadrado desejado.

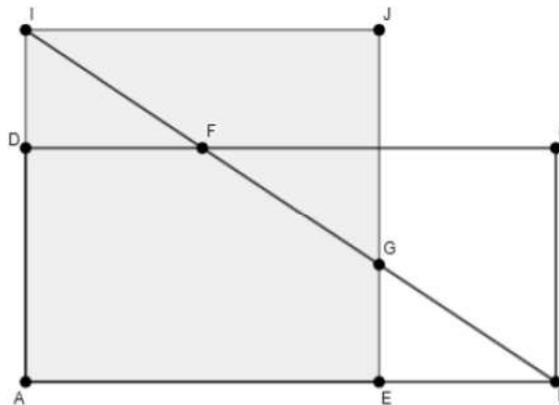


Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, vejamos como podemos justificar a equidecomposição do retângulo no quadrado de mesma área.

Considere o retângulo $ABCD$ com $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, além disso, o quadrado $AEJI$, de lado c , com $c = \sqrt{a \cdot b}$ de modo que estejam sobrepostos. Tome os pontos F e G , pontos de interseção de \overline{IB} com \overline{CD} e \overline{IB} com \overline{JE} respectivamente. Sem perda de generalidade, suponha $a > b$ conforme ilustra a Figura 57.

Figura 57 – Retângulo $ABCD$ sobreposto ao quadrado $AEJI$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Perceba que, para mostrar que $ABCD$ é equidecomponível a $AEJI$ é suficiente mostrar que $\triangle GJI \equiv \triangle BCF$ e que $\triangle DFI \equiv \triangle EBG$. Analisando os triângulos DFI

e ABI temos que $\widehat{IDF} \equiv \widehat{IAB} = 90^\circ$ e $\widehat{DIF} \equiv \widehat{AIB}$ (ângulo comum), pelo Teorema 2.7 obtemos que $\triangle DFI \sim \triangle ABI$. Dessa maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{ID}}{\overline{DF}} &= \frac{\overline{IA}}{\overline{AB}} \\ \Rightarrow \frac{c-b}{\overline{DF}} &= \frac{c}{a} \\ \Rightarrow a \cdot c - a \cdot b &= c \cdot \overline{DF} \\ \Rightarrow a \cdot c - c^2 &= c \cdot \overline{DF} \\ \Rightarrow c(a-c) &= c \cdot \overline{DF} \\ \Rightarrow \overline{DF} &= a - c. \end{aligned}$$

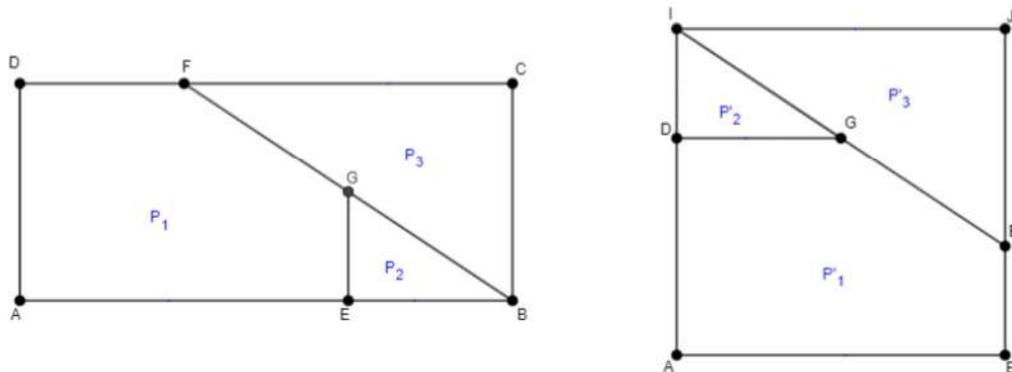
Mas,

$$\begin{aligned} \overline{DF} &= a - \overline{CF} \\ \Rightarrow a - c &= a - \overline{CF} \\ \Rightarrow \overline{CF} &= c. \end{aligned}$$

Analisando os triângulos GJI e BCF teremos $\widehat{GIJ} \equiv \widehat{BFC}$, pois são ângulos correspondentes, $\overline{IJ} \equiv \overline{CF} = c$ e $\widehat{IJC} \equiv \widehat{FBC} = 90^\circ$. Portanto, pelo Teorema 2.3, obtemos que $\triangle GJI \equiv \triangle BCF$.

Agora, verificando os triângulos DFI e EBG , temos que $\widehat{BEG} \equiv \widehat{FDI} = 90^\circ$, $\overline{BE} \equiv \overline{DF}$, visto que $\overline{EB} = a - c = \overline{DF}$ e $\widehat{GBE} \equiv \widehat{IFD}$, pois são ângulos correspondentes, então pelo Teorema 2.3, conclui-se $\triangle DFI \equiv \triangle EBG$. Portanto, o retângulo $ABCD$ e o quadrado $AEJI$ de mesma área são **equidecomponíveis**, uma vez que $P_1 \equiv P'_1$, $P_2 \equiv P'_2$ e $P_3 \equiv P'_3$, conforme ilustra a Figura 58.

Figura 58 – Retângulo $ABCD$ equidecomponível com o quadrado $AEJI$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

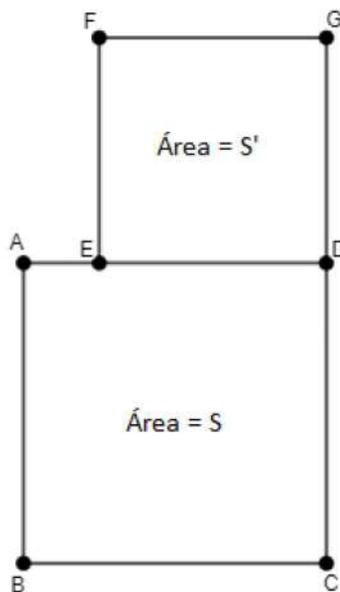


Agora, vejamos o próximo teorema.

Teorema 4.9. *Dois quadrados são equidecomponíveis a um quadrado cuja área é igual à soma das áreas dos outros dois*

Demonstração. Considere os quadrados $ABCD$ e $DEFG$ de áreas $\overline{AB}^2 = S$ e $\overline{DG}^2 = S'$ respectivamente, conforme ilustra a Figura 59.

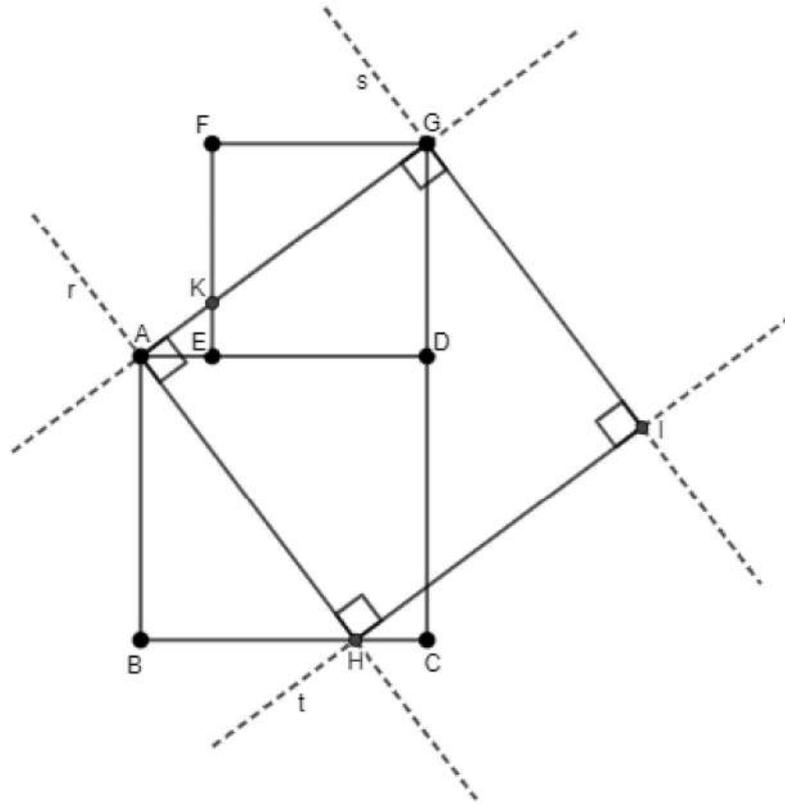
Figura 59 – Quadrados $ABCD$ e $DEFG$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Trace o segmento \overline{AG} , com $\overline{AG} \cap \overline{EF} = \{K\}$ além disso, considere as retas r e s perpendiculares à \overleftrightarrow{AG} , passando pelos pontos A e G respectivamente, com $r \cap \overline{BC} = \{H\}$, dessa maneira obtemos \overline{AH} (hipotenusa do triângulo ABH). Agora, trace a reta t perpendicular a reta r passando por H , de modo que intersecte a reta s no ponto I , como consequência obtemos o quadrado $AHIG$, conforme ilustra a Figura 60.

Figura 60 – Construção do quadrado $AHIG$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

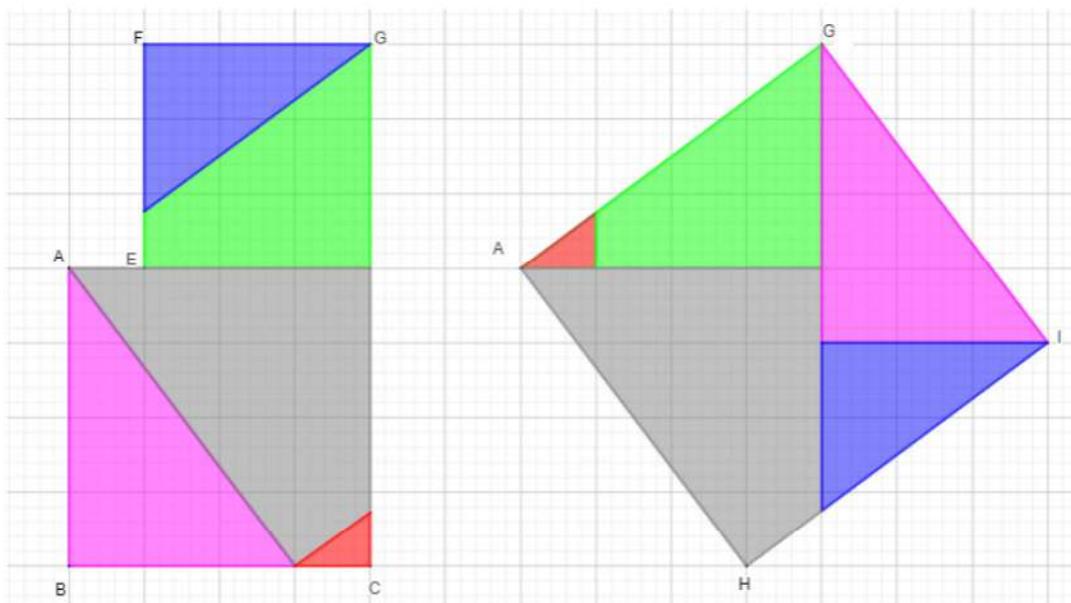
Seja $\widehat{HAD} = \beta$, temos que $\widehat{BAD} \equiv \widehat{HAG} = 90^\circ$, pois são ângulos de um quadrado, então, $\widehat{BAH} = 90^\circ - \beta = \widehat{DAG}$, o que implica em $\widehat{BAH} \equiv \widehat{DAG}$. Analisando os triângulos ABH e ADG teremos $\widehat{BAH} \equiv \widehat{DAG}$, $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$, visto que são lados do quadrado $ABCD$ e $\widehat{HBA} \equiv \widehat{GDA} = 90^\circ$, pelo Teorema 2.3 conclui-se que $\triangle ABH \equiv \triangle ADG$. Tome $\overline{BH} \equiv \overline{DG}$ da congruência entre os triângulos ABH e ADG , sendo a área do quadrado $AHIG = \overline{AH}^2$ e Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH , obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{BH}^2 &= \overline{AH}^2 \\ \Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{DG}^2 &= \overline{AH}^2. \end{aligned}$$

Por meio do Teorema 3.1, conclui-se que o polígono $ABCGFE$ ilustrado na Figura 60, formado pelos quadrados $ABCD$ e $DEFG$ é **equidecomponível** ao quadrado $AHIG$. ■

Uma possibilidade de decomposição do polígono $ABCGFE$ no quadrado $AHIG$ está ilustrada na Figura 61.

Figura 61 – polígono $ABCGFE$ equidecomponível ao quadrado $AHIG$.

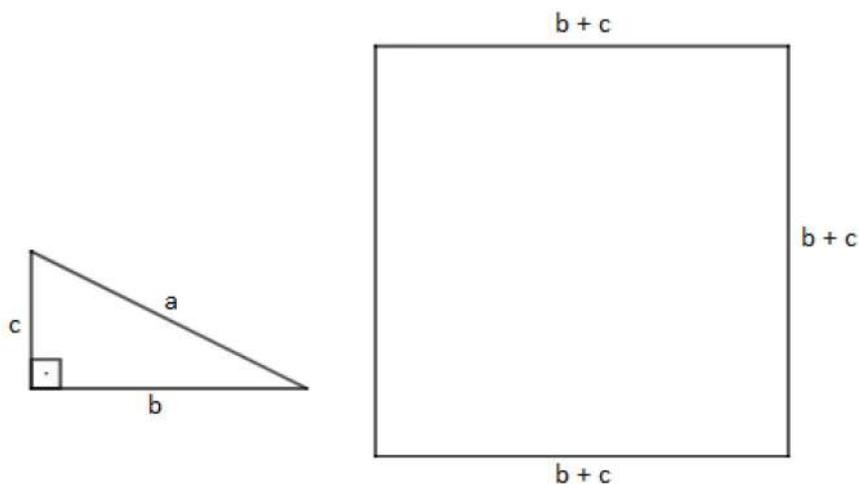


Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, vejamos a equidecomposição de polígonos em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Demonstração. Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , sem perda de generalidade suponha, $b > c$ além disso, tome o quadrado cujo lado mede $b + c$, conforme ilustra a Figura 62.

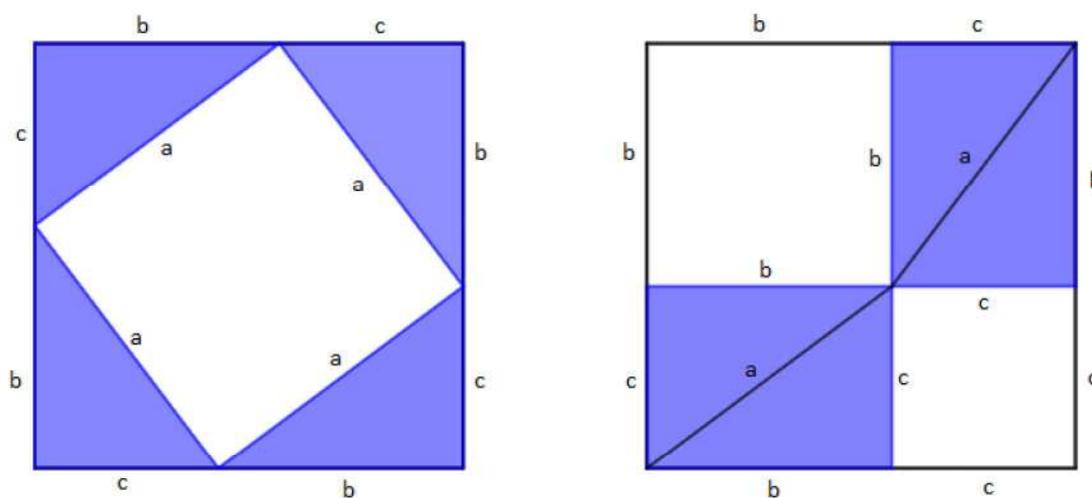
Figura 62 – Triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c e o quadrado cujo lado mede $b + c$



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, apresentaremos duas maneiras distintas de decompormos o quadrado de lado $b + c$. Na decomposição do quadrado da esquerda, teremos quatro triângulos congruentes ao que foi considerado, além do quadrado de lado a , já na decomposição do quadrado da direita, teremos novamente quatro triângulos congruentes ao que foi considerado mais um quadrado de lado b e outro de lado c , conforme ilustra a Figura 63.

Figura 63 – Decomposição do quadrado de lado $b + c$ de dois modos distintos



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Retire os quatro triângulos em ambas decomposições, com isso, restará na decomposição da esquerda o quadrado de área a^2 e na decomposição da direita os quadrados de áreas b^2 e c^2 . Portanto, é notável que as áreas restantes em cada decomposição são iguais, o que implica, $a^2 = b^2 + c^2$. Como consequência do Lema 4.9, conclui-se que os quadrados de lados b e c são **equidecomponíveis** ao quadrado de lado a . ■

Vejamos a equidecomposição de polígonos, na demonstração do Teorema de Pitágoras atribuída à **Henry Perigal**.¹²

Na demonstração de Perigal, mostraremos que considerando um triângulo retângulo ABC de hipotenusa \overline{BC} e catetos \overline{AB} e \overline{AC} . Ao tomarmos o centro do quadrado construído sobre o maior cateto e por ele traçarmos uma reta paralela e uma reta perpendicular à hipotenusa, formaremos quatro quadriláteros congruentes que juntamente com o quadrado construído sobre o menor cateto, são rearranjados formando

¹² Henry Perigal (1801-1898) nasceu na Inglaterra, era um livreiro em Londres, e o que se sabe hoje a seu respeito é devido a seu irmão, Frederick Perigal (dez anos mais jovem), que, na época da morte de Perigal, reuniu em um pequeno livro dados da vida de Henry e de outros.

um quadrado equidecomponível ao quadrado construído sobre o lado \overline{BC} , conforme ilustraremos mais adiante.

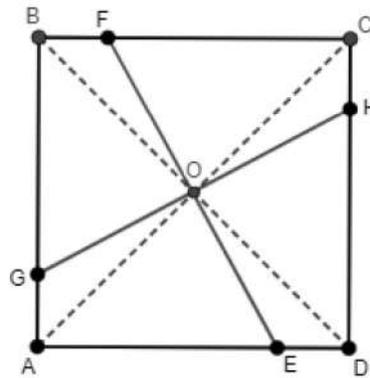
Para uma melhor compreensão dos argumentos que serão utilizados na demonstração, iniciaremos mostrando a validade das afirmações a seguir, que serão divididas em duas partes. Veja a Figura 64, para compreender as etapas da prova.

Primeira parte. O ponto O é ponto médio do segmento \overline{EF} , $\overline{DE} \equiv \overline{BF}$ e $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$.

Segunda parte. Se tivermos o segmento \overline{GH} passando por O , com $G \in \overline{AB}$ e $H \in \overline{CD}$, então, os quadriláteros $GBFO$, $FCHO$, $HDEO$ e $EAGO$ são congruentes.

Demonstração. Considere um quadrado $ABCD$ e o ponto O ponto de interseção de suas diagonais, ou seja, seu centro. Tome o ponto E , com $E \in \overline{AD}$, além disso, considere \overline{EF} passando pelo ponto O com $F \in \overline{BC}$ e o segmento \overline{GH} também passando por O perpendicular à \overline{EF} , com $G \in \overline{AB}$ e $H \in \overline{CD}$.

Figura 64 – Quadrado $ABCD$



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Analisando os triângulos BOF e DOE , note que $\widehat{DOE} \equiv \widehat{BOF}$, pois são opostos pelo vértice, $\overline{BO} \equiv \overline{DO}$, porque O é ponto médio de \overline{BD} e $\widehat{FBO} \equiv \widehat{EDO}$, já que são ângulos alternos internos, então, pelo Teorema 2.3 temos que $\triangle BOF \equiv \triangle DOE$. Daí, conclui-se que $\overline{FO} \equiv \overline{EO}$ como consequência, temos que o ponto O também é ponto médio do segmento \overline{EF} e $\overline{DE} \equiv \overline{BF}$. Como $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ pois são lados do quadrado $ABCD$, então, teremos $\overline{AE} \equiv \overline{AD} - \overline{DE} \equiv \overline{BC} - \overline{BF} \equiv \overline{CF}$, logo $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$, o que prova a primeira parte.

Para provar a segunda parte, isto é, que os quadriláteros $GBFO$, $FCHO$, $HDEO$ e $EAGO$ são congruentes, será suficiente provarmos que $\triangle AOG \equiv \triangle BOF \equiv \triangle COH \equiv \triangle DOE$ e também, $\triangle AOE \equiv \triangle BOG \equiv \triangle COF \equiv \triangle DOH$.

Analisando os triângulos BOF e COH , perceba que $\widehat{FBO} \equiv \widehat{HCO} = 45^\circ$, pois as diagonais bissectam os ângulos dos vértices do quadrado, $\overline{BO} \equiv \overline{CO}$ visto que, represen-

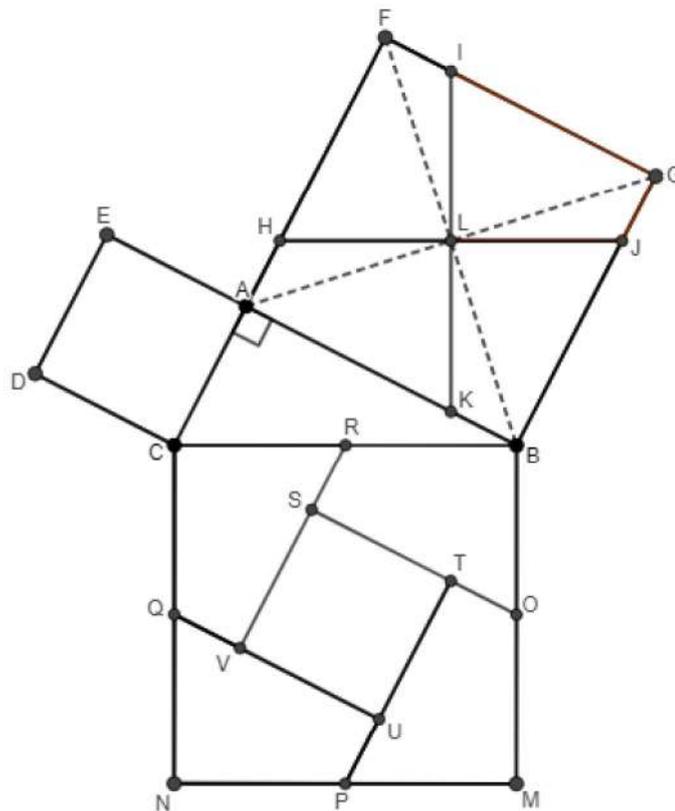
tam metade da diagonal do quadrado e $\widehat{BOF} \equiv \widehat{COH}$ já que $\widehat{BOC} \equiv \widehat{FOH} = 90^\circ$ e ambos contém \widehat{FOC} , então, pelo Teorema 2.3, segue que $\triangle BOF \equiv \triangle COH$. Procedendo de maneira análoga obteremos, $\triangle AOG \equiv \triangle DOE$ e pela prova da primeira parte temos $\triangle BOF \equiv \triangle DOE$.

Sendo $\triangle AOG \equiv \triangle BOF \equiv \triangle COH \equiv \triangle DOE$, conclui-se que $\overline{AG} \equiv \overline{BF} \equiv \overline{CH} \equiv \overline{DE}$, como consequência obtemos $\overline{GB} \equiv \overline{FC} \equiv \overline{HD} \equiv \overline{EA}$. Sendo O o ponto médio dos segmentos \overline{EF} e \overline{GH} . Portanto, pelo Teorema 2.4 tem-se que $\triangle AOE \equiv \triangle BOG \equiv \triangle COF \equiv \triangle DOH$. ■

Agora, vejamos a demonstração.

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC de hipotenusa \overline{BC} e catetos \overline{AC} e \overline{AB} , além disso, os quadrados formados em cada um dos seus lados, ou seja, $BCNM$, $ACDE$ e $ABGF$. Seja L o centro do quadrado $ABGF$ e passando por ele considere os segmentos \overline{HJ} e \overline{IK} respectivamente paralelo e perpendicular à \overline{BC} . Tome os pontos R, Q, P e O (pontos médios dos lados do quadrado $BCNM$), trace os segmentos \overline{RV} e \overline{PT} paralelos à \overline{AC} e os segmentos \overline{QU} e \overline{OS} paralelos à \overline{AB} , conforme ilustra a Figura 65.

Figura 65 – Demonstração de Perigal



Fonte: O autor via Software Geogebra.

De acordo com o que mostramos anteriormente, podemos afirmar que $\square AHLK \equiv \square FILH \equiv \square GJLI \equiv \square BKLLJ$. Daí, obtemos as seguintes relações:

$$\overline{AH} \equiv \overline{FI} \equiv \overline{GJ} \equiv \overline{BK} \quad (1)$$

$$\overline{HF} \equiv \overline{IG} \equiv \overline{JB} \equiv \overline{KA} \quad (2)$$

$$\overline{HL} \equiv \overline{IL} \equiv \overline{JL} \equiv \overline{KL} \quad (3)$$

Observe que, o quadrilátero $BCHJ$ é um paralelogramo e por definição, tem os lados paralelos iguais, assim obtemos:

$$\overline{BC} \equiv \overline{JH} \text{ e } \overline{CH} \equiv \overline{BJ} \quad (4)$$

Como R é ponto médio de \overline{BC} e L é ponto médio de \overline{HJ} , segue da relação (4) que:

$$\overline{HL} \equiv \overline{LJ} \equiv \overline{CR} \equiv \overline{RB} \quad (5)$$

Agora, provaremos a congruência entre os seguintes quadriláteros:

$$\square AHLK \equiv \square RSOB, \square FILH \equiv \square TOMP, \square GJLI \equiv \square UPNQ \text{ e } \\ \square BKLLJ \equiv \square VQCR.$$

Considere $\square AHLK \equiv \square RSOB$, as demais situações são provadas de modo análogo. Perceba que, por construção e pelas relações (3) e (5) obtemos $\overline{HL} \equiv \overline{LK} \equiv \overline{RB} \equiv \overline{BO}$ e $\widehat{HLK} \equiv \widehat{RBO}$, pois são ângulos retos. Daí, pelo caso de congruência de triângulos (LAL) teremos:

$$\triangle HLK \equiv \triangle RBO \quad (6)$$

E assim, podemos concluir que:

$$\overline{HK} \equiv \overline{RO}, \widehat{LHK} \equiv \widehat{BRO} \text{ e } \widehat{LKH} \equiv \widehat{BOR} \quad (7)$$

Ainda temos, $\overline{HL} \parallel \overline{RB}$, $\overline{LK} \parallel \overline{BO}$, $\overline{KA} \parallel \overline{OS}$ e $\overline{AH} \parallel \overline{SR}$. Daí, obtemos:

$$\widehat{HLK} \equiv \widehat{RBO}, \widehat{LKA} \equiv \widehat{BOS}, \widehat{KAH} \equiv \widehat{OSR} \text{ e } \widehat{AHL} \equiv \widehat{SRB} \quad (8)$$

$$\widehat{AHK} \equiv \widehat{AHL} - \widehat{KHL} \equiv \widehat{SRB} - \widehat{ORB} \equiv \widehat{SRO} \quad (9)$$

$$\widehat{AKH} \equiv \widehat{AKL} - \widehat{HKL} \equiv \widehat{SOB} - \widehat{ROB} \equiv \widehat{SOR} \quad (10)$$

Das relações (7), (9) e (10) e pelo Teorema 2.3 obtemos:

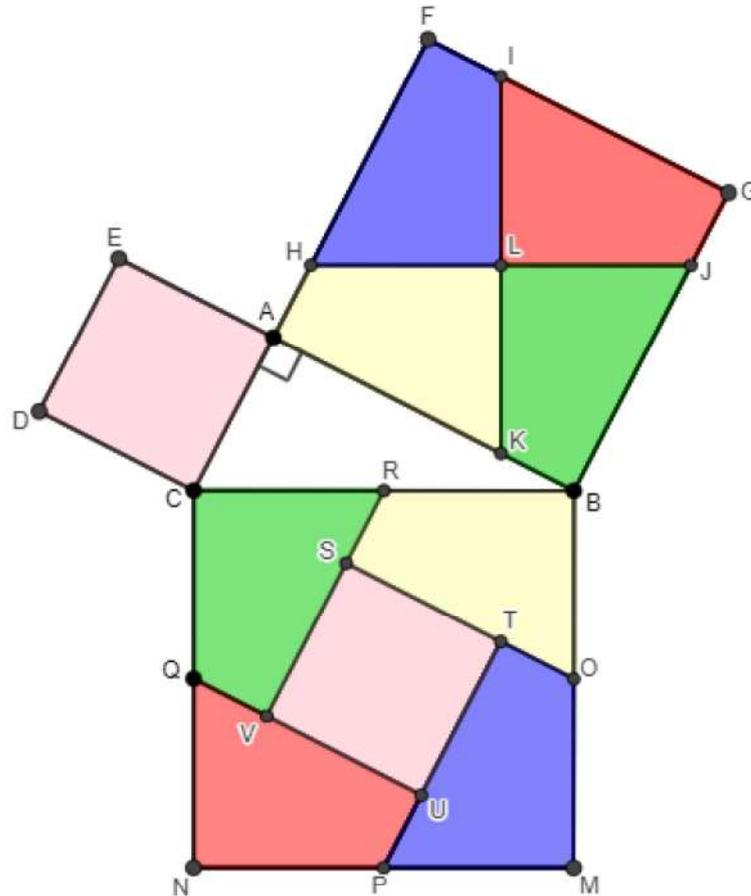
$$\triangle AHK \equiv \triangle SRO \quad (11)$$

Note que, a congruência entre os quadriláteros $AHLK$ e $RSOB$, segue das relações (6) e (11).

E por fim, mostraremos que $\square ACDE \equiv \square STUV$. Da congruência entre os quadriláteros $CRVQ$ e $LKBJ$, temos $\overline{VR} \equiv \overline{BJ}$ e da relação (4) temos $\overline{VR} \equiv \overline{CH}$. Sendo $\square AHLK \equiv \square RSOB$ obtemos $\overline{AH} \equiv \overline{SR}$, logo, $\overline{VS} \equiv \overline{VR} - \overline{SR} \equiv \overline{CH} - \overline{AH} \equiv \overline{CA}$. Sendo \overline{VS} e \overline{CA} os lados dos quadrados $STUV$ e $ACDE$, respectivamente. Portanto,

$\square ACDE \equiv \square STUV$, o que implica na prova do Teorema de Pitágoras. Portanto, pelo Teorema 4.9, temos que o quadrado $BCNM$ é equidecomponível aos quadrados $ABGF$ e $ACDE$, conforme o ilustra a Figura 66.

Figura 66 – Formando o quadrado $BCNM$ por equidecomposição



Fonte: O autor via Software Geogebra.



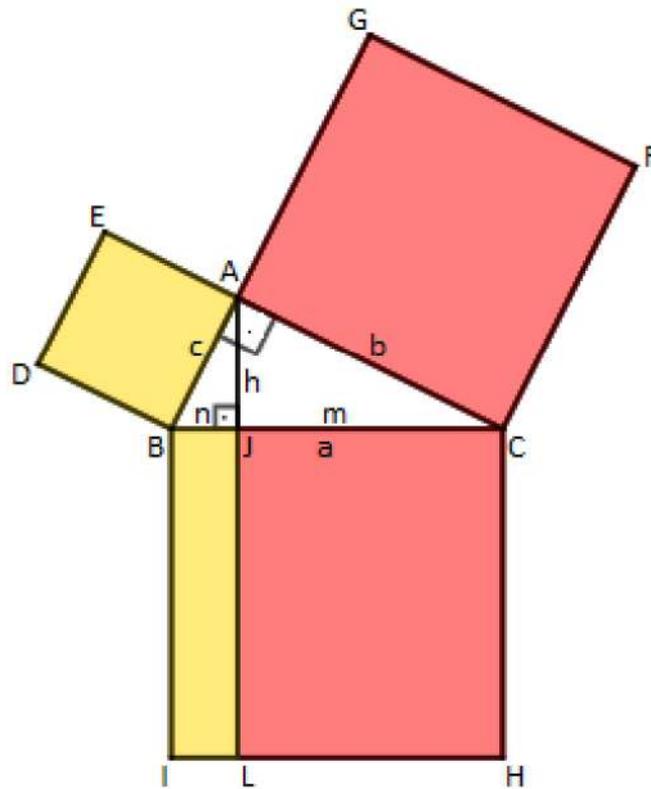
A próxima demonstração do Teorema de Pitágoras, será abordada a partir da seguinte situação-problema:

Dado um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c , decomponha o quadrado construído sobre a hipotenusa em polígonos menores disjuntos, os quais rearranjados, formem um quadrado de área b^2 e outro de área c^2 .

Antes de iniciarmos essa demonstração, mostraremos que se considerarmos um triângulo retângulo ABC com hipotenusa $\overline{BC} = a$, catetos $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, altura $\overline{AJ} = h$, projeções $\overline{BJ} = n$ e $\overline{CJ} = m$. Ao prolongarmos \overline{AJ} até intersectarmos o quadrado construído sobre a hipotenusa no ponto L , com L pertencente ao lado paralelo

a \overline{BC} , com isso, estaremos decompondo este quadrado em dois retângulos equidecomponíveis aos quadrados construídos sobre os catetos, conforme ilustra a Figura 67.

Figura 67 – Decomposição do quadrado $BCHI$ nos retângulos $BJLI$ e $JCHL$ de áreas c^2 e b^2 , respectivamente.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Mostraremos que, o retângulo $BJLI$ é congruente ao quadrado $ABDE$ e a demonstração em que o retângulo $JCHL$ e o quadrado $ACFG$ também são congruentes é análoga.

Demonstração. Considere um triângulo retângulo ABC atendendo as condições mencionadas acima.

No triângulo ABC , analisando a soma das projeções e das relações métricas, podemos extrair as seguintes relações:

$$a = n + m \quad (1)$$

$$h^2 = n.m \quad (2)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AJB obtemos:

$$c^2 = n^2 + h^2 \quad (3)$$

Considerando que a área de $BJLI$ é dada por $\mathcal{A}(BJLI) = n \cdot a$. De (1), (2) e (3), obtemos:

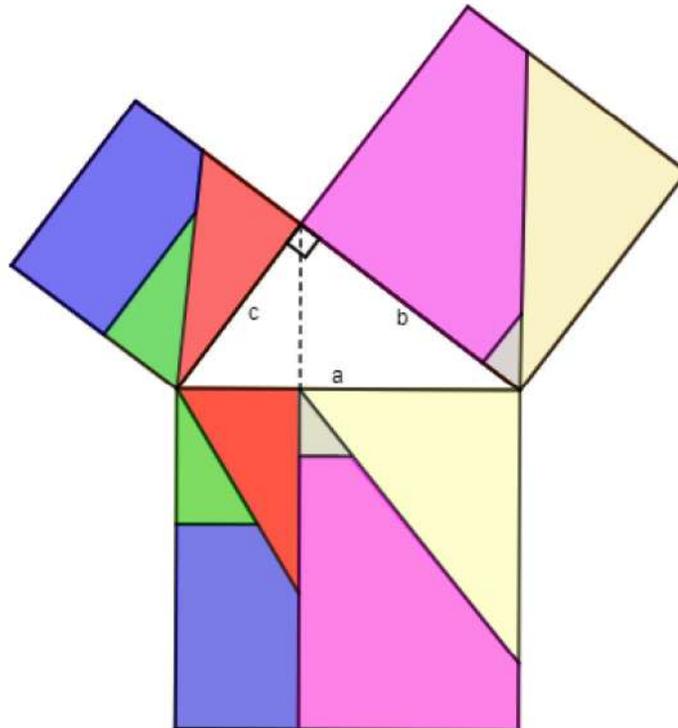
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(BJLI) &= n \cdot a \\ \Rightarrow \mathcal{A}(BJLI) &= n \cdot (n + m) \\ \Rightarrow \mathcal{A}(BJLI) &= n^2 + n \cdot m \\ \Rightarrow \mathcal{A}(BJLI) &= n^2 + h^2 \\ \Rightarrow \mathcal{A}(BJLI) &= c^2. \end{aligned}$$

Portanto, os quadriláteros $BJLI$ e $ABDE$ são equidecomponíveis. ■

Agora, vejamos a demonstração do Teorema de Pitágoras, conforme a situação-problema mencionada acima.

Demonstração. Decompomos o quadrado de lado a em dois retângulos cujas áreas são b^2 e c^2 , o que se faz tomando a altura que parte do vértice do ângulo reto, conforme demonstramos anteriormente. Por meio, do Teorema 4.8, cinco cortes no quadrado construído sobre a hipotenusa o decompõem em seis polígonos, que rearranjados cobrem os dois quadrados construídos sobre os catetos, o que prova o Teorema de Pitágoras. Vejamos uma possível decomposição do quadrado de lado a ilustrada na Figura 68.

Figura 68 – (a^2 equidecomponível a $b^2 + c^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$).



Fonte: O autor via Software Geogebra.



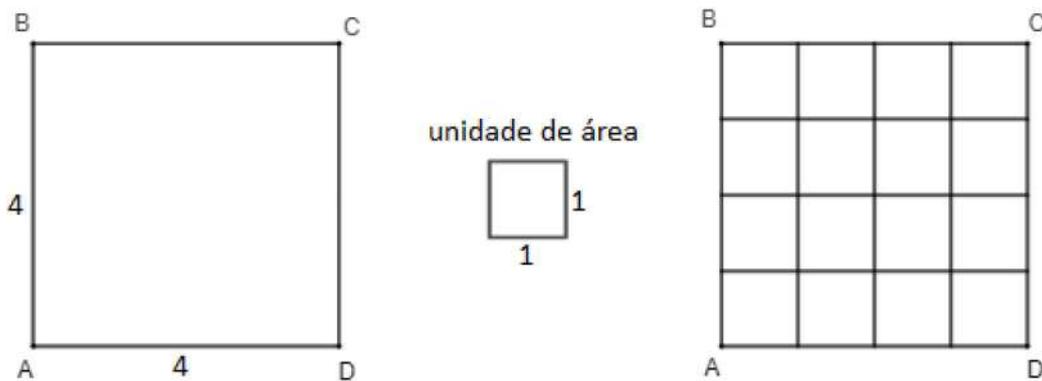
4.2 Área de Polígonos por Equidecomposição

Enfatizaremos nessa seção, o cálculo de área de alguns polígonos por decomposição. Consideraremos como unidade de área o quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento.

4.2.1 ÁREA DO QUADRADO

Demonstração. Considere um quadrado ¹³ $ABCD$, cujo lado mede n com $n \in \mathbb{N}$. Perceba que, esse quadrado pode ser decomposto em n^2 unidades de área. Portanto, este quadrado tem área $\mathcal{A}(ABCD) = n^2$. Vejamos um exemplo, suponha que desejamos calcular a área de um quadrado cujo lado mede 4 unidades, conforme ilustra a Figura 69.

Figura 69 – Quadrado $ABCD$ decomposto em $4^2 = 16$ quadrados unitários.



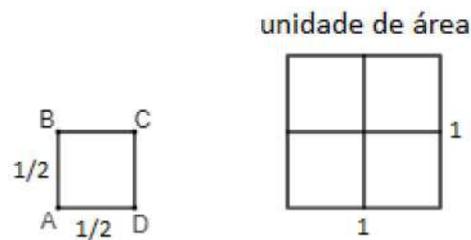
Fonte: O autor via Software Geogebra.

Note que, por decomposição obtemos $4^2=16$ quadrados unitários. Portanto, $\mathcal{A}(ABCD) = 4^2=16$.

Vejamos agora, o caso em que o lado do quadrado $ABCD$ mede $\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Perceba que, a unidade de área pode ser decomposta em n^2 quadrados menores justapostos e congruentes ao quadrado $ABCD$. Vejamos um exemplo, seja $ABCD$ um quadrado de lado medindo $\frac{1}{2}$, conforme ilustra a Figura 70.

¹³ Quadrado é o quadrilátero que tem os 4 lados iguais e os 4 ângulos retos. (LIMA et al., 2011, p.17)

Figura 70 – Quadrado $ABCD$ de lado medindo $\frac{1}{2}$ e a unidade de área.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Observe que, a unidade de área está decomposta em $2^2 = 4$ quadrados justapostos congruentes ao quadrado $ABCD$. Portanto, temos que:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1^2}{2^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

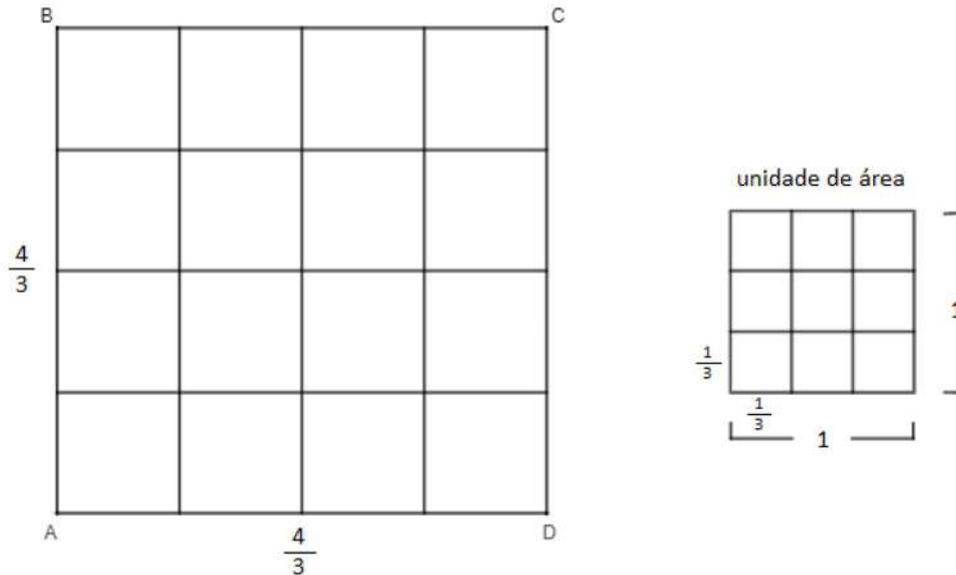
Desse modo, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} n^2 \cdot \mathcal{A}(ABCD) &= 1 \\ \Rightarrow \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Analisaremos agora o caso mais geral, considere $ABCD$ de lado medindo $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Note que, podemos decompor $ABCD$ em m^2 quadrados menores, sendo que cada quadrado tem lado $\frac{1}{n}$ e conseqüentemente, possuem área igual a $\frac{1}{n^2}$. Vejamos um exemplo, suponha que $ABCD$ tenha lado medindo $\frac{4}{3}$, conforme ilustra a Figura 71.

Figura 71 – Quadrado $ABCD$ de lado medindo $\frac{4}{3}$ e a unidade de área.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Perceba que, o quadrado de lado $\frac{4}{3}$ é decomposto em $4^2 = 16$ quadrados menores, cada um com lado medindo $\frac{1}{3}$ e área $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, conforme ilustra a Figura 71. Daí, podemos concluir que $\mathcal{A}(ABCD) = 16 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4^2}{3^2}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.

Portanto, a área de um quadrado $ABCD$ de lado medindo $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ é determinada por $\mathcal{A}(ABCD) = m^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja, $\mathcal{A}(ABCD) = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

É possível mostrar, que se a medida do lado de um quadrado $ABCD$ for um número irracional I , ainda assim, teremos $\mathcal{A}(ABCD) = I^2$.

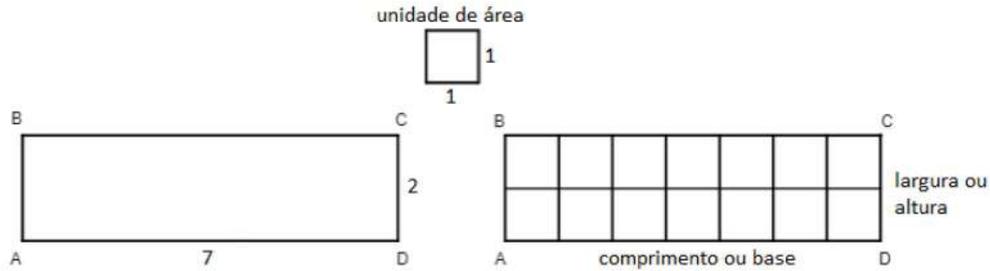
Demonstração. Vide (LIMA et al., 2011, pp.18-20).

Portanto, a área de um quadrado $ABCD$ de lado l com $l \in \mathbb{R}_+$ é dada por $\mathcal{A}(ABCD) = l^2$. ■

4.2.2 ÁREA DO RETÂNGULO

Demonstração. Seja $ABCD$ um retângulo ¹⁴ de comprimento 7 e largura 2. Note que, esse retângulo pode ser decomposto em $7 \cdot 2 = 14$ unidades de área, conforme ilustra a Figura 72.

¹⁴ Retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos. (LIMA et al., 2011, p.20)

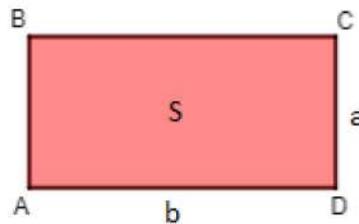
Figura 72 – Retângulo $ABCD$ decomposto em $7 \cdot 2 = 14$ unidades de área.

Fonte: O autor via Software Geogebra.

Então, como visto no capítulo 2, a área do retângulo $ABCD$ é dada por $\mathcal{A}(ABCD) = 7 \cdot 2 = 14$ que é obtida pelo produto da medida da base pela medida da altura. Porém, neste caso a medida da base e da altura são números naturais.

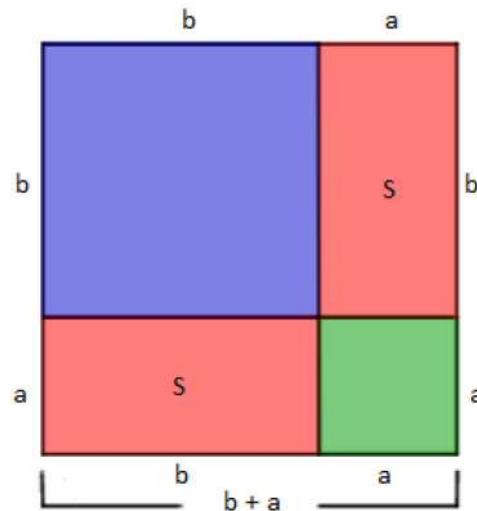
Agora, mostraremos que se as dimensões de um retângulo $ABCD$ forem os números a e b com a e $b \in \mathbb{R}_+$, ainda assim, teremos $\mathcal{A}(ABCD) = ab$.

Considere um retângulo $ABCD$ de área S e dimensões b e a com b e $a \in \mathbb{R}_+$, conforme ilustra Figura 73.

Figura 73 – Retângulo $ABCD$ de área S e dimensões b e a .

Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, considere um quadrado de lado medindo $b + a$, decomposto em dois retângulos de área S e dimensões b e a , e dois quadrados um de lado medindo b e outro de lado medindo a , conforme ilustra a Figura 74.

Figura 74 – Quadrado de lado $b + a$.

Fonte: O autor via Software Geogebra.

Observe que, a área do quadrado de lado $b + a$, ou seja, $(b + a)^2$ pode ser obtida de dois modos distintos:

Primeiro modo: A área é dada pelo quadrado de uma soma ¹⁵:

$$(b + a)^2 = b^2 + 2ba + a^2 \text{ (I)}$$

Segundo modo: Somando as áreas dos polígonos menores, obtidos da decomposição do quadrado de lado $b + a$.

$$(b + a)^2 = b^2 + a^2 + 2S \text{ (II)}$$

De (I) e (II) concluímos que:

$$b^2 + 2ba + a^2 = b^2 + a^2 + 2S$$

$$2ba = 2S$$

$$S = ba.$$

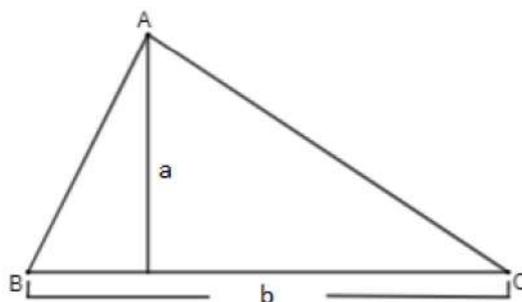
Portanto, a área de um retângulo é o produto da base pela altura. ■

¹⁵ O Quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo. (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p.193)

4.2.3 ÁREA DO TRIÂNGULO

Demonstração. Considere o triângulo ¹⁶ ABC de base b e altura a , conforme ilustra a Figura 75.

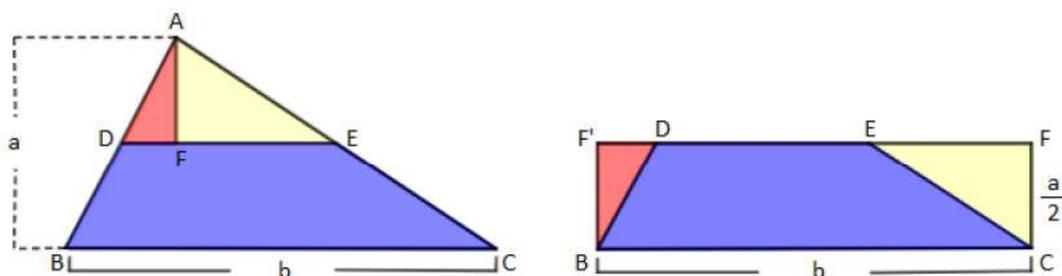
Figura 75 – Triângulo ABC de base b e altura a .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Pelo Lema 4.2, temos que todo triângulo é equidecomponível a um retângulo de mesma base e altura metade, portanto, o triângulo ABC é equidecomponível ao retângulo $BCFF'$, conforme ilustra a Figura 76.

Figura 76 – Triângulo ABC equidecomponível ao retângulo $BCFF'$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Sendo a área do retângulo o produto da base pela altura, então conclui-se que:

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BCFF') = \frac{ba}{2}.$$

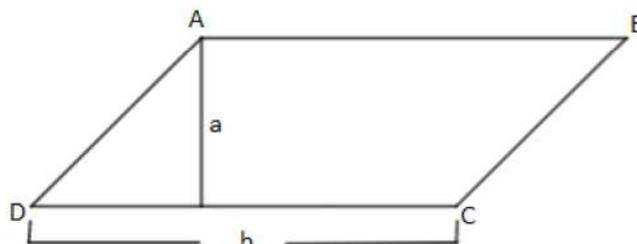
Portanto, a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura correspondente. ■

¹⁶ Dados três pontos A , B e C não colineares chama-se triângulo a reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} . (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p.98)

4.2.4 ÁREA DO PARALELOGRAMO

Demonstração. Considere o paralelogramo ¹⁷ $ABCD$, de base b e altura a , conforme ilustra a Figura 77.

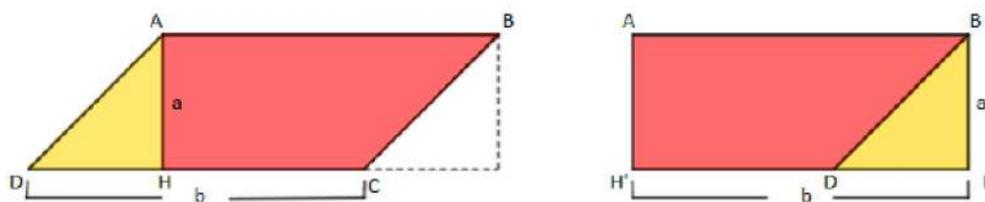
Figura 77 – Paralelogramo $ABCD$ de base b e altura a .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Por meio do Lema 4.3, temos que todo paralelogramo é equidecomponível a um retângulo que contenha mesma base e mesma altura. Então, o paralelogramo $ABCD$ é equidecomponível ao retângulo $ABHH'$, conforme ilustra a Figura 78.

Figura 78 – Paralelogramo $ABCD$ equidecomponível ao retângulo $ABHH'$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Sendo a área do retângulo o produto da base pela altura, como consequência temos:

$$A(ABCD) = A(ABHH') = ba.$$

Portanto, a área do paralelogramos é o produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente. ■

4.2.5 ÁREA DO TRAPÉZIO

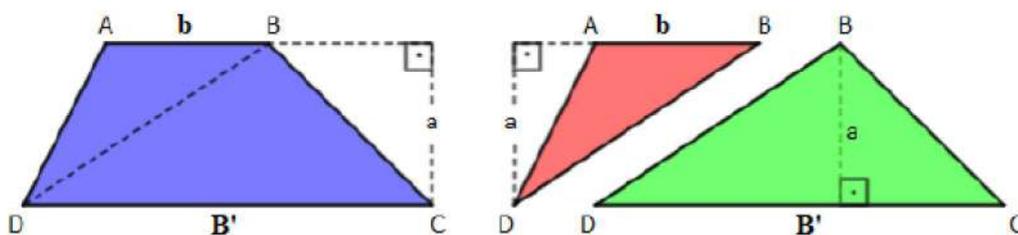
Demonstração. Considere o trapézio ¹⁸ $ABCD$, com $\overline{AB} = b$ base menor, $\overline{CD} = B'$ base maior, \overline{BD} uma de suas diagonais e sua altura medindo a . Dessa maneira, pelo

¹⁷ Paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos. (LIMA et al., 2011, p.24)

¹⁸ Trapézio é todo quadrilátero com um só par de lados paralelos (bases).

Teorema 2.10, decompos o trapézio $ABCD$ nos triângulos justapostos ABD e BCD , conforme ilustra a Figura 79.

Figura 79 – Trapézio $ABCD$ decomposto nos triângulos ABD e BCD .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Observe que, a área do trapézio $ABCD$ é a soma das área desses dois triângulos, mas já sabemos que a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente, desse modo, teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(BCD) \\ \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{ba}{2} + \frac{B'a}{2} \\ \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{a(b + B')}{2}. \end{aligned}$$

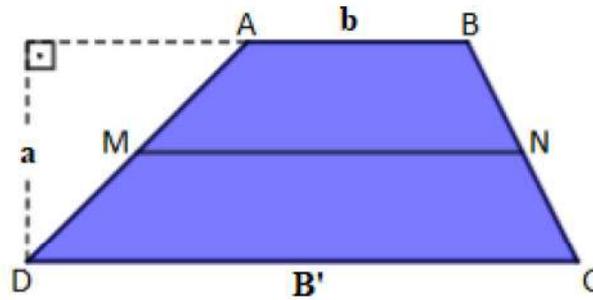
O que mostra, que a área de um trapézio é igual a semi-soma das bases vezes a altura. ■

Apresentaremos uma outra possibilidade de demonstração, para a fórmula do cálculo da área de um trapézio.

Demonstração. Considere um trapézio $ABCD$ com $\overline{AB} = b$ base menor, $\overline{CD} = B'$ base maior, altura medindo a e \overline{MN} sua base média ¹⁹, conforme ilustra a Figura 80.

¹⁹ A base média do trapézio é o segmento que une os pontos médios dos lados que não são bases. (GONÇALVES, 1995, p.160)

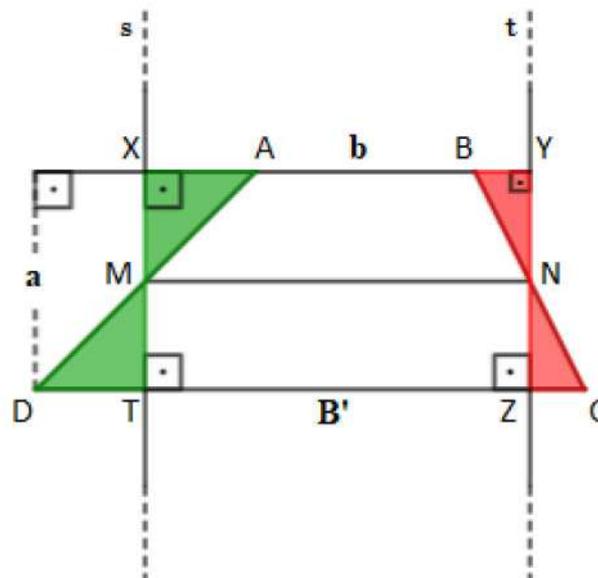
Figura 80 – Trapézio $ABCD$ de base média \overline{MN} .



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Trace as retas s e t passando pelos pontos M e N respectivamente, com s e t perpendiculares as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} intersectando-as nos pontos X, T, Y e Z , conforme ilustra a Figura 81.

Figura 81 – Trapézio $ABCD$ equidecomponível ao retângulo $XYZT$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Analisando os triângulos AXM e DTM temos que $\overline{AM} \equiv \overline{DM}$, pois M é ponto médio de \overline{AD} , $\widehat{DMT} \equiv \widehat{AMX}$, pois são ângulos opostos pelo vértice e $\widehat{MTD} \equiv \widehat{MXA} = 90^\circ$, então, pelo Teorema 2.5 obtemos que $\triangle AXM \equiv \triangle DTM$. De modo análogo, obtemos que $\triangle BYN \equiv \triangle CZN$. Com isso, concluímos que o trapézio $ABCD$ é **equidecomponível** ao retângulo $XYZT$ de base $\overline{TZ} \equiv \overline{MN} = \left(\frac{b + B'}{2}\right)$ e altura $\overline{ZY} = a$. O que nos leva a concluir que:

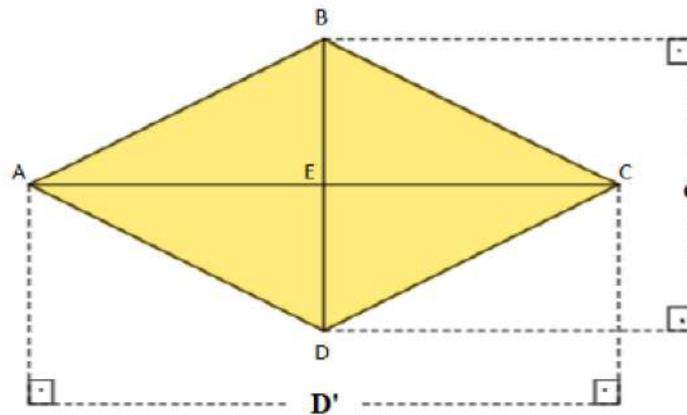
$$A(ABCD) = A(XYZT) = \frac{a(b + B')}{2}.$$

Portanto, a área de um trapézio é igual a semi-soma das bases vezes a altura. ■

4.2.6 ÁREA DO LOSANGO

Demonstração. Seja $ABCD$ um losango²⁰ de diagonal maior $\overline{AC} = D'$, diagonal menor $\overline{BD} = d$ e com $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$, conforme ilustra a Figura 82.

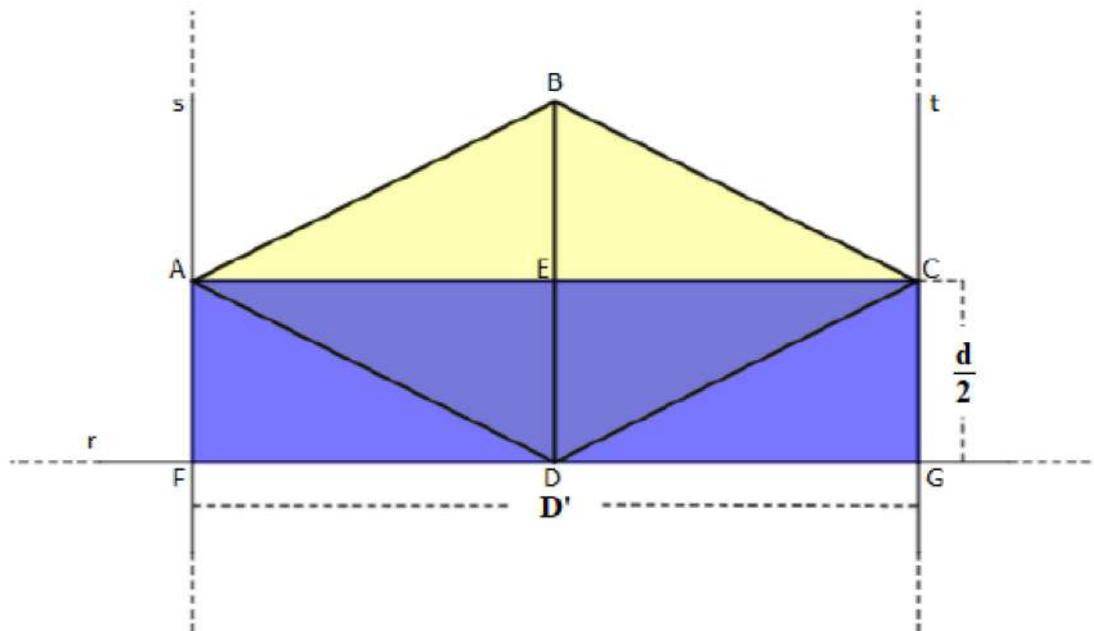
Figura 82 – Losango $ABCD$ de diagonais $\overline{AC} = D'$ e $\overline{BD} = d$.



Fonte: O autor via Software Geogebra.

Agora, trace as retas r , s e t com r passando pelo ponto D e paralela a \overleftrightarrow{AC} , s passando pelo ponto A e perpendicular a r , com $s \cap r = \{F\}$ e t passando pelo ponto C perpendicular a r , com $t \cap r = \{G\}$, conforme ilustra a Figura 83.

²⁰ Losango é todo quadrilátero que tem os quatro lados de medidas iguais.

Figura 83 – Losango $ABCD$ equidecomponível ao retângulo $ACGF$.

Fonte: O autor via Software Geogebra.

Pelo Teorema 2.2 temos $\triangle AEB \equiv \triangle AED \equiv \triangle AFD$, do mesmo modo, $\triangle CEB \equiv \triangle CED \equiv \triangle CGD$, o que nos leva a concluir que o losango $ABCD$ é **equidecomponível** ao retângulo $ACGF$ de base $\overline{FG} = D'$ e altura $\overline{CG} = \frac{d}{2}$. Sendo a área do retângulo o produto da base pela altura, teremos:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(ACGF) = \frac{D'd}{2}$$

Portanto, a área de losango é igual a metade do produto das diagonais. ■

5 Análise de Livro Didático

Neste capítulo, analisaremos alguns livros didáticos de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio. Descreveremos sobre a ênfase dada pelos autores em relação a equidecomposição de polígonos, tendo como foco a maneira que introduzem as fórmulas que determinam a área dos principais polígonos (retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango). Além disso, analisaremos nos exercícios propostos se há algum que possam ser solucionados por meio da equidecomposição de polígonos. Essa análise, será realizada nos seguintes livros didáticos: Matemática ciência e aplicações (IEZZI et al., 2016), Matemática Paiva (PAIVA, 2015) e Prisma Matemática (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020).

5.1 ÁREA

5.1.1 ÁREA DO RETÂNGULO E DO QUADRADO

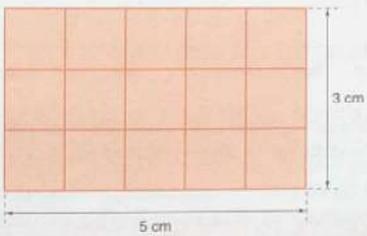
Observamos que, os autores (PAIVA, 2015, p.104) e (IEZZI et al., 2016, p.229), ilustram uma situação envolvendo um retângulo cujas dimensões são números naturais e apresentam de modo intuitivo a fórmula que determina a **área do retângulo**, entendemos que o objetivo é provocar os alunos a deduzirem que essa fórmula se resume ao produto da base pela altura. Para o caso em que as dimensões não são números naturais, (PAIVA, 2015) expõe uma situação-problema envolvendo o cálculo da área de um retângulo com dimensões racionais e apresenta a solução calculando o produto da base pela altura, deixando subtendido que o procedimento para o cálculo da área de um retângulo é sempre o mesmo, independentemente das dimensões serem números naturais ou não, conforme ilustra a Figura 84.

Figura 84 – Área do retângulo.

 O produto das medidas da base e da altura do retângulo pode não ser um número natural. Por exemplo, se adotássemos o decímetro como unidade de comprimento, as medidas da base e da altura desse retângulo seriam representadas por 0,5 dm e 0,3 dm, respectivamente, e, portanto, a área seria representada por 0,15 dm².

Área do retângulo

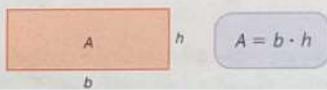
Consideremos um retângulo cuja base mede 5 cm e a altura mede 3 cm. Para calcular a área do retângulo, em centímetro quadrado, vamos dividi-lo em quadradinhos de lado 1 cm:



Obtivemos 5 colunas com 3 quadradinhos em cada uma; logo, o número de quadradinhos é $5 \cdot 3$. Assim, a área A do retângulo é:

$$A = 15 \text{ cm}^2$$

Generalizando, se a base e a altura de um retângulo têm, respectivamente, medidas b e h em uma mesma unidade de comprimento, então a área A desse retângulo é dada pelo produto $b \cdot h$.



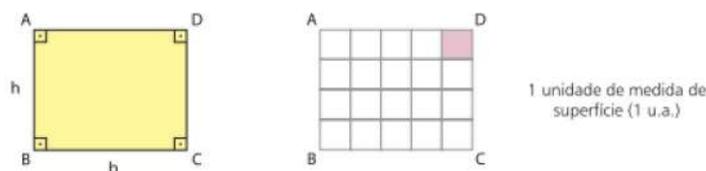
Fonte: (PAIVA, 2015)

Já (IEZZI et al., 2016), afirmam em uma caixa de texto que de modo geral e sem perda de generalidade, o produto da medida da base pela medida da altura, também pode ser usada para calcular a área de retângulos nos quais as medidas dos lados são expressas por números reais positivos, conforme ilustram a Figura 85.

Figura 85 – Área do retângulo.

▶ Área do retângulo

A figura à esquerda representa o retângulo ABCD. Supondo que o lado \overline{AB} mede 4 u.c. e o lado \overline{BC} mede 5 u.c. – em que u.c. é a unidade de medida de comprimento –, podemos dividir o retângulo em 20 pequenos quadrados, cada um dos quais com 1 unidade de medida de superfície (ou, simplesmente, unidade de área; indica-se por u.a.), conforme figura à direita.



Assim, a área (**A**) do retângulo ABCD é: $A = (5 \text{ u.c.}) \cdot (4 \text{ u.c.}) = 20 \text{ u.a.}$

Se, num retângulo ABCD, chamamos:

- **A**: área da superfície limitada pelo retângulo ABCD ou, simplesmente, área do retângulo ABCD;
- **b**: medida da base \overline{BC} ;
- **h**: medida da altura \overline{AB} ;

temos:

$$A = b \cdot h$$

Professor, veja nas Orientações Didáticas a demonstração dessa fórmula no caso em que as dimensões do retângulo são números racionais.

A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

OBSERVAÇÃO

De modo geral e sem perda de generalidade, a expressão $A = b \cdot h$ também pode ser usada para calcular a área de retângulos nos quais as medidas dos lados são expressas por números reais positivos.

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

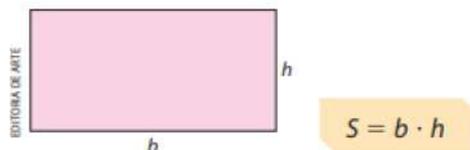
No entanto, (IEZZI et al., 2016, p.229), sugerem que o professor veja nas Orientações Didáticas, a demonstração da fórmula para o caso em que as dimensões do retângulo são números racionais. Percebemos que, a demonstração é baseada no livro Áreas e Volumes, da coleção de Matemática Elementar (SBM), de Elon Lages Lima.

Já (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020, p.12), apresentam a fórmula que determina a **área do retângulo** de modo mais “direto”, já afirmam que a área do retângulo é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h , com b e h reais positivos, conforme ilustra a Figura 86.

Figura 86 – Área do retângulo.

Área do retângulo

A área S de um retângulo de lados de medidas b e h , com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h .



ÁREA de figuras planas: qualquer área com uma única fórmula: "porque sim" não é resposta. 2020. Vídeo (20min22s). Publicado pelo canal A Matemaniaca por Julia Jaccoud. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=l0z1uX0_sMA. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse vídeo apresenta, de maneira clara e sucinta, como obter as fórmulas de áreas de figuras planas.

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

No entanto, (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020) sugerem que os alunos vejam um vídeo publicado pelo canal A Matemática por Julia Jaccoud, que segundo eles, consta de maneira clara e sucinta como obter as fórmulas de áreas de figuras planas, porém, notamos que este vídeo não está mais disponível.

Diante dessa análise preliminar, acreditamos que a fórmula que determina a área do retângulo precisa ser bem compreendida pois ela auxilia na dedução das demais, conforme veremos mais adiante. Dessa forma, sugerimos que durante a explicação desse tema seja incluída a demonstração da área do retângulo envolvendo números reais positivos, no Capítulo 4 apresentamos uma possibilidade mas existe outras maneiras de realizar essa demonstração, para o leitor interessado, vide, por exemplo, (LIMA et al., 2011, p.23).

Em relação a fórmula que determina a **área do quadrado** (IEZZI et al., 2016, p.230), (PAIVA, 2015, p.104) e (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020, p.13), apresentam de modo semelhante baseiam-se na definição de que todo quadrado é um retângulo, pois possui lados paralelos congruentes e quatro ângulos retos. Posteriormente, afirmam que a fórmula da área de um retângulo pode ser utilizada para obter a fórmula da área de um quadrado, conforme ilustram as Figuras 87, 88 e 89.

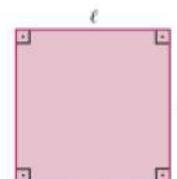
Figura 87 – Área do quadrado.

▶ Área do quadrado

Como todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura, a fórmula da área do retângulo pode ser usada para obter-se a expressão da área de um quadrado.

Dessa forma, se ℓ é a medida do lado de um quadrado, então, se $b = \ell$ e $h = \ell$, temos:

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = \ell \cdot \ell \Rightarrow A = \ell^2$$



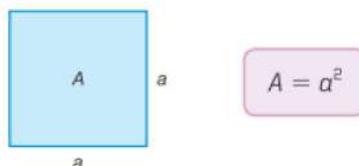
A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

Figura 88 – Área do quadrado.

Quadrado

O quadrado é um retângulo; logo, sua área A é o produto da medida da base pela medida da altura.



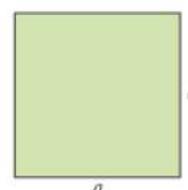
Fonte: (PAIVA, 2015)

Figura 89 – Área do quadrado.

Área do quadrado

Todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área S de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados (a).

$$S = a^2$$



Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

Pensando na possibilidade dos alunos desenvolverem mais argumentos, que possam enriquecer as discussões durante as resoluções dos exercícios propostos, sugerimos que sejam inseridas nas explicações, as situações que envolvem os casos em que a medida do lado do quadrado é $\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}^*$ e $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Já o caso, em que a

medida do lado é um número irracional, cabe ao professor analisar se é viável ou não, para os leitores interessados vide, por exemplo, (LIMA et al., 2011, pp.18-20).

Agora analisaremos, como os autores introduzem a **área do paralelogramo**.

5.1.2 ÁREA DO PARALELOGRAMO

Observamos que, os procedimentos exibidos nos três livros em análise são semelhantes, os autores utilizam a equidecomposição de polígono para mostrar que é possível decompor um paralelogramo e rearranjar suas partes para compor um retângulo de mesma base e mesma altura, justificando essa composição por meio da congruência de triângulos. E com isso, afirmam que a fórmula que determina a área do paralelogramo é a mesma que determina a área do retângulo, ou seja, o produto da medida da base pela medida da altura, conforme ilustram as Figuras 90, 91 e 92.

Figura 90 – Área do paralelogramo.

Paralelogramo

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h . Observe:



O triângulo azul no paralelogramo é congruente ao triângulo tracejado; assim, colocando o triângulo azul no lugar tracejado, obtemos um retângulo de base b e altura h . Logo, a área A do paralelogramo é o produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = b \cdot h$$

Fonte: (PAIVA, 2015)

Figura 91 – Área do paralelogramo.

▶ Área do paralelogramo

Determinemos a área do paralelogramo ABCD, representado na figura 1, em que **b** e **h** são as medidas da base e da altura, respectivamente.

Observe que, projetando-se os vértices **A** e **D** sobre a reta \overline{BC} , obtêm-se os pontos **P** e **Q**, respectivamente, ficando assim determinado o retângulo APQD, como é mostrado na figura 2.

Note que os triângulos APB e DQC são congruentes e, portanto, têm áreas iguais.

Assim, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo APQD, ou seja:

$$A = b \cdot h$$

A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

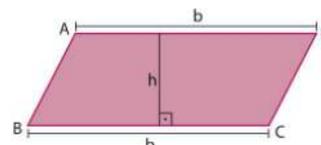


figura 1

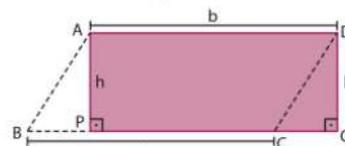


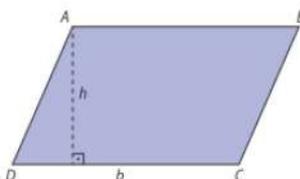
figura 2

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

Figura 92 – Área do paralelogramo

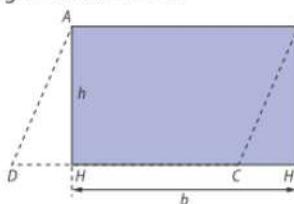
Área do paralelogramo

Vamos considerar um paralelogramo ABCD cuja base mede **b** e a altura, **h** como mostra a figura a seguir.



Projetando ortogonalmente os vértices **A** e **B** desse paralelogramo sobre a reta que passa pelos pontos **D** e **C**, obtemos os pontos **H** e **H'**, respectivamente, determinando o retângulo ABH'H, como indicado na figura ao lado. Os triângulos AHD e BH'C são congruentes pelo caso LAA_o (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto). Desse modo, eles têm a mesma área.

Logo, a área **S** do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo ABH'H:



$$S = b \cdot h$$

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

5.1.3 ÁREA DO TRIÂNGULO

Em relação a fórmula que determina a **área do triângulo** (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020, p.13) são bem “diretos”, já afirmam que a área de um triângulo *ABC* é igual a metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base.

(PAIVA, 2015, p.105), considera um triângulo ABC e por construção obtém um paralelogramo de mesma base e mesma altura que o triângulo ABC , posteriormente, afirmam que a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura. Já (IEZZI et al., 2016, p.234), exibem a fórmula de modo semelhante a (PAIVA, 2015), porém, justificam por meio de congruência de triângulos que a área do triângulo é igual a metade da área do paralelogramo, conforme ilustram as Figuras 93, 94 e 95.

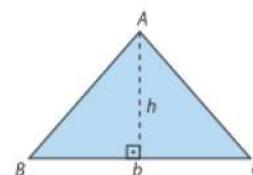
Figura 93 – Área do triângulo.

Área do triângulo

Vamos considerar um triângulo ABC cuja base \overline{BC} mede b , e a altura relativa a essa base mede h .

A área S do triângulo ABC é igual à metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base.

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

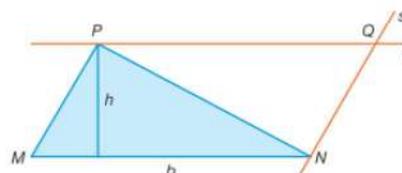
Figura 94 – Área do triângulo.

Triângulo

Consideremos um triângulo NMP , cuja base \overline{MN} mede b e a altura relativa a essa base mede h . Traçando por P a reta r paralela à base e por N a reta s paralela ao lado \overline{MP} , obtemos o paralelogramo $NMPQ$.

Como a área A do triângulo NMP é a metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



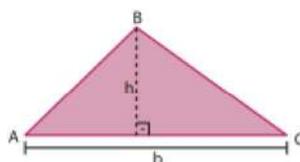
ou seja, a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Fonte: (PAIVA, 2015)

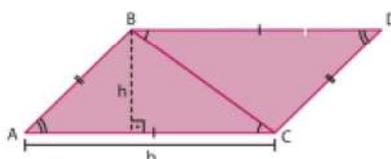
Figura 95 – Área do triângulo.

▶ Área do triângulo

Seja o triângulo ABC , cuja base \overline{AC} mede b e a altura relativa a essa base mede h , representado na figura abaixo.



Note que as respectivas retas paralelas aos lados \overline{AC} e \overline{AB} , traçadas pelos vértices B e C , intersectam-se no ponto D , determinando assim o paralelogramo $ABCD$, cujas medidas da base e da altura são b e h , conforme mostrado na figura abaixo.



Como $AB = DC$, $\text{med}(\widehat{BAC}) = \text{med}(\widehat{BDC})$ e $AC = DB$, os triângulos ABC e DCB são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais.

Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$, ou seja:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

5.1.4 ÁREA DO TRAPÉZIO

Os autores expõem a fórmula que determina a **área do trapézio**, por meio de equidecomposição de polígonos. Consideram um trapézio de altura h com bases de medidas b e B . Traçam uma de suas diagonais e dessa maneira, decompõe o trapézio em dois triângulos de altura h e bases b e B , posteriormente, afirmam que a soma das áreas desses triângulos é igual a área do trapézio, conforme ilustram as Figuras 96, 97 e 98.

Figura 96 – Área do trapézio.

Área do trapézio

Vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem B , b e h , respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, obtemos dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h , como mostra a figura ao lado.

A área S do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$S = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Então: $S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Portanto, a área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

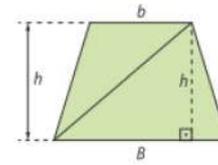


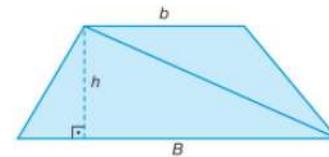
Figura 97 – Área do trapézio.

Trapézio

Traçando uma diagonal em um trapézio de altura h e bases b e B , nós o dividimos em dois triângulos de altura h em relação às bases de medidas b e B . Observe a figura ao lado.

A área A do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



ou seja, a área A do trapézio é igual à metade do produto da medida da altura pela soma das medidas das bases.

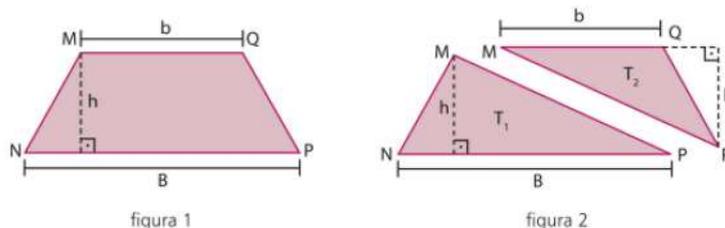
Fonte: (PAIVA, 2015)

Figura 98 – Área do trapézio.

Área do trapézio

Considere o trapézio $MNPQ$ da figura 1, no qual as bases \overline{MQ} e \overline{NP} medem b e B , respectivamente.

Observe, na figura 2, que esse trapézio pode ser decomposto em dois triângulos T_1 e T_2 , de mesma altura e tais que a soma de suas áreas é igual à área A do trapézio $MNPQ$.



Assim, temos: $A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2}$, ou seja:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

Observamos que, as demonstrações referentes ao trapézio que foram apresentadas nos três livros em análise, são semelhantes a que exibimos no Capítulo 4, conforme ilustrada a Figura 79.

5.1.5 ÁREA DO LOSANGO

(IEZZI et al., 2016, p.237) e (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020, p.15), apresentam a **área do losango**, decompondo-o em quatro triângulos congruentes e justificam as congruências por meio de algumas das propriedades do losango, ou seja, possuem as medidas dos lados congruentes e as diagonais são perpendiculares entre si. Em seguida, afirmam, que a área do losango é igual a soma das áreas desses quatro triângulos, o que implica, que a área é igual à metade do produto das medidas das diagonais, conforme ilustram as Figuras 99 e 100.

Figura 99 – Área do losango.

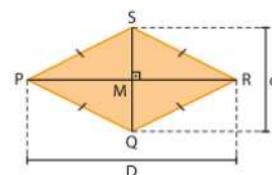
▶ Área do losango

Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si, observe na figura que ele pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes e sua área é a soma das áreas desses triângulos.

Assim sendo, no losango PQRS, se **D** é a medida da diagonal maior e **d** é a medida da diagonal menor, a área **A** de sua superfície é tal que:

$$A = 4 \cdot A_{QMR} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow A = \frac{D \cdot d}{2}$$

A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.



Fonte: (IEZZI et al., 2016)

Figura 100 – Área do losango.

Área do losango

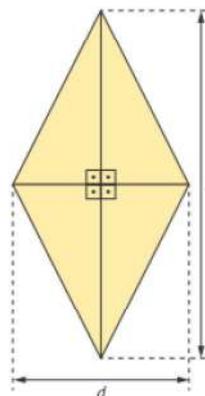
Todo losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si.

Observe que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes de mesma área. Assim, sua área **S** é a soma das áreas desses quatro triângulos:

$$S = 4 \cdot S_{\Delta} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{(D \cdot d)}{2}$$

Então: $S = \frac{D \cdot d}{2}$

Portanto, a área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.



Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

Já (PAIVA, 2015, p.107), utiliza praticamente a mesma ideia descrita acima, porém, considera o losango decomposto em apenas dois triângulos congruentes, que são os de bases d (diagonal menor) e alturas $\frac{D}{2}$ (metade da diagonal maior), logo após, afirma que sua área é igual ao dobro da área de um desses triângulos, o que implica, que sua área é a metade do produto das medidas das diagonais, conforme ilustra a Figura 101.

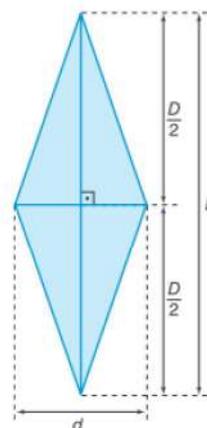
Figura 101 – Área do losango.

Losango

As diagonais de um losango cruzam-se perpendicularmente no ponto médio de cada uma delas. Logo, sendo D e d as medidas dessas diagonais, a área A do losango é o dobro da área de um triângulo de base d e altura $\frac{D}{2}$:

$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{d \cdot D}{2}$$

ou seja, a área A do losango é a metade do produto das medidas das diagonais.



Fonte: (PAIVA, 2015)

Apesar de (PAIVA, 2015) não mencionar que a fórmula também é válida se considerarmos a decomposição do losango nos triângulos congruentes de bases D (diagonal maior) e alturas $\frac{d}{2}$ (metade da diagonal menor), acreditamos que seja pertinente durante a explicação, proporcionar essa discussão com a turma.

Neste instante, analisaremos os livros didáticos dando ênfase aos exercícios que possam ser solucionados por meio de equidecomposição de polígonos.

Percebemos a existência de alguns exercícios que possam ser solucionados por meio de equidecomposição de polígonos, alguns deles estão inseridos em situações do nosso cotidiano, em malha quadriculada e em situações curiosas envolvendo a História da Matemática. Quatro desses exercícios estão ilustrados a seguir, nas Figuras 102, 103, 104 e 105.

Figura 102 – Área do losango.

B. (Udesc-SC) Maria precisa comprar piso para o seu apartamento cuja planta baixa pode ser vista na figura. Devido aos recortes necessários para a colocação do piso, o mestre de obras solicitou 10% a mais da metragem total do apartamento. alternativa c



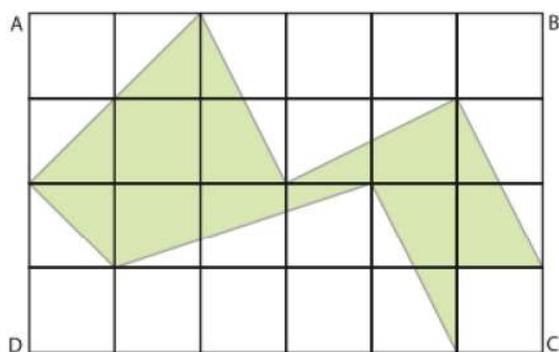
De acordo com as instruções do mestre de obras, Maria deve comprar aproximadamente:

- a) 38 m²
- b) 37 m²
- c) 40 m²
- d) 39 m²
- e) 42 m²

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020)

Figura 103 – Área do losango.

24 Na figura abaixo, o retângulo ABCD foi dividido em quadrados de 2 cm de lado.

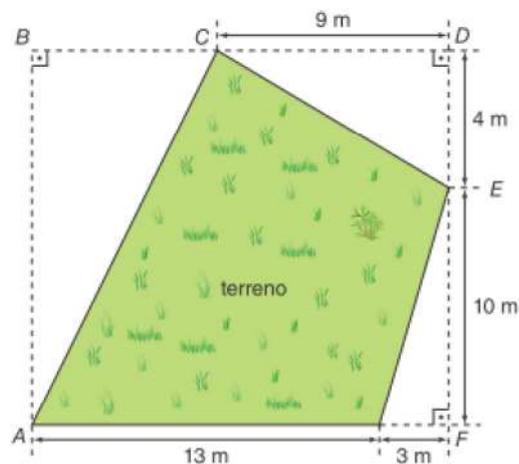


Qual é a área da região sombreada, em centímetros quadrados?

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

Figura 104 – Área do losango.

- 62** Para medir a área de um terreno, um perito circunscreeu um retângulo ao terreno, conforme mostra a figura abaixo. Qual é a área desse terreno?



Fonte: (PAIVA, 2015)

Nos exercícios ilustrados nas Figura 102 e 103, os alunos são provocados a pensarem em estratégias envolvendo a decomposição de polígonos, pois os exercícios envolvem polígonos que não há uma fórmula específica para calcular sua área diretamente.

Já o exercício da Figura 104, por se tratar de um quadrilátero que não há fórmula para determinar sua área diretamente, entendemos que para esse tipo de exercício, o autor instiga os alunos a perceberem que a estratégia ideal para solucioná-lo é acrescentar triângulos retângulos adjacentes a ele de modo a comporem um retângulo, cuja área já conhecem como se calcula. Com isso, são provocados a perceberem que a área solicitada é dada pela área do retângulo $ABDF$, subtraída as áreas dos triângulos retângulos adjacentes.

Durante a análise dos exercícios, observamos que os autores não envolveram situações com o Tangran ¹. Poderíamos sugerir que fossem inseridos esse tipo de exercício, pois acreditamos que quando bem explorado se torna um excelente material de apoio no processo de ensino-aprendizagem em Matemática. O Tangran possibilita a elaboração de uma gama de exercícios desafiadores abrangendo a equidecomposição de polígonos. Neste instante descreveremos algumas possibilidades, por meio de sobreposição o professor pode instigar os alunos a perceberem as relações existentes entre as peças do Tangran, como por exemplo: o ângulo menor dos triângulos é a metade de um ângulo reto, ou seja, 45° ; o ângulo maior que aparece no paralelogramo é igual a $(90^\circ + 45^\circ) = 135^\circ$; o lado do quadrado coincide com os lados menores dos triângulos menores e com

¹ O tangram é um quebra-cabeça chinês composto de sete peças com formas geométricas distintas.

os lados menores do paralelogramo; o lado maior dos triângulos pequenos coincide com os lados maiores do paralelogramo e os lados menores do triângulo médio; o lado maior do triângulo médio coincide com os lados menores do triângulo grande; o lado menor do triângulo grande é igual a 2 vezes o lado do quadrado, entre outras relações que ainda existem. Após estas descobertas, é uma ótima oportunidade de explorar exercícios envolvendo equidecomposição de polígonos, utilizando as figuras construídas com as peças do Tangran.

Figura 105 – Área do losango.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Como obter a área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo?

Um dos mais antigos documentos com registros sobre o estudo da Matemática é um rolo de papiro de origem egípcia, com cerca de 0,30 m de altura por 5 m de comprimento, que atualmente encontra-se no British Museum, em Londres. Em 1858, esse papiro foi comprado por um antiquário escocês chamado Henry Rhind e, por isso, é conhecido como Papiro de Rhind ou, menos frequentemente, como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C.

Entre os problemas de Geometria que lá se encontram, há um, o de número 51, que consiste em se obter a expressão da área de um triângulo isósceles a partir da área de um retângulo.

Ahmes descreve esse método sugerindo que todo triângulo isósceles pode ser dividido em dois triângulos retângulos congruentes, um dos quais pode ser deslocado para, junto com o outro, compor um retângulo, como mostram as figuras abaixo:

Assim, temos:

- $\triangle ABC$ isósceles e h = medida da altura relativa ao lado $\overline{AC} \Rightarrow M$ é ponto médio de $\overline{AC} \Rightarrow AM = \frac{b}{2}$.
- $\triangle AMB$ e $\triangle CMB$ são triângulos retângulos congruentes;
- $AMBD$ é um retângulo cujas dimensões são: $AM = \frac{b}{2}$ e $BM = h$.

Logo: $A_{AMBD} = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{2} = A_{\triangle ABC}$

Na Figura 2:

- MBCD é um retângulo cujas medidas da base e da altura são $b - a$ e h , respectivamente.
- ADFE é congruente ao $\triangle AMB$, "deslocado" do triângulo para compor o retângulo MBCD.

Assim, temos:

$$S = b \cdot 2h = a \cdot \frac{b-a}{2} + (b-a) \cdot h \quad (1)$$

$$A_{\triangle ABC} = A_{MBCD} + A_{ADFE} = (b-a) \cdot h \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$A_{\triangle ABC} = (b-a) \cdot h = A_{\triangle ABC} + \left(\frac{a \cdot (b-a)}{2}\right) \cdot h$$

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. História da Matemática. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

Fonte: (IEZZI et al., 2016)

(IEZZI et al., 2016), trazem no rol de exercícios os problemas de números 51 e 52 do papiro de Rhind, conforme ilustra a Figura 105, neles os egípcios utilizaram a decomposição e composição de polígonos para calcularem as áreas de um triângulo e de um trapézio, conforme abordamos com mais abrangência no Capítulo 3. Acreditamos que esse tipo de exercício é bastante pertinente, pois quando o aluno pede ao professor de Matemática aulas mais concretas, entendemos que ele pode não estar se referindo somente a situações que sejam palpáveis ou diretamente relacionadas com o seu cotidiano, mas também, a situações que propiciem compreensão dos conceitos matemáticos

relacionando-as com algo que lhe façam sentido, dessa maneira, na “História da Matemática” encontramos excelentes oportunidades de proporcionar estas situações.

Encerramos esse Capítulo, deixando como sugestão de leitura, vide, (GRAVINA; OFFMANN, 2022) e (NÓS; FERNANDES, 2019). Estes materiais nos fornecem excelentes sugestões de como vivenciar a equidecomposição de polígono em sala de aula.

6 Sequência Didática

6.1 Descrição da sequência didática e dos objetivos

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática envolvendo a teoria dos Polígonos equidecomponíveis, a qual é fundamentada no Teorema de **Wallace-Bolyai-Gerwien** conforme abordamos no Capítulo 4, cuja finalidade é instigar os alunos a deduzirem e justificarem as fórmulas que nos possibilita determinar a área dos principais polígonos (retângulo, quadrado, triângulo, paralelogramo, trapézio e losango). Será composta de um questionário prévio, cuja intenção é identificarmos nos alunos os conceitos que eles sabem em relação ao cálculo de área de polígonos e verificarmos se conhecem a definição de polígonos equidecomponíveis, para o desenvolvimento desse questionário sugerimos que seja utilizado aproximadamente 30 minutos. Além disso, teremos cinco exercícios, onde os alunos serão estimulados a realizarem investigação matemática por meio de equidecomposição. Nosso objetivo ao vivenciar essa sequência didática é oportunizar aos alunos um momento “diferente”, em que eles serão instigados a desenvolverem ideias e argumentos, realizando traços, recortes, rearranjos e com isso, possam deduzir as fórmulas dos principais polígonos atribuindo uma justificativa exitosa para elas. Durante o desenvolvimento dos exercícios, serão entregues envelopes contendo polígonos e utilizando régua, lápis, tesoura e cola, irão tracejar, recortar, rearranjar, investigar, colar e elaborar suas deduções. Para realização dos exercícios, sugerimos para cada um deles o tempo de aproximadamente 50 minutos.

Vivenciaremos essa sequência didática no primeiro ano D, uma das turmas do Ensino Médio da EREMJEM (Escola de Referência em Ensino Médio José Emílio de Melo), situada no município de Tupanatinga-PE. O quantitativo de alunos matriculados nas turmas dos primeiros anos dessa escola, atualmente varia entre 42 e 50 alunos, diante dessa realidade iremos propor que a turma escolhida, seja dividida em grupos contendo 5 ou 6 alunos, os quais denominaremos por Grupo A, Grupo B, Grupo C, ...

Durante a aplicação da sequência didática, estaremos sempre lembrando que registrem as suas respostas e argumentações que forem surgindo, pois serão de grande valia para nosso trabalho. Além disso, estaremos incentivando e mediando as ideias que forem aparecendo, encorajando-os a pensarem e discutirem com os colegas do grupo. Dessa maneira, esperamos que a participação seja ativa e com isso, possam “fazer matemática”. Para que as intervenções sejam mais eficazes é importante que antes do início da aplicação, estejamos engajados nos assuntos que tratamos no Capítulo 2, pois em cada exercício teremos uma excelente oportunidade de explorar vários con-

ceitos geométricos como: Congruência de triângulos, Isometria e as propriedades dos polígonos.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

QUESTIONÁRIO PRÉVIO

1º) Complete a tabela abaixo:

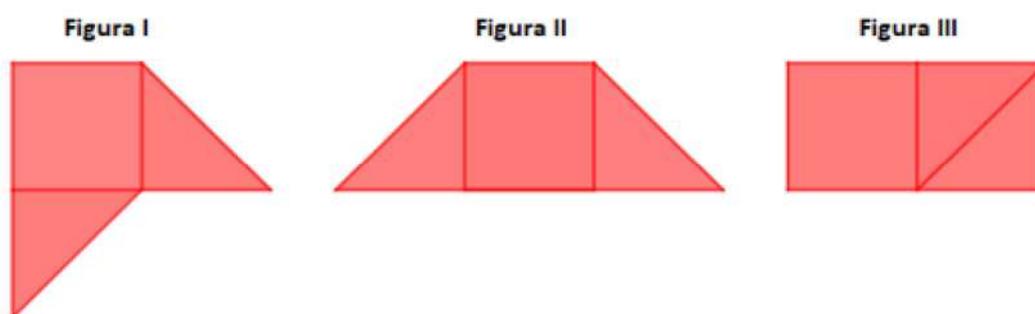
POLÍGONOS	DESENHE	REPRESENTE A FÓRMULA DA (ÁREA)	JUSTIFIQUE A FÓRMULA
RETÂNGULO			
QUADRADO			
TRIÂNGULO			
PARALELOGRAMO			
TRAPÉZIO			
LOSANGO			

2º) Você sabe o que são polígonos equidecomponíveis ou equivalentes? Explique.

3º) Os triângulos desenhados abaixo têm, cada um, 2 cm^2 de área, e o quadrado tem 4 cm^2 de área.



Formei três figuras (I, II e III) usando, em cada uma delas, os três polígonos acima descritos.



É correto afirmar que:

- (A) As áreas das três figuras são iguais.
- (B) A área da figura II é maior que a área da figura III.
- (C) A área da figura I é maior que a área da figura II.
- (D) A área da figura I é maior que a área da figura III.

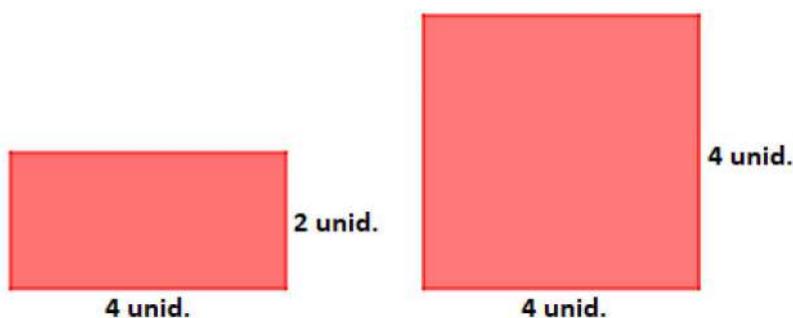
Durante o desenvolvimento de cada exercício, estaremos envolvendo a equidecomposição de polígonos para nos auxiliar a alcançarmos nossos objetivos, e como dito no início desse capítulo, essa teoria está fundamentada no **Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien**.

1º Exercício. (Área do retângulo e do quadrado)

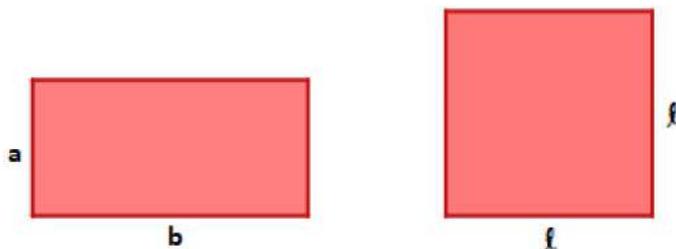
1. Considere o quadradinho abaixo, medindo uma unidade de área. Utilizando 18 destes quadradinhos componha um retângulo e um quadrado, com cada um deles contendo 9 quadradinhos.



2. É possível decompor o retângulo e o quadrado a seguir, em quadradinhos que medem uma unidade de área? Caso sim, quantos quadradinhos teremos em cada situação?



3. Com base nos itens anteriores, qual a relação que há entre as dimensões do retângulo e do quadrado com suas respectivas áreas? Explique:
4. A seguir, temos um retângulo de base medindo b e altura medindo a , além disso, um quadrado de lado medindo l . Como base nos itens anteriores, como podemos obter a fórmula, que determina a área desses polígonos? Justifique.



Comentário: O objetivo desse exercício é provocar os alunos a deduzirem argumentos, que justifiquem as fórmulas que determinam as áreas do retângulo e do quadrado.

Para o desenvolvimento dos cinco exercícios, disponibilizaremos para os grupos o dobro do material necessário, cuja intenção é evitar que membros do grupo se dispersem e com isso, diminuir a possibilidade de não participarem das discussões que é um dos nossos principais propósitos, dessa maneira poderão surgir subgrupos, no entanto, serão orientados a finalizarem os itens com uma ideia que os representem, com isso, estimularemos o debate entre eles, com o intuito de contribuirmos para aprimorarem suas ideias e formularem suas deduções.

Para o desenvolvimento do item um, serão distribuídos para cada grupo, envelopes contendo 18 quadradinhos que representam a unidade de área. Daí, os grupos serão provocados a comporem um retângulo e um quadrado por meio de rearranjos, utilizando 9 quadradinhos em cada composição.

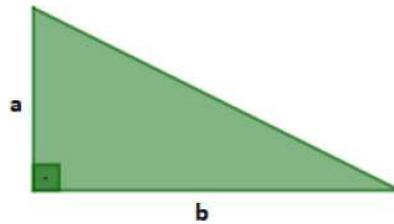
Neste item, temos a expectativa de que os alunos comecem a estabelecer relações entre as dimensões do retângulo e do quadrado com suas respectivas áreas. Além disso, que possam perceber que o retângulo e o quadrado que foram compostos são equidecomponíveis, pois possuem mesma área.

Já no item dois, propomos uma situação contrária ao item anterior, os grupos serão provocados a representarem uma decomposição tracejando um retângulo e um quadrado de dimensões definidas, de modo a obterem quadradinhos que representam a unidade de área, com isso, esperamos que possam ter mais convicção das conclusões obtidas no item anterior, ou ajustá-las, dessa maneira, responderão os itens três e quatro com mais segurança.

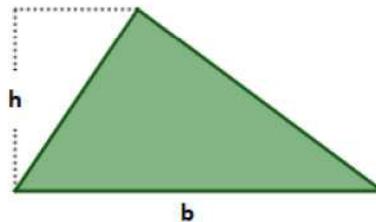
A compreensão desse primeiro exercício é muito importante, visto que para determinar as áreas dos demais polígonos, utilizaremos a fórmula da área do retângulo para nos auxiliar nas deduções das demais.

2º Exercício. (Área do triângulo)

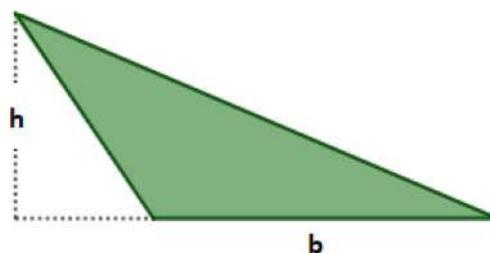
1. Observe o **triângulo retângulo** de base **b** e altura **a**, decomponha este triângulo em duas partes, de modo que obtenha **um triângulo retângulo** e **um trapézio retângulo**. Rearranjando essas duas partes, componha um retângulo e explique seu raciocínio.



2. Agora, observe o **triângulo acutângulo** de base **b** e altura **h**, decomponha este triângulo em três partes, de modo que obtenha **dois triângulos retângulos** e **um trapézio**. Rearranjando essas três partes, componha um retângulo e explique seu raciocínio.



3. A seguir, temos um **triângulo obtusângulo** de base **b** e altura **h**, decomponha este triângulo em três partes, de modo que obtenha **um triângulo retângulo**, **um triângulo obtusângulo** e **um trapézio retângulo**. Rearranjando essas três partes, componha um retângulo e explique seu raciocínio.



4. Com base nos itens anteriores, como podemos obter a fórmula que determina a área do triângulo? Justifique.

Comentário: O objetivo desse exercício é instigar os alunos a deduzirem e justificarem a fórmula que determina a área do triângulo.

Para o desenvolvimento desse exercício, no primeiro item os grupos receberão um envelope contendo um triângulo retângulo, cuja finalidade é que por meio de decomposição obtenham duas partes (um triângulo retângulo e um trapézio retângulo) e rearranjando essas partes, possam compor um retângulo. Para o desenvolvimento dos itens dois e três a ideia é semelhante, receberão envelopes contendo um triângulo acutângulo e um triângulo obtusângulo e serão provocados a decompor cada um deles em três partes e rearranjando essas partes, irão compor retângulos de mesma base e altura metade em relação a esses triângulos. Esperamos que percebam, que os retângulos obtidos nas composições têm a mesma área dos triângulos correspondentes, ou seja, são polígonos equidecomponíveis.

No quarto item, nossa expectativa é que deduzam e justifiquem a fórmula que determina a área do triângulo.

3º Exercício. (Área do paralelogramo)

A seguir, temos um **paralelogramo** de base **b** e altura **h**, responda:



1. É possível decompor esse paralelogramo em dois polígonos, de modo que tenhamos um **triângulo retângulo** e um **trapézio retângulo**? Caso sim, descreva seu raciocínio.
2. Rearranjando esses dois polígonos, é possível compor um retângulo?
3. Com base nos itens anteriores, como podemos representar a fórmula que determina a área do paralelogramo? Justifique.

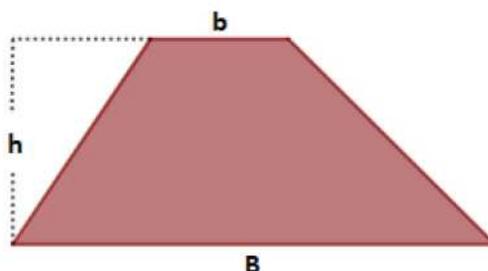
Comentário: O objetivo desse exercício é instigar os alunos deduzirem e justificarem a fórmula que determina a área do paralelogramo.

Para o desenvolvimento desse exercício, os grupos receberão um envelope contendo um paralelogramo de base b e altura h . No primeiro item, os alunos serão instigados a decompor o paralelogramo de modo a obterem um triângulo retângulo e um trapézio retângulo, para que no segundo item por meio de rearranjos, possam compor um retângulo utilizando essas duas partes. Nossa expectativa é que notem, que o paralelogramo e o retângulo são polígonos equidecomponíveis.

Já no terceiro quesito, espera-se que consigam representar e justificar a fórmula que determina a área do paralelogramo.

4º Exercício. (Área do trapézio)

Observe a seguir, o **trapézio** de base maior B , base menor b e altura h , posteriormente, responda:



1. É possível decompor esse trapézio em quatro partes, de modo que obtenha **dois triângulos retângulos, um trapézio e um retângulo**? Caso sim, descreva seu raciocínio.
2. Rearranjando as partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.
3. Com base no item anterior, como podemos obter a fórmula que determina a área do trapézio? Justifique.

Comentário: O objetivo desse exercício é que os alunos deduzam e justifiquem a fórmula que determina a área do trapézio.

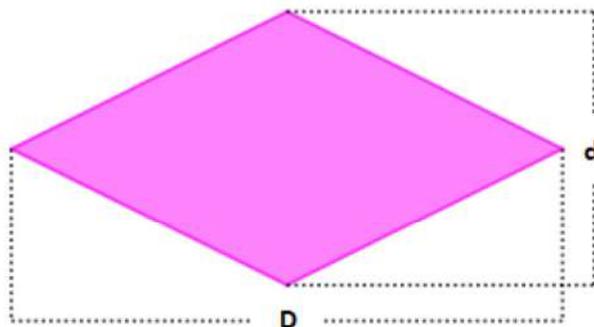
Para o desenvolvimento desse exercício, os grupos receberão um envelope contendo um trapézio de base maior B , base menor b e altura h . No primeiro item, os alunos serão instigados a decompor esse trapézio em quatro partes (dois triângulos retângulos, um trapézio e um retângulo).

Já no segundo item, rearranjando as quatro partes obtidas no item anterior, serão provocados a compor um retângulo, com isso, esperamos que percebam que esse retângulo de base $\frac{B+b}{2}$ e altura h e o trapézio de base maior B , base menor b e altura h são equidecomponíveis.

No terceiro item, espera-se que deduzam e justifiquem a fórmula que determina a área do trapézio.

5º Exercício. (Área do losango)

Observe a seguir, o **losango** de diagonal maior **D** e diagonal menor **d**, em seguida responda:



1. É possível decompor esse losango, de modo a obter quatro **triângulos retângulos congruentes**? Caso sim, descreva seu raciocínio.
2. Rearranjando as partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.
3. Com base nos itens anteriores, como podemos obter a fórmula que determina a área do losango? Justifique.

Comentário: O objetivo desse exercício é que os alunos possam deduzir e justificar a fórmula que determina a área do losango.

Para o desenvolvimento desse exercício, os grupos receberão um envelope contendo um losango, com diagonal maior D e diagonal menor d . No primeiro item, os alunos serão instigados a decompor o losango em quatro triângulos retângulos congruentes, para que no segundo item por meio de rearranjos, possam compor um retângulo utilizando esses quatro triângulos. Com isso, esperamos que percebam a equidecomposição entre o losango e o retângulo.

Já no terceiro item, espera-se que possam deduzir e justificar a fórmula que determina a área do losango.

6.2 Descrição e análise de dados

Descreveremos a análise da sequência didática conforme a ordem de aplicação. Apresentaremos uma visão geral dos resultados utilizando imagens registradas durante a aplicação da sequência didática, cujo intuito é favorecer na compreensão do que foi solicitado em cada exercício, na Figura 106 temos o cronograma de aplicação da sequência didática.

Figura 106 – Cronograma de aplicação da sequência didática.

Encontros	Duração	Desenvolvimento dos Exercícios
1º 24/05/2023	1h 40min	Questionário prévio e o 1º Exercício
2º 25/05/2023	1h 40min	2º e 3º Exercícios
3º 28/05/2023	1h 40min	4º e 5º Exercícios

Fonte: O autor.

No primeiro encontro tínhamos a presença de trinta e seis alunos, iniciamos informando o nosso objetivo com a realização da sequência didática, estabelecemos um contrato didático onde se comprometeram em participar da sequência didática com seriedade, tentando responder o máximo possível as questões que serão propostas. Posteriormente, iniciamos com a aplicação do questionário prévio que foi respondido individualmente, em seguida formamos os grupos e iniciamos a aplicação do primeiro exercício. Em nossa análise, abordaremos todos os itens do questionário prévio separadamente exibindo quais conceitos os alunos conhecem, ou não, do mesmo modo procederemos com os exercícios.

O questionário prévio foi elaborado com o objetivo de verificar se os alunos conheciam os polígonos que seriam estudados no decorrer dos exercícios, se sabiam represen-

tar e justificar as fórmulas que determinam a área desses polígonos e se conheçam a definição de polígonos equidecomponíveis.

6.2.1 Questionário Prévio

Figura 107 – Questionário Prévio.

QUESTIONÁRIO PRÉVIO

1º) Complete a tabela abaixo:

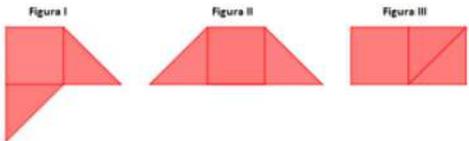
POLÍGONOS	DESENHE	REPRESENTE A FÓRMULA DA (ÁREA)	JUSTIFIQUE A FÓRMULA
RETÂNGULO			
QUADRADO			
TRIÂNGULO			
PARALELOGRAMO			
TRAPÉZIO			
LOSANGO			

2º) Você sabe o que são polígonos equidecomponíveis ou equivalentes? Explique.

3º) Os triângulos desenhados abaixo têm, cada um, 2 cm^2 de área, e o quadrado tem 4 cm^2 de área.



Formei três figuras (I, II e III) usando, em cada uma delas, os três polígonos acima descritos.



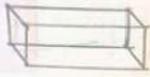
É correto afirmar que:

- (A) As áreas das três figuras são iguais.
- (B) A área da figura II é maior que a área da figura III.
- (C) A área da figura I é maior que a área da figura II.
- (D) A área da figura I é maior que a área da figura III.

Fonte: O autor.

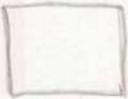
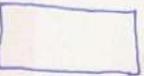
Retângulo: Praticamente todos os alunos desenharam corretamente o retângulo, apenas dois deles se equivocaram desenhando um bloco retangular, além disso, na coluna destinada a representação da fórmula, acreditamos que quiseram representar a fórmula do volume do bloco retangular, o que nos faz suspeitar que não diferenciam as figuras planas das figuras sólidas, conforme ilustra a Figura 108. Os que desenharam corretamente, vinte e oito alunos representaram a fórmula da área de maneira correta, os demais não responderam. Na coluna referente a justificar a fórmula, apenas quatro alunos responderam algo, dois deles justificaram praticamente escrevendo a fórmula por extenso e os outros dois responderam com a expressão: “não sei” conforme ilustra a Figura 109.

Figura 108 – Questionário prévio (Retângulo).

RETÂNGULO		$A = l \cdot l \cdot h$	
RETÂNGULO		$c \cdot h \cdot l$	

Fonte: O autor.

Figura 109 – Questionário prévio (Retângulo).

RETÂNGULO		$A = b \cdot h$	Porque para encontrar a área do retângulo é necessário multiplicar a base vezes altura.
RETÂNGULO		$A = b \cdot h$	não sei

Fonte: O autor.

Com isso, concluímos que apenas dois alunos fizeram confusão em relação ao desenho e a fórmula do retângulo, dando indício de que não fazem distinção entre um retângulo e um bloco retangular. Também observamos, que a maioria conhece a fórmula para calcular a área, porém, têm dificuldade de justificá-la.

Quadrado: Todos os alunos desenharam corretamente o quadrado, exceto os dois alunos mencionados anteriormente, nesse caso eles desenharam um cubo, o que confirma a suspeita de que não diferenciam o cubo e o quadrado. Percebemos que vinte e nove alunos souberam representar a fórmula da área, os demais não responderam. No espaço referente a justificativa, os mesmos quatro alunos que vêm respondendo novamente escreveram a fórmula, ou que não sabem.

Os alunos que representaram a fórmula da área do quadrado corretamente, dez deles representaram as fórmulas do quadrado e do retângulo do mesmo modo, até utilizaram as mesmas variáveis, o que nos faz perceber que utilizam a mesma fórmula para os dois casos, já os demais consideraram o fato de que as dimensões do quadrado são iguais e representaram a área como sendo o produto entre elas, conforme ilustra a Figura 110.

Figura 110 – Questionário prévio (Quadrado).

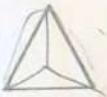
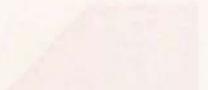
QUADRADO		$A = b \cdot h$	
QUADRADO		$A = l \times l$	

Fonte: O autor.

Dessa forma, concluímos que a maioria dos alunos representaram corretamente o desenho do quadrado e a fórmula do cálculo da área, porém, nenhum deles apresentaram uma justificativa exitosa.

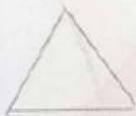
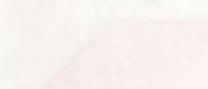
Triângulo: Novamente quase todos os alunos desenharam corretamente o triângulo, porém, apenas quinze deles representaram de modo correto a fórmula do cálculo da área, os dois alunos que desenharam sólidos nos casos anteriores, dessa vez desenharam pirâmides de base triangular, porém, representaram corretamente a fórmula da área do triângulo, o que reforça a constatação de que não fazem distinção entre uma figura sólida e uma figura plana, na Figura 111, temos as respostas de um aluno que representou uma pirâmide e a fórmula do triângulo e de outro que representou as duas informações corretamente. Outros três alunos representaram de modo equivocado, dois deles representaram a área do triângulo como sendo o produto da base pela altura e o outro representou como sendo base vezes altura elevada ao quadrado, conforme ilustra a Figura 112, os dezesseis alunos restantes não responderam. Na coluna referente a justificativa da fórmula, nenhum deles apresentou uma resposta satisfatória, apenas o mesmos dois alunos dos itens anteriores que responderam com a mesma expressão: “não sei”.

Figura 111 – Questionário prévio (Triângulo).

TRIÂNGULO		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	
TRIÂNGULO		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	

Fonte: O autor.

Figura 112 – Questionário prévio (Triângulo).

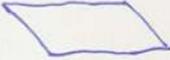
TRIÂNGULO		$A = b \times h$	
TRIÂNGULO		$A = b \cdot b \cdot 2$	

Fonte: O autor.

Diante disso, entendemos que quase todos não tiveram dificuldade em desenhar um triângulo, porém, apenas 40% aproximadamente, conseguiram representar a fórmula da área corretamente e nenhum deles exibiu uma justificativa satisfatória.

Paralelogramo: Apenas oito, dos trinta e seis alunos desenharam corretamente o paralelogramo, destes, somente cinco representaram de modo correto a fórmula da área, os demais alunos não responderam. Em relação ao campo destinado a justificativa, os mesmos dois alunos que responderam no item anterior, novamente responderam com a expressão: “não sei”, na Figura 113 temos as respostas que foram atribuídas por dois alunos.

Figura 113 – Questionário prévio (Paralelogramo).

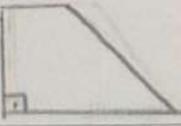
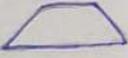
PARALELOGRAMO		$A = b \cdot h$	
PARALELOGRAMO		$A = b \cdot h$	não sei

Fonte: O autor.

Com isso, constatamos que a maioria da turma não reconhecem um paralelogramo, conseqüentemente, não sabem a fórmula da sua área e nem justificá-la.

Trapézio: Notamos que vinte e nove alunos desenharam corretamente o trapézio, destes, um aluno desenhou um trapézio retângulo, porém, não representou sua fórmula e nem justificou-la, os demais acreditamos que quiseram desenhar trapézios isósceles, os dois alunos que desenharam sólidos nos casos anteriores, dessa vez não responderam. Apenas seis alunos souberam representar a fórmula da área corretamente, destes, somente dois preencheram o espaço destinado a justificativa, porém, responderam com a expressão: “eu não estudei isso aí” ou “não sei” os trinta e quatro alunos restantes deixaram em branco. Vejamos na Figura 114, a resposta de dois desses alunos.

Figura 114 – Questionário prévio (Trapézio).

TRAPÉZIO			
TRAPÉZIO		$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$	não estudei isso aí

Fonte: O autor.

Podemos concluir que a maioria dos alunos conseguiram desenhar um trapézio, porém, apenas 17% aproximadamente, representaram a fórmula da área corretamente e nenhum aluno apresentou uma justificativa contundente.

Losango: Dos trinta e seis alunos participantes do questionário prévio, vinte e cinco desenharam o losango de modo correto, os demais não desenharam. Doze destes alunos, representaram corretamente a fórmula da área, no entanto, não responderam no espaço destinado a justificativa, exceto os dois que desde início vêm escrevendo nesse espaço a expressão: “não estudei isso aí” ou “ não sei” conforme ilustra a figura 115.

Figura 115 – Questionário prévio (Losango).

LOSANGO		$A = \frac{D \cdot d}{2}$	
LOSANGO		$A = \frac{D \cdot d}{2}$	não estudei isso aí

Fonte: O autor.

Desse modo concluímos, que aproximadamente 70% dos alunos desenharam um losango corretamente, porém, apenas 33% aproximadamente, conseguiram representar a fórmula e nenhum deles apresentou uma justificativa satisfatória.

No segundo quesito, tentamos obter da turma algum conhecimento sobre polígonos equidecomponíveis. Obtivemos a resposta de apenas sete alunos, sendo que cinco deles responderam que já haviam estudado, porém, não lembravam e as respostas atribuídas aos outros dois necessitariam de “ajustes”. Na Figura 116 temos a resposta de dois alunos.

Figura 116 – Questionário prévio, segundo quesito.

2º) Você sabe o que são polígonos equidecomponíveis ou equivalentes? Explique.	to estudei: porém não me lembro
2º) Você sabe o que são polígonos equidecomponíveis ou equivalentes? Explique.	equidecomponíveis são aquelas que pode ser descompontas em varias formas.

Fonte: O autor.

Em relação ao terceiro quesito, trinta e quatro alunos marcaram a alternativa correta, o que nos faz concluir que mesmo não conhecendo a definição de polígonos equide-

componíveis, perceberam que se tratava de uma questão que envolvia figuras de mesma área.

Diante do que analisamos no questionário prévio, concluímos que os alunos já haviam estudado sobre área de polígonos, no entanto, a maioria deles não lembram de vários conceitos. Percebemos que, praticamente toda turma soube desenhar o retângulo, o quadrado e o triângulo, no desenho do trapézio e do losango ocorreram poucos erros, foi algo próximo de 15%, já no desenho do paralelogramo houve uma grande incidência de erros, aproximadamente 80%. Em relação a representação das fórmulas que determinam a área desses polígonos e apresentarem uma justificativa para elas, notamos que quase todos os alunos souberam representar as fórmulas das áreas do retângulo e do quadrado, mas nenhum deles exibiu uma justificativa exitosa para elas. A dificuldade fica mais evidente nos demais polígonos, apenas quinze alunos representaram corretamente a fórmula da área do triângulo, doze acertaram a do losango, seis acertaram a do trapézio e apenas cinco acertaram a representação da fórmula do paralelogramo. Em relação as justificativas das fórmulas, o resultado é bem mais preocupante, observamos que a turma tem dificuldade de escrever suas ideias, pois nem mesmo os alunos que representaram a fórmula da área corretamente, conseguiram apresentar uma justificativa satisfatória. Acreditamos que uma das causas dessa dificuldade, está atrelada a maneira que esse assunto é vivenciado em sala de aula, visto que na maioria das vezes ele é introduzido de maneira imediata e mecânica o que não favorece a descoberta, a formulação de ideias e deduções. Uma outra causa é a falta de estímulo e exigências para que os alunos escrevam suas ideias, registrem como pensaram pra chegar em determinada solução. Poucos alunos até que apresentaram algumas justificativas oralmente, apesar de que foi necessário alguns ajustes em suas exposições, mas o fato deles terem tentado já foi algo positivo.

Após a realização do questionário prévio, orientamos os alunos a formarem grupos contendo 5 ou 6 alunos, os quais denominamos de A,B,C,D,E,F e G posteriormente, aplicamos o 1º exercício. Mas antes de iniciarmos, reforçamos a importância de que sejam registradas todas as ideias, justificativas, argumentações..., que forem surgindo, pois, seriam essenciais para o nosso trabalho.

O objetivo desse exercício é favorecer de modo intuitivo, uma melhor compreensão de como podemos calcular as áreas do retângulo e do quadrado, utilizando a equidecomposição de polígonos como um facilitador.

6.2.2 1º Exercício

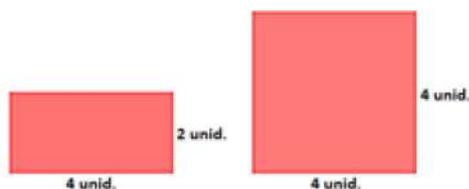
Grupo: ____

1º Exercício. (Área do retângulo e do quadrado)

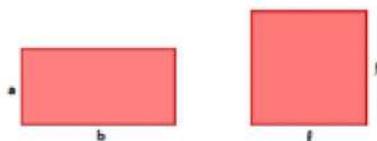
1. Considere o quadradinho abaixo, medindo uma unidade de área. Utilizando 18 destes quadradinhos componha um retângulo e um quadrado, com cada um deles contendo 9 destes quadradinhos.



2. É possível decompor o retângulo e o quadrado a seguir, em quadradinhos que medem uma unidade de área? Caso sim, quantos quadradinhos teremos em cada situação?



3. Com base nos itens anteriores, qual a relação que há entre as dimensões do retângulo e do quadrado, com suas respectivas áreas? Explique:
4. A seguir, temos um retângulo de base medindo b e altura medindo a , além disso, um quadrado de lado medindo l . Como obter a fórmula, que determina a área desses polígonos? Justifique.



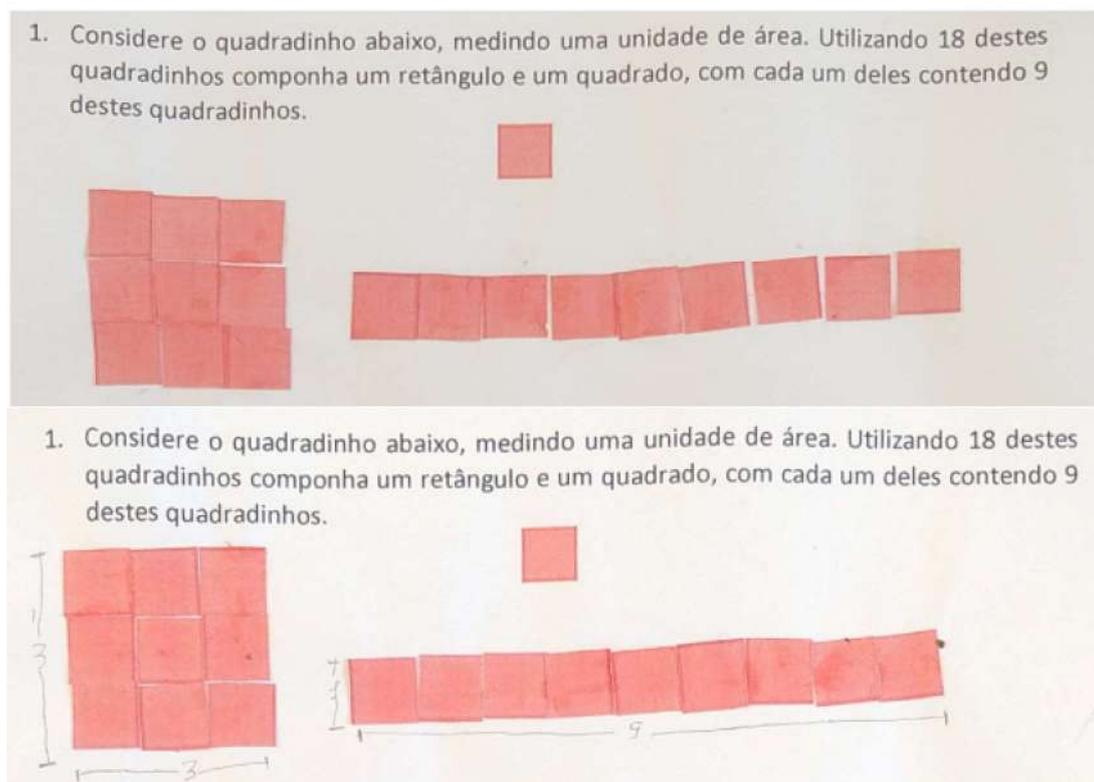
Fonte: O autor.

Para desenvolver o primeiro quesito os alunos receberam dois envelopes contendo 18 quadradinhos os quais representam a unidade de área, em seguida foram provocados a construir um retângulo e um quadrado, utilizando nove quadradinhos em cada caso.

A princípio, nosso objetivo nesse quesito é provocar os grupos a perceberem a relação que há entre as áreas do retângulo e do quadrado com suas dimensões.

Todos os grupos conseguiram realizar a construção com sucesso, percebemos que o grupo *A* fez um algo a mais, representou as dimensões dos polígonos construídos. Vejamos na Figura 118, a resposta dos grupos *B* e *A*, respectivamente.

Figura 117 – Construção do retângulo e do quadrado.

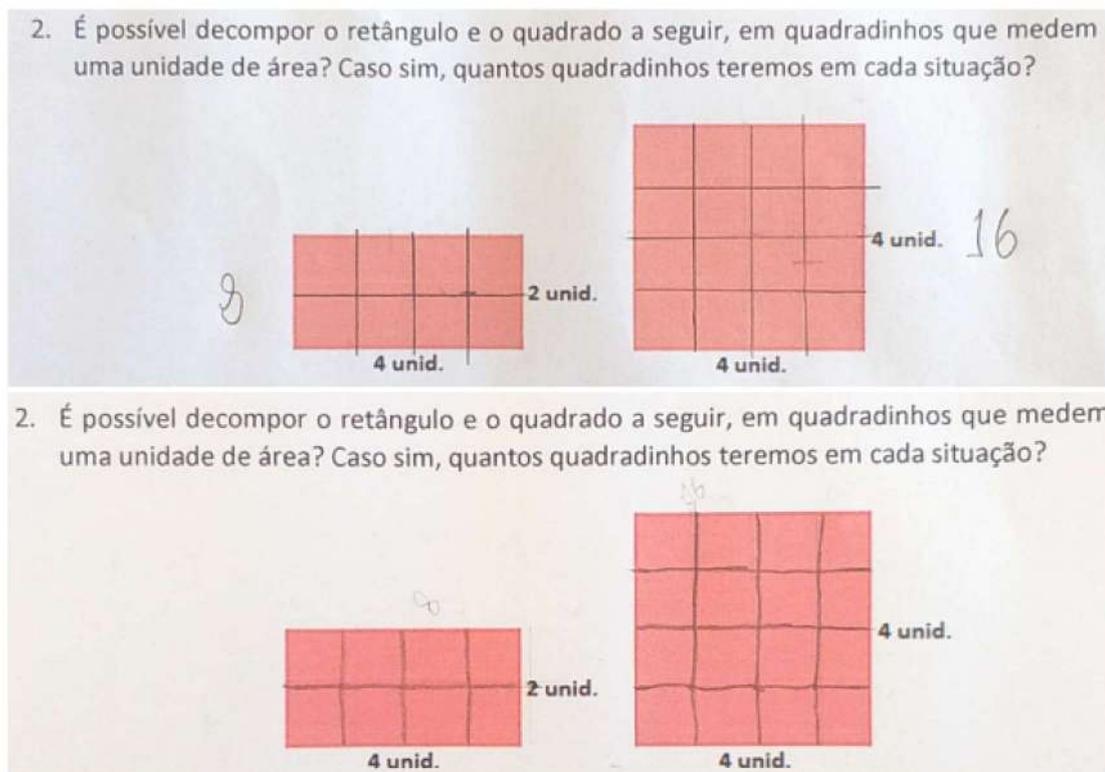


Fonte: O autor.

Já no segundo quesito, nosso intuito foi dar continuidade a provocação iniciada no quesito anterior. Utilizando a ideia de decomposição, farão traços em um retângulo e em um quadrado de dimensões especificadas, determinando quantos quadradinhos que representa a unidade de área contém neles.

Notamos que, todos os grupos obtiveram um excelente desempenho, decompondo o retângulo em oito quadradinhos e o quadrado em dezesseis. Observemos na Figura 119, as ideias registradas pelos grupos *E* e *G*, respectivamente.

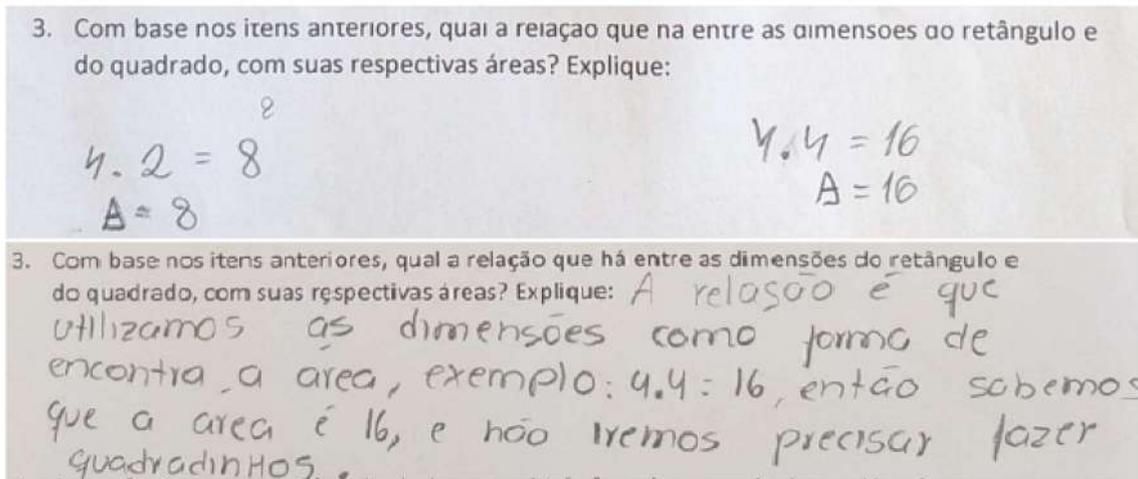
Figura 118 – Decomposição do retângulo e do quadrado em quadradinhos que representam uma unidade de área.



Fonte: O autor.

No terceiro quesito, nosso objetivo foi instigar os grupos a analisarem e refletirem sobre os quesitos anteriores, na intenção de que percebam a relação que há entre as áreas do retângulo e do quadrado com suas dimensões. Notamos que, quase todos os grupos responderam esse quesito de modo satisfatório, somente o grupo *D* que não registrou nenhuma explicação, apenas representou os cálculos. Vamos observar na Figura 120, as respostas dos grupos *D* e *E*, nessa ordem.

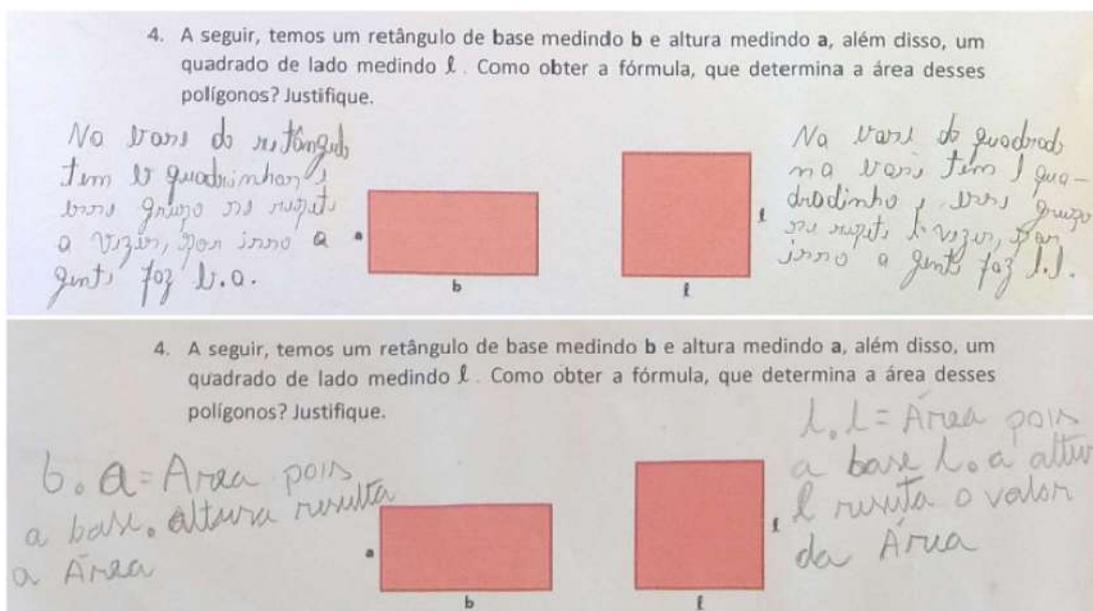
Figura 119 – Relação entre as áreas do retângulo e do quadrado com suas dimensões.



Fonte: O autor.

O quarto quesito, teve como objetivo provocar os grupos a atribuírem intuitivamente, uma justificativa para as fórmulas do cálculo da área de um retângulo de base b e altura a e um quadrado de lado l . Dos sete grupos, notamos que os grupos A, B, C, F e G apresentaram suas justificativas, no entanto, algumas precisando de ajustes. Já os grupos D e E representaram apenas a fórmula. Vejamos na Figura 121, as respostas atribuídas pelos grupos B e C, nessa ordem.

Figura 120 – Fórmulas do retângulo, do quadrado e suas justificativas.



Fonte: O autor.

Ao concluirmos o primeiro exercício, foi possível perceber que a maioria dos grupos

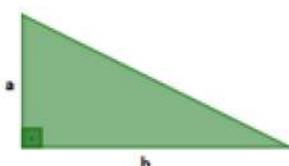
compreenderam o porque das fórmulas do retângulo e do quadrado serem o produto da base pela altura, e isso foi possível identificar nas justificativas atribuídas por eles, até os grupos que não justificaram provocamos uma discussão entre eles e obtemos oralmente algumas justificativas, mesmo que necessitando de nossa intervenção para ajustá-las. As discussões ocorridas durante o desenvolvimento dos dois primeiros quesitos e a reflexão realizada no terceiro quesito, foram fundamentais para elaborarem suas conclusões.

6.2.3 2º e 3º Exercícios

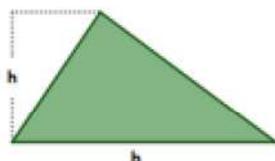
Grupo: ____

2º Exercício. (Área do triângulo)

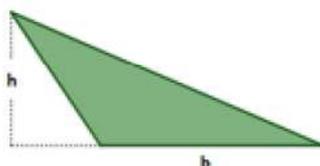
1. Observe o **triângulo retângulo** de base b e altura a , decomponha este triângulo em duas partes, de modo que obtenha **um triângulo retângulo** e **um trapézio retângulo**. Rearranjando essas duas partes, componha um retângulo e explique seu raciocínio.



2. Agora, observe o **triângulo acutângulo** de base b e altura h , decomponha este triângulo em três partes, de modo que obtenha **dois triângulos retângulos** e **um trapézio**. Rearranjando essas três partes, componha um retângulo e explique seu raciocínio.



3. A seguir, temos um **triângulo obtusângulo** de base b e altura h , decomponha este triângulo em três partes, de modo que obtenha **um triângulo retângulo**, **um triângulo obtusângulo** e **um trapézio retângulo**. Rearranjando essas três partes, componha um retângulo e explique seu raciocínio.



4. Com base nos itens anteriores, como obter a fórmula que determina a área do triângulo? Justifique.

Fonte: O autor.

3º Exercício. (Área do paralelogramo)

A seguir, temos um **paralelogramo** de base **b** e altura **h**, responda:



1. É possível decompor esse paralelogramo em dois polígonos, de modo que obtenha um **triângulo retângulo** e um **trapézio retângulo**? Caso sim, descreva seu raciocínio.
2. Rearranjando as duas partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.
3. Com base nos itens anteriores, como obter a fórmula que determina a área do paralelogramo? Justifique.

Fonte: O autor.

O segundo e o terceiro exercícios, foram elaborados com o objetivo de instigar os grupos a deduzirem as fórmulas das áreas do triângulo e do paralelogramo, além disso, que possam favorecer no desenvolvimento de argumentos para justificarem essas fórmulas. Analisaremos se a equidecomposição de polígono, pode ser utilizada como um facilitador auxiliando nas deduções e nas argumentações.

No segundo encontro tínhamos trinta e dois alunos presentes, solicitamos que formassem grupos contendo cinco ou seis alunos, dando preferência a manterem os mesmos integrantes do encontro anterior e os alunos que não estavam presentes no primeiro encontro, fomos inserindo-os nos grupos.

A princípio fizemos várias perguntas sobre o que havíamos estudado no encontro anterior e a maioria dos alunos responderam que havíamos estudado sobre o cálculo da área do retângulo e do quadrado, com alguns mencionando as fórmulas e algumas justificativas. Com isso, constatamos que a fórmula que determina a área do retângulo e do quadrado estavam compreendidas pela maioria da turma, em seguida, deixamos evidente que nesse encontro estudaríamos sobre as áreas do triângulo e do paralelogramo, posteriormente, proporcionamos uma discussão sobre algumas expressões e alguns polígonos que os grupos iriam se debater durante o desenvolvimento dos

próximos exercícios, algumas das expressões e polígonos que inserimos na discussão foram: polígonos equidecomponíveis, ponto médio, segmento perpendicular, triângulo retângulo, triângulo acutângulo, triângulo obtusângulo, trapézio isósceles e trapézio retângulo.

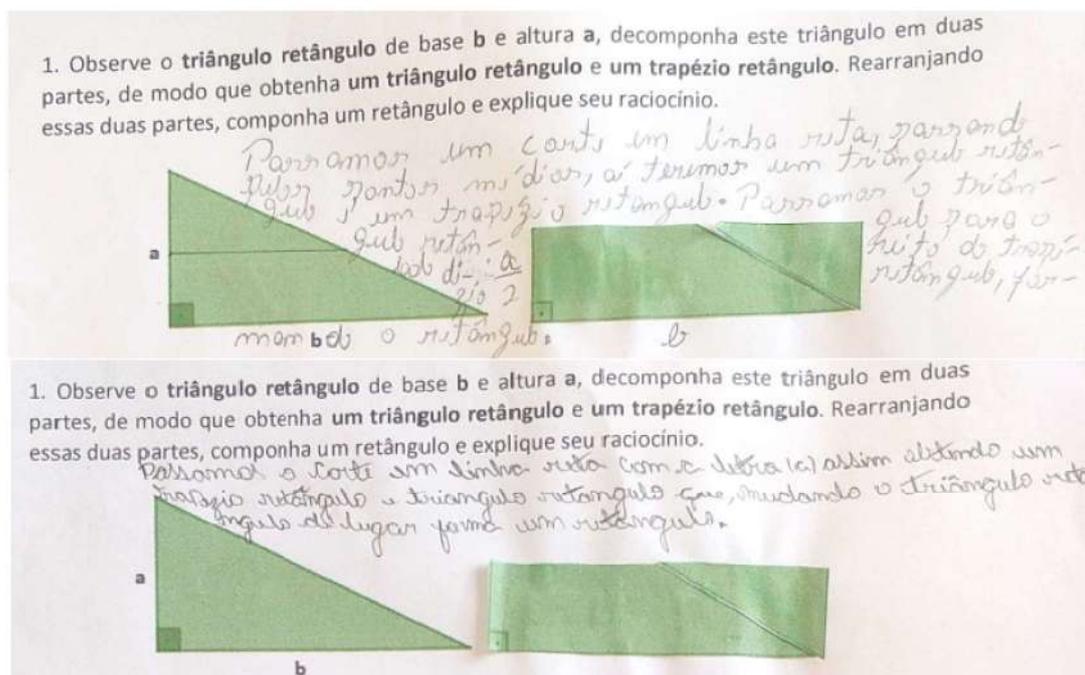
Dividimos esse encontro em dois momentos, no primeiro os grupos foram orientados a desenvolverem o exercício envolvendo triângulos e no segundo momento, foram orientados a desenvolverem o exercício envolvendo o paralelogramo.

Para o desenvolvimento do 2º exercício, cada grupo recebeu duas cópias do exercício e dois triângulos iguais para cada item, ou seja, foram dois triângulos retângulos para o primeiro item, dois acutângulo para o segundo e dois obtusângulo para o terceiro item, o intuito é que façam traços, recortes, rearranjos e com isso, desenvolvam conjecturas.

O objetivo dos três primeiros quesitos, foi instigar os alunos a perceberem que os triângulos em análise são equidecomponíveis aos retângulos que serão compostos com suas partes, com isso, esperamos que desenvolvam argumento para que no quarto quesito, possam deduzir e justificar a fórmula que determina a área do triângulo.

Dos seis grupos formados, constatamos que os grupos *A*, *B* e *E* resolveram o primeiro item sem dificuldades, passados mais ou menos cinco minutos, começamos a provocar os demais grupos no intuito de ajustarem suas estratégias para conseguirem resolver o quesito, as provocações foram sempre através de perguntas, como por exemplo: “- Se partirmos dos pontos médios dos lados que não são base, será que não ajuda?” Passados mais três minutos, todos os grupos já haviam respondido. Vejamos na Figura 124, as respostas atribuídas aos grupos *A* e *C*, respectivamente.

Figura 121 – Decomposição do triângulo retângulo e composição de um retângulo equidecomponível.

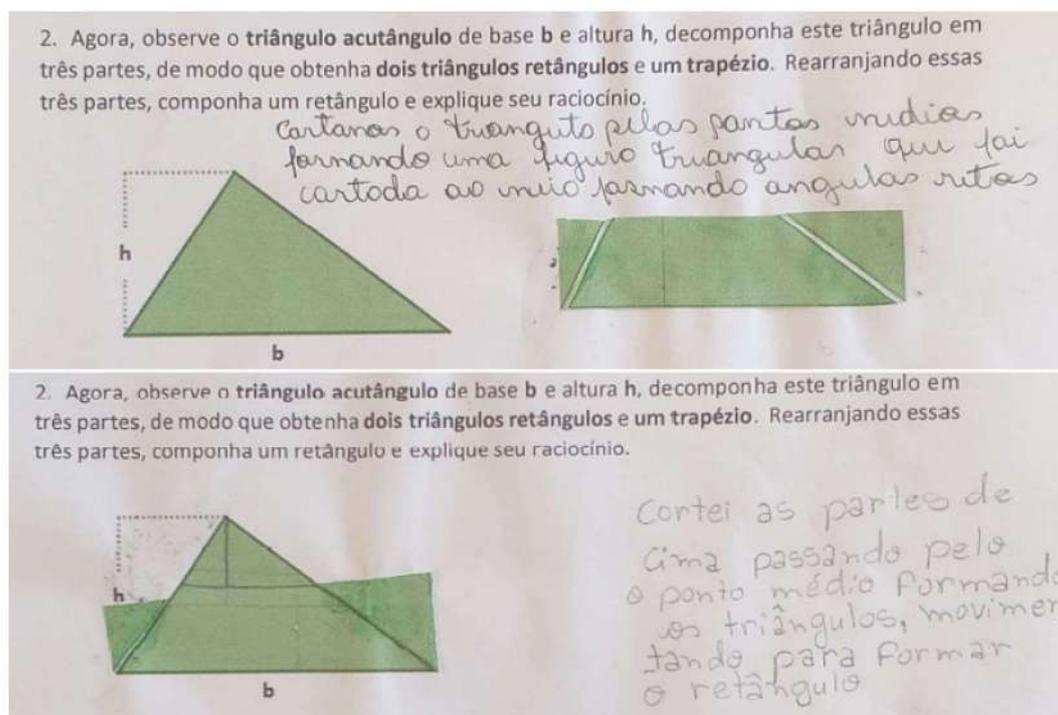


Fonte: O autor.

Percebam que, a explicação do grupo *C* necessitaria da intervenção do professor. Após o término do quesito, pedimos que refletissem sobre as áreas do triângulo retângulo e do retângulo composto por suas partes, posteriormente, pedimos que alguém desse sua opinião, um dos alunos respondeu que eles tinham a mesma área, porque estavam tirando uma parte de um e colando de jeito diferente, os demais concordaram com a resposta.

Já o segundo quesito, passados cinco minutos nenhum dos grupos havia conseguido concluir, daí fizemos a mesma provocação que havíamos feito no quesito anterior: “- Se novamente partirmos dos pontos médios dos lados que não são base, será que não ajuda?” Passados três minutos, apenas o grupo *A* havia conseguido responder, os demais não estavam conseguindo obter os dois triângulos retângulos, posteriormente, fizemos o seguinte questionamento: “- Se tentarmos formar triângulos retângulos tendo como referência o vértice superior do triângulo inicial?” Passados aproximadamente cinco minutos, os demais grupos haviam conseguido concluir. Vamos observar na Figura 125, como responderam os grupos *D* e *E*, respectivamente.

Figura 122 – Decomposição do triângulo acutângulo e composição de um retângulo equidecomponível.



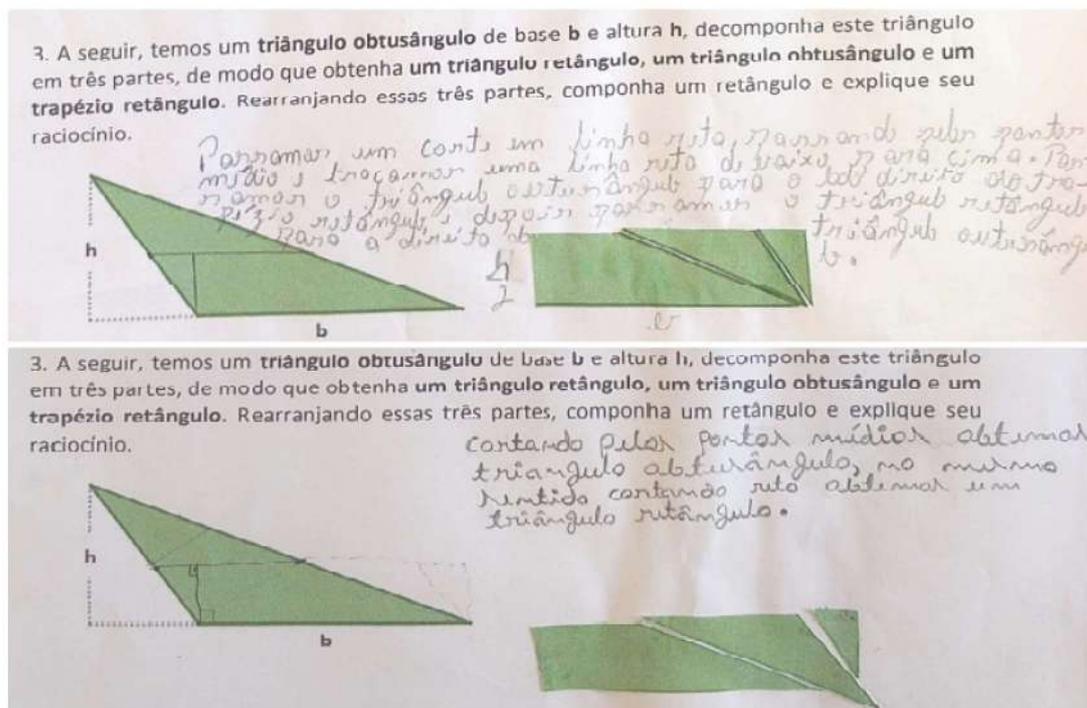
Fonte: O autor.

Notem que, as explicações exibidas pelos grupos necessitariam de alguns ajustes, o que é uma ótima oportunidade para o professor realizar intervenções. Em seguida, questionamos qual deles poderia explicar sobre a relação que há entre as áreas do triângulo acutângulo e do retângulo composto com suas partes, um deles respondeu que era o mesmo caso do item anterior, apenas haviam mudado as partes de lugar.

No terceiro quesito, os grupos apresentaram mais dificuldades, foi possível observar que alguns grupos até tentaram iniciar pelos pontos médio como nos casos anteriores, porém, não conseguiam avançar, passados cinco minutos fizemos a seguinte provocação: “- Quais foram os dois polígonos formados após realizarem o corte na base média do triângulo inicial?” Quatro grupos responderam que obtiveram um triângulo e outra figura que não sabem o nome, os outros responderam um triângulo e um paralelogramo, aproveitamos a oportunidade e realizamos algumas intervenções, justificando o porque que esse quadrilátero não é um paralelogramo, com isso, indiretamente já estaríamos contribuindo no desenvolvimento do próximo exercício. Posteriormente, questionamos: “- Será que não teria como obtermos um triângulo retângulo e um trapézio retângulo utilizando esse quadrilátero?” Passados mais ou menos três minutos os grupos *A, B, C, E* e *F* já haviam conseguido resolver, em seguida, pedimos que cada um desses grupos explicassem seu raciocínio para os demais, passados mais ou menos dois minutos

o grupo *D* também conseguiu responder. Observemos na Figura 126, os argumentos apresentados pelos grupos *A* e *D*, respectivamente.

Figura 123 – Decomposição do triângulo obtusângulo e composição de um retângulo equidecomponível.



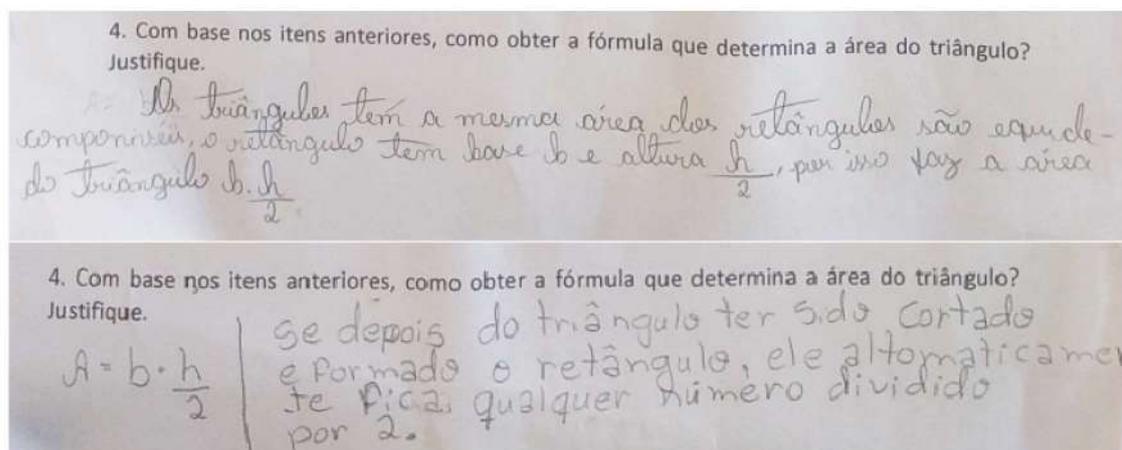
Fonte: O autor.

Observem que, as explicações apresentadas pelos grupos também necessitam de algumas intervenções. Posteriormente, questionamos: “- Podemos dizer que o triângulo obtusângulo e o retângulo são equidecomponíveis?” Um dos alunos respondeu: “ Sim, porque têm a mesma área”. Questionamos: “- Os demais concordam?” A maioria concordou, no entanto, notamos uma certa insegurança em alguns alunos. Posteriormente, voltamos a questionar: “- Então, calcular a área desses triângulos é a mesma coisa que calcular a área do retângulo equidecomponível a ele?” De modo unânime responderam que sim.

No quarto quesito, os grupos *A*, *B* e *F* apresentaram justificativas satisfatória para a fórmula que determina a área do triângulo, inclusive o grupo *B* chegou a afirmar que se tratavam de polígonos equidecomponíveis, já os grupos *C*, *D* e *E* também responderam, porém, suas justificativas precisavam de alguns ajustes.

O fato deles terem conseguido escrever suas deduções, mesmo alguns grupos precisando de algumas correções foi muito gratificante, pois pelo questionário prévio nenhum aluno havia exibido uma justificativa. Vejamos na Figura 127, as justificativas atribuídas aos grupos *B* e *E*, respectivamente.

Figura 124 – Justificativa para a fórmula que determina a área do triângulo.



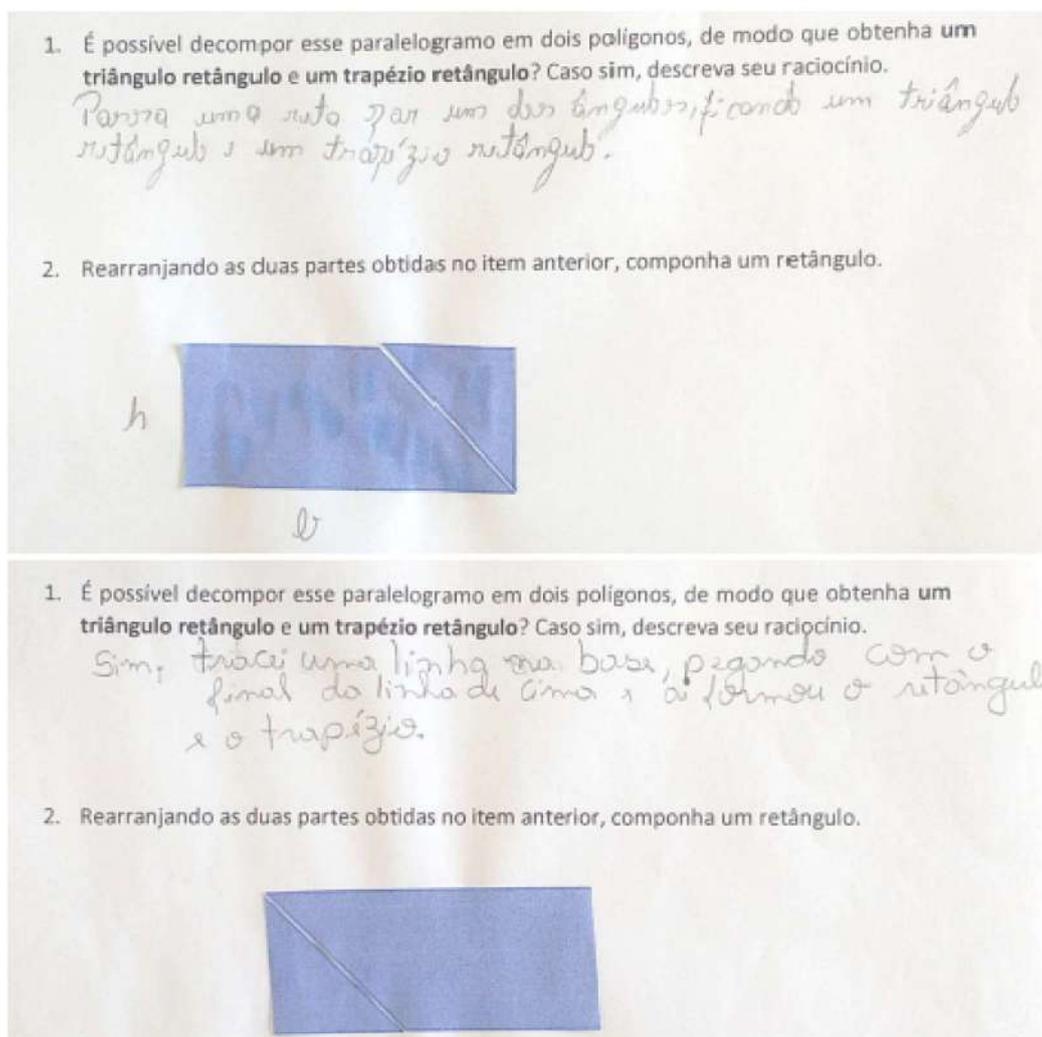
Fonte: O autor.

No segundo momento, os grupos foram provocados a desenvolverem o exercício envolvendo o paralelogramo. Para o desenvolvimento desse exercício os grupos receberam duas cópias do exercício e duas figuras iguais de um paralelogramo.

Nosso objetivo nos dois primeiros quesitos, foi provocar os grupos a desenvolverem ideias de como decompor o paralelogramo em duas partes, de modo a obterem um triângulo retângulo e um trapézio retângulo, em seguida, por meio de rearranjos dessas partes compor um retângulo. Dessa maneira, esperamos que no terceiro quesito possam deduzir e justificar a fórmula que determina a área do paralelogramo.

Todos os grupos conseguiram responder os dois primeiros quesitos, sem a necessidade de nossa intervenção, porém, em relação a escrita de suas justificativas, alguns grupos precisariam de alguns ajustes, o que também é uma grande oportunidade para o professor realizar suas intervenções e com isso, proporcionar aos alunos uma oportunidade de desenvolverem sua capacidade de argumentação e escrita. Vejamos na Figura 128, os argumentos apresentados pelos grupos *A* e *E*, nessa ordem.

Figura 125 – Decomposição do paralelogramo e composição de um retângulo equidecomponível.

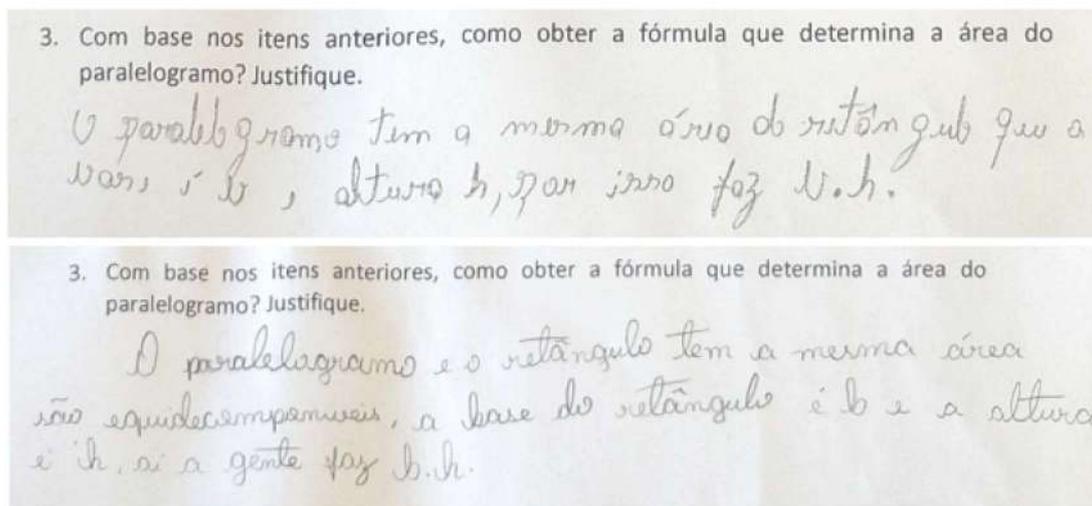


Fonte: O autor.

Percebam que, o grupo *A* não especificou sobre qual o ângulo que passaria a reta, porém, pela imagem ficou subtendido que seria um dos ângulos obtuso do paralelogramo. Já o grupo *E* usa a expressão: “meio do paralelogramo” de modo inadequado pra situação.

Já no terceiro quesito, notamos que apenas o grupo *D* não exibiu uma justificativa, representou apenas a fórmula, os demais apresentaram a fórmula e justificaram de modo satisfatório, o grupo *B* utilizou a expressão equidecomponível na sua justificativa, demonstrando que estão compreendendo a definição. Observemos na Figura 129, as justificativas apresentadas pelos grupos *A* e *B*, nessa ordem.

Figura 126 – Justificativa para a fórmula que determina a área do paralelogramo.



Fonte: O autor.

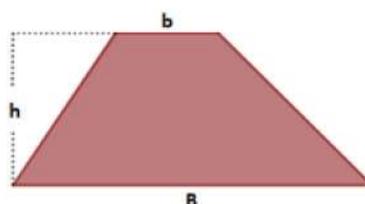
Desse modo, concluímos que apesar de um dos grupos não ter apresentado uma justificativa para a fórmula, o resultado no geral foi significativo, pois a partir do momento que eles conseguem expressar suas ideias, deduções..., por escrito, demonstram uma evolução significativa nesse aspecto.

6.2.4 4º e 5º Exercícios

Grupo: ____

4º Exercício. (Área do trapézio)

Observe a seguir, o **trapézio** de base maior B , base menor b e altura h , posteriormente, responda:

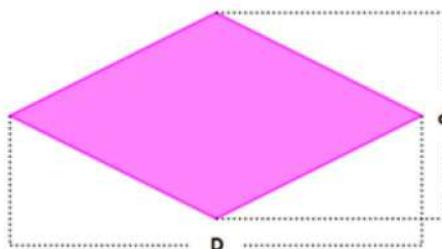


1. É possível decompor esse trapézio em quatro partes, de modo que obtenha **dois triângulos retângulos, um trapézio e um retângulo**? Caso sim, descreva seu raciocínio.
2. Rearranjando as quatro partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.
3. Com base nos itens anteriores, como obter a fórmula que determina a área do trapézio? Justifique.

Grupo: ____

5º Exercício. (Área do losango)

Observe a seguir, o **losango** de diagonal maior D e diagonal menor d , em seguida responda:



1. É possível decompor esse losango, de modo a obter **quatro triângulos retângulos congruentes**? Caso sim, descreva seu raciocínio.
2. Rearranjando os quatro triângulos do item anterior, componha um retângulo.
3. Com base nos itens anteriores, como podemos obter a fórmula que determina a área do losango? Justifique.

Fonte: O autor.

No terceiro encontro tivemos a presença de trinta alunos, foram orientados a formarem grupos contendo cinco alunos, dando preferência a manterem as formações anteriores.

O quarto e quinto exercícios foram elaborados com o objetivo de favorecer os alunos a deduzirem as fórmulas que determinam as áreas do trapézio e do losango, além disso, possibilitar o desenvolvimento de argumentos para justificá-las.

Inicialmente, proporcionamos uma discussão sobre o que já havíamos estudado nos encontros anteriores, a maioria dos alunos responderam que havia sido sobre as fórmulas para calcular a área do retângulo, quadrado, triângulo e paralelogramo. Posteriormente, questionamos: “- Como vocês estão deduzindo essas fórmulas?” E alguns responderam: “- Estamos sempre relacionando elas, com a fórmula do retângulo”. O que nos fez perceber que estávamos no caminho certo. Em seguida, fizemos outro questionamento: “- Qual o nome que podemos atribuir a polígonos que têm a mesma área?” Pedimos que somente os alunos que soubessem levantassem a mão e para nossa surpresa, apenas sete alunos levantaram. Daí questionamos aos demais: “- Vocês não sabem?” A maioria respondeu dizendo que sabia, no entanto, não estavam conseguindo lembrar o nome. Posteriormente, pedimos que um dos sete que inicialmente havia levantado a mão respondesse e este fez uma pequena confusão no pronunciamento, outro aluno entrevistou e o ajudou na pronúncia dizendo: “- Equidecomponíveis” e os demais concordaram com o colega. Com isso, notamos que a dificuldade da maioria não estava na compreensão da definição de polígonos equidecomponíveis e sim, em se familiarizar com a pronúncia.

Esclarecemos que, nesse encontro iríamos estudar sobre a área do trapézio e do losango.

Dividimos esse encontro em dois momentos, sendo que no primeiro orientamos os grupos a desenvolverem o quarto exercício que envolvia o trapézio e no segundo momento, foram orientados a desenvolverem o quinto exercício que envolvia o losango.

Iniciamos o primeiro momento, distribuindo aos grupos duas cópias do exercício e dois trapézios iguais, para que pudessem realizar os traços e recortes, conforme acharem conveniente.

O objetivo dos dois primeiros quesitos é provocar os alunos a perceberem que o trapézio de base maior B , base menor b e altura h é equidecomponível a um retângulo de base $\frac{B+b}{2}$ e altura h , além disso, que possam desenvolver argumentos para justificar a fórmula do cálculo da área do trapézio.

Dos seis grupos formados, passados cinco minutos nenhum deles havia conseguido concluir os dois primeiros quesitos, daí, questionamos: “- Partindo dos pontos médios dos lados que não são base, será que não ajuda?” Os grupos A , B e F responderam: “- Já tentamos assim, mas não estamos conseguindo”. Voltamos a questionar: “- Quais

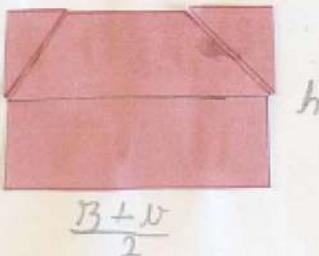
foram os polígonos que vocês obtiveram, após trassarem a base média?” E responderam: “- Encontramos dois trapézios, um pequeno e um grande”. Posteriormente, questionamos: “- Será que considerando um dos trapézios obtidos, não daria pra obter um retângulo e os dois triângulos retângulos?” Passados cinco minutos, percebemos que os grupos *A*, *B*, *C* e *F* já haviam respondido de modo satisfatório, em seguida pedimos que esses grupos apresentassem suas ideias aos demais, o que favoreceu os grupos *D* e *E* a responderem os quesitos. Vejamos na Figura 132, como argumentaram os grupos *A* e *C*, respectivamente.

Figura 127 – Decomposição do trapézio e composição de um retângulo equidecomponível.

1. É possível decompor esse trapézio em quatro partes, de modo que obtenha dois triângulos retângulos, um trapézio e um retângulo? Caso sim, descreva seu raciocínio.

Para isso, uma linha sobre pontos médios e para isso duas linhas sobre pontos médios para formar triângulos retângulos, depois movimentamos cada triângulo para cima e formamos o retângulo de base média e altura h .

2. Rearranjando as quatro partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.



1. É possível decompor esse trapézio em quatro partes, de modo que obtenha dois triângulos retângulos, um trapézio e um retângulo? Caso sim, descreva seu raciocínio.

Sim. Se você fizer um corte na horizontal no ponto médio e mais dois em cada ponta do trapézio que foi formado na parte inferior.

2. Rearranjando as quatro partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.

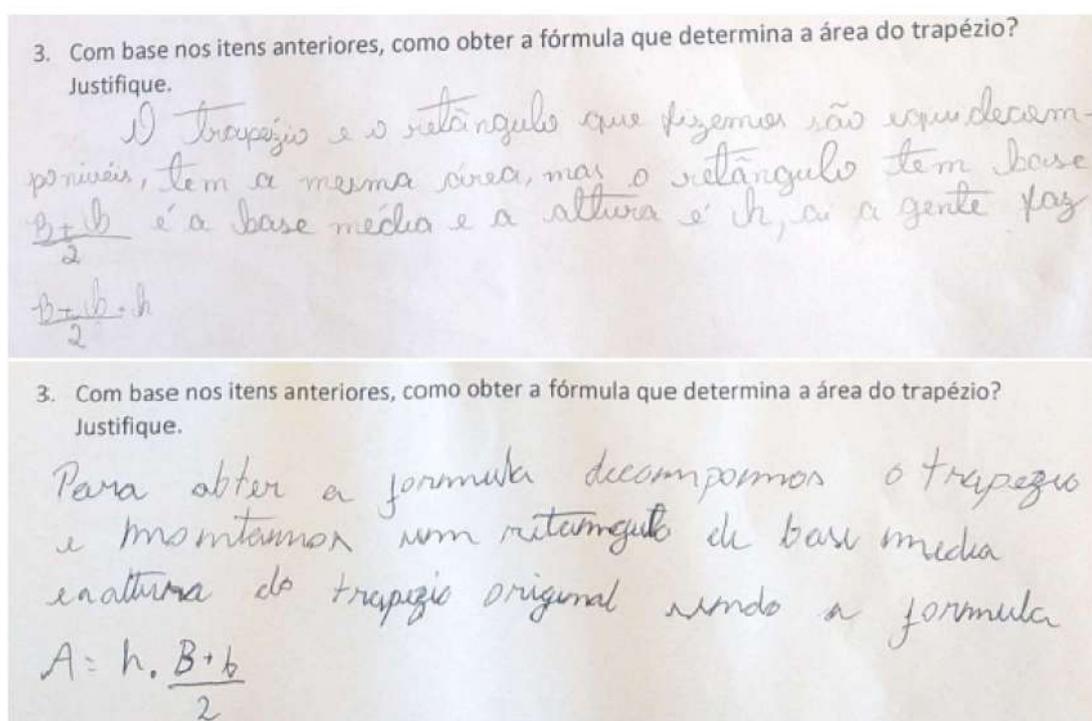


Fonte: O autor.

Percebam que, as explicações também precisam de alguns ajustes, o que é mais uma excelente oportunidade para o professor realizar intervenções.

No quarto quesito, todos os grupos conseguiram deduzir a fórmula e justificá-la, apesar de que os grupos *C*, *D* e *E* precisariam da intervenção do professor para alguns ajustes, porém, conforme obtivemos do questionário prévio, apesar de 80% aproximadamente, da turma ter realizado o desenho de um trapézio corretamente, apenas 5% aproximadamente, representaram a fórmula de modo correto e nenhum aluno apresentou uma justificativa exitosa para ela, o que nos faz concluir que o resultado do exercício foi bastante satisfatório. Vejamos na Figura 133, as justificativas, atribuídas pelos grupos *B* e *C*, nessa ordem.

Figura 128 – Justificativa para a fórmula que determina a área do trapézio.



Fonte: O autor.

Antes de iniciarmos o quinto exercício, questionamos: “- O trapézio e o retângulo têm a mesma área? Como podemos definir polígonos que têm a mesma área?” Alguns alunos responderam: “- Tem a mesma área e por isso, são chamados de equidecomponíveis”, posteriormente perguntei: “Todos concordam?” E de maneira unânime responderam: “- Concordamos”.

No segundo momento, nosso objetivo com a aplicação do quinto e último exercício, foi instigar os grupos a deduzirem a fórmula que determina a área do losango por meio de equidecomposição de polígonos, além disso, esperamos que possa contribuir no desenvolvimento de argumentos para justificá-la.

Distribuímos aos grupos duas cópias do exercício e duas figuras iguais de um losango, cujo nosso intuito é que explorem essas figuras realizando riscos, recortes, rear-

ranjos para obterem quatro triângulos retângulos congruentes, posteriormente, possam compor um retângulo utilizando esses triângulos.

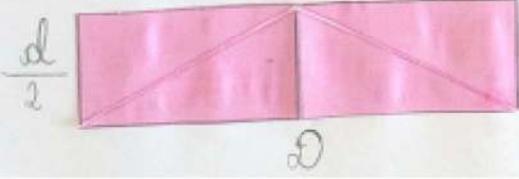
Passados cinco minutos, apenas o grupo *E* não havia respondido os dois primeiros quesitos. Posteriormente, questionamos para esse grupo: “- Será que se analisarmos as diagonais não ajudaria?” Passados três minutos o grupo *E* conseguiu concluir. Na Figura 134, temos o raciocínio apresentado pelos grupos *B* e *F*, respectivamente.

Figura 129 – Decomposição do losango e composição de um retângulo equidecomponível.

1. É possível decompor esse losango, de modo a obter quatro triângulos retângulos congruentes e com as partes obtidas, compor um retângulo? Caso sim, descreva seu raciocínio.

Sim. Bastei cortar as diagonais, depois coloquei dois triângulos encostando os lados menores e depois coloquei os outros dois encima, colando as hipotenusas, aí ficou um retângulo de base D e a altura ficou $\frac{d}{2}$.

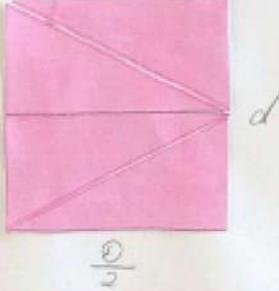
2. Rearranjando as partes obtidas no item anterior, componha um retângulo.



1. É possível decompor esse losango, de modo a obter quatro triângulos retângulos congruentes? Caso sim, descreva seu raciocínio.

Sim. Traçamos as diagonais e cortamos passando pelo meio delas, depois formamos o retângulo com as quatro partes, dois triângulos formam a altura d e colocamos um encima e outro embaixo formando a base $\frac{D}{2}$.

2. Rearranjando os quatro triângulos do item anterior, componha um retângulo.



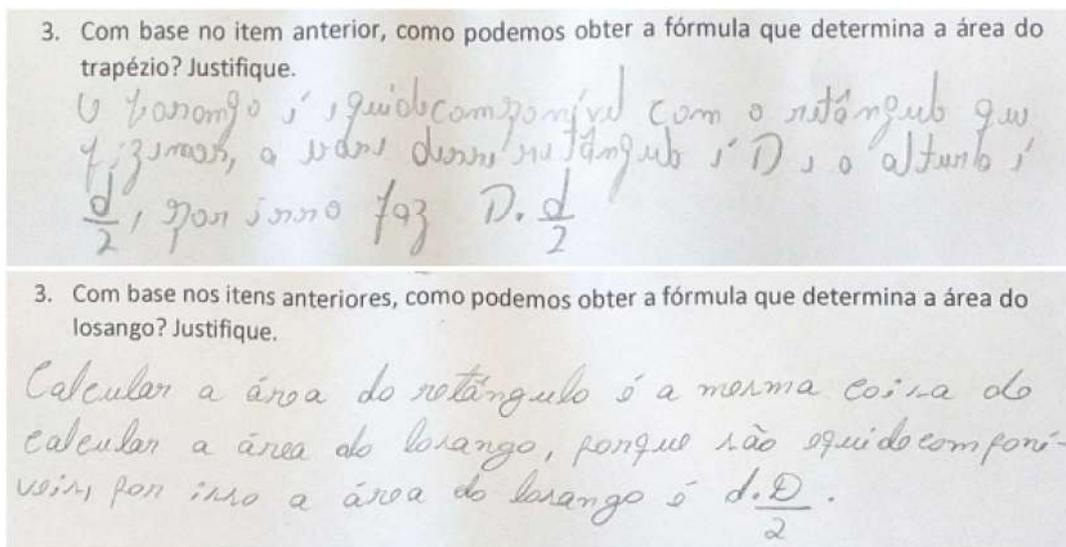
Fonte: O autor.

Observamos que, o grupo *F* realizou a composição do retângulo de modo diferente dos demais, o que foi uma excelente oportunidade de proporcionar uma discussão entre

os grupos.

No terceiro quesito, todos os grupos apresentaram uma justificativa satisfatória para a fórmula, com os grupos *C*, *D* e *E* necessitando de alguns ajustes, já os grupos *A*, *B* e *F* chegaram a utilizar a definição de polígonos equidecomponíveis nas suas justificativas. Vejamos na Figura 135, as justificativas exibidas pelos grupos *A* e *F*, respectivamente.

Figura 130 – Justificativa para a fórmula que determina a área do losango.



Fonte: O autor.

6.2.5 Comentários finais do Capítulo

Por meio da sequência didática, foi possível perceber que os alunos não lembravam, ou não sabiam de vários conceitos relacionados com a área dos principais polígonos (retângulo, quadrado, triângulo, paralelogramo, trapézio e losango), essa conclusão ficou perceptível após aplicação do questionário prévio, quando os alunos tiveram que representar as fórmulas que determinam as áreas desses polígonos e a dificuldade ficou mais evidente quando praticamente ninguém, conseguiu atribuir uma justificativa para essas fórmulas.

De acordo com o questionário prévio, obtivemos que a maioria até lembrou das fórmulas que determina a área do retângulo, do quadrado e do triângulo, no entanto, a incidência de erros foi gritante ao tentarem representar as fórmulas das áreas do paralelogramo, do trapézio e do losango, além disso, tivemos uma quantidade considerável de alunos não respondendo esse tópico.

Com o decorrer dos encontros e com as discussões que eram sempre fomentadas durante o desenvolvimento dos exercícios, foi notável a evolução que os alunos foram

apresentando, isso ficou evidente a partir do primeiro exercício quando tentaram expor suas ideias e escreveram suas deduções e com o passar dos exercícios foram aperfeiçoando suas justificativas, o que nos faz concluir que nossos objetivos foram alcançados.

No primeiro exercício os grupos A , B , C , F e G apresentaram suas justificativas, porém, algumas precisando de ajustes, os grupos D e E não justificaram. Já no segundo e terceiro exercícios que foram vivenciados no segundo encontro, os grupos A , B e F apresentaram justificativas exitosas, sendo que o grupo B utilizou a expressão equidecomponíveis em sua justificativa, os demais grupos também justificaram, apesar de precisarem de alguns ajustes. No terceiro encontro durante o desenvolvimento do quarto e quinto exercícios, percebemos que os grupos A , B e F apresentaram justificativas exitosas, utilizando a expressão equidecomponíveis nas suas justificativas, o que mostra que compreenderam a definição de polígonos equidecomponíveis, os grupos C , D e E também justificaram, no entanto, precisariam de alguns ajustes.

Durante o desenvolvimento dos exercícios, estivemos sempre verificando o quanto a equidecomposição de polígonos estaria favorecendo na dedução dos fundamentos lógicos das fórmulas que nos possibilita determinar a área dos principais polígonos, além disso, se contribuiria na elaboração de justificativas para elas, e tudo isso ficou evidente, a partir do momento que os alunos foram sendo provocados a explorar suas imaginações, realizando traços, recortes e rearranjos em um certo polígono, com o intuito de comporem um retângulo equidecomponível a este, acreditamos que essas ações foram essenciais para o desenvolvimento das argumentações, nas apresentações das deduções e na elaboração das justificativas para cada fórmula. Com isso, podemos concluir que a elaboração de exercícios envolvendo a equidecomposição de polígonos, pode ser um excelente facilitador na assimilação do estudo sobre o cálculo de área de polígonos.

Deixaremos o material elaborado por (ANDRÁS; TAMÁSI, 2014) e (MAIN-LUU, 2019), como uma outra sugestão de atividade, esse material envolve jogos de quebra-cabeça que tem como objetivo, vivenciar a equidecomposição de polígonos em uma Teoria fundamentada no Teorema de **Wallace-Bolyai-Gerwien**. Um material que o professor realizando as devidas adequações, pode ser vivenciado com alunos a partir do ensino fundamental até o ensino superior, a ideia é que os alunos compreendam de forma consistente a noção de área de polígonos.

7 Conclusões

Enfatizamos neste trabalho a equidecomposição de polígonos, pois acreditamos que possa auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem referente aos conceitos atrelados ao cálculo de área de polígonos, podendo favorecer os alunos a evitarem os erros mais comuns na resolução de exercícios envolvendo esse tema, como por exemplo, expressarem as fórmulas de modo incorreto, ou as utilizarem de modo inadequado.

Demonstramos o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e por meio dele, demonstramos as fórmulas que determinam a área dos principais polígonos (retângulo, quadrado, triângulo, paralelogramo, trapézio e losango).

Analisamos alguns livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio, dando ênfase a parte teórica e aos exercícios envolvendo áreas de polígonos. Com essa análise, concluímos que a equidecomposição de polígonos poderia ser mais explorada pelos autores, principalmente na apresentação das fórmulas, visto que esses resultados foram exibidos de modo imediato, conforme descrevemos no Capítulo 5, além disso, notamos que nos exercícios propostos, ou autores poderiam explorar mais situações envolvendo malhas quadriculadas, o tangran, materiais e puzzles em exercícios lúdicos, pois esses exercícios favorecem o desenvolvimento de ideias e nas deduções.

Elaboramos uma sequência didática embasada na equidecomposição de polígonos e aplicamos no primeiro ano *D* da EREM-JEM (Escola de Referência em Ensino Médio José Emílio de Melo) localizada no município de Tupanatinga-PE, a princípio utilizamos o Questionário Prévio, com o objetivo de identificar os conhecimentos pré-existentes da turma sobre áreas de polígonos, com isso, concluímos que os alunos não lembravam, ou não sabiam vários conceitos, apresentando muita dificuldade em representarem e justificarem as fórmulas dos principais polígonos, as poucas argumentações que surgiram foram de modo oral, no entanto, necessitaram da intervenção do professor para realizar alguns ajustes. No decorrer do desenvolvimento da sequência didática, os alunos foram provocados a realizarem traços, recortes e por meio de rearranjos formarem polígonos equidecomponíveis, o que contribuiu com o surgimento de ideias, favoreceu nas deduções e as justificativas foram fluído de maneira mais contundente, conforme descrevemos no Capítulo 6. Percebemos que, a equidecomposição de polígonos foi essencial para que os alunos compreendessem os fundamentos lógicos das fórmulas, pois favoreceu na visualização das relações existentes entre as dimensões dos polígonos equidecomponíveis, além disso, contribuiu na constatação da invariância da área na equidecomposição. Outro ponto interessante da nossa sequência didática, é que por não exigir nenhum tipo de ferramenta tecnológica digital, utilizamos recursos acessíveis, de baixo custo e de fácil confecção, se tornando uma material bem viável

para ser vivenciada em qualquer escola.

Para finalizar, esperamos que esse trabalho possa contribuir no processo de ensino-aprendizagem, auxiliando o professor em sala de aula no estudo sobre o cálculo de área de polígonos e conseqüentemente, contribuir com o ensino de Geometria no Ensino Básico.

Referências

- ANDRÁS, S.; TAMÁSI, C. Teaching geometry through play. *Universiteit Utrecht, ECENT and ELWier*, 2014. Citado na página 144.
- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana. coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 23, 28 e 51.
- BICUDO, I. *Os elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 44.
- BOLSTIANSKI, V. c. N. J. M. t. p. S. H. *Figuras equivalentes e equicompostas*. São Paulo: Atual; Editora MIR, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 17, 36, 39, 46, 47 e 63.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. J. R.; SOUZA, P. R. C. *Prisma matemática: 1Matemática Ensino Médio ano*. São Paulo: Editora FTD, 2020. Citado 10 vezes nas páginas 91, 93, 94, 95, 97, 98, 100, 101, 102 e 104.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. São Paulo: Editora BLUCHER, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 08 mai. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 153.
- CUARTERO, B.; GARAY, J.; GASCA, M. El universalismo matemático del profesor rodriguez-salinas. *REAL ACADEMIA DE CIENCIAS*, Zaragoza, p. 147. Citado na página 45.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. *Geometria plana*. São Paulo: Atual, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 17, 29 e 50.
- ESTRADA, M. F. et al. *História da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. Citado na página 44.
- EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. São Paulo: UNICAMP, 1995. Citado na página 40.
- FILHO, D. C. d. M. *Um convite à Matemática*. Rio de Janeiro: Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- GONÇALVES, J. O. *Matemática por assunto: geometria plana e espacial*. São Paulo: Editora Scipione, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 23, 47, 66 e 87.
- GRAVINA, M.; OFFMANN, D. Polígonos equidecomponíveis. *Oxford Applied Mathematics and computing science series*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Instituto de Matemática, 2022. Citado na página 107.
- HILBERT, D. Fundamentos da geometria. trad: Oliveira. *Gradiva*, Lisboa, 2003. Citado na página 48.

- IEZZI, G. et al. *Matemática ciências e aplicações: Matemática Ensino Médio - Volume 1*. São Paulo: Saraiva, 2016. Citado 12 vezes nas páginas 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 102, 104 e 106.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade: 7º ano*. São Paulo: Atual, 2005. Citado na página 84.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado na página 66.
- LIMA, E. L. et al. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 17, 33, 36, 47 e 63.
- LIMA, E. L. et al. *Medida e forma em geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 80, 82, 85, 94 e 96.
- MAIN-LUU, H. Mathe-magical scissors: Equidecomposition of polygons part iii. *Berkeley Math Circle, Beginners*, 2019. Citado na página 144.
- MARTINS, J. O livro que divulgou o papiro rhind no brasil. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2015. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- NETO, A. C. M. *Geometria, Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 1o Edição, 2013. v. 6. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 66.
- NETO, M.; CAMINHA, A. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 17.
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. *Educação Matemática em Revista*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 24, n. 63, p. 121–137, 2019. Citado na página 107.
- PAIVA, M. R. *Matemática: Ensino Médio Volume 1*. São Paulo: Moderna, 2015. Citado 11 vezes nas páginas 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 102, 103 e 105.
- PCNS, I. A. P. C. N. terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. *Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental*, p. 152, 1998. Citado na página 14.
- PINTO, M. J. T. F. M. Isometrias. *Disertação, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto*, 2012. Citado na página 39.
- REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 17, 23, 24 e 26.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 44.

Apêndices

APÊNDICE A – Momentos da realização da Sequência Didática

Figura 131 – Momento de Interação



Fonte: O Autor

Figura 132 – Momento de Interação

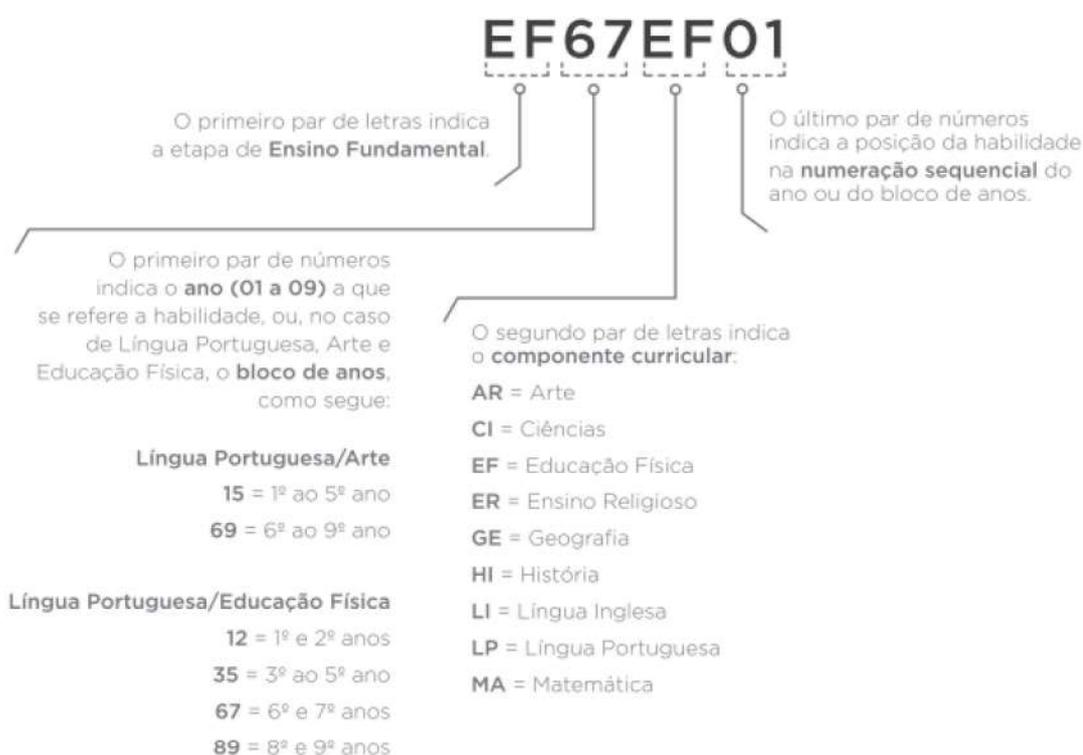


Fonte: O Autor

Anexos

ANEXO A – Descrição dos Códigos alfanuméricos da BNCC

Figura 133 – Código alfanumérico para o Ensino Fundamental



Fonte: (BRASIL, 2018)



Figura 134 – Código alfanumérico para o Ensino Médio