



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Idalice Maria Santiago Oliveira

Geometrização do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya

Campina Grande - PB

Agosto/2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Idalice Maria Santiago Oliveira

Geometrização do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho

Coorientador: Dra. Carmen Vieira Mathias

Campina Grande - PB

Agosto/2023

O48g

Oliveira, Idalice Maria Santiago.

Geometrização do teorema de Pitágoras e sua generalização como o teorema de Pólya / Idalice Maria Santiago Oliveira. - Campina Grande, 2023.

169 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, Profa. Dra. Carmen Vieira Mathias."

Referências.

1. Geometria Plana. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Teorema de Pólya. 4. Ensino Básico. 5. Semelhança de Figuras e Áreas. 6. Software GeoGebra. 7. Sequências Didáticas. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Mathias, Carmen Vieira. III. Título.

CDU 514.112(043)

Idalice Maria Santiago Oliveira

Geometrização do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 11 de agosto de 2023:



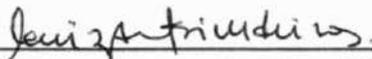
Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho
Orientador-UFCG



Dra. Carmen Vieira Mathias
Coorientador-UFSM



Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Membro Externo-UEPB



Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros
Membro Interno-UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2023

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram, em especial, a Deus e minha família.

Agradecimentos

A Deus, pela minha vida, pela força e persistência para prosseguir mesmo diante de todos os empecilhos encontrados ao longo do caminho.

À minha mãe, Maria Francisca Santiago, por me apoiar em todos os momentos da minha vida.

Ao meu pai, Aurélio Américo Santiago (in memoriam), por me incentivar a nunca desistir.

Ao meu esposo, Teotônio Albuquerque Oliveira, pelo carinho e apoio nessa jornada rumo a conclusão do mestrado.

Às minhas filhas, Tamires Santiago Oliveira e Thaise Santiago Oliveira, que me apoiaram e me admiram.

À minha irmã, Silvania Maria Santiago (in memoriam), por sempre me incentivar a continuar na busca da realização do sonho de ser mestra.

Aos meus irmãos Márcia de Fátima Santiago, Maria da Conceição Santiago Duarte e Marcelo Franklin Santiago por me apoiarem durante toda minha caminhada.

Aos professores do PROFMAT- UFCG, Dra. Deise Mara, Dr. Daniel Cordeiro, Dr. Jaime, Dr. José de Arimatéia, Dr. Leomarques, Dr. Luiz Antônio, Dr. Marcelo, Dr. Rodrigo Cohen e Dr. José Fernando, pelos valiosos ensinamentos.

Aos meus professores orientadores Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho e Dra. Carmen Vieira Mathias que me acompanharam e me auxiliaram durante todo esse processo.

Ao professor Dr. Vandenberg Lopes Vieira - UEPB, por suas contribuições visando a melhoria da Dissertação.

Aos professores da banca, Dr. Aldo Trajano Lourêdo e Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, por aceitarem o convite e pelas sugestões valiosas que muito contribuíram com a escrita da Dissertação.

Aos colegas de turma, André Macedo, Andreson Alquino, Benildo Virgínio, Carlos Gonzaga, Cláudio Teodista, Erivan Barbosa, Eli Azevedo, Érico Felintro, Gilmar Veríssimo, Gilvandro Melo, João Evair, Rafael Augusto, Wellington Rodrigues e Wirander Oliveira que permaneceram unidos durante toda a jornada rumo a nossa conquista.

A todos os meus alunos que participaram e colaboraram na obtenção de dados para finalizar esta pesquisa.

Ao meu colega de trabalho, Daniel Alves Augusto de Melo, por ter lido uma parte da minha dissertação e contribuído com sua avaliação.

Finalmente, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM por oferecer este Curso em Rede Nacional.

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram
conquistadas do que parecia impossível”.*

(Charles Chaplin)

Resumo

O Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais importantes teoremas na Matemática, devido a sua ampla aplicação na resolução de problemas ligados à Geometria e ciências afins, principalmente para calcular distância. Atualmente percebemos que o Teorema de Pitágoras está sendo apresentado aos estudantes, em especial na Educação Básica, no seu formato algébrico, com pouca ênfase em Geometria e às vezes os estudantes não entendem o seu significado geométrico. Nesta pesquisa, abordamos o Teorema de Pitágoras no formato totalmente geométrico, utilizando áreas de figuras semelhantes. Além disso, apresentaremos o Teorema de Pólya, numa versão mais formal que comumente encontramos, como uma de suas generalizações. Para isso, abordaremos conceitos importantes da Geometria Plana que são essenciais para a compreensão desses teoremas, como semelhança de figuras e áreas. Apresentamos também sugestões de sequências didáticas para serem aplicadas em turmas de 9º ano e 1º ano do Ensino Básico e desenvolvemos atividades dinâmicas usando o software GeoGebra para mostrar através de áreas os teoremas de Pólya e de Pitágoras.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras. Geometria. Áreas. Semelhança. Teorema de Pólya.

Abstract

The Pythagorean Theorem is considered one of the most important theorems in Mathematics, due to its wide application in solving problems related to Geometry and related sciences, mainly to calculate distances. Currently we realize that the Pythagorean Theorem is being presented to students, especially in Basic Education, in its algebraic format, with little emphasis on Geometry and sometimes students do not understand its geometric meaning. In this research, we approach the Pythagorean Theorem in a fully geometric format, using areas of similar figures. In addition, we will present Pólya's Theorem, in a more formal version that we commonly find, as one of its generalizations. For this, we will approach important concepts of Plane Geometry that are essential for the understanding of these theorems, such as similarity of figures and areas. We also present suggestions for didactic sequences to be applied in 9th grade and 1st grade classes of Basic Education and we develop dynamic activities using the GeoGebra software to show the theorems of Pólya and of Pythagoras through areas.

Keywords: Pythagorean theorem. Geometry. Areas. Resemblance. Polya's theorem.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Teorema de Pitágoras.	29
Figura 2 – Arco A_1	32
Figura 3 – Arco A_2	32
Figura 4 – Gráfico de A_3	33
Figura 5 – Arco de Jordan.	33
Figura 6 – Curva simples e fechada.	34
Figura 7 – Curva fechada, mais não é simples	35
Figura 8 – Arco suave C_1	36
Figura 9 – Arco suave C_2	36
Figura 10 – Caminho C	37
Figura 11 – Caminho D	37
Figura 12 – Caminho fechado.	38
Figura 13 – Rosácea: Curva C_1	38
Figura 14 – Astroide: Curva C_2	39
Figura 15 – Cardioide: Curva C_3	39
Figura 16 – Curva de Bowditch: C_4	39
Figura 17 – Segmento de reta $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 3\}$	41
Figura 18 – Segmentos de retas consecutivos: $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 3\}$ $BC = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -3 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq -4\}$	41
Figura 19 – Segmentos de retas colineares AB e CD	42
Figura 20 – Poligonal $A_1A_2A_3A_4$	43
Figura 21 – Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$	43
Figura 22 – Polígono Convexo.	44
Figura 23 – Polígono não Convexo.	44
Figura 24 – Diagonais partindo do vértice A_1 do polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$	46
Figura 25 – Polígono com lados não paralelos ao eixo das ordenadas, usado na demonstração da primeira possibilidade do Teorema 3.2.8.	47
Figura 26 – Polígono com lados não paralelos ao eixo das ordenadas, usado na demonstração da segunda possibilidade do Teorema 3.2.8.	47
Figura 27 – Quadrado.	50
Figura 28 – Imagem da Figura 27, pela transformação $T(x, y) = (x, \frac{y}{2})$	50
Figura 29 – Translação.	52
Figura 30 – Translação da Figura $ABCDEF$ pelo vetor $\vec{v} = (7, 0)$	53
Figura 31 – Rotação de um ângulo θ no sentido anti- horário.	54

Figura 32 – Rotação de 45° do triângulo ABC no sentido anti-horário.	54
Figura 33 – Rotação de 90° da figura $BCDEFG$ no sentido anti-horário.	55
Figura 34 – Reflexão do ponto A em torno do eixo x	56
Figura 35 – $A'B'C'$ é a imagem refletida de ABC pela transformação $T(x, y) =$ $(-x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$	56
Figura 36 – Segmento PQ transformado por S no segmento $P'Q'$	60
Figura 37 – Reta t transformada por S na reta t'	61
Figura 38 – Triângulos Retângulos Semelhantes	62
Figura 39 – Retas perpendiculares	63
Figura 40 – Sistema Cartesiano de eixos ortogonais OXY transformado pela se- melhança S no sistema de eixos cartesianos ortogonais $O'X'Y'$	64
Figura 41 – Ângulos Congruentes	66
Figura 42 – Circunferências C e C'	67
Figura 43 – Elipses semelhantes E e E'	68
Figura 44 – Quadrados semelhantes Q e Q'	71
Figura 45 – Parábolas semelhantes P e P'	72
Figura 46 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x^2$	74
Figura 47 – Semelhança de triângulos	76
Figura 48 – Círculos C e C'	76
Figura 49 – Triângulos semelhantes.	77
Figura 50 – Polígono: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$	78
Figura 51 – Polígonos Semelhantes.	79
Figura 52 – Polígonos com um dos vértices na origem do plano cartesiano.	80
Figura 53 – Triangularização dos Polígonos P e P'	81
Figura 54 – Polígono retangular.	82
Figura 55 – Área do polígono retangular P	83
Figura 56 – Diâmetro de Círculo.	84
Figura 57 – Figura A	85
Figura 58 – Figura B	86
Figura 59 – Teorema de Pitágoras.	90
Figura 60 – Triângulo Retângulo.	90
Figura 61 – Quatro triângulos retângulos dispostos de duas formas diferentes.	91
Figura 62 – Construção de quadrados de lados $b + c$, usando triângulos retângulos.	91
Figura 63 – Pólya.	93
Figura 64 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	94
Figura 65 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retân- gulo.	95
Figura 66 – Círculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo	95

Figura 67 – Figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	96
Figura 68 – Borboleta.	97
Figura 69 – Borboletas semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	98
Figura 70 – Corações semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	98
Figura 71 – Quebra-cabeça com quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	100
Figura 72 – Quebra-cabeça com triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	101
Figura 73 – Quadrados para recortar.	106
Figura 74 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo Retângulo. . . .	107
Figura 75 – Teorema de Pitágoras com quadrados.	108
Figura 76 – Quadrados para recorte.	109
Figura 77 – Colagem de polígonos sobre a hipotenusa do triângulo retângulo. .	110
Figura 78 – Área de quadrados.	110
Figura 79 – Pitágoras com triângulos equiláteros.	112
Figura 80 – Triângulo para recorte.	113
Figura 81 – Triângulo sobre a hipotenusa.	114
Figura 82 – Área de triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo.	115
Figura 83 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo de hipotenusa a , catetos b e c	115
Figura 84 – Áreas dos hexágonos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	116
Figura 85 – Área de hexágonos.	117
Figura 86 – Quebra cabeça com quadrados.	118
Figura 87 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	119
Figura 88 – Polígonos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	120
Figura 89 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	120
Figura 90 – Polígonos e semicírculos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	121
Figura 91 – Alunos realizando a avaliação diagnóstica.	122
Figura 92 – Alunos realizando a avaliação diagnóstica.	123

Figura 93 – Alunos desenhando um triângulo retângulo para colar quadrados sobre os seus lados.	124
Figura 94 – Alunos desenhando um triângulo retângulo para colar quadrados sobre os seus lados.	124
Figura 95 – Alunos recortando os polígonos para formarem quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.	125
Figura 96 – Alunos recortando os polígonos para formarem quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.	125
Figura 97 – Quadrado construído, pelos alunos, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.	126
Figura 98 – Quadrado construído, pelos alunos, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.	126
Figura 99 – Alunos recortando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.	127
Figura 100 – Alunos recortando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.	128
Figura 101 – Alunos colando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.	128
Figura 102 – Triângulos equiláteros construídos, pelos alunos sobre os lados do triângulo retângulo.	129
Figura 103 – Triângulos equiláteros construídos, pelos alunos sobre os lados do triângulo retângulo.	129
Figura 104 – Hexágonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo.	130
Figura 105 – Hexágonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo.	130
Figura 106 – Quebra- cabeça para construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	131
Figura 107 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	132
Figura 108 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	133
Figura 109 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	134
Figura 110 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.	135
Figura 111 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.	135
Figura 112 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.	136
Figura 113 – Avaliação diagnóstica.	136
Figura 114 – Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	137

Figura 115–Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	137
Figura 116–Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	138
Figura 117–Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	138
Figura 118–Animação do Teorema de Pitágoras.	141
Figura 119–Movimentação, no Geogebra, de quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.	142
Figura 120–Quebra-cabeça para o Teorema de Pitágoras.	143
Figura 121–Quebra-cabeça com peças poligonais para dinamizar o Teorema de Pitágoras.	144
Figura 122–Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya, considerando triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	145
Figura 123–Quebra-cabeça com peças poligonais para dinamizar o Teorema de Pólya, considerando triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	146
Figura 124–Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	147
Figura 125–Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	148
Figura 126–Peças para montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	149
Figura 127–Exemplo de montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	150
Figura 128–Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya.	151
Figura 129–Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya.	151
Figura 130–Figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo, usando quadrados.	152
Figura 131–Recíproca do Teorema de Pitágoras.	158
Figura 132–Triângulos.	159
Figura 133–Par de semicírculos.	160
Figura 134–Par de estrelas.	160
Figura 135–Par de triângulos azuis.	160
Figura 136–Par de triângulos equiláteros.	161
Figura 137–Quadrados para aplicação da atividade 1.	162
Figura 138–Figura, para ser colada no caderno, para a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras da atividade 1.	163
Figura 139–Figura usada na aplicação da atividade 1.	164
Figura 140–Figura para ser colada no caderno na aplicação da atividade 2.	165

Figura 141 – Figura tracejada usada na aplicação da atividade 2.	166
Figura 142 – Figura usada na aplicação da atividade 3	167
Figura 143 – Figura para confecção do quebra-cabeça triangular para a aplicação da atividade 4.	168
Figura 144 – Figura para confecção do quebra-cabeça com quadrados para a avaliação da atividade 4.	169

Sumário

	Lista de ilustrações	19
1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Objetivos	26
1.1.1	Objetivo Geral	26
1.1.2	Objetivos Específicos	26
1.2	Organização	26
2	A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E AS INDICAÇÕES GEOMÉTRICAS DO ESTUDO DE TEOREMAS	28
2.1	Como a BNCC sugere que os teoremas geométricos sejam apre- sentados?	28
2.2	Como a BNCC sugere o estudo do Teorema de Pitágoras?	29
3	FIGURAS E POLÍGONOS	31
3.1	Figura no contexto matemático	31
3.1.1	Arcos	31
3.1.2	Curvas	34
3.1.3	Caminho	35
3.1.4	Figura	40
3.2	Polígono	40
3.2.1	Elementos de um polígono	44
3.2.2	Decomposição de Polígonos	45
4	NOÇÕES BÁSICAS DE SEMELHANÇAS	48
4.1	A noção de distância entre pontos no plano	48
4.2	Transformações no Plano	49
4.3	Isometria no plano	49
4.4	Tipos de Isometrias no Plano	51
4.4.1	Translação	51
4.4.2	Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário	51
4.4.3	Reflexão	55
5	SEMELHANÇA NO PLANO	58
5.1	O conceito matemático de semelhança	58
5.1.1	Semelhança	58

5.1.2	Exemplos de algumas semelhanças de figuras	65
5.2	Semelhança de triângulos	73
5.3	A razão entre áreas semelhantes de figuras conhecidas	75
5.4	A razão entre áreas de polígonos semelhantes	78
5.4.1	Área de Polígono	78
6	ÁREA DE FIGURAS	82
6.1	Polígono Retangular	82
6.2	Área de uma figura qualquer	83
7	TEOREMA DE PÓLYA COMO UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS	88
7.1	Pitágoras de Samos	88
7.2	Biografia de George Pólya	92
7.2.1	Motivação para o Teorema de Polya	92
7.2.1.1	Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo	93
7.2.1.2	Triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo retângulo	93
7.2.1.3	Círculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo	94
7.3	Teorema de Pólya	95
7.4	Alguns casos interessantes do Teorema de Pólya	97
8	CONSTRUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS PARA ENSINAR O TEOREMA DE PÓLYA	99
8.1	Construção de quebra-cabeças	99
8.2	Como usar o material didático do Teorema de Pólya em sala de aula	99
9	DUAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O PROFESSOR APRE- SENTAR OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E DE PÓLYA EM SALA DE AULA	102
9.1	Sequência didática	102
9.2	Uma sugestão de sequência didática para os teoremas de Pitá- goras e de Pólya	104
9.2.1	Público-alvo	104
9.2.2	Habilidades da BNCC	104
9.2.3	Avaliação diagnóstica para inserir os teoremas de Pitágoras e de Pólya	104
9.3	Sequência didática para a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras	105
9.3.1	Atividade 1	105

9.3.2	Objetivo Geral	105
9.3.3	Objetivo Específicos	105
9.3.4	Materiais usados	105
9.3.5	Conhecimentos prévios	106
9.3.6	Tempo de realização	106
9.3.7	Desenvolvimento da atividade	106
9.3.8	Sugestão para avaliação da atividade 1	109
9.4	Sequência didática para a demonstração geométrica do Teorema de Pólya	109
9.5	Atividade 1	109
9.5.1	Objetivo Geral:	110
9.5.2	Objetivos específicos:	111
9.5.3	Conhecimentos prévios:	111
9.5.4	Tempo de realização:	111
9.5.5	Desenvolvimento da atividade	111
9.5.6	Sugestão para avaliação da atividade 1	111
9.6	Atividade 2	112
9.6.1	Objetivo Geral	112
9.6.2	Objetivos específicos:	113
9.6.3	Conhecimentos prévios:	113
9.6.4	Tempo de realização	113
9.6.5	Desenvolvimento da atividade	114
9.6.6	Sugestão para a avaliação da atividade 2	114
9.7	Atividade 3	116
9.7.1	Objetivo Geral	116
9.7.2	Objetivos específicos	116
9.7.3	Conhecimentos prévios:	117
9.7.4	Tempo de realização	117
9.7.5	Desenvolvimento da atividade	117
9.7.6	Sugestão para avaliação da atividade 3	118
10	APLICAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS DE UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS TEOREMAS DE PITÁGORAS E DE PÓLYA	122
10.1	Aplicação da Avaliação Diagnóstica	122
10.2	Aplicação da Sequência Didática do Teorema de Pitágoras	123
10.3	Aplicação da Sequência Didática do Teorema de Pólya	125

11	ANÁLISE DAS APLICAÇÕES DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS DOS TEOREMAS DE PITÁGORAS E DE PÓLYA EM SALA DE AULA	135
11.1	Análise da avaliação diagnóstica	135
11.2	Análise da aplicação das sequências didáticas dos teorema de Pitágoras e de Pólya	136
12	O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA DINAMIZAR OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E DE PÓLYA	140
12.1	Teorema de Pitágoras com o uso do Software GeoGebra	140
12.2	Teorema de Pólya com o uso do Software GeoGebra	141
13	CONCLUSÕES	153
	REFERÊNCIAS	154
	APÊNDICES	156
	APÊNDICE A – DERIVADA DE UMA FUNÇÃO	157
A.1	Derivada de uma função	157
	APÊNDICE B – RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS	158
B.1	Recíproca do Teorema de Pitágoras	158
	APÊNDICE C – SUGESTÃO DE AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DA SEÇÃO 9.2.3 DO CAPÍTULO 9	159
C.1	Avaliação Diagnóstica	159
	APÊNDICE D – FIGURAS USADAS NAS APLICAÇÕES DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E DE PÓLYA	162

Lista de ilustrações

Figura 1 – Teorema de Pitágoras.	29
Figura 2 – Arco A_1	32
Figura 3 – Arco A_2	32
Figura 4 – Gráfico de A_3	33
Figura 5 – Arco de Jordan.	33
Figura 6 – Curva simples e fechada.	34
Figura 7 – Curva fechada, mais não é simples	35
Figura 8 – Arco suave C_1	36
Figura 9 – Arco suave C_2	36
Figura 10 – Caminho C	37
Figura 11 – Caminho D	37
Figura 12 – Caminho fechado.	38
Figura 13 – Rosácea: Curva C_1	38
Figura 14 – Astroide: Curva C_2	39
Figura 15 – Cardioide: Curva C_3	39
Figura 16 – Curva de Bowditch: C_4	39
Figura 17 – Segmento de reta $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 3\}$	41
Figura 18 – Segmentos de retas consecutivos: $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 3\}$ $BC = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -3 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq -4\}$	41
Figura 19 – Segmentos de retas colineares AB e CD	42
Figura 20 – Poligonal $A_1A_2A_3A_4$	43
Figura 21 – Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$	43
Figura 22 – Polígono Convexo.	44
Figura 23 – Polígono não Convexo.	44
Figura 24 – Diagonais partindo do vértice A_1 do polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$	46
Figura 25 – Polígono com lados não paralelos ao eixo das ordenadas, usado na demonstração da primeira possibilidade do Teorema 3.2.8.	47
Figura 26 – Polígono com lados não paralelos ao eixo das ordenadas, usado na demonstração da segunda possibilidade do Teorema 3.2.8.	47
Figura 27 – Quadrado.	50
Figura 28 – Imagem da Figura 27, pela transformação $T(x, y) = (x, \frac{y}{2})$	50
Figura 29 – Translação.	52
Figura 30 – Translação da Figura $ABCDEF$ pelo vetor $\vec{v} = (7, 0)$	53
Figura 31 – Rotação de um ângulo θ no sentido anti- horário.	54

Figura 32 – Rotação de 45° do triângulo ABC no sentido anti-horário.	54
Figura 33 – Rotação de 90° da figura $BCDEFG$ no sentido anti-horário.	55
Figura 34 – Reflexão do ponto A em torno do eixo x	56
Figura 35 – $A'B'C'$ é a imagem refletida de ABC pela transformação $T(x, y) = (-x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$	56
Figura 36 – Segmento PQ transformado por S no segmento $P'Q'$	60
Figura 37 – Reta t transformada por S na reta t'	61
Figura 38 – Triângulos Retângulos Semelhantes	62
Figura 39 – Retas perpendiculares	63
Figura 40 – Sistema Cartesiano de eixos ortogonais OXY transformado pela semelhança S no sistema de eixos cartesianos ortogonais $O'X'Y'$	64
Figura 41 – Ângulos Congruentes	66
Figura 42 – Circunferências C e C'	67
Figura 43 – Elipses semelhantes E e E'	68
Figura 44 – Quadrados semelhantes Q e Q'	71
Figura 45 – Parábolas semelhantes P e P'	72
Figura 46 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x^2$	74
Figura 47 – Semelhança de triângulos	76
Figura 48 – Círculos C e C'	76
Figura 49 – Triângulos semelhantes.	77
Figura 50 – Polígono: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$	78
Figura 51 – Polígonos Semelhantes.	79
Figura 52 – Polígonos com um dos vértices na origem do plano cartesiano.	80
Figura 53 – Triangularização dos Polígonos P e P'	81
Figura 54 – Polígono retangular.	82
Figura 55 – Área do polígono retangular P	83
Figura 56 – Diâmetro de Círculo.	84
Figura 57 – Figura A	85
Figura 58 – Figura B	86
Figura 59 – Teorema de Pitágoras.	90
Figura 60 – Triângulo Retângulo.	90
Figura 61 – Quatro triângulos retângulos dispostos de duas formas diferentes.	91
Figura 62 – Construção de quadrados de lados $b + c$, usando triângulos retângulos.	91
Figura 63 – Pólya.	93
Figura 64 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	94
Figura 65 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	95
Figura 66 – Círculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo	95

Figura 67 – Figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	96
Figura 68 – Borboleta.	97
Figura 69 – Borboletas semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	98
Figura 70 – Corações semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	98
Figura 71 – Quebra-cabeça com quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	100
Figura 72 – Quebra-cabeça com triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	101
Figura 73 – Quadrados para recortar.	106
Figura 74 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo Retângulo.	107
Figura 75 – Teorema de Pitágoras com quadrados.	108
Figura 76 – Quadrados para recorte.	109
Figura 77 – Colagem de polígonos sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.	110
Figura 78 – Área de quadrados.	110
Figura 79 – Pitágoras com triângulos equiláteros.	112
Figura 80 – Triângulo para recorte.	113
Figura 81 – Triângulo sobre a hipotenusa.	114
Figura 82 – Área de triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo.	115
Figura 83 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo de hipotenusa a , catetos b e c	115
Figura 84 – Áreas dos hexágonos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	116
Figura 85 – Área de hexágonos.	117
Figura 86 – Quebra cabeça com quadrados.	118
Figura 87 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	119
Figura 88 – Polígonos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	120
Figura 89 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.	120
Figura 90 – Polígonos e semicírculos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	121
Figura 91 – Alunos realizando a avaliação diagnóstica.	122
Figura 92 – Alunos realizando a avaliação diagnóstica.	123

Figura 93 – Alunos desenhando um triângulo retângulo para colar quadrados sobre os seus lados.	124
Figura 94 – Alunos desenhando um triângulo retângulo para colar quadrados sobre os seus lados.	124
Figura 95 – Alunos recortando os polígonos para formarem quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.	125
Figura 96 – Alunos recortando os polígonos para formarem quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.	125
Figura 97 – Quadrado construído, pelos alunos, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.	126
Figura 98 – Quadrado construído, pelos alunos, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.	126
Figura 99 – Alunos recortando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.	127
Figura 100 – Alunos recortando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.	128
Figura 101 – Alunos colando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.	128
Figura 102 – Triângulos equiláteros construídos, pelos alunos sobre os lados do triângulo retângulo.	129
Figura 103 – Triângulos equiláteros construídos, pelos alunos sobre os lados do triângulo retângulo.	129
Figura 104 – Hexágonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo.	130
Figura 105 – Hexágonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo.	130
Figura 106 – Quebra- cabeça para construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	131
Figura 107 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	132
Figura 108 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	133
Figura 109 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	134
Figura 110 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.	135
Figura 111 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.	135
Figura 112 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.	136
Figura 113 – Avaliação diagnóstica.	136
Figura 114 – Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	137

Figura 115–Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	137
Figura 116–Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	138
Figura 117–Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.	138
Figura 118– Animação do Teorema de Pitágoras.	141
Figura 119–Movimentação, no Geogebra, de quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.	142
Figura 120–Quebra-cabeça para o Teorema de Pitágoras.	143
Figura 121–Quebra-cabeça com peças poligonais para dinamizar o Teorema de Pitágoras.	144
Figura 122–Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya, considerando triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	145
Figura 123–Quebra-cabeça com peças poligonais para dinamizar o Teorema de Pólya, considerando triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	146
Figura 124–Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	147
Figura 125–Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.	148
Figura 126–Peças para montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	149
Figura 127–Exemplo de montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.	150
Figura 128–Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya.	151
Figura 129–Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya.	151
Figura 130–Figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo, usando quadrados.	152
Figura 131–Recíproca do Teorema de Pitágoras.	158
Figura 132–Triângulos.	159
Figura 133–Par de semicírculos.	160
Figura 134–Par de estrelas.	160
Figura 135–Par de triângulos azuis.	160
Figura 136–Par de triângulos equiláteros.	161
Figura 137–Quadrados para aplicação da atividade 1.	162
Figura 138–Figura, para ser colada no caderno, para a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras da atividade 1.	163
Figura 139–Figura usada na aplicação da atividade 1.	164
Figura 140–Figura para ser colada no caderno na aplicação da atividade 2.	165

Figura 141 – Figura tracejada usada na aplicação da atividade 2.	166
Figura 142 – Figura usada na aplicação da atividade 3	167
Figura 143 – Figura para confecção do quebra-cabeça triangular para a aplicação da atividade 4.	168
Figura 144 – Figura para confecção do quebra-cabeça com quadrados para a ava- liação da atividade 4.	169

1 Introdução

A Matemática, principalmente a Geometria, sempre provocou um fascínio na humanidade, seja pela sua utilidade, necessidade e beleza.

Além disso, percebemos que atualmente há uma maior ênfase na apresentação de teoremas em sua forma algébrica. Daí cabem aos estudantes memorizarem fórmulas que muitas vezes não têm nenhum significado para eles. Por isso, a nossa pesquisa refere-se a geometrização¹ do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya. Serão apresentadas as versões geométricas desses teoremas. Pois, considerando a enorme importância deles para a Matemática, é necessário fazer um elo entre a Geometria e esses teoremas para facilitar a aprendizagem dos estudantes.

Para apresentar o Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras, em sua forma geométrica, é necessário compreendermos conceitos básicos de Geometria Plana, tais como área e semelhança de figuras. Para isso, apresentamos ao leitor o conceito de uma figura num contexto matemático, proposições e teoremas que caracterizam área e semelhança de figuras.

Para proporcionar ao professor do ensino básico, em especial, 9º ano (Ensino Fundamental) e 1º ano (Ensino Médio) apresentamos propostas de sequências didáticas, com atividades dinâmicas sobre os teoremas de Pitágoras e de Pólya.

Também apresentamos atividades sobre os teoremas de Pitágoras e de Pólya usando o software GeoGebra, tornando-os mais atrativos e dinâmicos para os estudantes.

Para alcançar nossos objetivos realizamos uma pesquisa bibliográfica em sites e livros de autores que tratam destes assuntos, tais como: (LIMA, 2013), (MUNIZ NETO, 2013), (LIMA, 2011) e outras obras que citaremos posteriormente. Elaboramos e aplicamos sequências didáticas para a apresentação geométrica dos teoremas de Pitágoras e de Pólya. Ao mesmo tempo que analisamos os resultados dessa abordagem como estudo de caso. Além disso, apresentamos atividades usando o software GeoGebra, para tornar a aprendizagem dos estudantes atraente, dinâmica e divertida.

¹ **Geometrização** é um termo utilizado por nós para darmos ênfase aos aspectos geométricos do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Pólya, usando áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Apresentar o Teorema de Pitágoras na versão geométrica e sua generalização como o Teorema de Pólya, mostrando a importância da geometria na compreensão desses teoremas.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Usar somente a Geometria para compreender os teoremas de Pitágoras e de Pólya;
2. Mostrar que o Teorema de Pólya é uma generalização do Teorema Pitágoras;
3. Demonstrar geometricamente os teoremas de Pitágoras e de Pólya;
4. Abordar os aspectos geométricos desses teoremas na concepção da BNCC;
5. Construir materiais didáticos para serem aplicados no ensino dos teoremas de Pitágoras e de Pólya;
6. Propor sequências didáticas para o professor aplicar no ensino básico, proporcionando aos alunos o entendimento sobre os aspectos geométricos dos teoremas de Pitágoras e de Pólya;
7. Apresentar um aplicativo, no nosso caso, o software GeoGebra, para dinamizar a demonstração dos teoremas de Pitágoras e de Pólya.

1.2 Organização

Para que os objetivos da Seção 1.1 sejam alcançados, o nosso trabalho foi estruturado em treze Capítulos da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentamos a introdução, ressaltando a importância da Geometria na compreensão de teoremas, em especial o Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya.

No segundo capítulo, apresentamos as concepções da BNCC² sobre a utilização da Geometria, em especial o uso de áreas para facilitar a aprendizagem de teoremas no Ensino Básico.

No terceiro capítulo, abordamos a definição e exemplos de polígonos, arcos, curvas, caminhos e figuras.

No quarto capítulo, abordamos as noções básicas de semelhança, tais como, noção de distância, transformações e isometrias no plano.

² Base Nacional Comum Curricular.

Em seguida, no quinto capítulo, nos dedicamos ao estudo de semelhança no plano, sendo apresentados a definição de semelhança e exemplos de figuras semelhantes e relação entre áreas de polígonos e figuras semelhantes conhecidas.

Com relação ao sexto capítulo, nos dedicamos ao cálculo de áreas de polígonos e figuras quaisquer.

O sétimo capítulo foi dedicado a apresentação e demonstração do Teorema de Pitágoras em sua forma geométrica. Além disso, abordamos o Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras.

No oitavo capítulo, sugerimos uma construção de materiais didáticos para o professor abordar, em sala de aula, o Teorema de Pólya.

No nono capítulo, apresentamos sugestões de sequências didáticas para o professor apresentar os teoremas de Pitágoras e de Pólya em turmas do Ensino Básico de forma atrativa e dinâmica.

O décimo capítulo é relacionado a aplicação das sequências didáticas sugeridas no Capítulo 9 em uma turma do 1º ano do Ensino Médio.

Em seguida, no décimo primeiro capítulo, apresentamos uma análise qualitativa das aplicações das sequências didáticas. Nesse mesmo capítulo, abordamos opiniões de alunos sobre as atividades que foram abordadas nas sequências didáticas, com ênfase na aprendizagem dos estudantes relacionadas aos teoremas de Pitágoras e de Pólya.

No décimo segundo capítulo, apresentamos o software GeoGebra como uma forma de dinamizar os teoremas de Pitágoras e de Pólya. Além disso, propomos e disponibilizamos atividades para serem realizadas com o uso do software GeoGebra para uma abordagem geométrica desses teoremas.

Finalmente, no décimo terceiro capítulo, abordamos a conclusão dessa pesquisa. Apresentamos as referências que foram utilizadas e os Apêndices A, B, C e D onde são apresentados a definição de derivada (que foi utilizada para definirmos arcos suaves no Capítulo 3), a recíproca do Teorema de Pitágoras, uma sugestão de avaliação diagnóstica para ser aplicada aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º do Ensino Médio e sugestões de figuras usadas nas aplicações das sequências didáticas do Capítulo 9, respectivamente.

2 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as indicações geométricas do estudo de teoremas

Neste capítulo, faremos uma abordagem das recomendações da BNCC com relação aos aspectos geométricos dos teoremas que devem ser trabalhadas em sala de aula e servirão de orientação para a elaboração de proposta de sequência didática a ser apresentada posteriormente.

2.1 Como a BNCC sugere que os teoremas geométricos sejam apresentados?

A *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, é um documento que norteia o processo de ensino e aprendizagem no Ensino Básico dos estudantes.

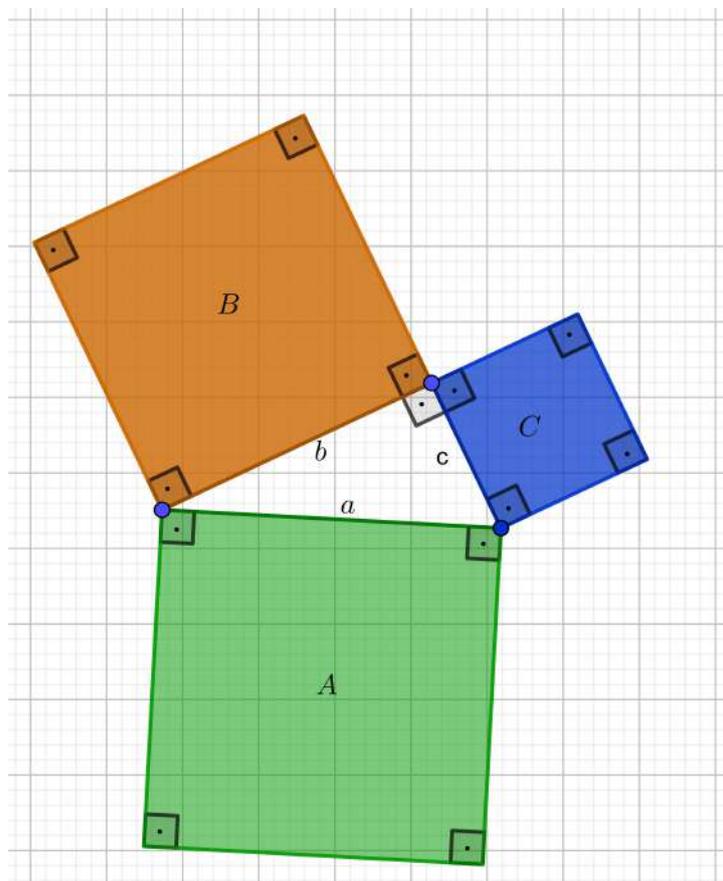
A BNCC foi elaborada por especialistas de todas as áreas do conhecimento, com o objetivo de suprir as necessidades dos estudantes nos dias atuais.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p.7)

Nesta perspectiva, devem-se apresentar quando possível os aspectos geométricos dos teoremas, pois ao apresentar, por exemplo, o Teorema de Pitágoras, de forma totalmente algébrica, os educandos não têm consciência da relação existente entre as áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo e a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa e b , c são os catetos, conforme figura abaixo. Assim, $A = a^2$, $B = b^2$ e $C = c^2$. Portanto, $A = B + C$. (Figura 1).

A BNCC destaca a importância de se aproximar a álgebra da geometria “Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica” (BRASIL, 2018, p.274). Essa aproximação da Álgebra com a Geometria possibilita aos educandos uma abordagem dinâmica no estudo de teoremas, possibilitando assim uma maior compreensão na resolução de situações problemas envolvendo esses teoremas.

Figura 1 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: A autora.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) a aprendizagem matemática deve contemplar diferentes aspectos, tais como: geométrico, aritmético e algébrico.

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p.269)

Daí, é necessário que os educandos conheçam a relação entre Álgebra e Geometria para ter uma melhor compreensão dos teoremas, em particular o Teorema de Pitágoras. Ou seja identificar que a^2 , b^2 e c^2 são expressões que representam áreas de regiões quadrangulares que possuem lados com medidas a , b e c , respectivamente.

2.2 Como a BNCC sugere o estudo do Teorema de Pitágoras?

A BNCC recomenda que o Teorema de Pitágoras seja estudado por verificações experimentais e demonstrações, promovendo a habilidade aos educandos, como se refere o descritor: “(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de

Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes”. BNCC (BRASIL, 2018, p.319).

Nessa perspectiva é uma recomendação da BNCC a apresentação de aspectos geométricos dos teoremas, ligando Álgebra à Geometria. Pois facilitam a aprendizagem dos alunos além de torná-los mais atraentes.

As verificações experimentais do Teorema de Pitágoras podem ser feitas através de áreas das figuras semelhantes, aproximando assim a Geometria da Álgebra. Dessa forma, os estudantes têm a oportunidade de conhecer a versão geométrica desse teorema que abordaremos mais adiante seguindo a BNCC. E indo mais além, compreender o Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras.

A abordagem do Teorema de Pitágoras por aplicações contextualizadas garante o entendimento profundo em todas as suas dimensões, uma vez que os alunos devem modelar, definir relações e adquirir conhecimentos para aplicá-los.

3 Figuras e Polígonos

Neste capítulo definiremos **figuras** e **polígonos**, pois serão fundamentais para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

3.1 Figura no contexto matemático

Nesta seção apresentaremos a definição de **figuras**, pois sentimos falta na literatura de uma definição matemática do que se entende por “figura”, noção amplamente usada em todos os níveis escolares. Mas, antes de chegarmos a uma definição de figura é necessário que o leitor conheça algumas definições, tais como: **arcos**, **curvas** e **caminhos** que serão essenciais para definirmos matematicamente uma figura.

Usamos como referência (CHURCHILL, 1975), (BROWN; CHURCHILL, 2015), (THOMAS; FINNY, 1965) e outras obras que citaremos posteriormente quando usadas.

3.1.1 Arcos

Definição 3.1.1. *Arco contínuo* é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, onde $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ são funções contínuas.

Um arco tem uma orientação de acordo com o sentido do crescimento de t .

Observação 3.1.1. *Informalmente as funções ϕ, ψ ser contínuas significa que o traço (o gráfico de $\{(\phi(t), \psi(t)), t \in \mathbb{R}\}$) é uma linha contínua, sem quebras. Ou seja é possível traçá-lo sem tirar o lápis do papel.*

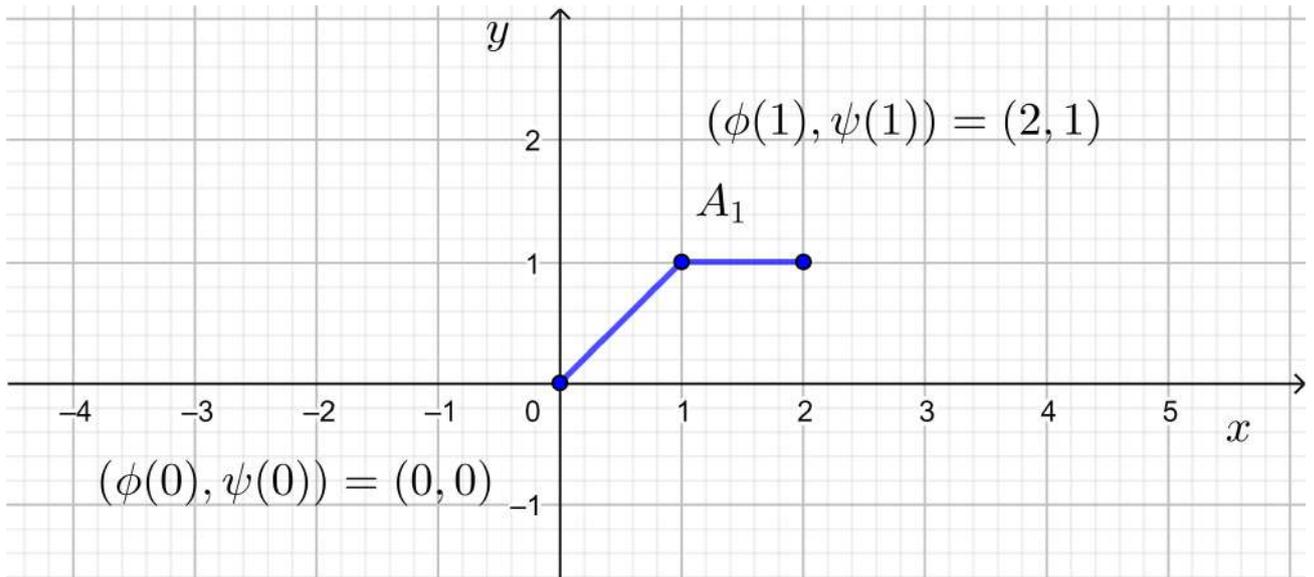
Exemplo 3.1.2. *Seja A_1 um arco, tal que:*

$$\begin{aligned} \phi &: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &= \phi(t) = t \\ \psi &: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} t, & (0 \leq t \leq 1) \\ 1, & (1 \leq t \leq 2) \end{cases}$$

O traço do gráfico de A_1 é contínuo (Ver Figura 2), pois não apresenta quebra em seu domínio.

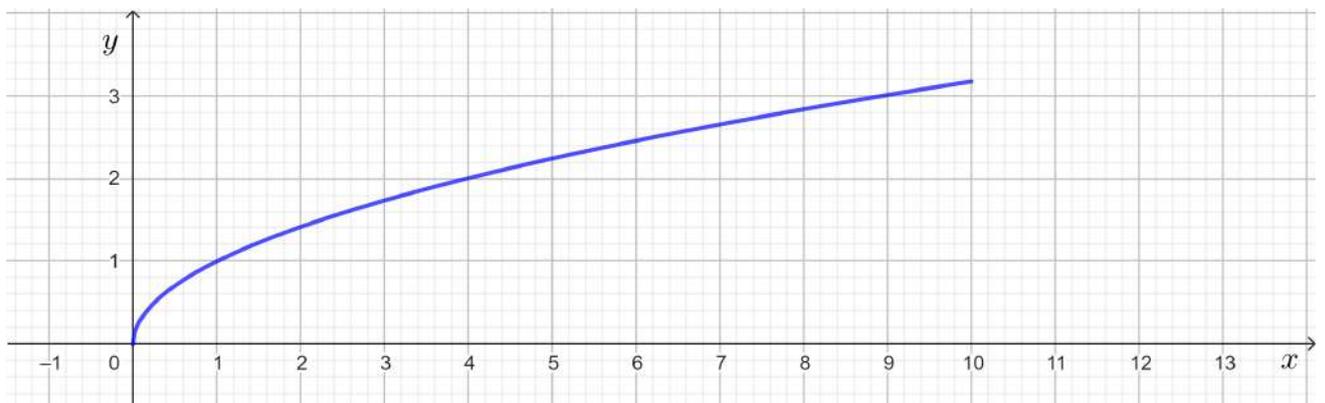
Exemplo 3.1.3. *Seja A_2 um arco, tal que:* $\begin{cases} x = \phi(t) = t, & (0 \leq t \leq 10) \\ y = \psi(t) = \sqrt{t}, & (0 \leq t \leq 10) \end{cases}$, o gráfico de A_2 é contínuo em seu domínio, pois não apresenta quebras (ver Figura 3).

Figura 2 – Arco A_1



Fonte: A Autora.

Figura 3 – Arco A_2



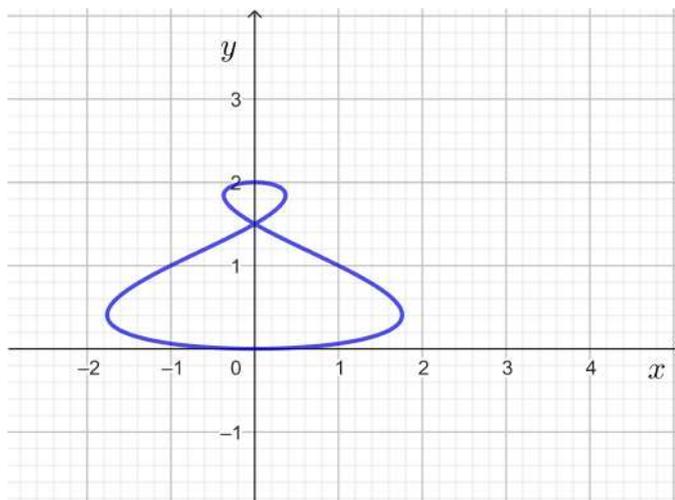
Fonte: A Autora.

Observação 3.1.4. Não queremos que $\exists t_0, t_1 \in (a, b)$, com $t_0 \neq t_1$, tais que $(\phi(t_0), \psi(t_0)) = (\phi(t_1), \psi(t_1))$. Ou seja, que o arco tenha auto-interseção.

Exemplo 3.1.5. O arco A_3 , tal que:
$$\begin{cases} x = \phi(t) = (1 + 2\text{sen}(t))\cos(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \psi(t) = 1 - \text{sen}(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$
 (ver Figura 4), possui auto-interseção.

Não queremos abordar esse tipo de arco. Por isso, apresentaremos uma definição de arco, onde essa interseção não ocorre.

Figura 4 – Gráfico de A_3 .



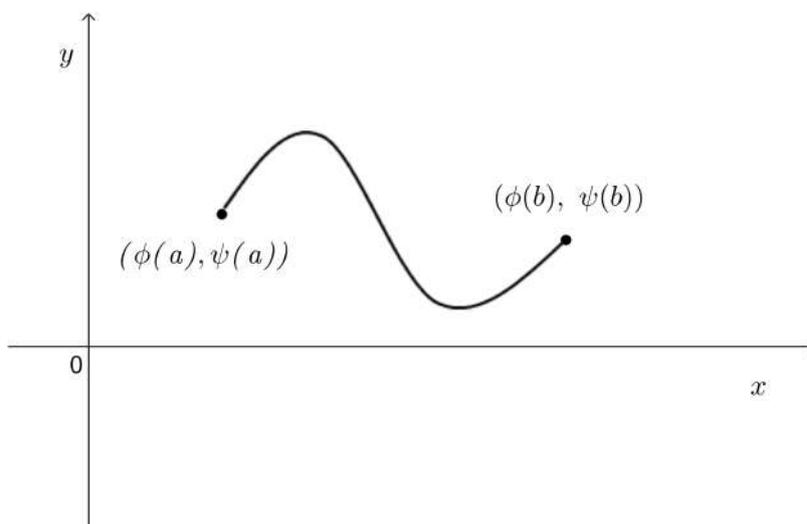
Fonte: A Autora.

Definição 3.1.2. Seja $(\phi(t), \psi(t))$ um arco contínuo definido no intervalo $[a, b]$. Para quaisquer $t_0, t_1 \in (a, b), t_0 \neq t_1$, se $(\phi(t_0), \psi(t_0)) \neq (\phi(t_1), \psi(t_1))$, o arco é dito **Arco de Jordan**¹ ou **arco simples**, ou seja, não possui auto-interseção no intervalo (a, b) .

Exemplo 3.1.6. As Figuras 2 e 3 apresentam arcos de Jordan.

Exemplo 3.1.7. A Figura 5 apresenta um arco de Jordan, pois não possui auto-interseção no intervalo (a, b) .

Figura 5 – Arco de Jordan.



Fonte: A Autora.

Exemplo 3.1.8. A Figura 4, não é um arco de Jordan.

¹ Em homenagem a Camille Jordan (1838-1922) matemático francês. Conhecido pelo seu trabalho em teoria dos grupos e análise.

Arcos simples podem ter auto-interseção apenas nas extremidades, conforme Definição 3.1.2.

3.1.2 Curvas

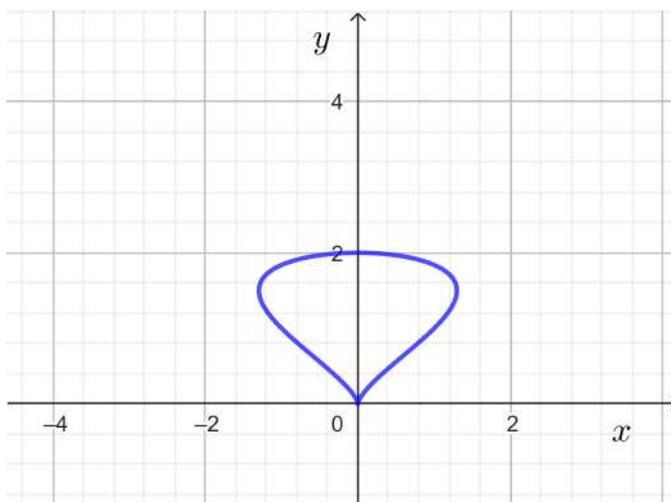
Definição 3.1.3. Se $C : (\phi(t), \psi(t)), t \in [a, b]$, for um arco de Jordan definido no intervalo $I = [a, b]$ e $\phi(a) = \phi(b)$ e $\psi(a) = \psi(b)$, o arco chama-se de **curva simples e fechada**.

Exemplo 3.1.9. A curva $C = \{(\phi(t), \psi(t)), t \in [0, 2\pi]\}$ definida pelas funções

$$\begin{cases} x = \phi(t) = (1 - \cos(t))\sin(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \psi(t) = 1 - \cos(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

é fechada e não possui auto-interseções no intervalo $(0, 2\pi)$, por isso é denominada de curva simples e fechada (ver Figura 6).

Figura 6 – Curva simples e fechada.



Fonte: A Autora.

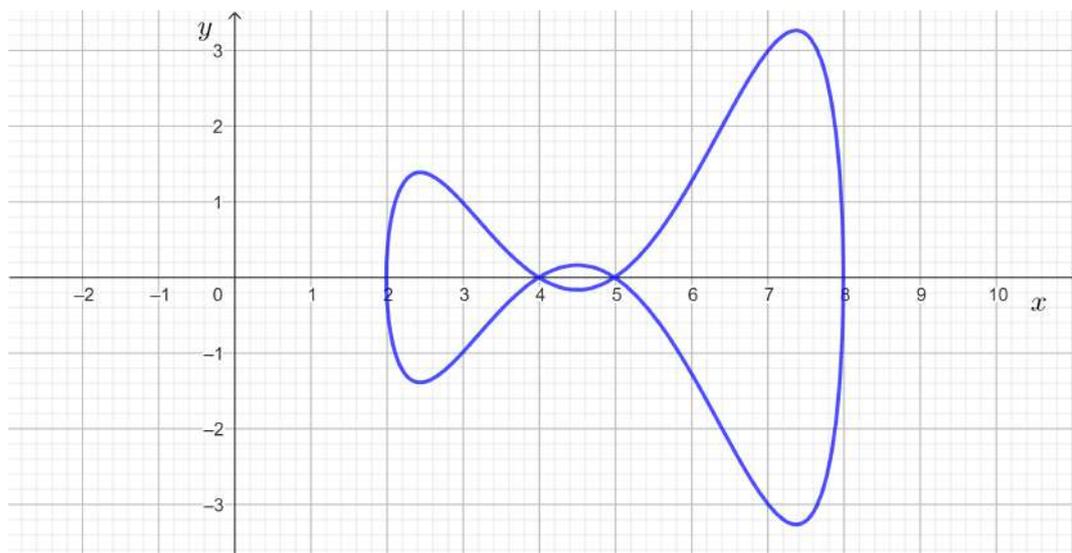
Exemplo 3.1.10. A curva $C = \{(\phi(t), \psi(t)), t \in [0, 2\pi]\}$ definida pelas funções

$$\begin{cases} x = \phi(t) = 5 + 3\cos(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \psi(t) = (1 + 3\cos(t))\sin(2t), (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

não é simples, pois apresenta auto-interseções (ver Figura 7).

Assim, podemos dizer que uma curva é simples no intervalo (a, b) se não apresentar pontos de interseções nesse intervalo. As curvas que irão nos interessar serão as curvas simples, mas precisamente simples e fechadas. Já estamos prestes a definir curva de Jordan. Mas, precisamos ver algumas definições a seguir.

Figura 7 – Curva fechada, mais não é simples



Fonte: A Autora

Definição 3.1.4. Um **arco** $C : (\phi(t), \psi(t))$ é suave se as funções coordenadas tem derivada² contínuas $\phi'(t)$ e $\psi'(t)$ que não se anulam simultaneamente, isto é, $(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$, (não tem “bico”).

Exemplo 3.1.11. O arco de equações $C_1 : \begin{cases} x = \phi(t) = \cos(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \psi(t) = t, (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$ é suave (ver Figura 8).

Exemplo 3.1.12. O arco de equações $C_2 : \begin{cases} x = \phi(t) = \sin(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \psi(t) = t, (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$ é suave (ver Figura 9).

3.1.3 Caminho

Definição 3.1.5. Um **caminho** é uma cadeia contínua de um número finito de arcos suaves justapostos, cada um terminando no começo do seguinte.

Exemplo 3.1.13. O caminho C (ver Figura 10).

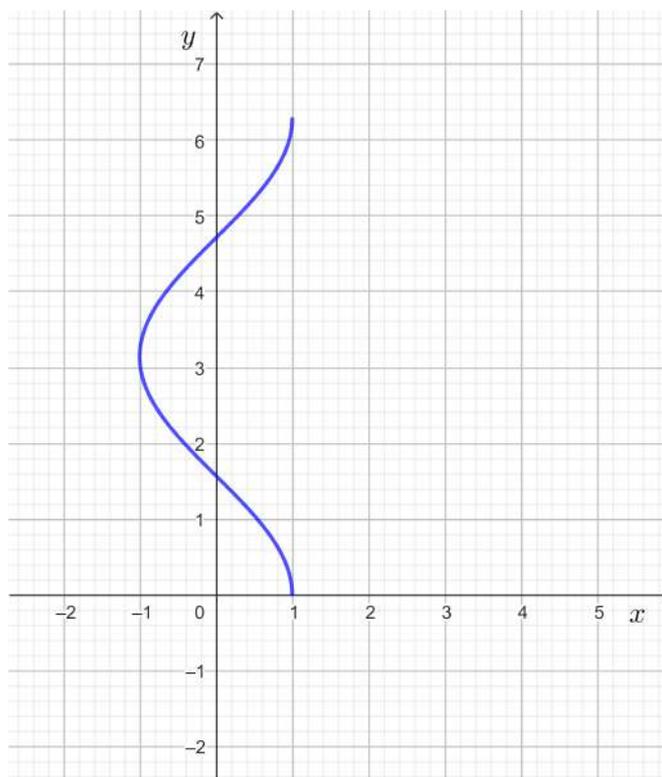
Exemplo 3.1.14. O caminho D (ver Figura 11).

Exemplo 3.1.15. O caminho na Figura 12 é fechado.

Definição 3.1.6. **Curva de Jordan** é um caminho fechado e simples (sem auto-interseções) seccionalmente suave (suave por parte).

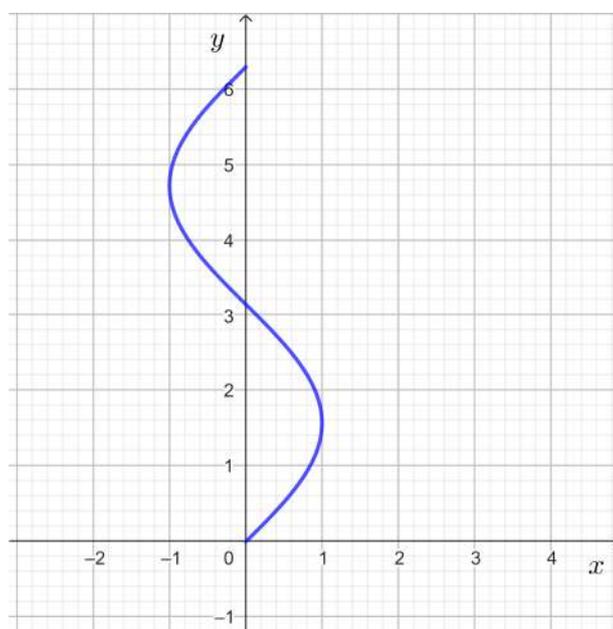
² Definição de **derivada** apresentada no Apêndice A

Figura 8 – Arco suave C_1 .



Fonte: A Autora.

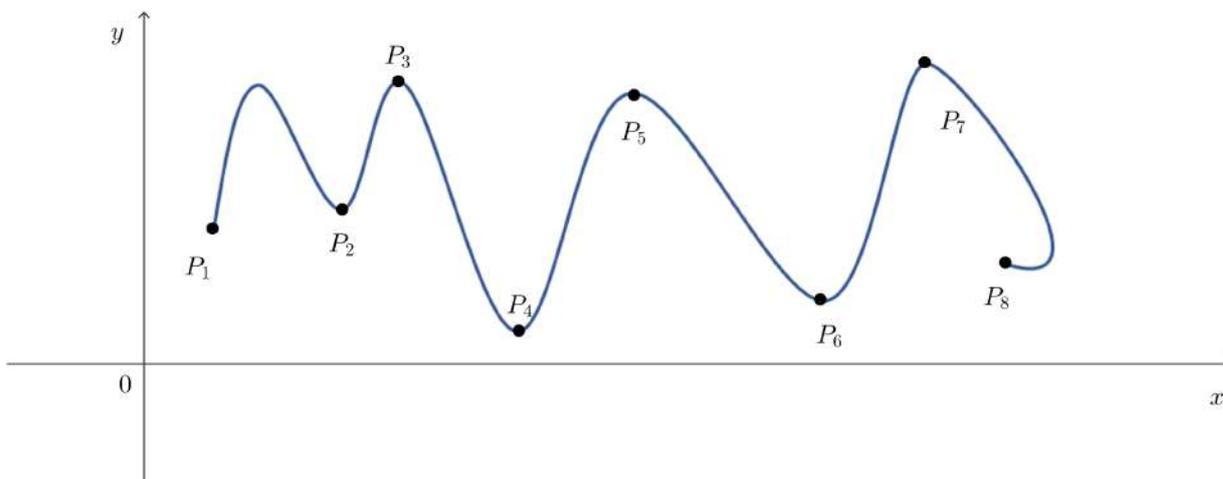
Figura 9 – Arco suave C_2 .



Fonte: A Autora.

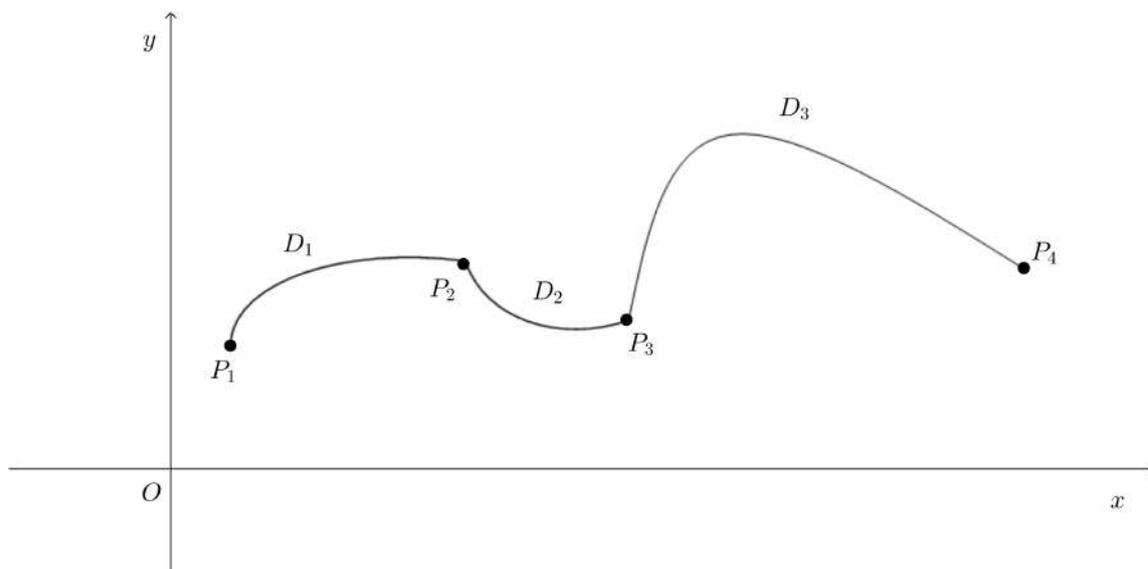
Exemplo 3.1.16. Na Figura 12, temos uma curva de Jordan, pois é um caminho fechado e simples.

Figura 10 – Caminho C.



Fonte: A Autora.

Figura 11 – Caminho D.



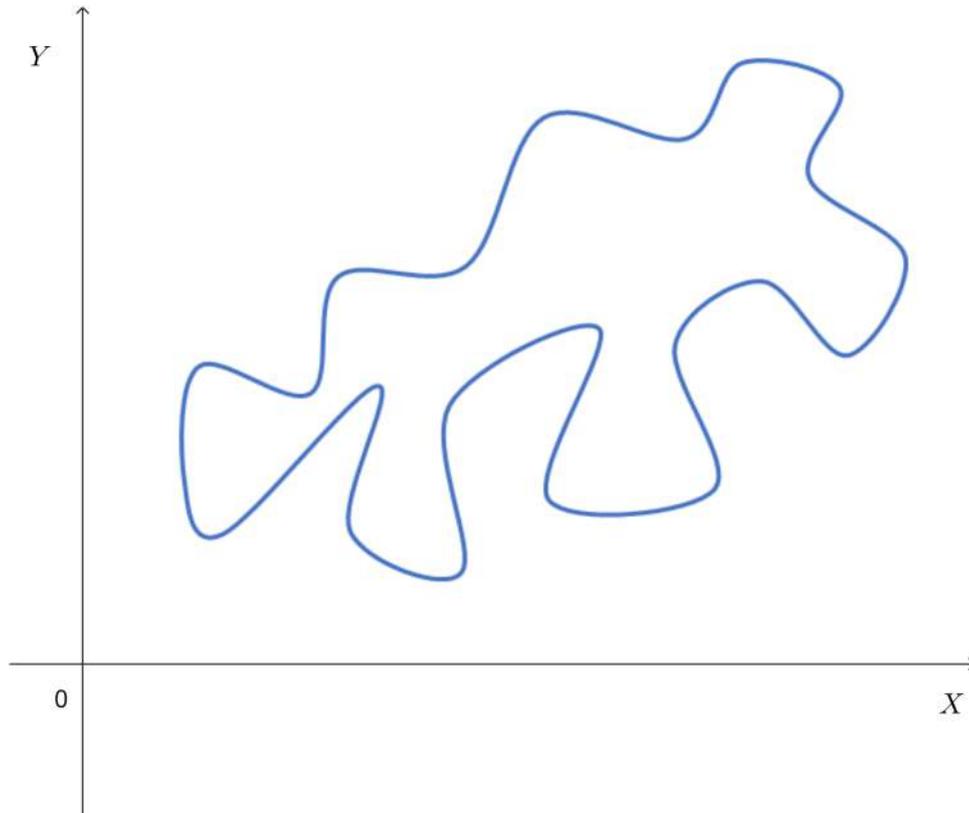
Fonte: A Autora.

Exemplo 3.1.17. A curva C_1 de equações paramétricas $\begin{cases} x = \text{sen}(2t)\cos(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \text{sen}(2t)\text{sen}(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$ não é uma curva de Jordan, pois apresenta auto-interseção (ver Figura 13).

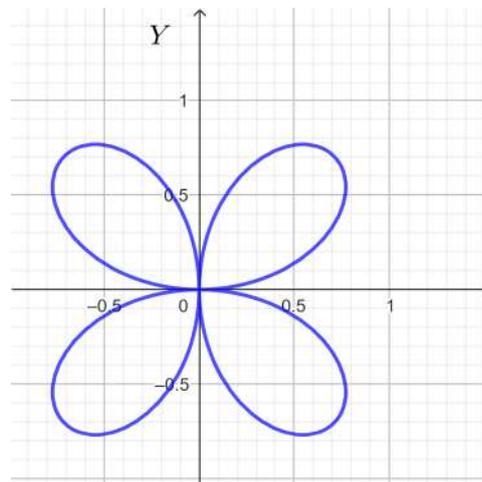
Exemplo 3.1.18. A curva C_2 de equações paramétricas $\begin{cases} x = \cos^3(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \text{sen}^3(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$ tem bico, entretanto é uma curva de Jordan pois é a união dos arcos suaves A_1, A_2, A_3 e A_4 , é fechada e sua representação não tem auto-interseção (Ver Figura 14).

Exemplo 3.1.19. A curva C_3 de equações paramétricas $\begin{cases} x = (1 + \text{sen}(t))\cos(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = (1 + \text{sen}(t))\text{sen}(t), (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$

Figura 12 – Caminho fechado.



Fonte: A Autora.

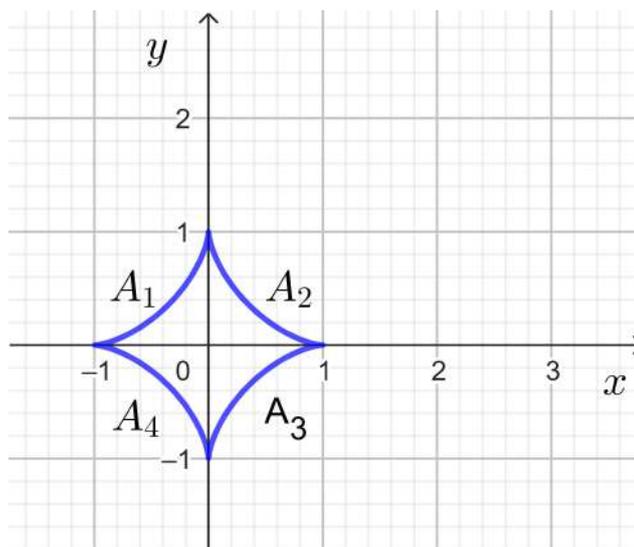
Figura 13 – Rosácea: Curva C_1 .

Fonte: A Autora.

é uma curva de Jordan, pois é fechada e não possui auto-interseções (Ver Figura 15).

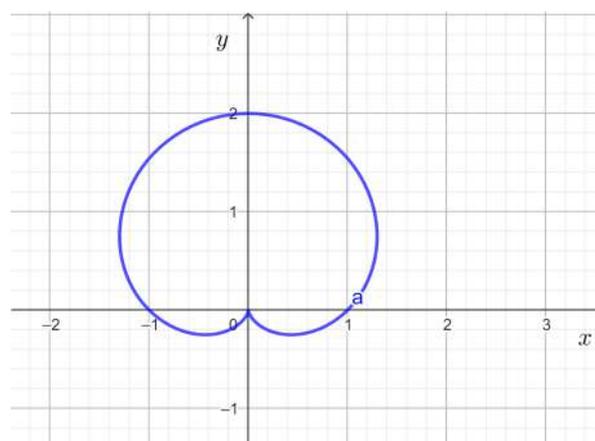
Exemplo 3.1.20. A curva C_4 de equações paramétricas
$$\begin{cases} x = \text{sen}(t), & (0 \leq t \leq 2\pi) \\ y = \text{sen}(2t), & (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$
 não é uma curva de Jordan, pois apresenta auto-interseção (ver Figura 16).

Figura 14 – Astroide: Curva C_2 .



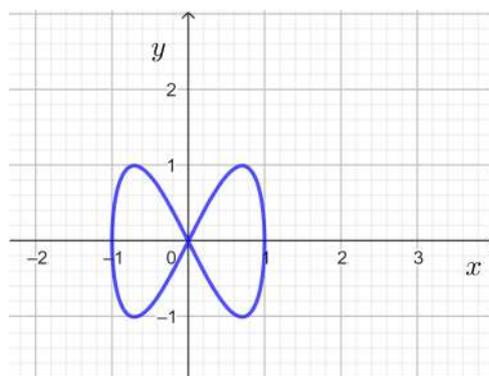
Fonte: A Autora.

Figura 15 – Cardioide: Curva C_3 .



Fonte: A Autora.

Figura 16 – Curva de Bowditch: C_4 .



Fonte: A Autora.

Agora que já definimos e exemplificamos curva de Jordan apresentamos o Teorema de Jordan que possibilita compreendermos a definição de figuras.

Teorema 3.1.21 (Teorema de Jordan). *Toda curva de Jordan divide o plano em duas partes, uma exterior e a outra interior (CHURCHILL, 1975, p.91).*

Aceitaremos o Teorema de Jordan como verdadeiro sem demonstração. Pois esse resultado é de fácil visualização, mais sua demonstração não é simples e fugiria do escopo deste trabalho.

3.1.4 Figura

Finalmente, de posse da Definição 3.1.6 e do Teorema 3.1.21 podemos apresentar a nossa definição de figura.

Definição 3.1.7. *Uma **figura** (para nós) é a parte interior de uma curva de Jordan, juntamente com essa curva (bordo da figura).*

Essa definição faz sentido, diante do Teorema de Jordan.

Exemplo 3.1.22. *Com essa definição são figuras: parte interior e o bordo de polígonos, elipses, círculos e qualquer curva fechada e simples, que comumente usamos.*

3.2 Polígono

Nesta seção abordaremos a definição de segmento de reta e polígono. E além disso, apresentamos alguns dos principais elementos de polígonos e alguns exemplos.

Definição 3.2.1. *Dada uma reta s no plano \mathbb{R}^2 e os pontos A e B pertencentes a s , denominamos de **segmento de reta** o conjunto dos pontos da reta s que estão entre A e B , incluindo os pontos A e B . Indicamos o segmento de reta por AB e sua medida por \overline{AB} . A reta é indicada por \overleftrightarrow{AB} .*

Exemplo 3.2.1. *Na Figura 17, o segmento de reta AB representa todos os pontos que possuem ordenada pertencentes ao intervalo $[0, 3]$ e abscissa pertencentes a $[0, 4]$.*

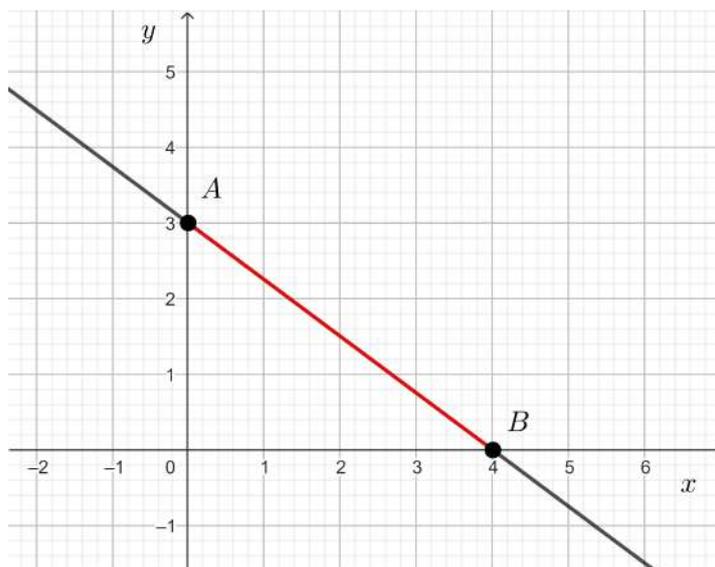
Exemplo 3.2.2. *Na figura 18, os segmentos de retas AB e BC são consecutivos³, onde AB representa todos os pontos que possuem abscissa pertencentes ao intervalo $[-2, 2]$ e ordenada pertencentes a $[-1, 3]$. Já o segmento BC representa todos os pontos que possuem abscissa pertencentes a $[-3, 2]$ e ordenada pertencentes a $[-1, -4]$.*

Exemplo 3.2.3. *Na Figura 19, os segmento de retas AB e CD são colineares⁴, onde*

³ Os segmentos de retas que possuem um ponto em comum são denominados de **segmentos consecutivos**.

⁴ Dois ou mais segmentos que pertencem a mesma reta são denominados de **segmentos colineares**.

Figura 17 – Segmento de reta $AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 3\}$.

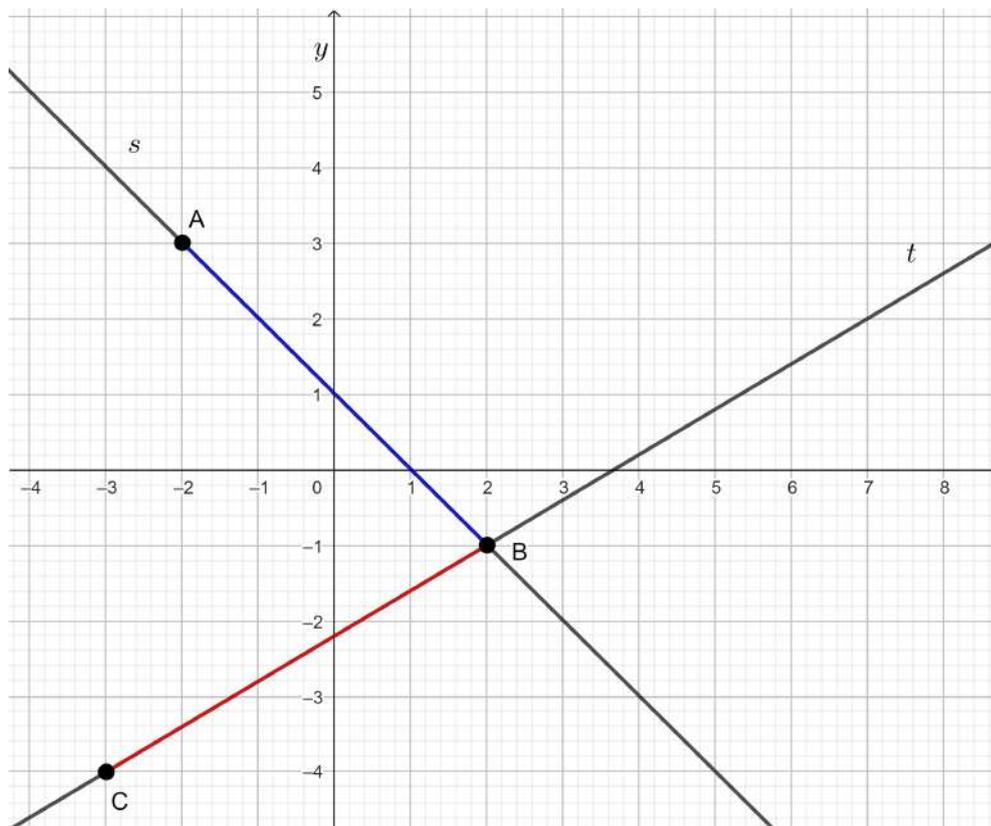


Fonte: A Autora.

Figura 18 – Segmentos de retas consecutivos:

$$AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 3\}$$

$$BC = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -3 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq -4\}.$$

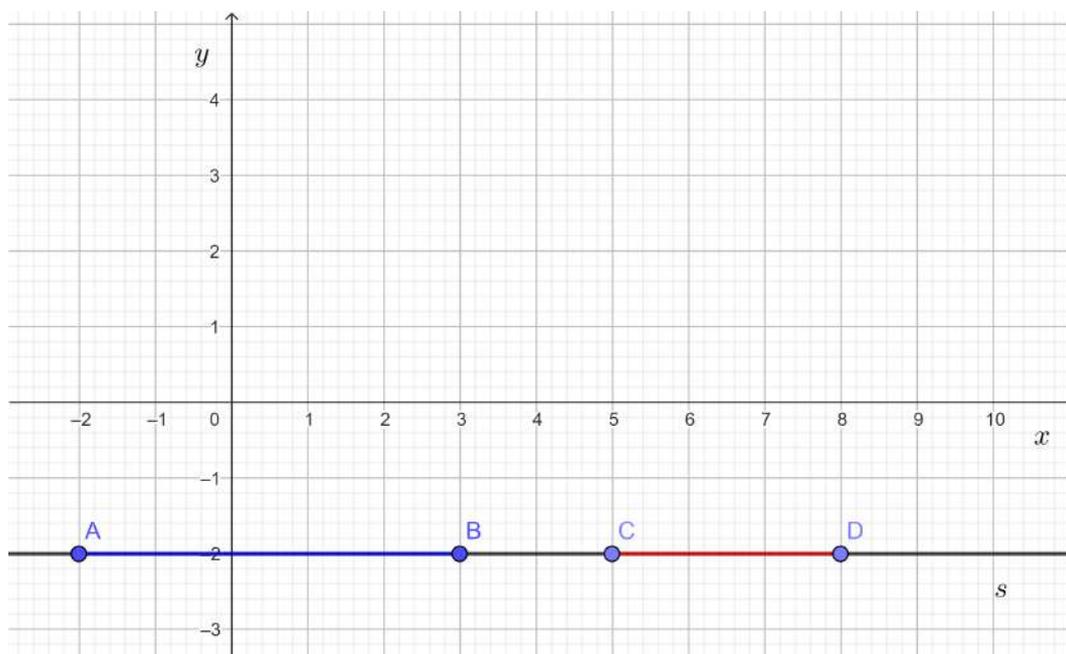


Fonte: A Autora.

AB representa todos os pontos que possuem abscissa pertencentes ao intervalo $[-2, 3]$ e ordenada $y = -2$. Já o segmento CD representa todos os pontos que possuem abscissa

pertencentes a $[5, 8]$ e ordenada $y = -2$.

Figura 19 – Segmentos de retas colineares AB e CD .



Fonte: A Autora.

Definição 3.2.2. Uma **poligonal** é um caminho formado por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados.

Exemplo 3.2.4. A poligonal $A_1A_2A_3A_4$ (Figura 20), possui $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = 4\text{cm}$.

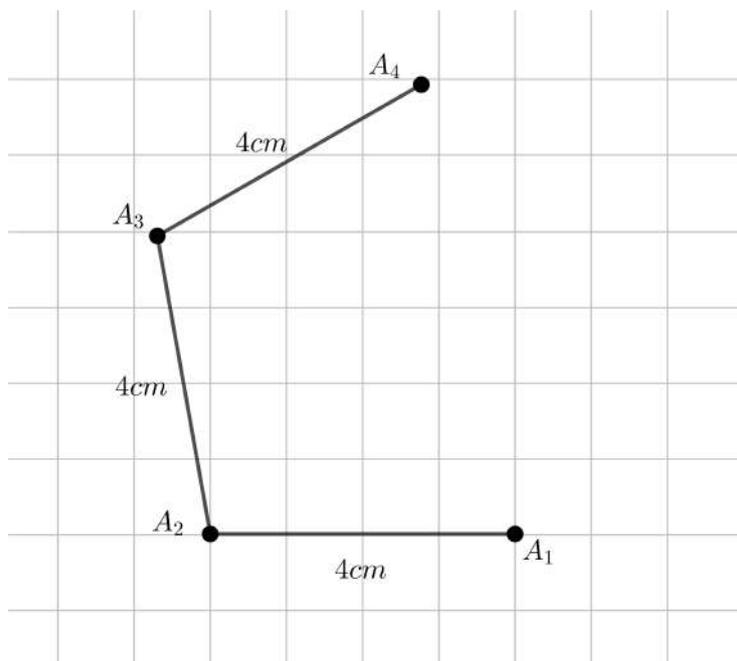
Definição 3.2.3. Um **polígono** é uma poligonal que apresenta as seguintes condições:

- $A_n = A_1$;
- Os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;
- Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a mesma reta. (BARBOSA, 1995, p.29)

Exemplo 3.2.5. Na Figura 21 temos o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$.

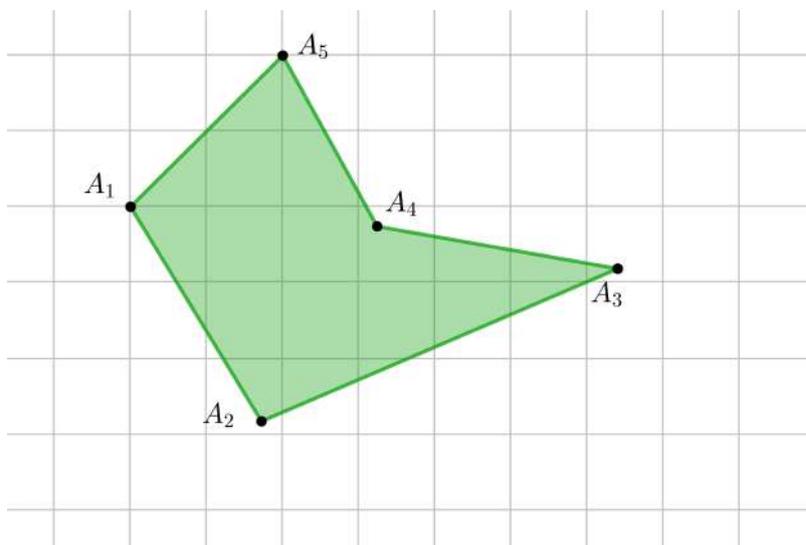
Definição 3.2.4. Sejam $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2A_3 \dots A_n$ é um **polígono convexo** se, $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles no mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$). (MUNIZ NETO, 2013, p.17)

Figura 20 – Poligonal $A_1A_2A_3A_4$.



Fonte: A Autora.

Figura 21 – Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$.



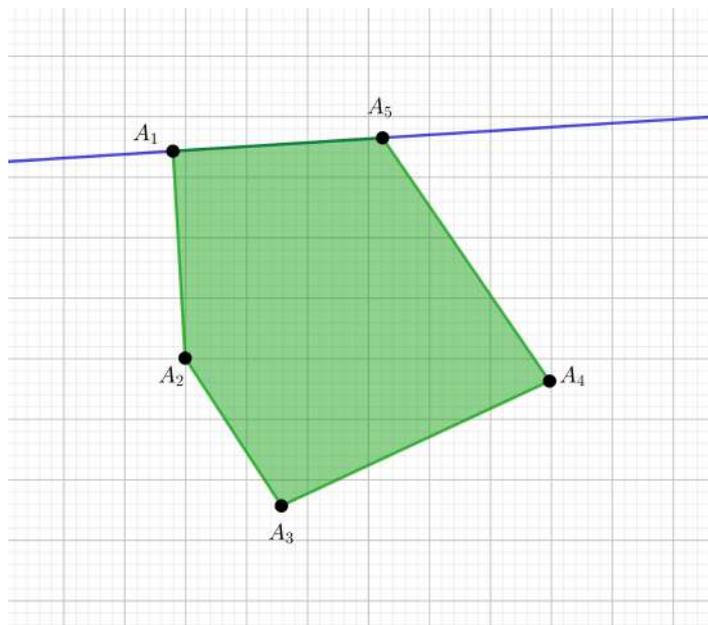
Fonte: A Autora.

Exemplo 3.2.6. O polígono da Figura 22 é convexo, pois está contido em um dos semi-planos⁵ determinados pelas retas que contém os seus lados.

Exemplo 3.2.7. O polígono da Figura 23 não é convexo, pois note que a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ não deixa o polígono completamente contido em um dos seus semi-planos, o mesmo ocorre com a reta determinada por A_2A_3 .

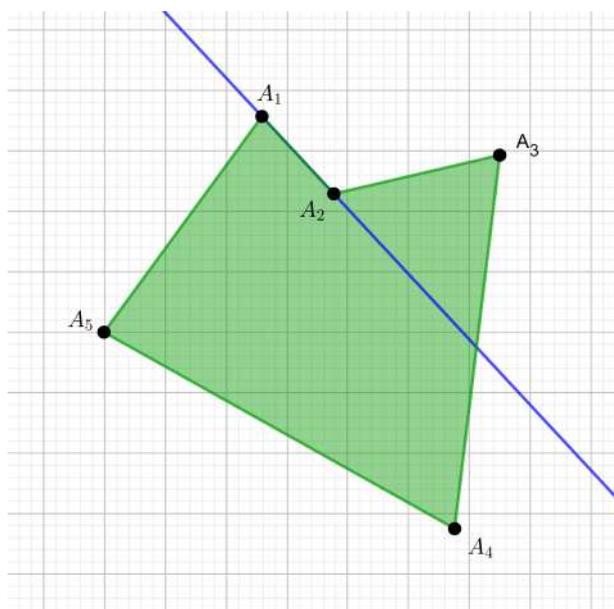
⁵ Uma reta r de um plano o divide em duas regiões convexas, os **semiplanos** delimitados por r . (MUNIZ NETO, 2013, p.9)

Figura 22 – Polígono Convexo.



Fonte: A Autora.

Figura 23 – Polígono não Convexo.



Fonte: A Autora.

A seguir, apresentaremos os principais elementos de um polígono tendo como referência (MUNIZ NETO, 2013).

3.2.1 Elementos de um polígono

Considerando um polígono $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ seus principais elementos são:

- Os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ são os **vértices** do polígono;
- Os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ são os **lados** do polígono;
- Os ângulos $\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2, \hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3, \dots, \hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ são os **ângulos do polígono**.
- Um polígono de n vértices possui n lados e n ângulos.
- Uma **diagonal** de um polígono é qualquer segmento A_iA_j que não seja lado do polígono.

Dois lados que possuem um vértice em comum são chamados de **lados consecutivos**.

Dois ângulos que possui um lado em comum são chamados de **ângulos consecutivos**.

3.2.2 Decomposição de Polígonos

Um polígono convexo de n lados pode ser decomposto numa reunião de $n - 2$ triângulos justapostos⁶. Para isso, basta escolhermos um de seus vértices e, a partir dele traçar $n - 3$ diagonais. (LIMA et al., 1991)

Note que:

1. Toda diagonal de um polígono convexo está no polígono e não corta o bordo do polígono.
2. Ao escolhermos um vértice, no nosso caso A_1 (Figura 24), para traçar as diagonais de um polígono, dois de seus vértices não pertencem as diagonais formadas a partir de A_1 . Portanto retiram-se dois vértices adjacentes a A_1 .
3. Daí são criados $n - 2$ triângulos.

Esse resultado é válido para todo polígono como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.2.8. *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como uma reunião de $n - 2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado, (LIMA et al., 1991, p.109).*

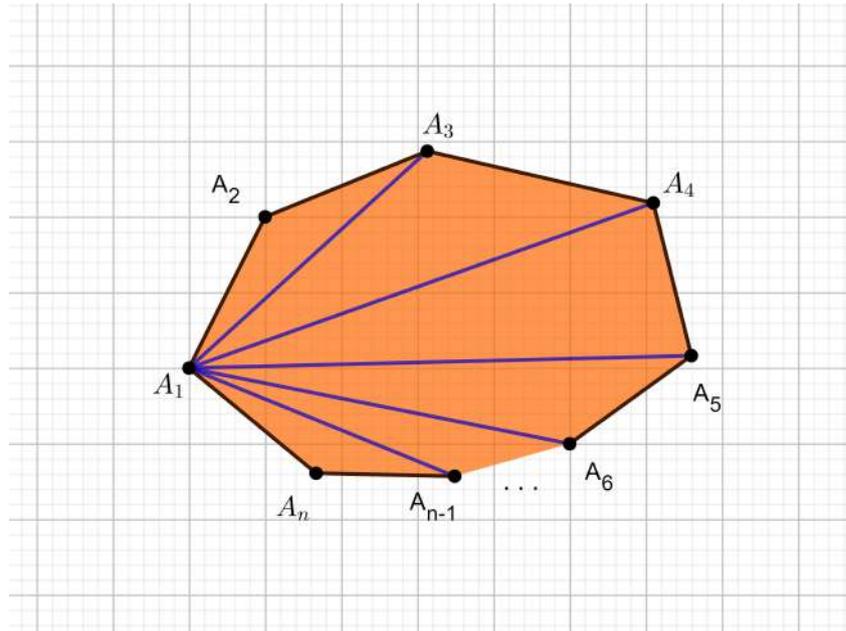
Demonstração.

Suponha, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro.

Seja o conjunto:

⁶ Triângulos justapostos são triângulos que não possuem pontos interiores em comum.

Figura 24 – Diagonais partindo do vértice A_1 do polígono convexo $A_1A_2A_3 \cdots A_n$.



Fonte: A Autora.

$L = \{n \in \mathbb{N}; \text{existem polígonos de } n \text{ lados para os quais o teorema é falso}\}$. Pelo Princípio da Boa Ordenação⁷ (PBO), existe n_0 o menor número natural tal que exista um polígono $P \in L$, com n_0 lados. Considere no plano um sistema de coordenadas cartesianas de forma que nenhum lado do polígono P seja paralelo ao eixo das ordenadas.

Seja A_5 o ponto de maior abscissa no polígono P , como o polígono P não possui lados vertical então A_5 é vértice do polígono P . Sejam A_4 e A_6 vértices consecutivos de A_5 . Então há duas possibilidades:

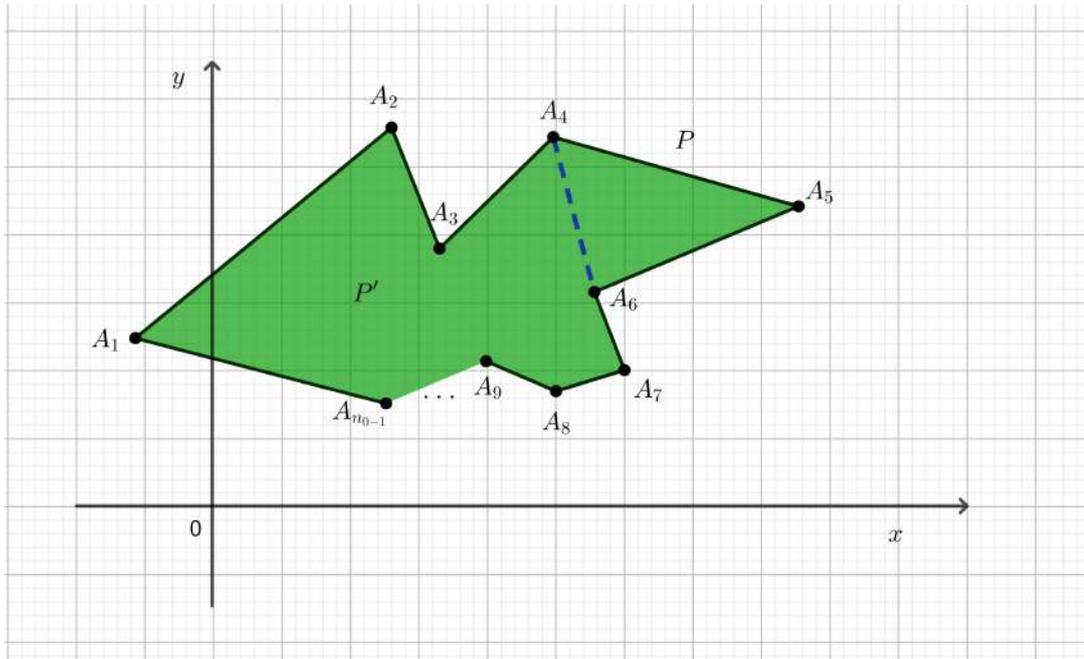
Primeira possibilidade: O triângulo $A_4A_5A_6$ (ver Figura 25) não contém outro vértice de P , além de A_4, A_5 e A_6 . Neste caso, o polígono P' quando substituirmos os lados A_4A_5 e A_5A_6 por A_4A_6 possui $(n_0 - 2) + 1$ lados, ou seja $(n_0 - 1)$ lados. Como n_0 é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, então P' pode ser decomposto em $(n_0 - 1) - 2$ triângulos, conforme enunciado do teorema. Acrescentando o triângulo $A_4A_5A_6$ concluímos que o polígono P pode ser decomposto em $(n_0 - 1) - 2 + 1$, ou seja $n - 2$ triângulos. Acabamos de mostrar que o teorema é verdadeiro para o polígono P , sendo assim uma contradição.

Segunda possibilidade: O triângulo $A_4A_5A_6$ contém, além de A_4, A_5 e A_6 algum outro vértice do polígono P (ver Figura 26). Dentre esses, considere o ponto A_5 o mais distante do lado A_4A_6 . Então o segmento de reta A_4A_6 decompõe P em dois polígonos P' e P'' . O primeiro polígono com n'_0 e o segundo com n''_0 lados, sendo $n'_0 + n''_0 = n_0 + 2$. Como $n'_0 \geq 3$ e $n''_0 \geq 3$, então n'_0 e n''_0 são ambos menores que n_0 . Então

⁷ **Princípio da Boa Ordenação:** Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento (LIMA, 2017, p.26).

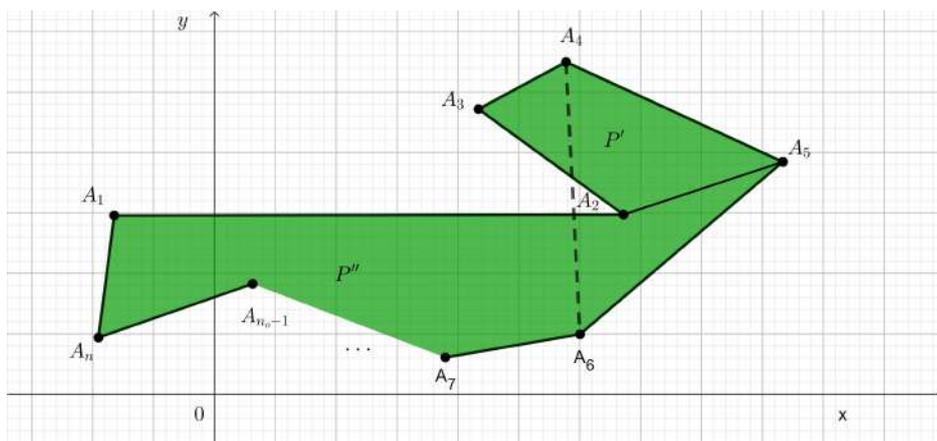
o teorema vale para P e P' , que podem ser decompostos em $n'_0 - 2$ e $n''_0 - 2$, conforme enunciado do teorema. Justapondo essa decomposição ao longo de A_4A_5 , obtemos uma decomposição de P em $(n'_0 - 2) + (n''_0 - 2) = n'_0 + n''_0 - 4 = (n_0 + 2) - 4 = n_0 - 2$ triângulos. Logo acabamos de mostrar que o polígono P pode ser decomposto em $n_0 - 2$ triângulos, o que é uma contradição, completando assim a demonstração do teorema.

Figura 25 – Polígono com lados não paralelos ao eixo das ordenadas, usado na demonstração da primeira possibilidade do Teorema 3.2.8.



Fonte: A Autora.

Figura 26 – Polígono com lados não paralelos ao eixo das ordenadas, usado na demonstração da segunda possibilidade do Teorema 3.2.8.



Fonte: A Autora.



4 Noções Básicas de Semelhanças

Neste capítulo abordaremos as isometrias no plano, definições, proposições e teoremas que serão fundamentais para compreendermos o conceito matemático de semelhança. O conceito de semelhança possui uma ligação direta com a demonstração do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Pólya que fazem parte da nossa pesquisa.

Antes de chegarmos ao conceito de isometria, definiremos distância entre dois pontos no plano cartesiano que será usada posteriormente nas nossas demonstrações.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram (LIMA, 1993), (LIMA, 2013) e (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017). As outras referências citaremos posteriormente, quando usadas.

4.1 A noção de distância entre pontos no plano

Nesta seção apresentaremos a definição de distância entre dois pontos, que será usada no decorrer do nosso trabalho.

Definição 4.1.1. Uma **distância** em conjunto X não vazio é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $(P, Q) \in X$ um número real $d(P, Q)$, chamado distância de P a Q , satisfazendo as seguintes condições para P, Q e $R \in X$:

- i. $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
- ii. $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- iii. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$;
- iv. $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) \Leftrightarrow P, Q$ e R são colineares¹ e R está entre P e Q . (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017, p.3)

Exemplo 4.1.1. Sejam $Q = (x_1, y_1)$ e $P(x_2, y_2)$, temos as seguintes distâncias:

1. $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (distância euclidiana).
2. $d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$
3. $d(P, Q) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$

No nosso trabalho a distância considerada é a euclidiana.

¹ Dizemos que três pontos são **colineares** quando pertencem a uma mesma reta.

4.2 Transformações no Plano

Nesta seção abordamos a definição e exemplos de transformações no plano.

Definição 4.2.1. Uma **transformação** T no plano \mathbb{R}^2 é uma função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada ponto P do plano um ponto $T(P)$, denominado imagem de P por T .

Exemplo 4.2.1. Seja a transformação:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = 2(x, y)$$

Note que essa transformação aplicada a um ponto vai expandir as suas coordenadas no plano, provocando assim uma ampliação das figuras planas.

Exemplo 4.2.2. Considere a transformação:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (x, -y)$$

Essa transformação inverte o sinal da ordenada do ponto (x, y) .

Exemplo 4.2.3. Considere a transformação:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(x, \frac{y}{2}\right)$$

Essa transformação é chamada de compressão vertical do plano, pois quando aplicada ao ponto (x, y) , preserva a abscissa e reduz a ordenada à metade, comprimindo verticalmente as figuras planas. Veja Figuras 27 e 28.

4.3 Isometria no plano

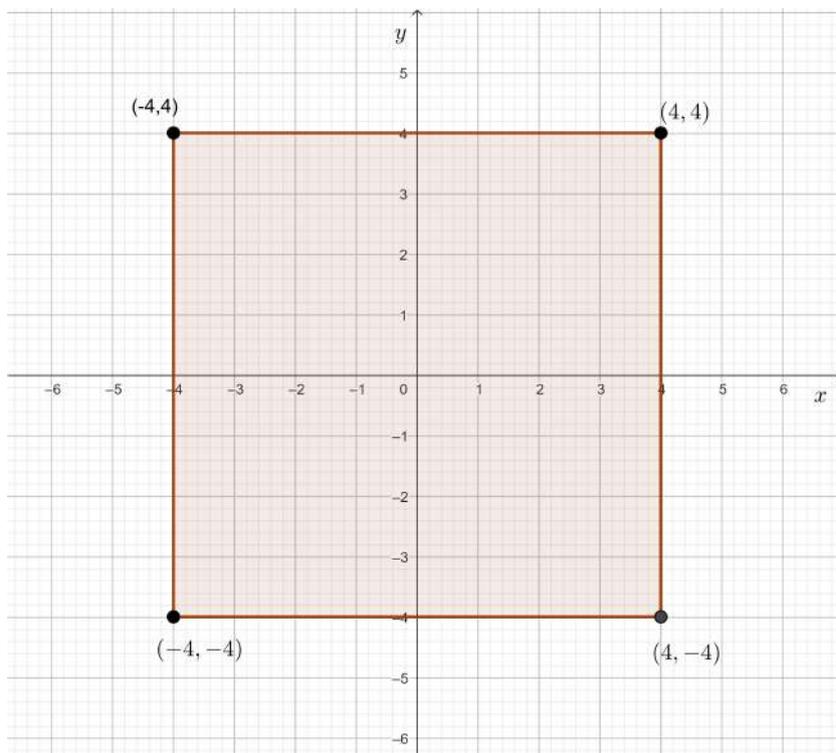
Nesta seção apresentaremos a isometria que é um tipo de transformação no plano que preserva formas e dimensões de figuras.

Definição 4.3.1. **Isometria** no plano \mathbb{R}^2 são transformações que preservam as distâncias, ou seja, T é uma isometria se, P e Q , são pontos quaisquer do plano, então: $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$.

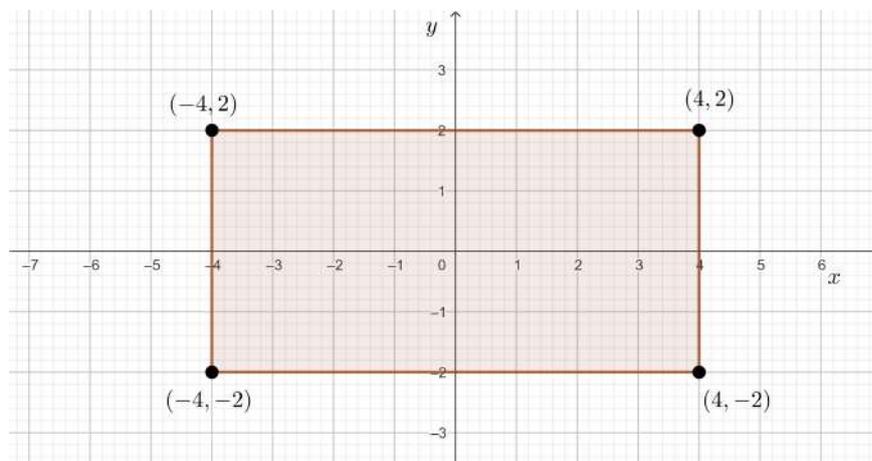
Exemplo 4.3.1. A translação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(P) = T(x, y) = (x + k, y + k)$, $k \in \mathbb{R}$, é uma isometria. Pois, considerando $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ temos:

$$\begin{aligned} d(T(P), T(Q)) &= \sqrt{(x_2 + k - x_1 - k)^2 + (y_2 + k - y_1 - k)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

Figura 27 – Quadrado.



Fonte: A Autora.

Figura 28 – Imagem da Figura 27, pela transformação $T(x, y) = (x, \frac{y}{2})$.

Fonte: A Autora.

Exemplo 4.3.2. A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(P) = T(x, y) = (-x, y)$ é uma isometria. Pois, considerando $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ temos:

$$\begin{aligned} d(T(P), T(Q)) &= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.3. A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(P) = T(x, y) = (x, -y)$, inverte o sinal da abscissa e mantém a ordenada do ponto $P = (x, y)$, é uma isometria.

Pois, considerando $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ temos:

$$\begin{aligned} d(T(P), T(Q)) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

4.4 Tipos de Isometrias no Plano

Nesta seção apresentaremos alguns tipos de isometrias, que serão importantes no estudo de semelhança.

4.4.1 Translação

Definição 4.4.1. *Translação* $T_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ determinada pelo vetor² \vec{v} é a transformação que leva cada ponto P do plano no ponto $T_v(P)$ do plano \mathbb{R}^2 , tal que $T_v(P) = P + \vec{v}$. Se $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ então $P + \vec{v} = Q$ é o ponto tal que o segmento orientado \overrightarrow{PQ} é equipolente³ a \overrightarrow{AB} .

Se, num dado sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de \vec{v} são (α, β) , então para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$ (LIMA, 2013, p.151).

Seguindo o que fizemos no Exemplo 4.3.1, a translação é uma isometria.

Na Figura 29 : A translação, determinada pelo vetor \vec{v} leva toda reta r numa reta paralela e transforma o sistema OXY no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e tem o mesmo sentido de, OX e OY .

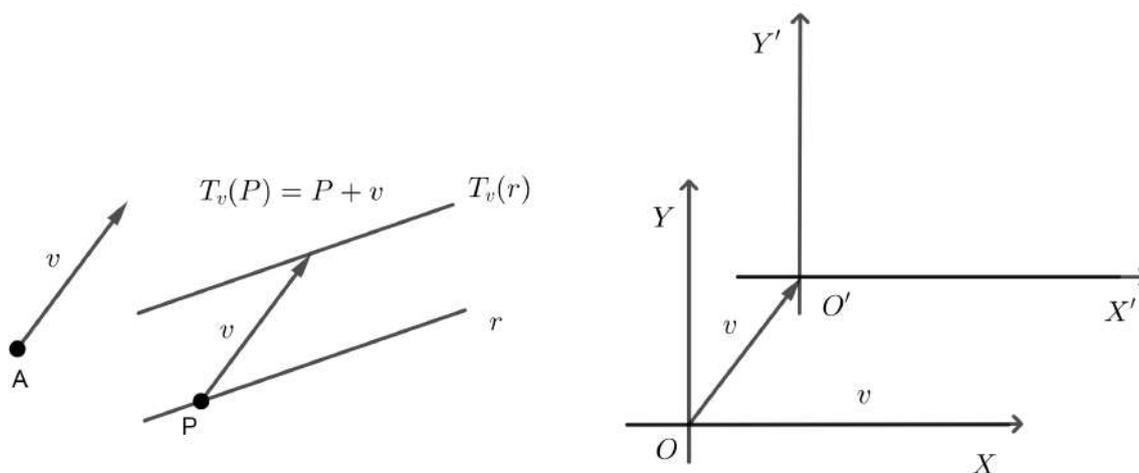
Exemplo 4.4.1. Cada ponto da Figura 30 sofre um deslocamento de sete unidades para a direita no sentido do vetor \vec{v} . Onde: $\vec{v} = (7, 0)$, $T_v(A) = A' = A + \vec{v}$, $T_v(B) = B' = B + \vec{v}$, $T_v(C) = C' = C + \vec{v}$, $T_v(D) = D' = D + \vec{v}$, $T_v(E) = E' = E + \vec{v}$ e $T_v(F) = F' = F + \vec{v}$.

Na translação as figuras mantêm a forma e o tamanho, pois apenas se deslocam no plano.

4.4.2 Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário

Definição 4.4.2. A *rotação* de centro O e ângulo θ que denotaremos por $R_\theta(x, y)$, no plano \mathbb{R}^2 , no sentido anti-horário, é a transformação que associa a cada o ponto $P = (x, y)$ do plano \mathbb{R}^2 o ponto $P' = R_\theta(P)$ de coordenadas $(x_1, y_1) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.

Figura 29 – Translação.



Fonte: Lima, 2013.

De fato, vejamos o porquê da Definição 4.4.2, na Figura 31 temos que:

$$x_1 = r \cos(\theta + \alpha),$$

logo:

$$x_1 = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha,$$

mas

$$x = r \cos \alpha \text{ e } y = r \sin \alpha,$$

daí

$$x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta.$$

Analogamente, temos

$$y_1 = r \sin(\theta + \alpha) = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

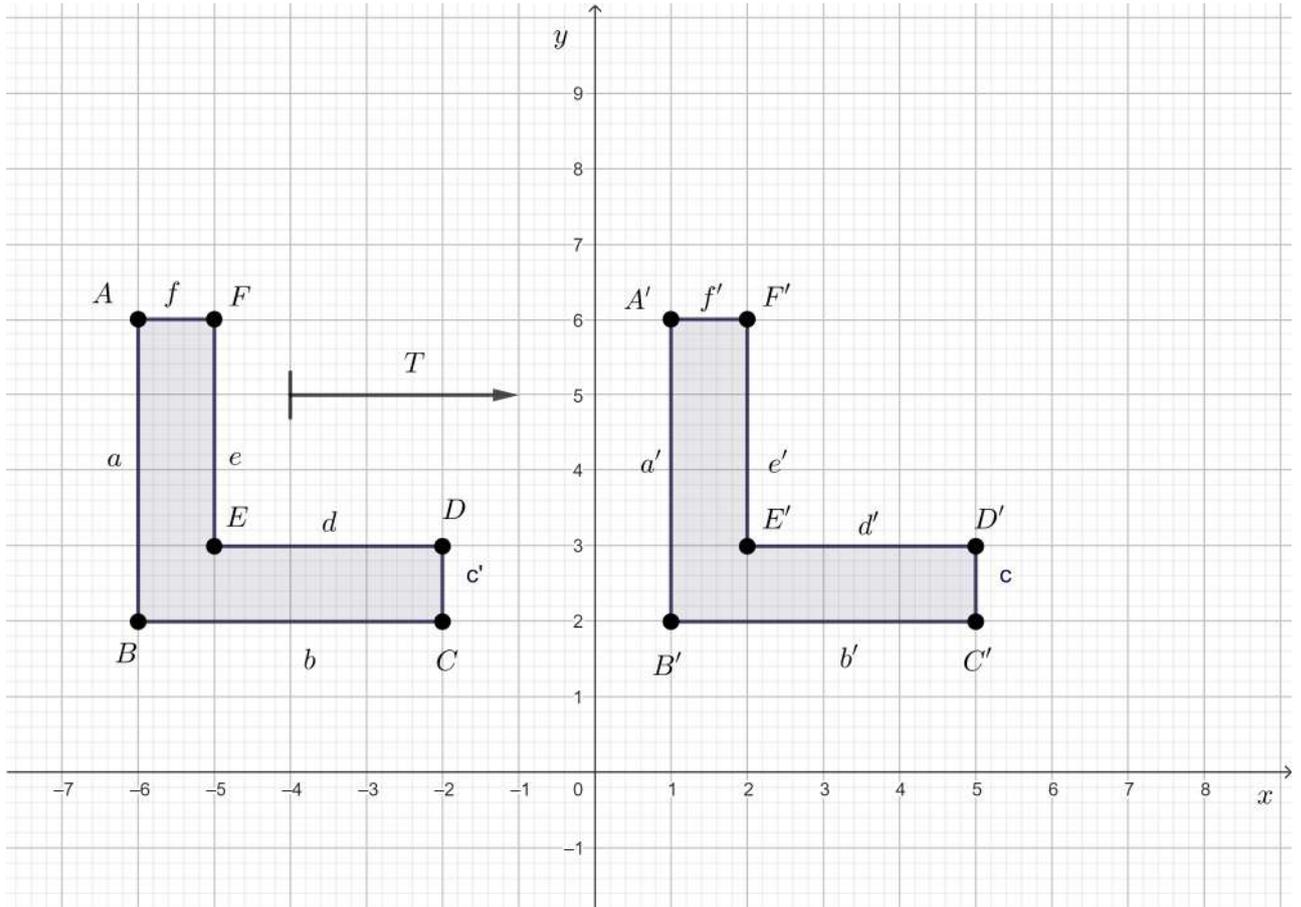
Assim,

$$P' = (x_1, y_1) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

² Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as **coordenadas do vetor** $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, e escrevemos $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017, p.22).

³ Segmentos que possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.

Figura 30 – Translação da Figura $ABCDEF$ pelo vetor $\vec{v} = (7, 0)$.



Fonte: A Autora.

Também podemos escrever uma rotação $R_\theta(x, y)$ na forma matricial: (vide (BOLDRINI et al., 1978, p.167)).

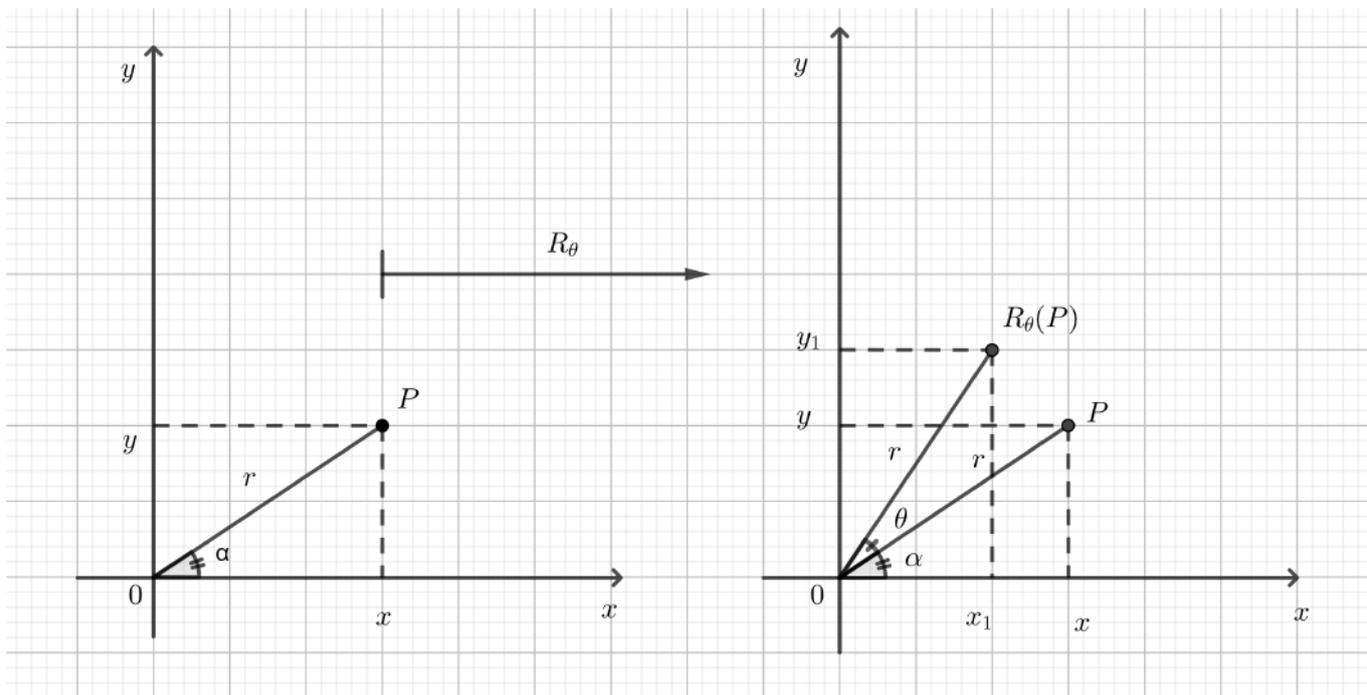
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A matriz $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ é chamada de matriz de rotação de centro O e ângulo θ no sentido anti- horário.

Exemplo 4.4.2. Na Figura 32, o triângulo ABC é rotacionado de 45° no sentido anti-horário em relação a origem, onde $R_{45^\circ}(A) = A'$, $R_{45^\circ}(B) = B'$ e $R_{45^\circ}(C) = C'$.

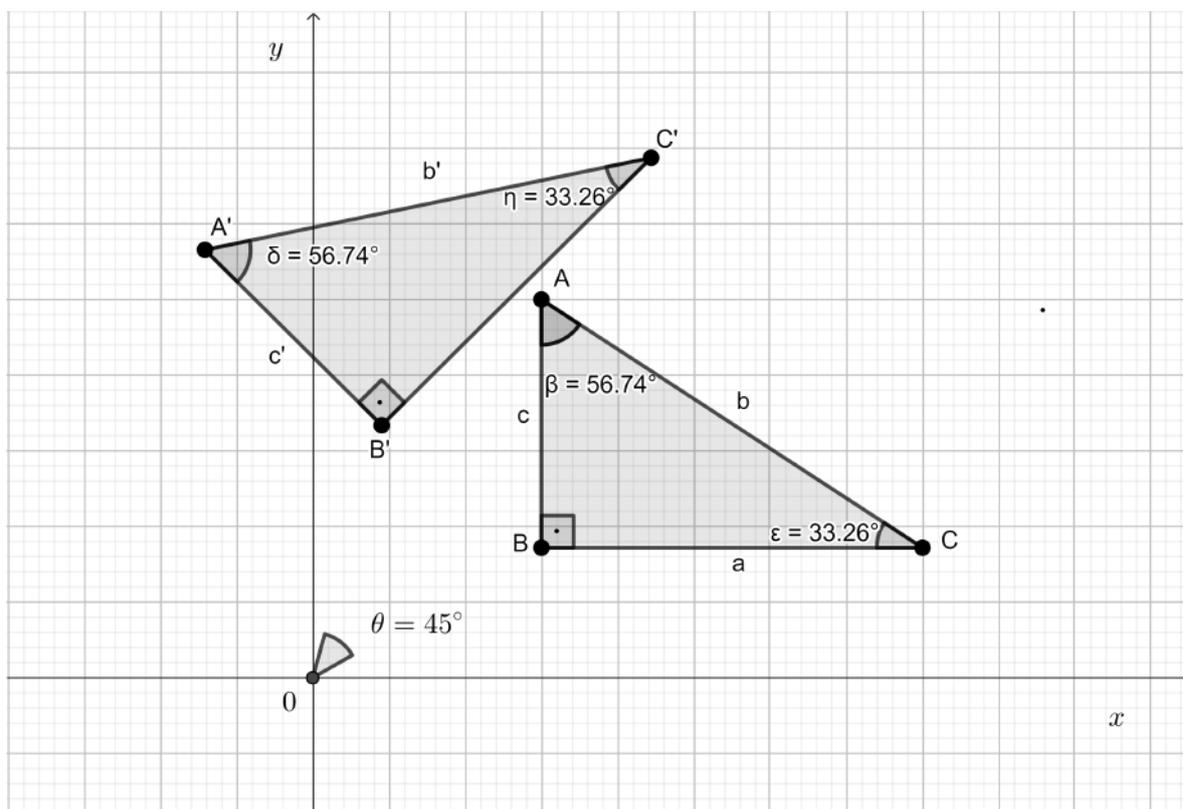
Exemplo 4.4.3. A figura $BCDEFG$ sofre uma rotação de centro na origem O e ângulo de 90° (ver Figura 33), $R_{90^\circ}(B) = B'$, $R_{90^\circ}(C) = C'$, $R_{90^\circ}(D) = D'$, $R_{90^\circ}(E) = E'$, $R_{90^\circ}(F) = F'$ e $R_{90^\circ}(G) = G'$.

Figura 31 – Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

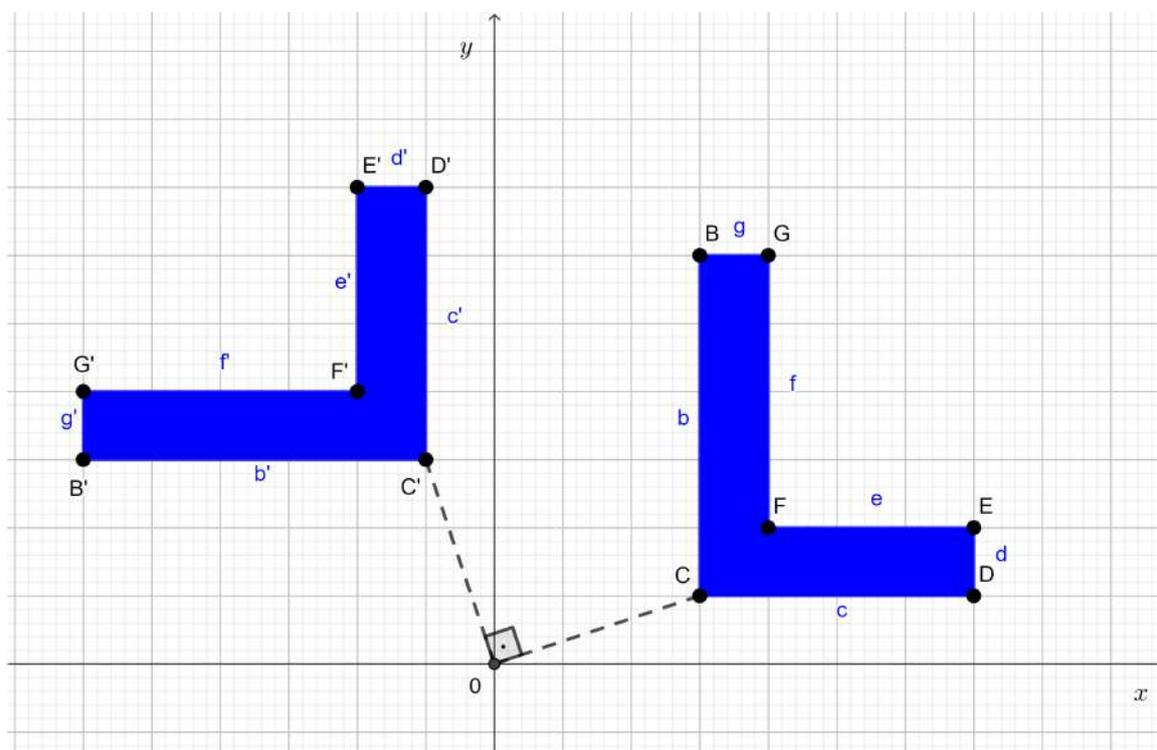


Fonte: A Autora.

Figura 32 – Rotação de 45° do triângulo ABC no sentido anti-horário.



Fonte: A autora. ;

Figura 33 – Rotação de 90° da figura $BCDEFG$ no sentido anti-horário.

Fonte: A autora.

Na rotação cada ponto da figura é rotacionado sob um determinado ângulo e sentido. A figura obtida dessa rotação mantém a forma e a dimensão da figura original, pois apenas muda de posição após girar no plano. Sendo assim a rotação é uma isometria.

4.4.3 Reflexão

Definição 4.4.3. *Reflexão* em torno de uma reta s é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o seu simétrico⁴ $P' = T(P)$ em relação a reta s . Se P pertencer a reta s , o seu simétrico em relação a reta s é ele próprio.

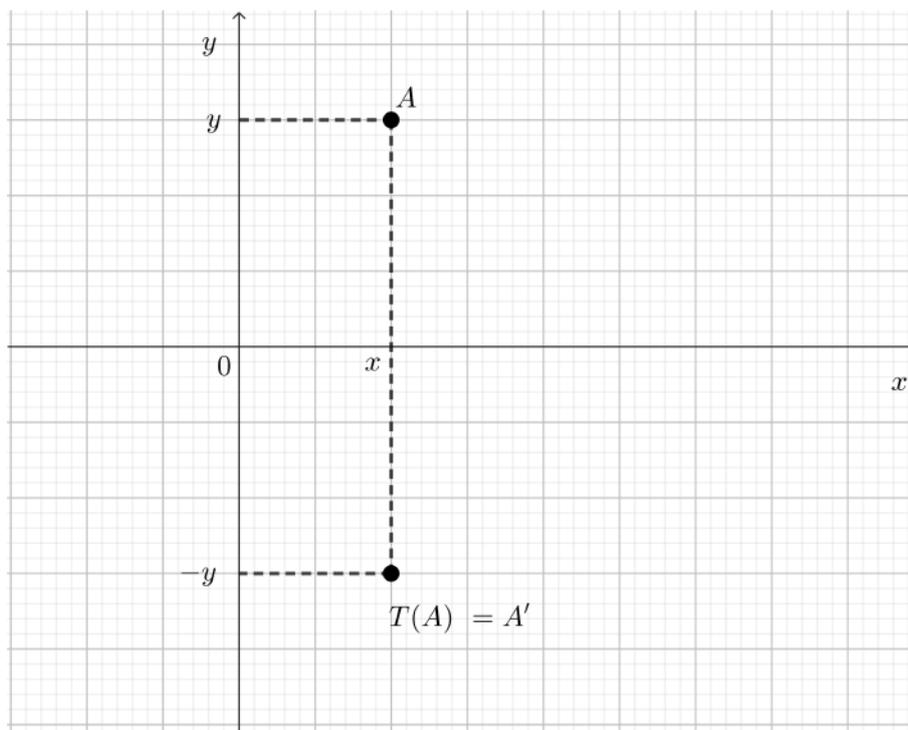
A seguir, mostraremos exemplos de reflexão em relação aos eixos ortogonais OX e OY do sistema de coordenada cartesianas.

Exemplo 4.4.4. Considerando um sistema cartesiano de eixos ortogonais OXY no qual o eixo OX coincida com a reta s onde se dá a reflexão T , então para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se o ponto $T(x, y) = (x, -y)$, é o seu simétrico em relação ao eixo OX , Figura 34.

A transformação $T(P) = (x, -y)$ inverte a orientação do plano, pois mantém fixo o eixo OX e inverte a orientação do eixo OY .

⁴ O ponto P' é simétrico de P em relação a reta s quando s é a mediatriz do segmento PP' .

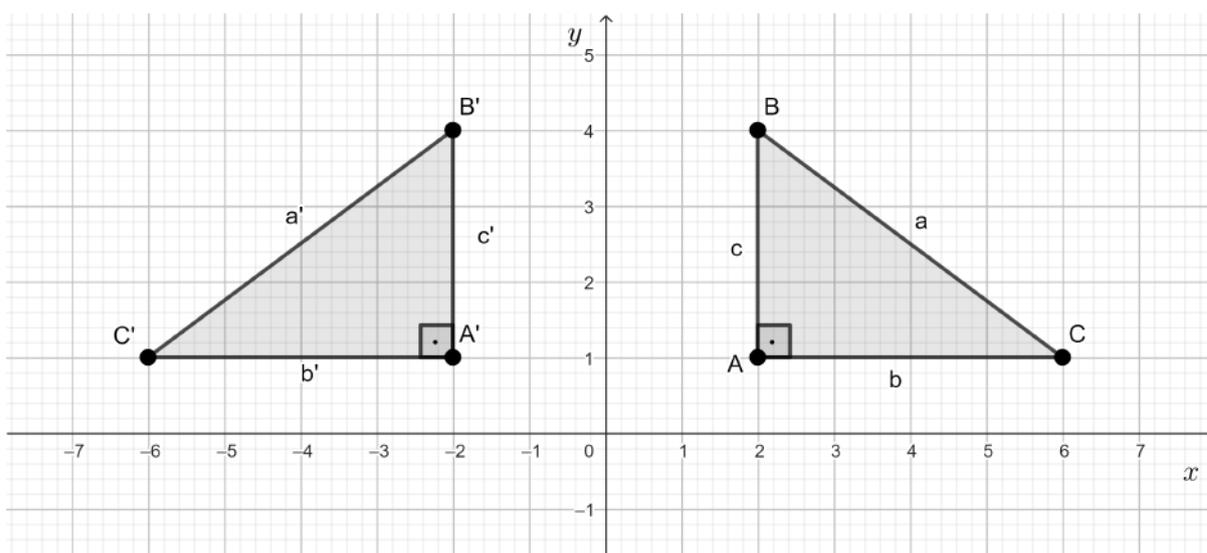
Figura 34 – Reflexão do ponto A em torno do eixo x.



Fonte: A autora.

Exemplo 4.4.5. O triângulo $A'B'C'$ é a imagem refletida do triângulo ABC pela transformação $T(x, y) = (-x, y)$ (ver Figura 35), onde $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(C) = C'$.

Figura 35 – $A'B'C'$ é a imagem refletida de ABC pela transformação $T(x, y) = (-x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Fonte: A autora.

Na reflexão as figuras mantêm a mesma forma e dimensões, daí a reflexão é uma

isometria. Pois, considere a reflexão em torno do eixo y dada pela transformação $T(x, y) = (-x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Note que, dados $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, temos:

$$\begin{aligned}d(T(P), T(Q)) &= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= d(P, Q)\end{aligned}$$

Por ser uma isometria, a translação, rotação e reflexão são considerados movimentos rígidos⁵ no plano cartesiano, pois não modificam nem a forma e nem as dimensões das figuras que sofreram essas transformações.

⁵ **Movimentos Rígidos** são transformações que preservam a distância entre dois pontos, a forma e o tamanho das figuras, ou seja, as isometrias são exemplos de movimentos rígidos.

5 Semelhança no Plano

Depois de apresentarmos as isometrias, agora vamos abordar o conceito de semelhança, como uma transformação no plano, redução ou ampliação de figuras. Pois, nosso trabalho abordará a semelhança de figuras para aplicá-la na demonstração do Teorema de Pólya. Além disso, a semelhança de figuras é de fundamental importância para a Geometria, por possibilitar a resolução de problemas, principalmente ligados ao cálculo de distâncias. A seguir, apresentaremos o conceito matemático de semelhança e as proposições que a caracteriza.

As definições, proposições, teoremas e corolários usados neste capítulo tiveram como referência (LIMA, 2013), (MUNIZ NETO, 2013) e outras obras que citaremos ao longo do texto.

5.1 O conceito matemático de semelhança

5.1.1 Semelhança

Definição 5.1.1. *Seja r um número real positivo. Uma **semelhança** de razão r , no plano, é uma transformação $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que multiplica por r a distância entre dois pontos quaisquer do plano, ou seja, S satisfaz $d(S(P), S(Q)) = r \cdot d(P, Q)$.*

Temos a seguinte definição:

- $r > 1$, S é uma **ampliação**;
- $0 < r < 1$, S é uma **redução**;
- $r = 1$, S é uma **isometria**.

Exemplo 5.1.1. *Considere a transformação: $S: \mathbb{R}^2$ definida por $S(x, y) = (rx, ry)$, onde $r > 0$ é uma constante fixada, temos que S é uma semelhança.*

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
 d(S(x, y), S(x', y')) &= d((rx, ry), (rx', ry')) \\
 &= \sqrt{(rx' - rx)^2 + (ry' - ry)^2} \\
 &= \sqrt{r^2(x' - x)^2 + r^2(y' - y)^2} \\
 &= r \cdot \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \\
 &= r \cdot d((x, y), (x', y'))
 \end{aligned}$$

Portanto, $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $S(x, y) = (rx, ry)$, $r > 0$ é uma semelhança de razão r .

Assim, com a ampliação e redução, obtemos figuras semelhantes e a translação, rotação e reflexão são semelhanças de razão $r = 1$.

Para uso posterior e para que os leitores familiarizassem com as características matemáticas de uma semelhança apresentaremos as seguintes proposições:

Proposição 5.1.2. *Se S e S' são semelhanças de razão $r > 0$ e $r' > 0$, respectivamente, a composta $S \circ S' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por: $(S \circ S')(P) = S(S'(P))$ é uma semelhança de razão rr' .*

Demonstração.

Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$, logo:

$$\begin{aligned} d((S \circ S')(P), (S \circ S')(Q)) &= d(S(S'(P)), S(S'(Q))) \\ &= r \cdot d(S'(P), S'(Q)) \\ &= rr' \cdot d(P, Q) \end{aligned}$$

■

Proposição 5.1.3. *Toda semelhança é uma função injetiva.*

Demonstração.

De fato, seja $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão $r > 0$. Se $S(P) = S(Q)$ com

$$P, Q \in \mathbb{R}^2, \text{ tem-se: } d(S(P), S(Q)) = rd(P, Q) \iff 0 = d(P, Q) \iff P = Q.$$

Portanto S é injetiva. ■

Proposição 5.1.4. *Seja $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma semelhança de razão $r > 0$ e P, Q pontos distintos do \mathbb{R}^2 . Se $S(P) = P'$ e $S(Q) = Q'$, então S transforma todo ponto R do segmento PQ , no ponto $S(R) = R'$ do segmento $P'Q'$.*

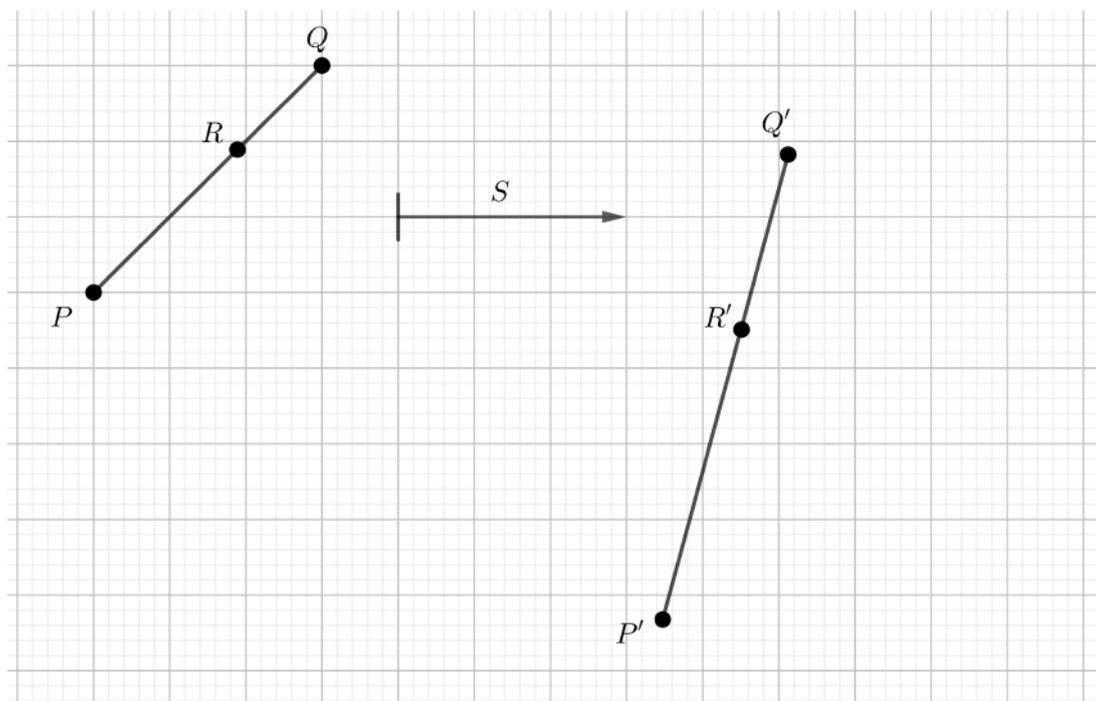
Demonstração.

De fato, se $R \in PQ$ (ver Definição 4.1.1) temos que:

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q), \text{ como:}$$

$$\begin{aligned} d(S(P), S(Q)) &= r \cdot d(P, Q) \\ d(P', Q') &= r \cdot (d(P, R) + d(R, Q)) \\ d(P', Q') &= r \cdot d(P, R) + r \cdot d(R, Q) \\ d(P', Q') &= d(P', R') + d(R', Q'). \end{aligned}$$

Portanto $R' \in P'Q'$. ■

Figura 36 – Segmento PQ transformado por S no segmento $P'Q'$ 

Fonte: A autora.

A Proposição 5.1.4 nos diz que S transforma pontos colineares em pontos colineares e além disso, preserva a ordem desses pontos. Assim podemos concluir que a semelhança S transforma segmento em segmento. Logo o segmento PQ é transformado por S no segmento $P'Q'$, onde $Q' = S(Q)$ e $P' = S(P)$ (Ver Figura 36).

Corolário 5.1.5. *Toda semelhança transforma uma reta em outra reta .*

Demonstração.

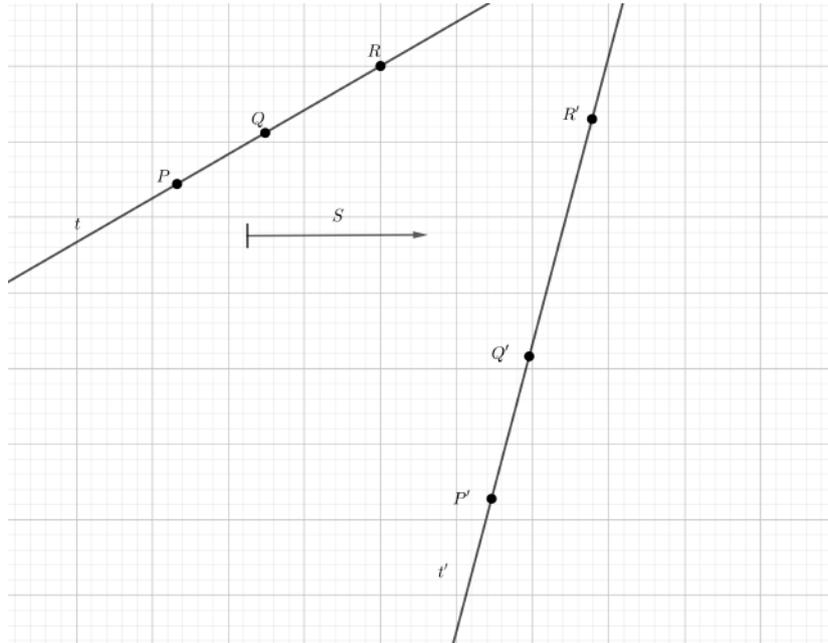
Sejam $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma semelhança de razão $r > 0$, P, Q pontos distintos da reta t , $S(P) = P'$ e $S(Q) = Q'$ suas imagens por S . Considere $t' \in \mathbb{R}^2$ a reta que passa por P' e Q' . Dado um ponto $R \in t$ qualquer, afirmamos que $S(R) = R' \in t'$. De fato, suponhamos que Q esteja entre P e R , ou seja $Q \in PR$. Então, pela Proposição 5.1.4, $Q' \in P'R'$, logo R' pertence a reta que liga P' e Q' , daí $R' \in t'$ (Ver Figura 36). Analogamente se mostra para os casos em que P está entre Q e R ou R está entre P e Q . ■

Proposição 5.1.6. *Toda semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Demonstração.

Se t e s forem retas coincidentes, o resultado segue trivialmente.

Figura 37 – Reta t transformada por S na reta t' .



Fonte: A autora.

Suponha $t \cap s = \emptyset$. Seja $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança, de razão $r > 0$. Considere t e s duas retas paralelas, $S(t) = t'$ e $S(s) = s'$ onde t' e s' são retas em \mathbb{R}^2 . Suponha que t' e s' não sejam retas paralelas, então existe um ponto P , tal que $P \in t'$ e $P \in s'$, assim existe um ponto $Q \in t$ tal que $S(Q) = P$ e existe um ponto $R \in s$ tal que $S(R) = P$, logo $S(Q) = S(R)$, pela Proposição 5.1.3, S é injetiva, daí $Q = R$, que é uma contradição, pois r é paralela a s . Portanto t' é paralela a s' . ■

Proposição 5.1.7. *Toda semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma um triângulo retângulo em outro triângulo retângulo.*

Demonstração.

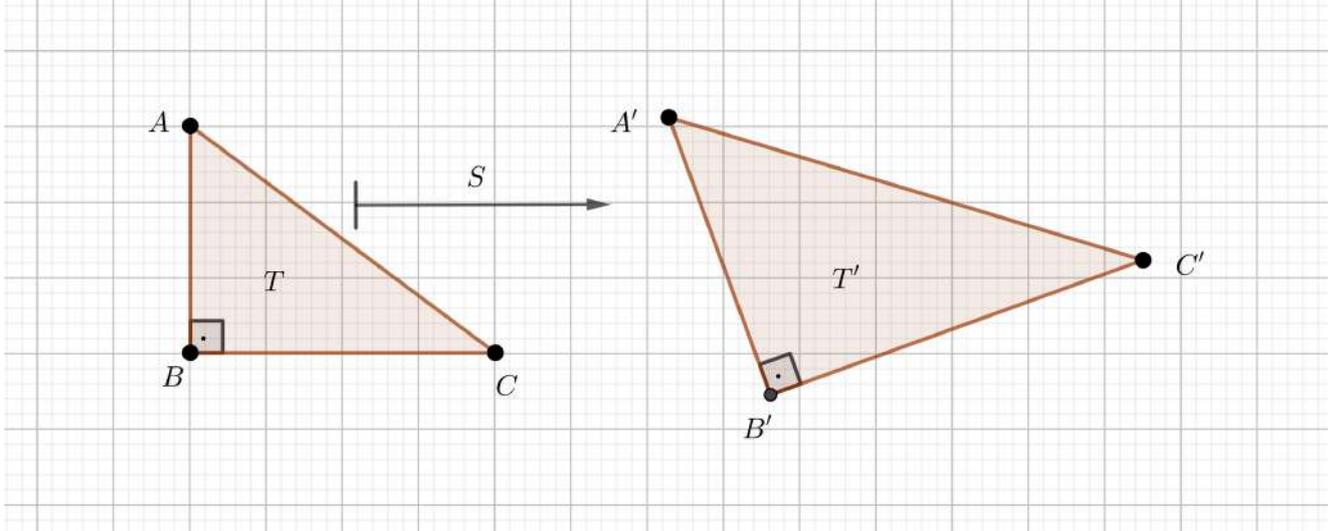
Seja o triângulo T de vértices A, B e C , retângulo em \hat{B} (ver Figura 38), pela Proposição 5.1.4 uma semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de razão $r > 0$ transforma T no triângulo T' , onde $A' = S(A)$, $B' = S(B)$ e $C' = S(C)$. Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que: $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$.

No triângulo T' temos: $d(A', B') = r \cdot d(A, B)$, $d(A', C') = r \cdot d(A, C)$ e $d(B', C') = r \cdot d(B, C)$. Como:

$$\begin{aligned} d(A', B')^2 + d(B', C')^2 &= r^2 \cdot d(A, B)^2 + r^2 \cdot d(B, C)^2 \\ &= r^2 \cdot (d(A, B)^2 + d(B, C)^2) \\ &= r^2 \cdot d(A, C)^2 \\ &= d(A', C')^2, \end{aligned}$$

pela recíproca do Teorema de Pitágoras (vide (BARBOSA, 1995)) o triângulo T' é retângulo em \hat{B}' .

Figura 38 – Triângulos Retângulos Semelhantes



Fonte: A autora.

■

Proposição 5.1.8. *Toda semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração.

Sejam duas retas perpendiculares $s, t \in \mathbb{R}^2$ que se intersectam no ponto P e $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão $r > 0$. Considere A e B pontos distintos do \mathbb{R}^2 , tais que $A \in s$ e $B \in t$, respectivamente, com $A, B \neq P$. Considere $S(P) = P'$. Como S é injetiva, pela Proposição 5.1.3, tem-se $S(A) \neq P'$ e $S(B) \neq P'$. Além disso, pelo Corolário 5.1.5, S transforma reta em reta, digamos $S(s) = s'$ e $S(t) = t'$. Assim, $S(B) = B' \in t', S(A) = A' \in s'$ e $S(P) = P'$ descreve um triângulo que, pela Proposição 5.1.7, o triângulo descrito é retângulo em P' . Portanto S transforma retas perpendiculares s, t em retas perpendiculares s', t' (ver Figura 39). ■

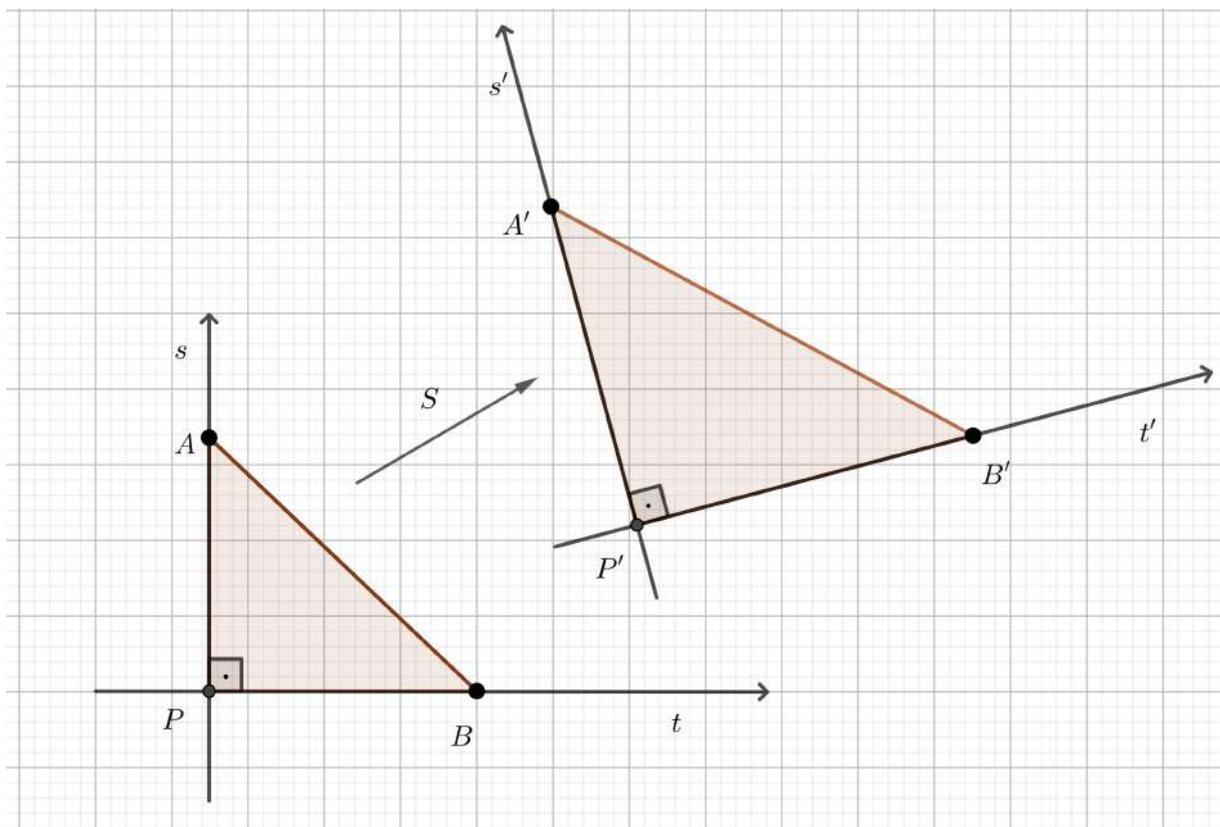
Corolário 5.1.9. *Toda semelhança transforma um sistema cartesianos de eixos ortogonais OXY em outro sistema de eixos cartesianos ortogonais $O'X'Y'$.*

Demonstração.

Esse resultado decorre diretamente da Proposição 5.1.8. ■

Observação 5.1.10. *Seja $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão $r > 0$. Considere o sistema de eixos cartesianos OXY que é transformado por S no sistema cartesiano de eixos ortogonais $O'X'Y'$, pelo Corolário 5.1.9. Sejam o ponto $P = (x, 0) \in OX$ e*

Figura 39 – Retas perpendiculares



Fonte: A autora

$P' = S(P) = (x', 0) \in O'X'$, daí se $x = d(O, (x, 0))$, (Ver Figura 40), pela semelhança S , tem-se:

$$\begin{aligned} d(O', S(x)) &= r \cdot d(O, X) \\ d(O', S(x)) &= r \cdot d(O, (X, O)) \\ x' &= r \cdot x \end{aligned}$$

Analogamente, se o ponto $Q = (0, y) \in OY$ e $Q' = S(Q) = (0, y') \in O'Y'$, tem-se $y' = r \cdot y$.

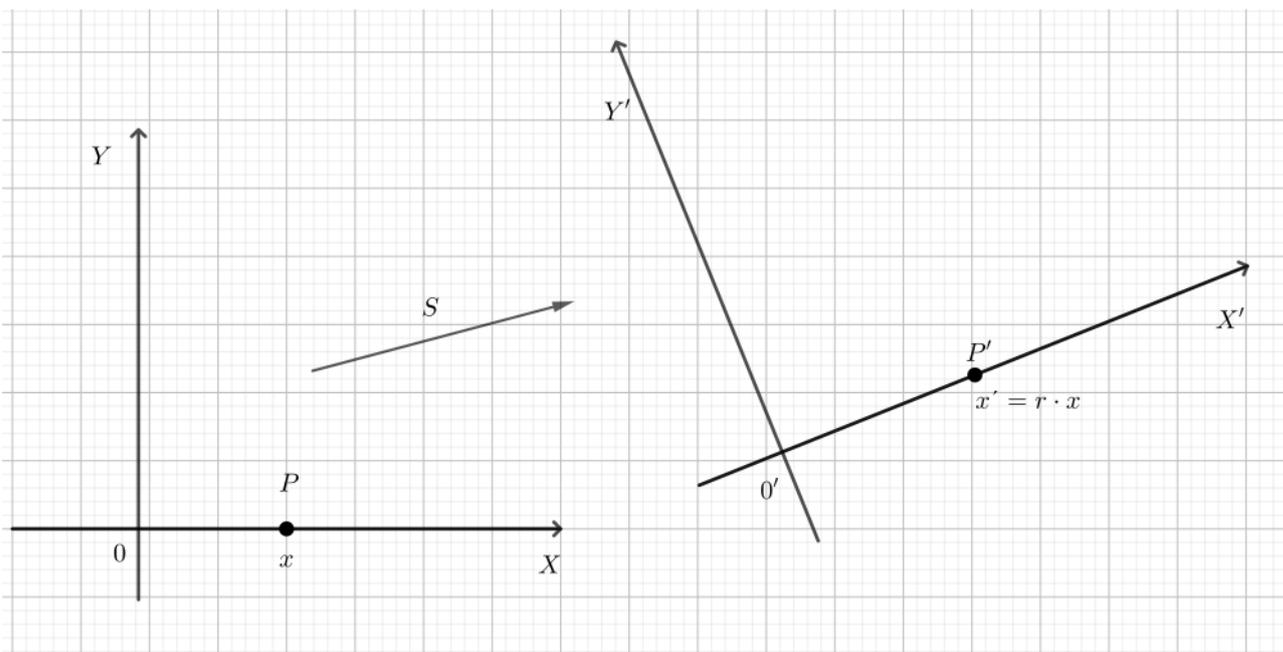
Proposição 5.1.11. *Toda semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação bijetiva.*

Demonstração.

Seja $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão $r > 0$, pela Proposição 5.1.3 S é injetiva, basta provarmos que S é sobrejetiva. Considere um sistema cartesiano de eixos ortogonais OXY . Pelo Corolário 5.1.9 S o transforma no sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$. Devemos mostrar que para todo ponto $P' \in O'X'Y'$ existe pelo menos um ponto $P \in OXY$ tal que $S(P) = P'$.

De fato da, Observação 5.1.10, dado um ponto P' qualquer, cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são (x', y') , temos $S(P) = P'$, onde P é um ponto do plano OXY

Figura 40 – Sistema Cartesiano de eixos ortogonais OXY transformado pela semelhança S no sistema de eixos cartesianos ortogonais $O'X'Y'$



Fonte: Autora

cujas coordenadas são $(\frac{x'}{r}, \frac{y'}{r})$. Portanto S é sobrejetiva. Daí, pelo fato de ser S injetiva e sobrejetiva, concluímos que S é bijetiva. ■

Corolário 5.1.12. *Toda semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de razão $r > 0$, tem inversa $S^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$.*

Demonstração.

Seja $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão $r > 0$, pela Proposição 5.1.11 S é bijetiva, logo possui inversa. Considere a $S^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a inversa de S . Seja $O'X'Y'$ o sistema de eixos ortogonais, imagem do sistema de eixos ortogonais OXY .

Considere:

$$P' = (rx_1, ry_1) \in O'X'Y', (x_1, y_1) \in OXY$$

$$Q' = (rx_2, ry_2) \in O'X'Y', (x_2, y_2) \in OXY$$

$$S^{-1}(P') = (x_1, y_1) \text{ e } S^{-1}(Q') = (x_2, y_2)$$

Então:

$$\begin{aligned} d(S^{-1}(P'), S^{-1}(Q')) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d(S^{-1}(P'), S^{-1}(Q')) &= \sqrt{\frac{(rx_2 - rx_1)^2}{r^2} + \frac{(ry_2 - ry_1)^2}{r^2}} \\ d(S^{-1}(P'), S^{-1}(Q')) &= \frac{1}{r} \cdot \sqrt{(rx_2 - rx_1)^2 + (ry_2 - ry_1)^2} \\ d(S^{-1}(P'), S^{-1}(Q')) &= \frac{1}{r} \cdot d(P', Q') \end{aligned}$$

Portanto, $S^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$. ■

Proposição 5.1.13. *Toda semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de razão de semelhança $r > 0$, preserva qualquer ângulo.*

Demonstração.

Considere o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$ formado pelos segmentos BA e AC , mostraremos que se $S(A) = A'$, $S(B) = B'$ e $S(C) = C'$ então $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$.

Considere, no plano, um sistema de eixos ortogonais de origem em A e eixo horizontal AB . Daí, pela Proposição 5.1.9, a semelhança S o transforma em outro sistema de eixos ortogonais de origem A' , cujo eixo horizontal é a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. Seja a reta $y = ax$ a equação da reta \overleftrightarrow{AC} no primeiro sistema, assim todos os pontos desta reta tem coordenadas (x, ax) . A semelhança S os transformam em pontos de coordenadas $(rx, rax) = (rx, a \cdot rx)$ no segundo sistema. Estes pontos transformados constituem a reta $\overleftrightarrow{A'C'}$ de equação $y' = ax'$. Portanto, o ângulo do eixo $A'B'$, com a reta $\overleftrightarrow{A'C'}$ cuja tangente é a é igual ao ângulo de \overleftrightarrow{AB} com \overleftrightarrow{AC} , logo $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$ (Figura 41).

O caso em que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$, onde a tangente não está definida, é mostrado na Proposição 5.1.8. ■

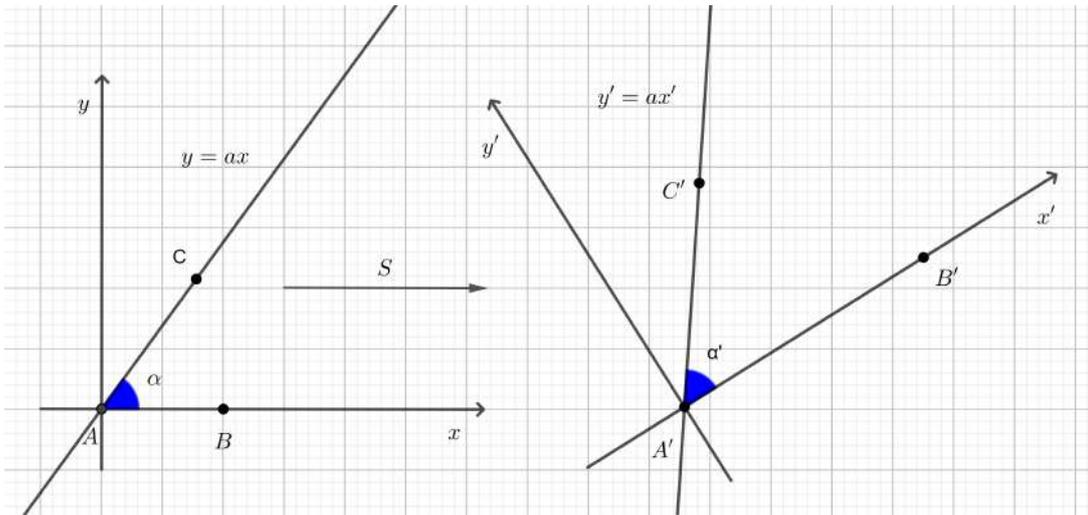
5.1.2 Exemplos de algumas semelhanças de figuras

Nesta seção mostraremos alguns teoremas, como exemplos, que se referem as figuras semelhantes que são muito conhecidas na Geometria, como quadrados, circunferências, elipses e parábolas. Antes de apresentarmos esses exemplos, vejamos a definição de figuras semelhantes.

Usamos como referência (LIMA, 2013) e (MORAIS FILHO, 2015).

Definição 5.1.2. *Duas figuras F e F' , contidas no plano \mathbb{R}^2 são semelhantes quando existe uma semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $S(F) = F'$.*

Figura 41 – Ângulos Congruentes



Fonte: Figura adaptada de Elon Lages Lima: *Coordenadas no Plano*, 2013.

Agora que já conhecemos a definição de figuras semelhantes apresentaremos alguns teoremas, como exemplos, que mostram a semelhança das figuras já mencionadas anteriormente.

Teorema 5.1.14. *Quaisquer duas circunferências são semelhantes.*

Demonstração.

Sejam C e C' duas circunferências, através de movimentos rígidos, mais especificamente de translação (pela Definição 4.4.1), que é uma isometria no plano por deslocar as figuras sem mudar a forma e nem o tamanho, podemos dispor os seus centros na origem do sistema de coordenadas cartesianas (ver Figura 42), daí:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = r^2, r > 0\}$$

e

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = r'^2, r' > 0\}.$$

Considere a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{r'x}{r}, \frac{r'y}{r}\right), (x, y) \in C.$$

Note que dados $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, onde $A, B \in C$, tem-se:

$$\begin{aligned} d(T(A), T(B)) &= \sqrt{\left(\frac{r'c}{r} - \frac{r'a}{r}\right)^2 + \left(\frac{r'd}{r} - \frac{r'b}{r}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{r'^2(c-a)^2}{r^2} + \frac{r'^2(d-b)^2}{r^2}} \\ &= \frac{r'}{r} \cdot \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} \\ &= \frac{r'}{r} \cdot d(A, B) \end{aligned}$$

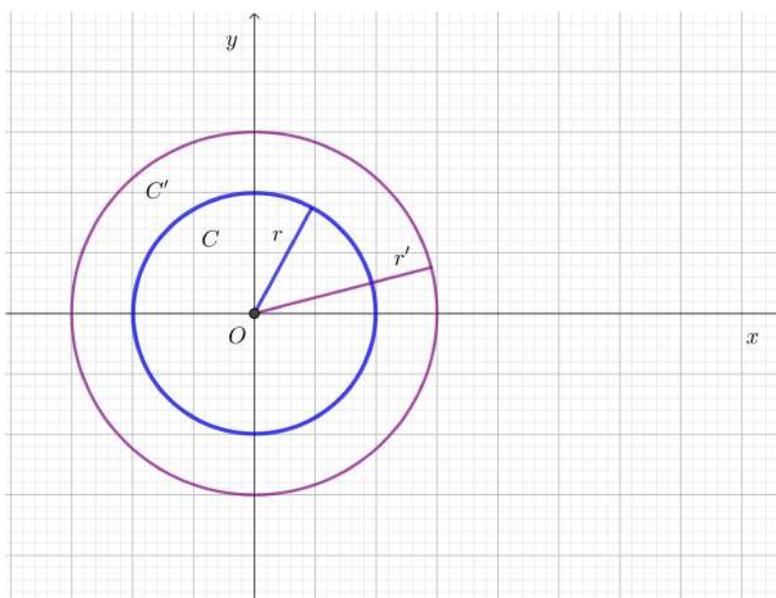
Logo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = \left(\frac{r'x}{r}, \frac{r'y}{r}\right)$ é uma semelhança.

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r'x}{r}\right)^2 + \left(\frac{r'y}{r}\right)^2 &= \frac{r'^2x^2}{r^2} + \frac{r'^2y^2}{r^2} \\ &= \frac{r'^2}{r^2}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{r'^2}{r^2} \cdot r^2 \\ &= r'^2 \end{aligned}$$

Assim, os pontos da forma $\left(\frac{r'x}{r}, \frac{r'y}{r}\right) \in C'$ sempre que $(x, y) \in C$. Portanto, as circunferências C e C' são semelhantes e a função de semelhança é $T(x, y) = \frac{r'}{r}(x, y)$. Concluimos, assim, que todas as circunferências são semelhantes. ■

Figura 42 – Circunferências C e C'



Fonte: Morais Filho, 2015.

Teorema 5.1.15. *Duas elipses são semelhantes se, e somente se, têm a mesma excentricidade.*

Demonstração.

Considere duas elipses E e E' com função de semelhança $S: E \rightarrow E'$ e razão de semelhança $r > 0$. Mostraremos que elas possuem a mesma excentricidade. Através de movimentos rígidos, podemos dispor E e E' com centros na origem, conforme Figura 43, dessa forma os vértices da elipse E são:

$$V_1 = (-a, 0), V_2 = (a, 0), V_3 = (0, b) \text{ e } V_4 = (0, -b).$$

Os vértices da elipse E' são:

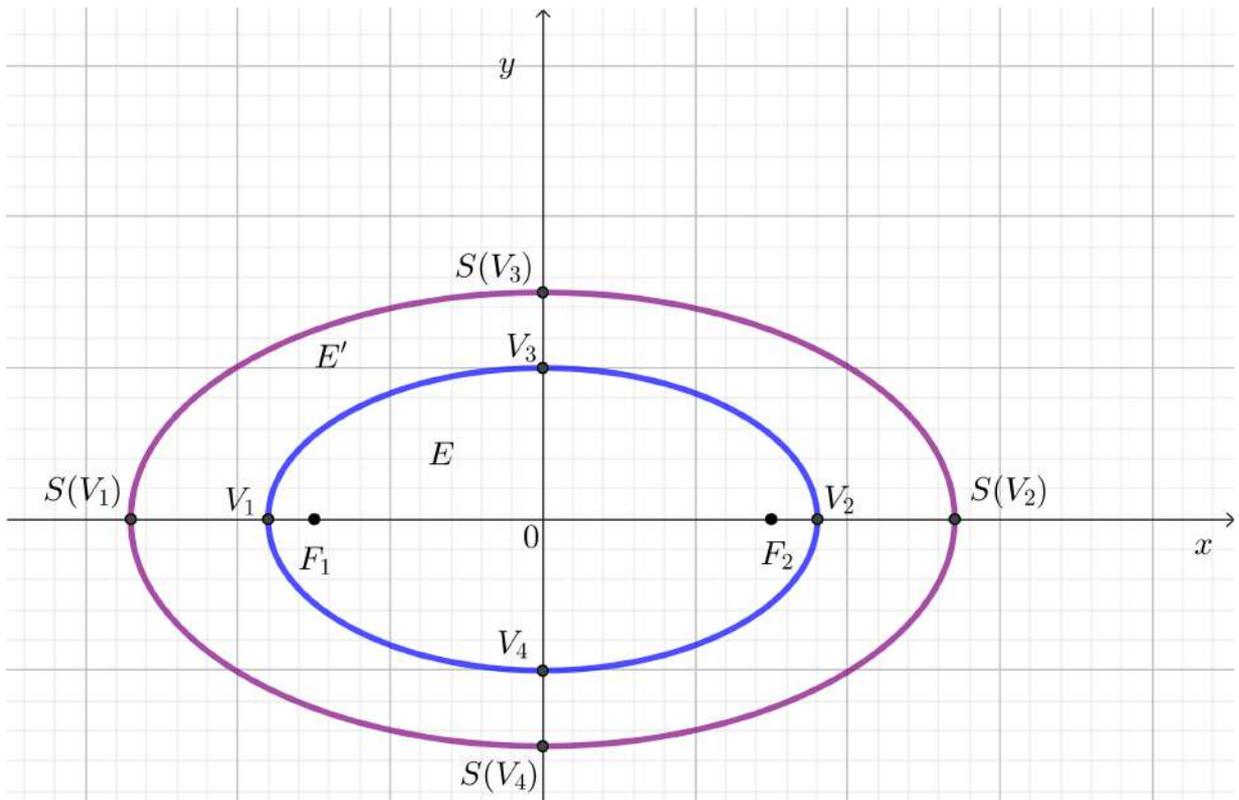
$$S(V_1) = (-a', 0), S(V_2) = (a', 0), S(V_3) = (0, b') \text{ e } S(V_4) = (0, -b').$$

Daí temos:

$$d(S(V_1), S(V_2)) = rd(V_1, V_2) \Rightarrow 2a' = r \cdot 2a \Rightarrow a' = ra.$$

Analogamente mostra-se que $b' = rb$.

Figura 43 – Elipses semelhantes E e E'



Fonte: Morais Filho, 2015.

Seja c a semi-distância focal da elipse E , então a sua excentricidade e é obtida pela expressão (vide (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017, p.100)):

$$e = \frac{c}{a}.$$

Seja c' a semi-distância focal da elipse E' , então $c' = \sqrt{a'^2 - b'^2} = \sqrt{r^2 a^2 - r^2 b^2} = r\sqrt{a^2 - b^2} = rc$. Logo a excentricidade de E' é:

$$e' = \frac{c'}{a'} = \frac{rc}{ra} = \frac{c}{a}.$$

Portanto $e = e'$.

Reciprocamente suponha que $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $E' : \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ tenham a mesma excentricidade, ou seja

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = e'. \tag{5.1}$$

Devemos provar que essas elipses são semelhantes. Como

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.2)$$

Da equação 5.1, temos:

$$e = \frac{c}{a} \quad (5.3)$$

$$c = ea \quad (5.4)$$

Na elipse E temos que:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (5.5)$$

$$e^2 a^2 = a^2 - b^2 \quad (5.6)$$

$$b^2 = a^2 - e^2 a^2 \quad (5.7)$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (5.8)$$

Substituindo a equação 5.8 na equação 5.2, tem-se:

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1 \quad (5.9)$$

Analogamente

$$E' : \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a'^2} = 1 \quad (5.10)$$

Considere a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{ax}{a'}, \frac{ay}{a'} \right), (x, y) \in E.$$

Note que dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, com $A, B \in E$, tem-se:

$$\begin{aligned} d(T(A), T(B)) &= \sqrt{\left(\frac{ax_2}{a'} - \frac{ax_1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{ay_2}{a'} - \frac{ay_1}{a'}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(x_2 - x_1)^2}{a'^2} + \frac{a^2(y_2 - y_1)^2}{a'^2}} \\ &= \frac{a}{a'} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \frac{a}{a'} \cdot d(A, B) \end{aligned}$$

Logo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = \left(\frac{ax}{a'}, \frac{ay}{a'} \right)$ é uma função de semelhança entre as elipses E e E' de razão $r = \frac{a}{a'}$.

Considere $(x, y) \in E$ e aplicando a transformação T na equação 5.9, temos:

$$\frac{\frac{a^2 x^2}{a'^2}}{a^2} + \frac{\frac{a^2 y^2}{a'^2}}{(1-e^2)a^2} = 1 \quad (5.11)$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{(1-e')^2 a'^2} = 1 \quad (5.12)$$

Logo os pontos da forma $(\frac{a}{a'}x, \frac{a}{a'}y) \in E'$, com $(x, y) \in E$, pela equação 5.10. Portanto duas elipses são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma excentricidade e a função de semelhança é $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{ax}{a'}, \frac{ay}{a'}\right) \in E.$$

Teorema 5.1.16. *Quaisquer dois quadrados são semelhantes.*

Demonstração.

Sejam dois quadrados Q e Q' no plano de coordenadas cartesianas, de lados L_i e L'_i com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq 4$, através de movimentos rígidos como rotação e translação podemos dispor os seus centros na origem do sistema cartesiano (ver Figura 44).

Sejam $Q = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, com:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = l, -l \leq y \leq l\} \\ L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -l \leq x \leq l, y = -l\} \\ L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -l, -l \leq y \leq l\} \\ L_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -l \leq x \leq l, y = l\} \end{aligned}$$

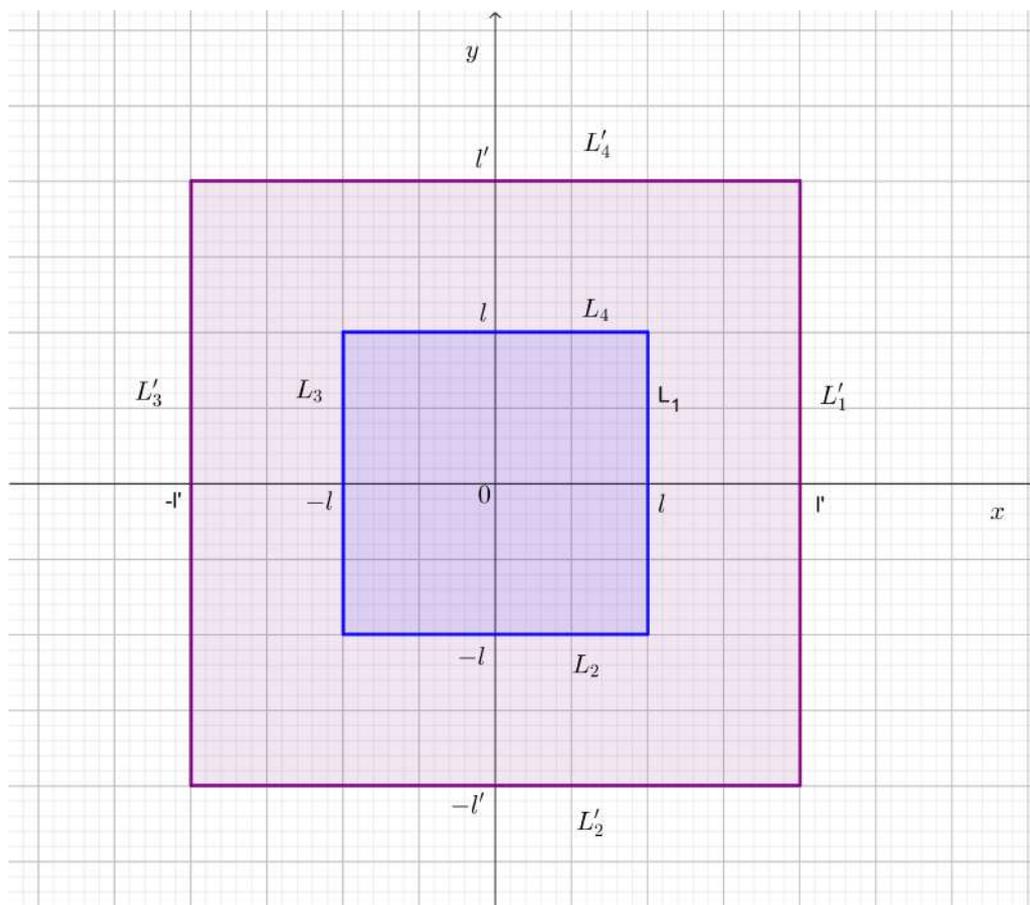
e $Q' = L'_1 \cup L'_2 \cup L'_3 \cup L'_4$, com:

$$\begin{aligned} L'_1 &= \{(x', y') \in \mathbb{R}^2; x' = l', -l' \leq y' \leq l'\} \\ L'_2 &= \{(x', y') \in \mathbb{R}^2; -l' \leq x' \leq l', y' = -l'\} \\ L'_3 &= \{(x', y') \in \mathbb{R}^2; x' = -l', -l' \leq y' \leq l'\} \\ L'_4 &= \{(x', y') \in \mathbb{R}^2; -l' \leq x' \leq l', y' = l'\} \end{aligned}$$

Considere a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l}\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Figura 44 – Quadrados semelhantes Q e Q'



Fonte: A autora.

Dados $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, pontos do \mathbb{R}^2 , temos:

$$\begin{aligned} d(T(A), T(B)) &= \sqrt{\left(\frac{l'c}{1} - \frac{l'a}{l}\right)^2 + \left(\frac{l'd}{1} - \frac{l'b}{l}\right)^2} \\ &= \frac{l'}{l} \cdot \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} \\ &= \frac{l'}{l} \cdot d(A, B) \end{aligned}$$

Logo, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l}\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

é uma função de semelhança.

Note que os pontos da forma $(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l}) \in Q'$, com $(x, y) \in Q$. Pois, pela transformação T temos:

$$\begin{aligned}
 T(L_1) = L'_1 &= \left\{ \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l} \right) \in Q'; \frac{l'x}{l} = l', -l \leq \frac{l'y}{l} \leq l' \right\} \\
 T(L_2) = L'_2 &= \left\{ \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l} \right) \in Q'; -l \leq \frac{l'x}{l} \leq l, \frac{l'y}{l} = -l' \right\} \\
 T(L_3) = L'_3 &= \left\{ \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l} \right) \in Q'; \frac{l'x}{l} = -l', -l' \leq \frac{l'y}{l} \leq l' \right\} \\
 T(L_4) = L'_4 &= \left\{ \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l} \right) \in Q'; -l \leq \frac{l'x}{l} \leq l, \frac{l'y}{l} = l' \right\}
 \end{aligned}$$

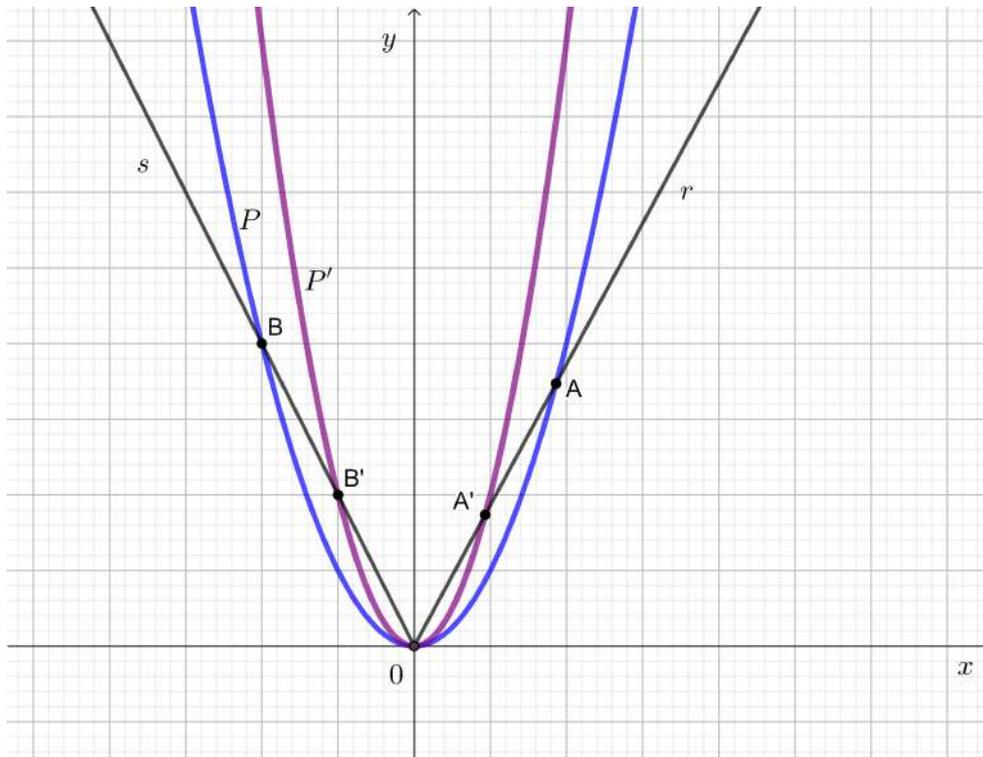
Portanto, quaisquer dois quadrados são semelhantes e a função de semelhança é $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $(x, y) \mapsto T(x, y) = \left(\frac{l'x}{l}, \frac{l'y}{l} \right) = (x', y'), (x, y) \in Q$. ■

Teorema 5.1.17. *Quaisquer duas parábolas são semelhantes.*

Demonstração.

Através de movimentos rígidos de translação e rotação, podemos dispor duas parábolas P e P' de forma que seus eixos de simetria sejam o eixo das ordenadas, que suas concavidades sejam voltadas para cima e seus pontos de mínimos sejam a origem. Assim as equações das parábolas possuem a forma: $P = \{ax^2; x \in \mathbb{R}\}$ e $P' = \{a'x^2; x \in \mathbb{R}\}$ onde $0 < a \leq a'$ (ver Figura 45).

Figura 45 – Parábolas semelhantes P e P'



Fonte: Morais Filho, 2015.

Considere os pontos $A = (x_a, ax_a^2)$ e $B = (x_b, ax_b^2)$, com $x_a > 0$ e $x_b < 0$, pertencentes à parábola P . Seja a reta r que passa pela origem e pelo ponto A . Como r passa pela origem, sua equação possui a forma $y = mx$, onde:

$$m = \frac{ax_a^2 - 0}{x_a - 0} = \frac{ax_a^2}{x_a} = ax_a.$$

A reta r intersecta a parábola P' no ponto que nomearemos de A' , calculando as coordenadas desse ponto temos:

$$r : y = (ax_a)x \text{ e } P' = a'x^2 \Rightarrow (ax_a)x = a'x^2 \Rightarrow ax_a = a'x \Rightarrow x = \frac{ax_a}{a'}.$$

Logo, $A' = \left(\frac{ax_a}{a'}, \frac{a^2x_a^2}{a'}\right)$. De maneira análoga, obtemos $B' = \left(\frac{ax_b}{a'}, \frac{a^2x_b^2}{a'}\right)$. Como

$$\begin{aligned} d(A', B') &= \sqrt{\left(\frac{ax_b}{a'} - \frac{ax_a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{ax_b}{a'} - \frac{ax_a}{a'}\right)^2} \\ &= \frac{a}{a'} \cdot \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (x_b - x_a)^2} \\ &= \frac{a}{a'} \cdot d(A, B). \end{aligned}$$

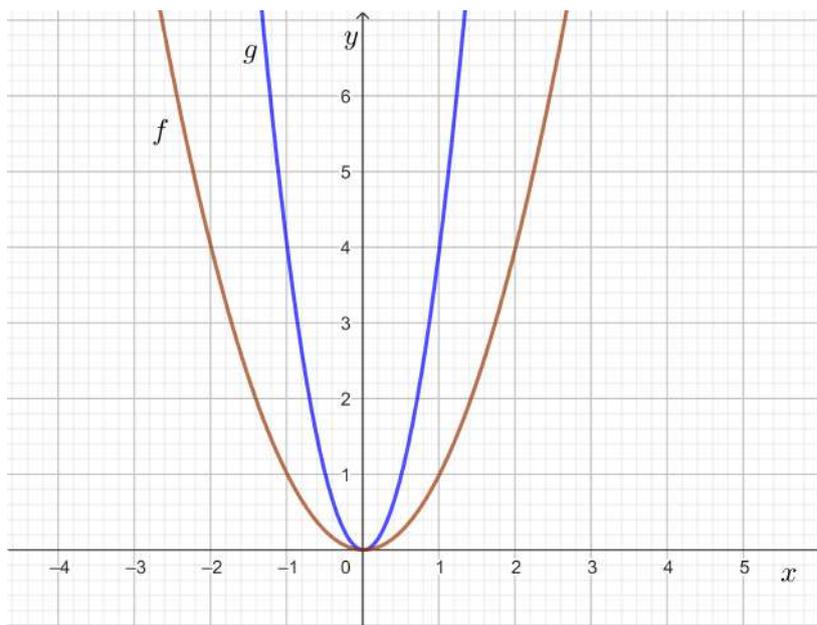
Portanto a função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = \left(\frac{a}{a'}x, \frac{a}{a'}y\right) = (x', y')$ é uma função de semelhança entre as parábolas P e P' e a razão de semelhança é $\frac{a}{a'}$. Isso mostra que quaisquer duas parábolas são semelhantes, ou seja, possui o mesmo formato. ■

Apesar das parábolas terem o mesmo formato, temos a impressão que existem parábolas com diferentes aberturas. Isso acontece porque as parábolas são curvas ilimitadas e não podemos enxergá-las em sua totalidade. Pois, não podemos desenhá-las totalmente. Assim o que vemos do seu gráfico é uma parte dele.

Observe, na Figura 46, o gráfico da parábola $f(x) = x^2$ no quadrado $[-2, 2] \times [-2, 2]$ e o gráfico da parábola $g(x) = 4x^2$ no mesmo quadrado. Note que quanto “menor” for o valor de a “maior” será a parte visível e quanto “maior” for o valor de a “menor” será a parte visível do gráfico no quadrado considerado. É isso que nos faz ver gráficos de parábolas com diferentes aberturas. O valor de a funciona como uma escala no desenho, vide (MORAIS FILHO, 2015, p.4). No caso das circunferências isso não acontece, pois podemos desenhá-las por completo no plano, não deixando dúvidas que toda circunferência possuem a mesma forma, vide Teorema 5.1.14.

5.2 Semelhança de triângulos

A seguir, apresentamos um importante teorema que caracteriza a semelhança de triângulos que é um dos principais assuntos estudados na Geometria Plana no Ensino Básico.

Figura 46 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x^2$ 

Fonte: A Autora

A semelhança de triângulos é muito utilizada para resolver problemas que se referem ao cálculo de longas distâncias principalmente as que possuem obstáculos, como por exemplos, montanhas, rios e outras que não é possível uma medição direta.

Teorema 5.2.1. *Dois triângulos são semelhantes¹ se, e somente se, têm ângulos correspondentes congruentes.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Sejam T e T' dois triângulos semelhantes e A', B' e C' vértices de T' , de semelhança $S : T \rightarrow T'$, onde $S(A) = A'$, $S(B) = B'$ e $S(C) = C'$ e A, B e C são os vértices de T , então, pela Proposição 5.1.13, têm-se $\hat{A}BC \cong \hat{A}'B'C'$, $\hat{B}CA \cong \hat{B}'C'A'$ e $\hat{C}AB \cong \hat{C}'A'B'$.

(\Leftarrow) Sejam $\hat{A}BC \cong \hat{A}'B'C'$, $\hat{B}CA \cong \hat{B}'C'A'$ e $\hat{C}AB \cong \hat{C}'A'B'$. Devemos exibir uma semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $S(A) = A'$, $S(B) = B'$ e $S(C) = C'$. Para isso, vamos introduzir dois sistemas de eixos ortogonais ABY e $A'B'Y'$. O primeiro de origem A , eixo horizontal AB e eixo vertical orientado de forma que C tenha ordenada positiva. O segundo de origem A' , eixo horizontal $A'B'$ e eixo vertical orientado de modo que C' tenha ordenada positiva.

¹ Dois triângulos são **semelhantes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro triângulo, de modo que ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (MUNIZ NETO, 2013, p.129).

Considere $r = \frac{d(A',B')}{d(A,B)}$. Seja $B = (b, 0)$ no sistema ABY então $B' = (rb, 0)$ no sistema $A'B'Y'$ Então:

$$\begin{aligned} S(A) &= S(0, 0) \\ &= (r \cdot 0, r \cdot 0) \\ &= (0, 0) \\ &= A' \end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} S(B) &= S(b, 0) \\ &= (r \cdot b, r \cdot 0) \\ &= (r \cdot b, 0) \\ &= B' \end{aligned}$$

Daí, S é uma semelhança com $S(A) = A'$ e $S(B) = B'$, devemos mostrar que $S(C) = C'$. Considerando que S preserva ângulos, que $C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B'$ e $A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C'$ e $C_1 = S(C)$, como a reta $\overleftrightarrow{A'C_1}$ faz com a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ um ângulo igual a $B\hat{A}C$ (ver Figura 47). Então, C' coincide com C_1 ou com o seu simétrico em relação a $\overleftrightarrow{A'B'}$, como as coordenadas de C e C' são positivas e o simétrico de C' , neste caso, tem ordenada negativa, daí concluímos que $C' = C_1 = S(C)$. Portanto T e T' são semelhantes com função de semelhança $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $S(A) = A'$, $S(B) = B'$ e $S(C) = C'$. ■

5.3 A razão entre áreas semelhantes de figuras conhecidas

Nesta seção apresentamos a razão entre áreas de algumas figuras semelhantes.

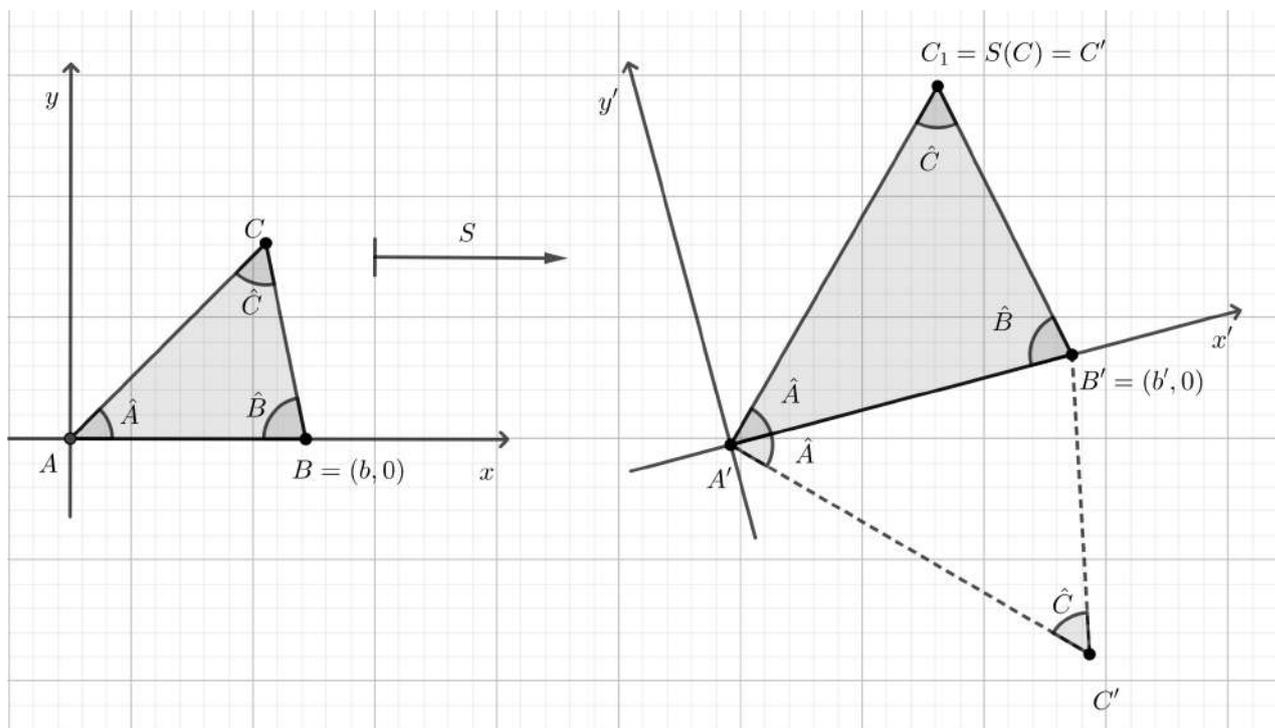
Para simplificar a notação, designamos a mesma letra para indicar a figura e também sua área.

Proposição 5.3.1. *Se dois círculos, de áreas C e C' , são semelhantes então $\frac{C'}{C} = r^2$, onde $r, r > 0$, é a razão de semelhança entre eles.*

Demonstração.

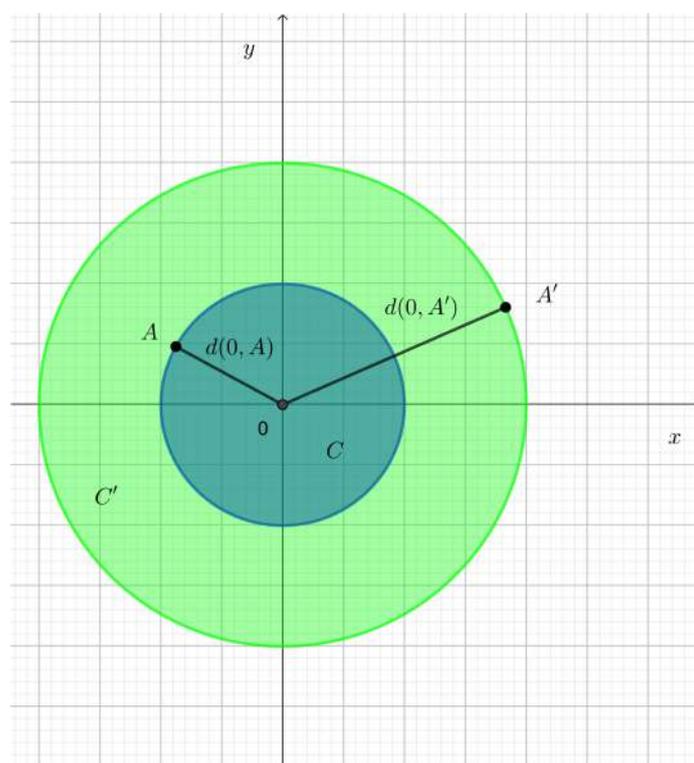
De fato, através de movimentos rígidos, mais especificamente de translação, podemos dispor os círculos C e C' no centro dos eixos do sistema cartesiano. Considere $A \in C$ e $A' \in C'$ (ver Figura 48), tem-se:

Figura 47 – Semelhança de triângulos



Fonte: Autora.

Figura 48 – Círculos C e C'



Fonte: A Autora

$$\begin{aligned} \frac{C'}{C} &= \frac{\pi \cdot d(0, A')^2}{\pi \cdot d(0, A)^2} \\ &= \frac{\pi \cdot (rd(0, A))^2}{\pi \cdot d(0, A)^2} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

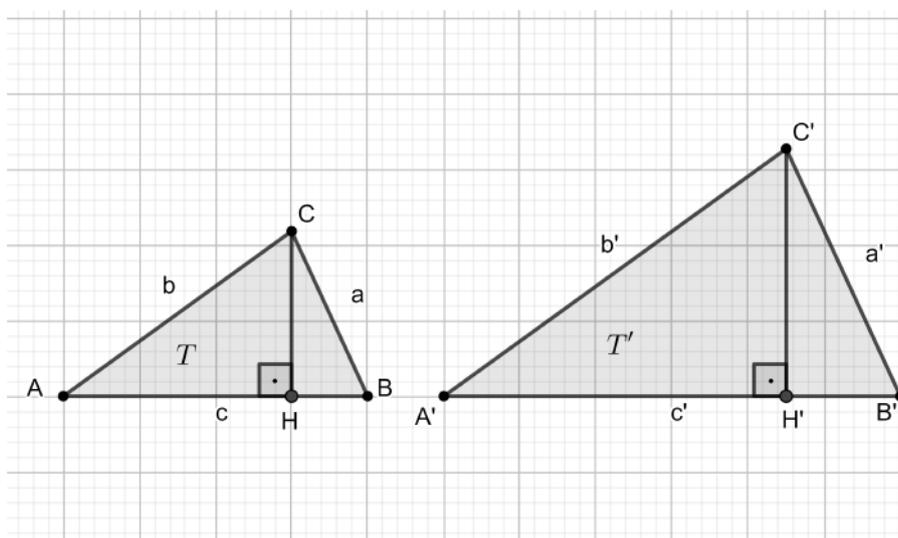
■

Proposição 5.3.2. *Se dois triângulos, de áreas T e T' , são semelhantes então $\frac{T'}{T} = r^2$, onde $r, r > 0$, é a razão de semelhança entre eles.*

Demonstração.

Seja $S : ABC \rightarrow A'B'C'$ uma semelhança de razão $r > 0$, entre o triângulo de área T e vértices A, B e C , e o triângulo de área T' , de vértices A', B' e C' , respectivamente (Ver Figura 49). Considere $d(A, B)$ base do triângulo T e $d(C, H)$ a sua altura relativa a base $d(A, B)$, $d(A', B')$ base do triângulo T' e $d(C', H')$ a sua altura relativa a base $d(A', B')$. Pela semelhança dos triângulos T e T' , temos: $d(A', B') = r \cdot d(A, B)$ e $d(C', H') = r \cdot d(C, H)$.

Figura 49 – Triângulos semelhantes.



Fonte: A Autora.

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot d(A', B') \cdot d(C', H')}{\frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, H)} \\ &= \frac{r \cdot d(A, B) \cdot r \cdot d(C, H)}{d(A, B) \cdot d(C, H)} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

■

5.4 A razão entre áreas de polígonos semelhantes

Nesta seção definiremos área de polígonos e abordaremos a relação existente entre áreas de polígonos semelhantes. Para isso, usamos como referência (LIMA, 2011).

Os polígonos e sua semelhança são bastantes utilizados no ensino fundamental e médio, daí é necessário abordarmos esse assunto, de maneira mais formal possível, antes de trabalharmos com áreas de figuras semelhantes quaisquer.

5.4.1 Área de Polígono

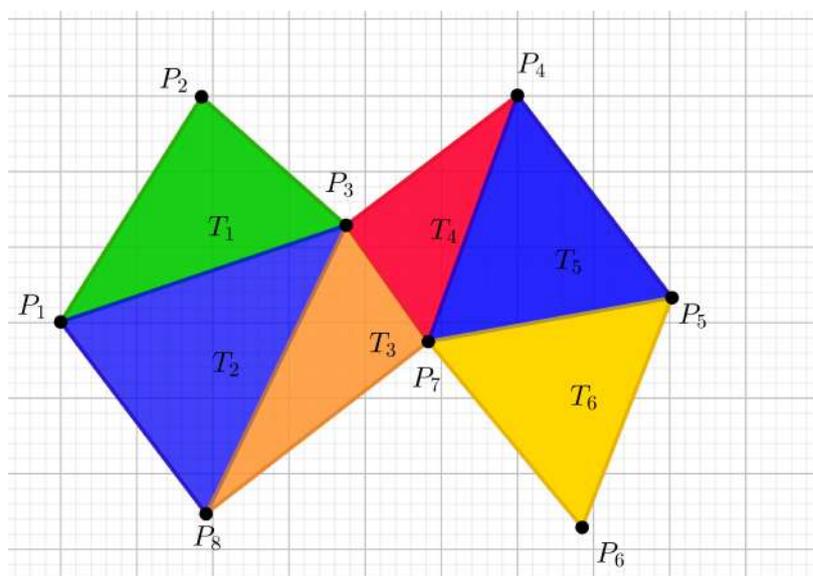
Definição 5.4.1. *A área de um polígono P é um número real não-negativo que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Polígonos congruentes possuem áreas iguais.*
2. *Um quadrado de lado 1 possui área igual a 1.*
3. *Se um polígono P pode ser decomposto em n polígonos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, tais que quaisquer dois deles possuem no máximo alguns lados em comum, então a área de P é soma das áreas dos P_i (LIMA, 2011, p.27).*

Exemplo 5.4.1. *A área do polígono P (ver Figura 50) é:*

$$P = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6.$$

Figura 50 – Polígono: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$.



Fonte: A Autora.

A seguir, apresentaremos uma proposição que se refere a relação existente entre áreas de polígonos semelhantes. Essa relação é muito importante na resolução de problemas envolvendo áreas de polígonos semelhantes.

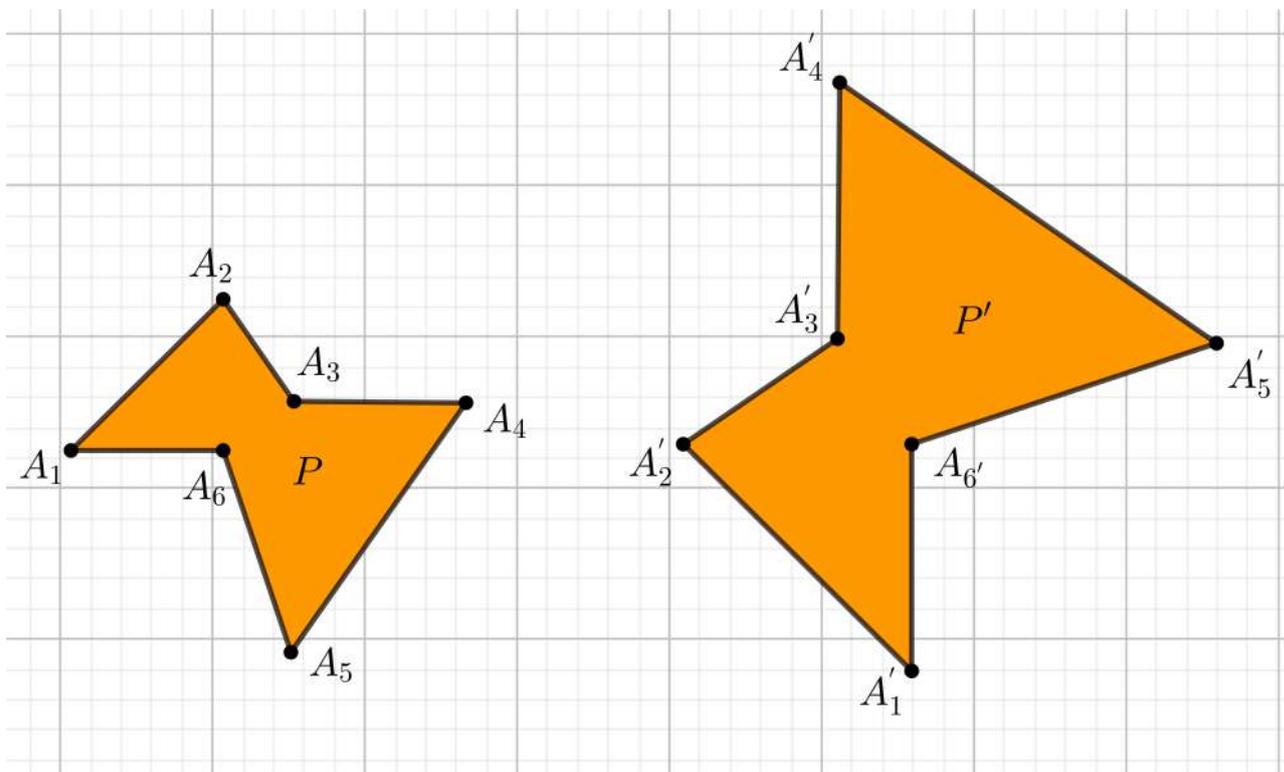
Proposição 5.4.2. *Se dois polígonos, de áreas P e P' , são semelhantes, então $\frac{P'}{P} = r^2$, onde $r > 0$ é a razão de semelhança entre eles.*

Demonstração.

Seja $S : P_1 \rightarrow P'_1$ uma função de semelhança entre os polígonos de áreas P e P' , respectivamente.

Considere, sem perda de generalidade, $r > 1$. Sejam os polígonos da Figura 51, um caso particular, mas o mesmo raciocínio caracteriza o caso geral. Através de movimentos

Figura 51 – Polígonos Semelhantes.



Fonte: A Autora.

de translação e rotação podemos dispô-los, conforme Figura 52. Aplicando o processo de triangularização de polígonos, pelo Teorema 3.2.8, podemos dividir a área de cada um desses polígonos semelhantes em $(6 - 2)$ triângulos (ver Figura 53). Assim as áreas dos polígonos P e P' são obtidas, respectivamente, por:

$$P = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$$

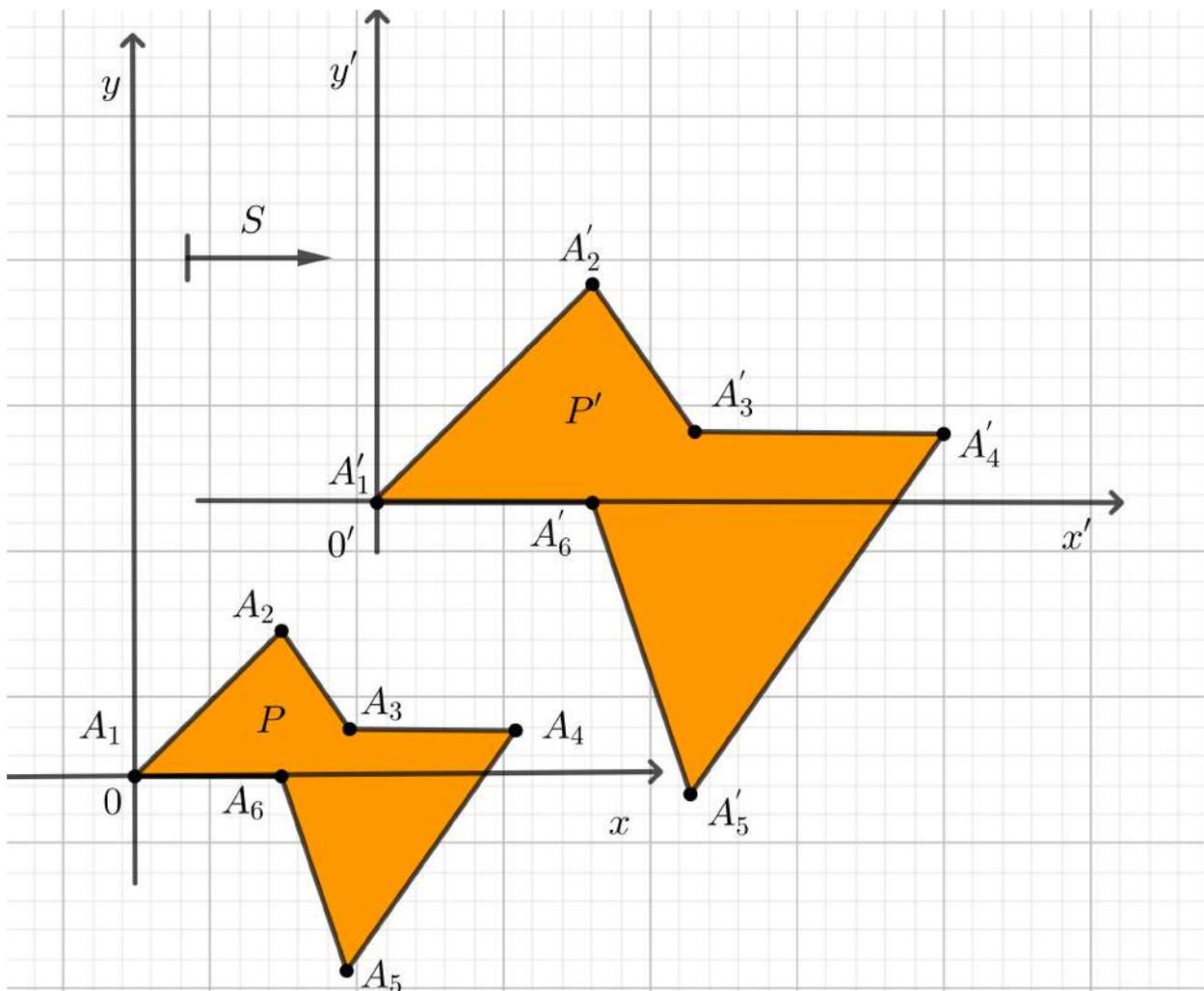
e

$$P' = T'_1 \cup T'_2 \cup T'_3 \cup T'_4.$$

Ou seja:

$$P = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Figura 52 – Polígonos com um dos vértices na origem do plano cartesiano.



Fonte: A Autora.

e

$$P' = T'_1 + T'_2 + T'_3 + T'_4.$$

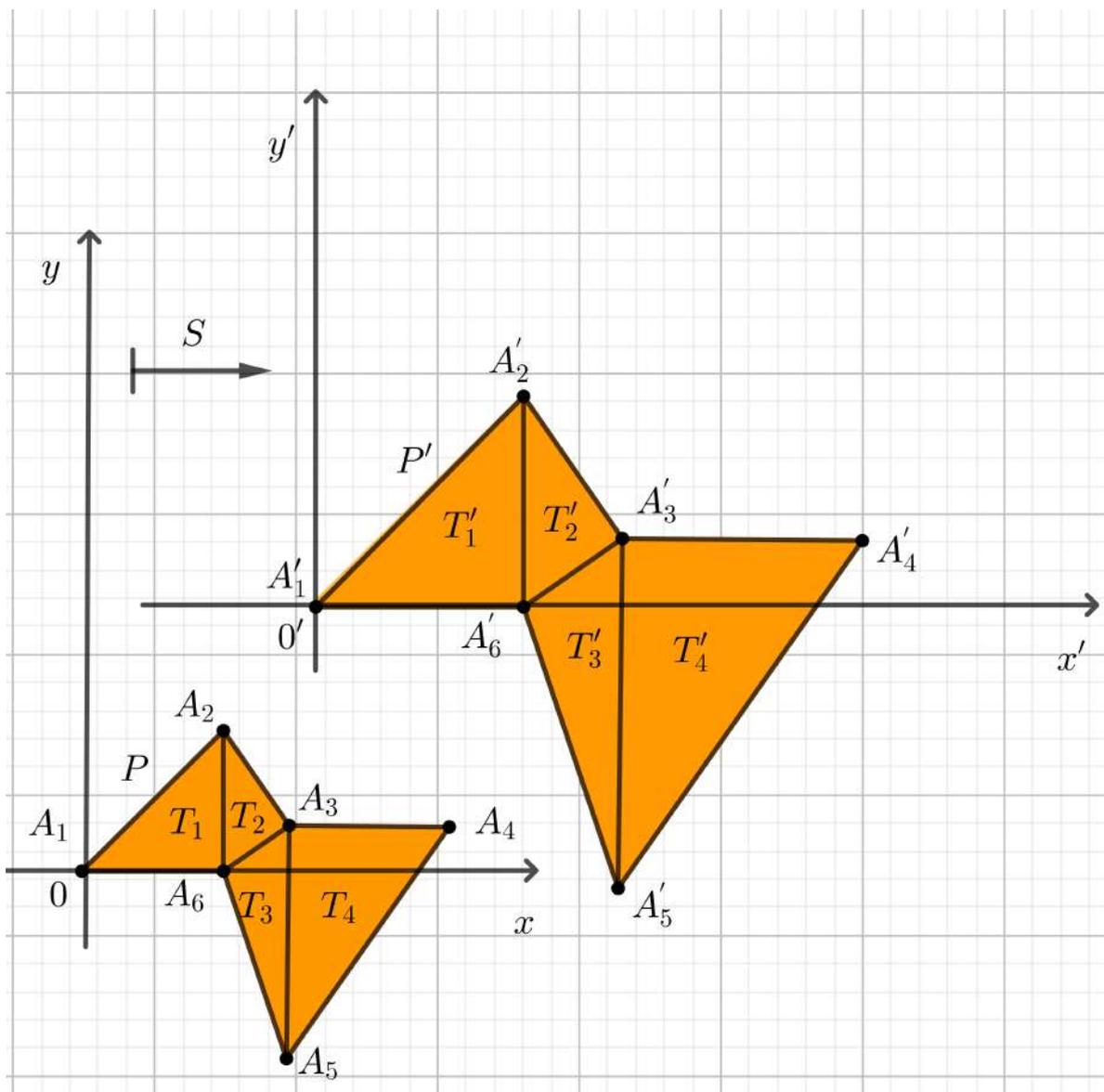
Como a semelhança $S : P_1 \rightarrow P'_1$ preserva ângulos, pela Proposição 5.1.13, temos:

1. $T_1 \sim T'_1$
2. $T_2 \sim T'_2$
3. $T_3 \sim T'_3$
4. $T_4 \sim T'_4$

Daí, pela Proposição 5.3.2 tem-se: $\frac{T'_1}{T_1} = \frac{T'_2}{T_2} = \frac{T'_3}{T_3} = \frac{T'_4}{T_4} = r^2$. Logo:

1. $T'_1 = r^2 T_1$
2. $T'_2 = r^2 T_2$

Figura 53 – Triangularização dos Polígonos P e P' .



Fonte: A Autora.

3. $T'_3 = r^2 T_3$

4. $T'_4 = r^2 T_4$

Assim, a área do polígono P' é :

$$P' = r^2 T_1 + r^2 T_2 + r^2 T_3 + r^2 T_4 = r^2 (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = r^2 P$$

Portanto,

$$\frac{P'}{P} = r^2$$



6 Área de Figuras

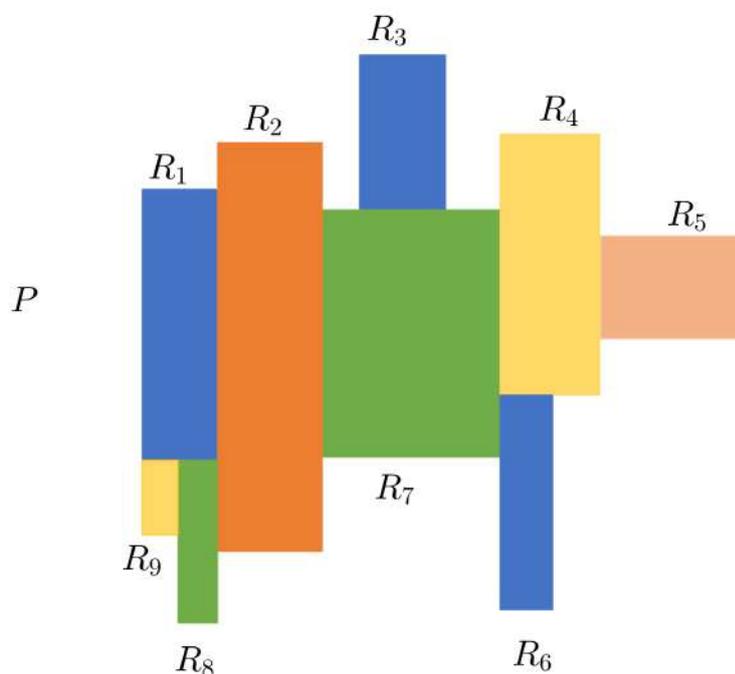
Neste capítulo definiremos a área de uma figura e apresentaremos a relação existente entre áreas de figuras semelhantes quaisquer. Mas, antes de darmos continuidade a esse tema, faz-se necessário uma pequena pausa para definirmos polígono retangular. Pois usaremos os polígonos retangulares para obtermos a área de uma figura qualquer.

6.1 Polígono Retangular

Definição 6.1.1. Denominamos de **polígono retangular** o polígono formado pela união de vários retângulos justapostos, isto é, dois desses retângulos possuem no máximo um lado em comum (LIMA, 2011, p.28).

Exemplo 6.1.1. Na Figura 54, o polígono retangular P é formado pela união dos retângulos $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$ e R_9 .

Figura 54 – Polígono retangular.

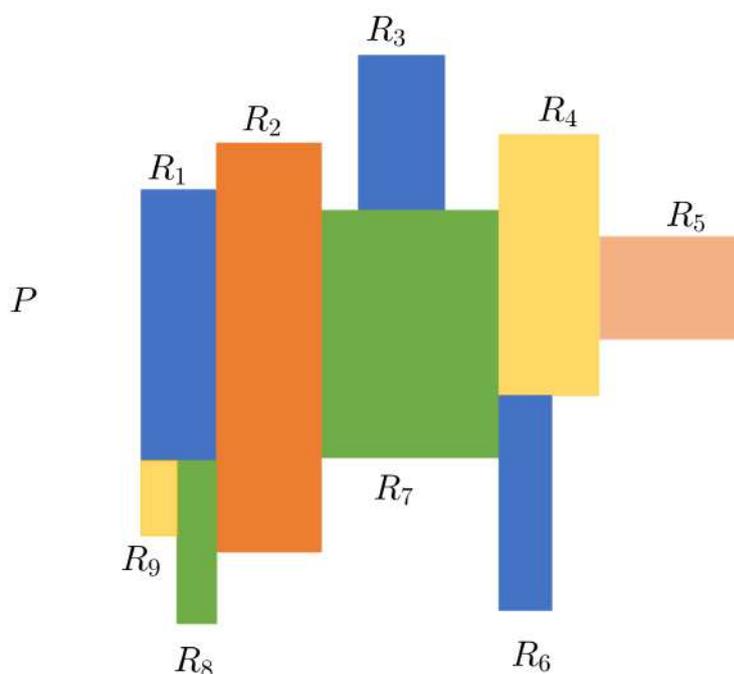


Fonte: A Autora.

Exemplo 6.1.2. A área do polígono retangular P (ver Figura 55) é:

$$P = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 + R_9.$$

Figura 55 – Área do polígono retangular P .



Fonte: A Autora.

6.2 Área de uma figura qualquer

Nesta seção definiremos áreas de figuras, diâmetro, apresentaremos e demonstraremos o teorema que relaciona a área de figuras semelhantes quaisquer.

Definição 6.2.1. A **área de uma figura** F é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F (LIMA, 2011, 28).

A área de uma figura F também pode ser obtida por valores aproximados, por excesso, usando a área do polígono que contém F .

Por simplicidade, consideraremos o valor aproximado da área de figuras por falta, conforme Definição 6.2.1.

A seguir, apresentamos a definição de diâmetro que será utilizada posteriormente.

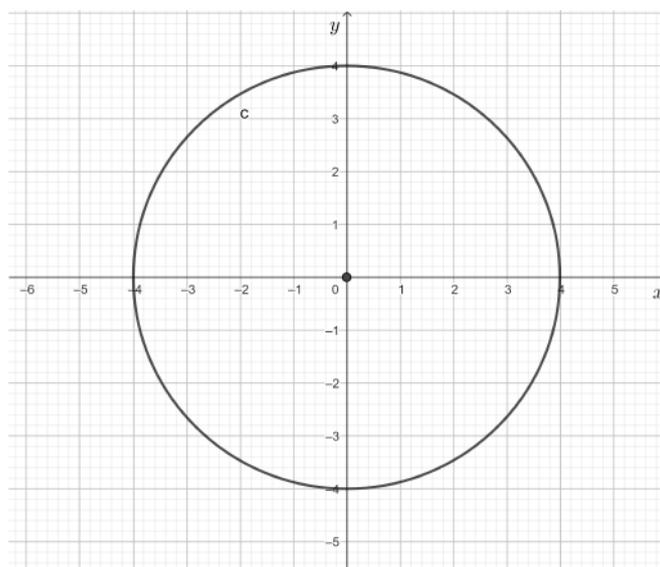
Definição 6.2.2. Sejam x, y pertencentes a um conjunto A , então o **diâmetro** de A é o máximo das distâncias $d(x, y)$, ou seja, $\text{diâm}(A) = \max d(x, y), x, y \in A$.

Exemplo 6.2.1. O diâmetro do conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 16\}$, representado na Figura 56, é

$$\text{diâm}(C) = \max d(x, y), x, y \in C$$

$$\text{diâm}(C) = 8.$$

Figura 56 – Diâmetro de Círculo.



Fonte: A Autora.

A seguir, apresentaremos a demonstração de um importante teorema de geometria que relaciona áreas de duas figuras semelhantes. Tentamos ser mais rigorosos e formais possíveis nessa demonstração. Pois achamos faltar essas características nas demonstrações avaliadas.

Teorema 6.2.2. Se duas figuras, de áreas A e B , são semelhantes com razão de semelhança $r > 0$, então $\frac{B}{A} = r^2$.

Demonstração.

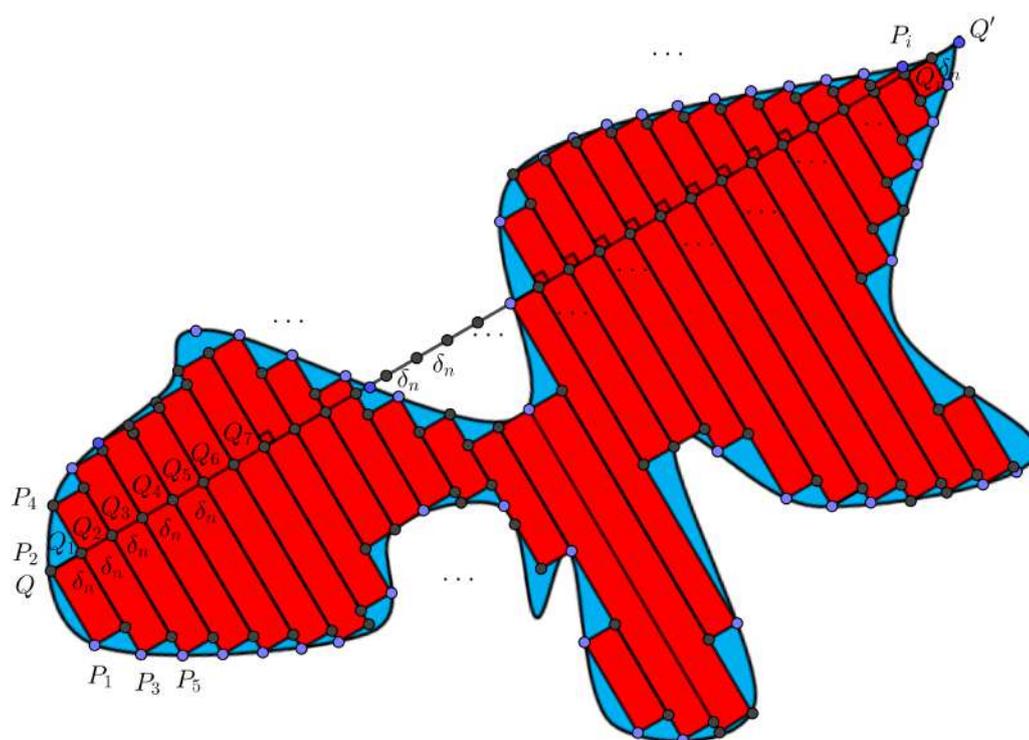
Seja a função de semelhança $S : A \rightarrow B$, se $Q, Q' \in A$, então $d(f(Q), f(Q')) = rd(Q, Q')$. Considere as Figuras 57 e 58, onde $r > 1$ para acompanharmos as ideias da demonstração. Denotaremos a figura e sua área pela mesma letra a fim de simplificarmos a notação.

Na figura A (Ver Figura 57):

- i. Considere Q e Q' tal que $d(Q, Q') = \text{diâm}(A)$;
- ii. Logo $\text{diâm}(B) = d(f(Q), f(Q'))$;

- iii. Divida $d(Q, Q')$ em n partes iguais de comprimento δ_n . Logo $d(f(Q), f(Q'))$ será dividida em n partes iguais de comprimento $r \cdot \delta_n$;
- iv. Trace perpendiculares por cada Q_i . Pelo Corolário 5.1.8, temos perpendiculares em B passando por cada $f(Q_i)$;
- v. Considere todos os pontos P_i da intersecção das perpendiculares ao segmento QQ' que passam por Q_i com o bordo da figura A ;
- vi. Considere todas as retas paralelas ao segmento QQ' que passam por cada P_i ;
- vii. Considere todos os retângulos R_i de largura δ_n e altura dadas por pontos P_n que estejam contidos em A ; (ver Figura 57).

Figura 57 – Figura A.

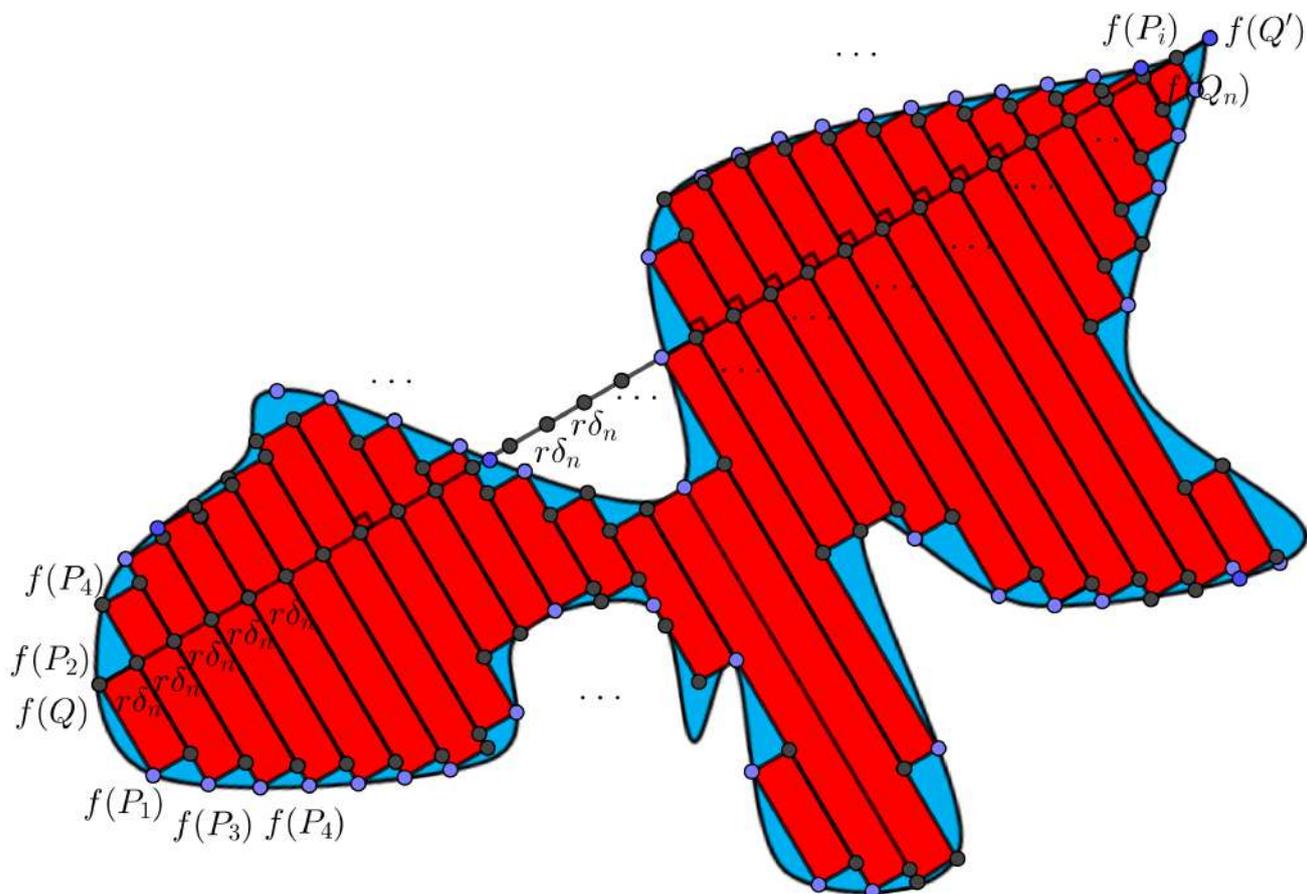


Fonte: A Autora.

Na figura B (ver Figura 58):

- i. Considere todos os pontos $f(P_i)$ da intersecção das perpendiculares ao segmento $f(Q)f(Q')$ que passam por $f(Q_i)$ com o bordo da figura B ;
- ii. Considere as retas paralelas ao segmento $f(Q)f(Q')$ que passam por cada $f(P_i)$;

Figura 58 – Figura B .



Fonte: A Autora.

- iii. Considere todos os retângulos R_i de largura $r \cdot \delta_n$ e altura formada por pontos $f(P_i)$ que estejam contidos em B .
- iv. Considere um desses retângulos em A , por exemplo, o retângulo de base δ_n e altura $\overline{P_3P_4}$. Sua área é dada por,

$$R = \overline{P_3P_4} \cdot \delta_n$$

Daí, temos o retângulo de área R' correspondente em B , tal que :

$$R' = \overline{f(P_3)f(P_4)} \cdot r\delta_n = r \cdot \overline{P_3P_4} \cdot r\delta_n = r^2 \cdot \overline{P_3P_4} \cdot \delta_n = r^2 R.$$

Logo,

$$\frac{R'}{R} = r^2.$$

Isso vale para todos os retângulos contidos em A .

Pela Definição 6.2.1, temos:

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{R'_j \subset B} R'_j.$$

Note, pela Proposição 5.4.2, que para uma quantidade finita de retângulos temos:

$$\sum_{R'_j \subset B} R'_j = \sum_{R_j \subset A} r^2 R_j.$$

Daí:

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{R'_j \subset B} R'_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{R_j \subset A} r^2 R_j = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{R_j \subset A} R_j = r^2 A.$$

Portanto,

$$\frac{B}{A} = r^2.$$

■

Vamos utilizar esse teorema, no próximo Capítulo, para demonstrar o Teorema de Pólya.

7 Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras

Neste capítulo demonstraremos o Teorema de Pitágoras e abordaremos o Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras. Para isso, mostraremos o Teorema de Pólya para figuras conhecidas e em seguida para uma figura qualquer.

Usamos como referências (WAGNER, 2010), (LIMA, 2011), (HELLMEISTER, 2013) e (OBMEP, 2020).

7.1 Pitágoras de Samos

Pitágoras (569 a.C - 480 a.C) foi filósofo e matemático grego, nasceu na ilha de Samos. Fundou em Crotona, mais precisamente no sudoeste da Itália nos dias atuais, uma escola secreta, dedicada principalmente ao estudo da Matemática e Filosofia. Tudo que sabemos de Pitágoras é proveniente de outros autores que viveram séculos depois, pois todos os documentos daquela época não foram conservados e se perderam. E além disso, a escola de Pitágoras era comunitária, ou seja todas as descobertas era comuns e pertenciam a todos. Por isso, não sabemos se foi o próprio Pitágoras que fez a demonstração do teorema que leva seu nome ou se foi um dos seus seguidores.

Há registros na História que os babilônios conheciam a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Pois foram encontrados tabletes de barros datados do período de 1800 a 1600 a.C que faz referência aos ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulos.

Um desses tabletes, chamado de Plimpton 322 se encontra na Universidade de Columbia. Na parte que ficou preservada os pesquisadores encontraram referências aos ternos pitagóricos. Não se sabe como esses números surgiram, mas no pedaço do tablete aparecem números pitagóricos da seguinte forma:

4 é o comprimento

5 é a diagonal

Qual é a altura ?

4 vezes 4 dá 16

5 vezes 5 dá 25

tirando 16 de 25 o resto é 9

3 vezes 3 dá 9

3 é a altura.

(WAGNER, 2010, p.3)

Não restam dúvidas que os babilônios conheciam a relação existente entre os lados de um triângulo retângulo, mas não há vestígio de demonstração. Naquela época os babilônios usavam receitas prontas que davam certo na resolução de seus problemas e naturalmente não tinha interesse de demonstrar. A demonstração do Teorema de Pitágoras veio por Pitágoras e seus seguidores.

Historiadores acreditam que a demonstração apresentada por Pitágoras tenha sido uma demonstração geométrica.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes teoremas usados na Matemática, principalmente na resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos.

Em 1940, o matemático norte-americano E. S. Loomis publicou em (LOOMIS, 1940) 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras.

A seguir, enunciamos o Teorema de Pitágoras e apresentamos uma de suas demonstrações geométricas.

Teorema 7.1.1 (Teorema de Pitágoras). *Sejam A , B e C as áreas dos quadrados cujos lados são a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, respectivamente, então $A = B + C$ (ver Figura 59).*

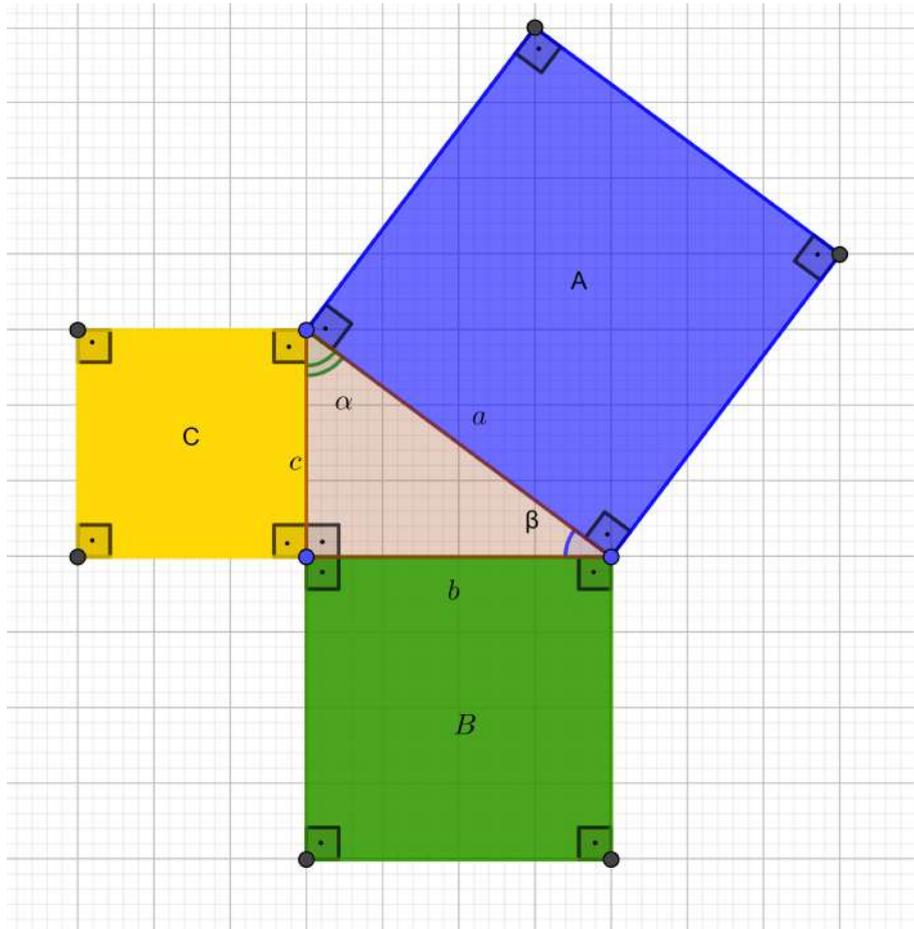
Demonstração.

Hipótese: ABC é retângulo em \hat{A} .

Tese: $A = B + C$

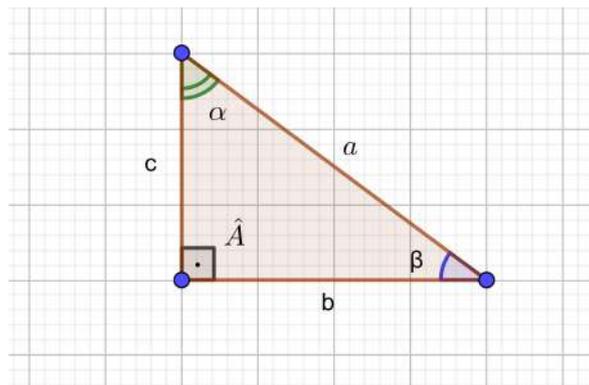
1. Seja ABC um triângulo retângulo em A (ver Figura 60).
2. Construa quatro triângulos retângulos iguais, com medida da hipotenusa iguala a a e catetos medindo b e c , e disponham de duas formas (Ver Figura 61).
3. Como o triângulo ABC é retângulo em \hat{A} , por hipótese, então $\alpha + \beta = 90^\circ$ (α e β são os ângulos agudos do triângulo retângulo). Logo podemos formar quadrados de lados $b + c$ (Ver Figura 62).
4. Note que os quadrados obtidos possuem lados iguais de medidas $(b + c)$. Logo, as áreas dos dois quadrados são iguais. Assim:

Figura 59 – Teorema de Pitágoras.



Fonte : A Autora.

Figura 60 – Triângulo Retângulo.



Fonte : A Autora.

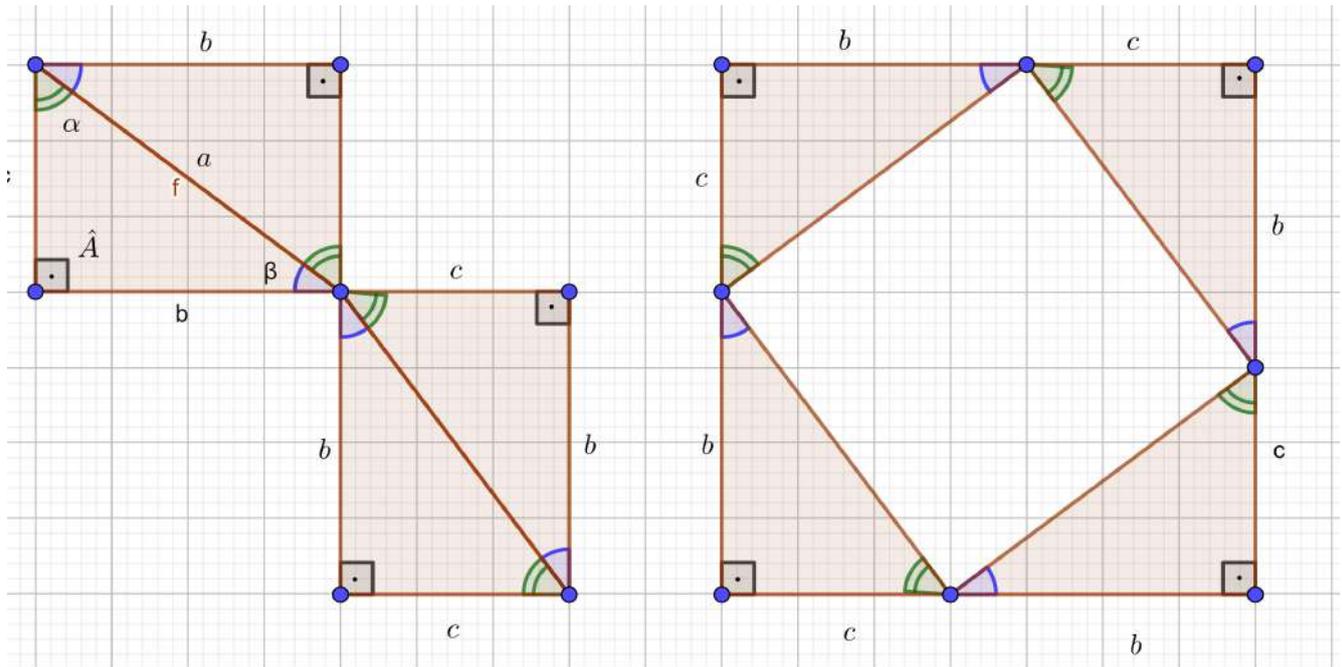
$$\text{Quadrado}_1 = \text{Quadrado}_2$$

$$4 \cdot \frac{bc}{2} + c^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

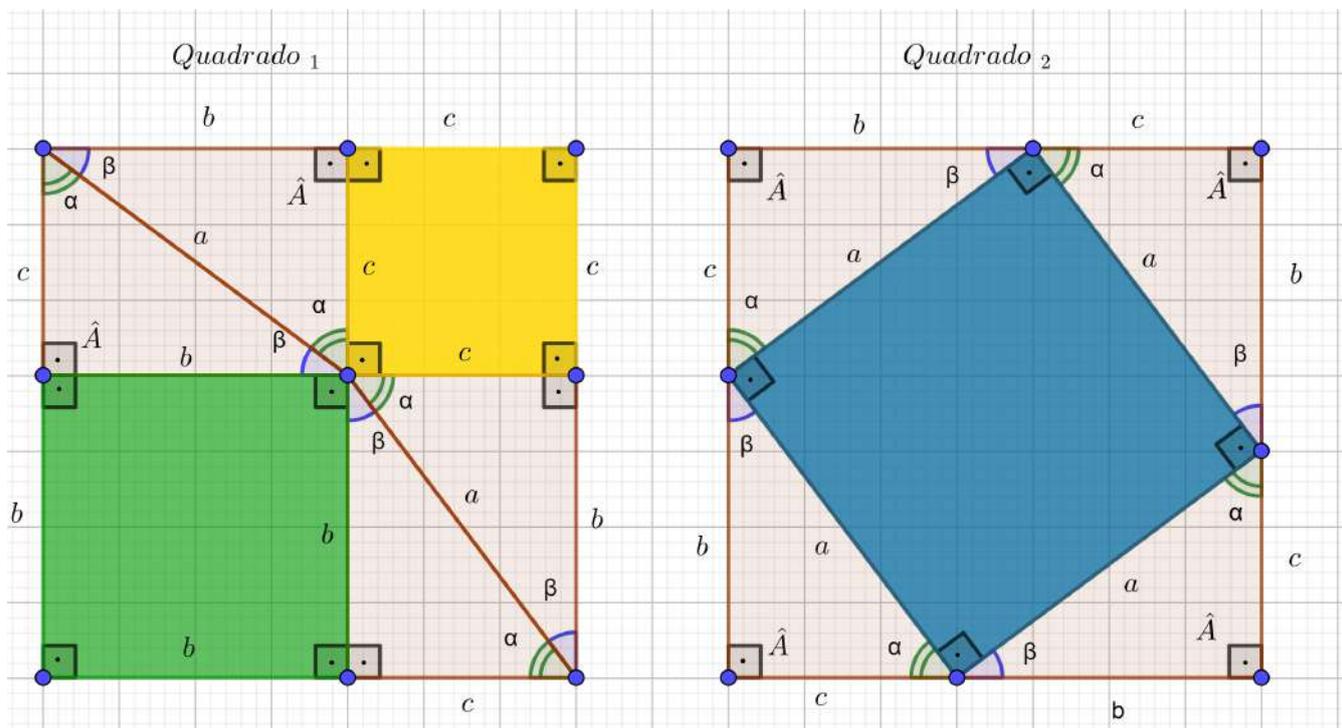
$$C + B = A$$

Figura 61 – Quatro triângulos retângulos dispostos de duas formas diferentes.



Fonte : A Autora.

Figura 62 – Construção de quadrados de lados $b + c$, usando triângulos retângulos.



Fonte : A Autora.



7.2 Biografia de George Pólya

George Pólya, (ver Figura 63), nasceu em 13 de Dezembro de 1887 na cidade de Budapeste (Hungria), de família judaica de origem polaca. Faleceu em 7 de Setembro de 1985 na cidade de Palo Alto, na Califórnia (Estados Unidos).

Licenciou-se em 1905, tendo sido considerado como um dos quatro melhores alunos do seu ano, por esse feito, ganhou uma bolsa de estudos na Universidade de Budapeste. Estudou Direito, mas não gostou do curso, então a passou a estudar Línguas e Literatura. Estudou também Latim, Física, Filosofia e finalmente dedicou-se ao estudo da Matemática, concluindo seu doutorado em 1912.

Em 1913 foi para Göttingen, onde conheceu Hilbert. Neste ano, publicou a solução do problema do passeio aleatório. Também em 1913 foi para Paris e lá trabalhou no seu pós-doutorado. Em 1914 foi trabalhar na Universidade de Zurique onde conheceu Hurwitz. Nesse mesmo ano, foi convocado para prestar serviço militar na guerra, mas recusou-se a convocação. Com medo de ser preso só retornou à Hungria após o fim da Segunda Guerra Mundial.

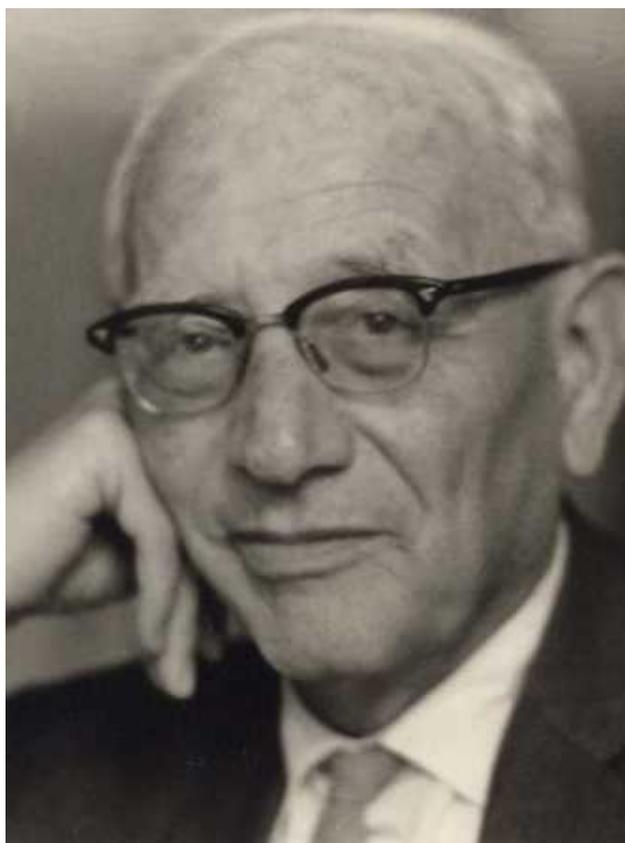
Em 1924, trabalhou com Hardy e Littlewood em Oxford e Cambridge. Publicou a classificação dos planos de simetria em dezessete grupos, o que mais tarde viria a inspirar Escher. Em 1925, juntamente com Szegő, publicou: “Aufgaben und lehrsätze aus der Analysis” e “Die grundlehren der mathematischen wissenschaften”. Em 1940, com receio de uma possível invasão alemã na Suíça, decidiu ir para os Estados Unidos. Em 1942 aceitou o cargo de professor na Universidade de Stanford, onde permaneceu até 1953.

Em 1945, publicou um dos seus livros mais famosos: “How to Solve it”. E em seguida publicou também “Isoperimetric Inequalities im Mathematical Physics” (1951); “Mathematics and Plausible Reasoning” (1954) e “Mathematical Discovery” (1962-1964).

7.2.1 Motivação para o Teorema de Polya

O Teorema de Pólya é uma generalização do Teorema de Pitágoras, envolvendo quaisquer figuras semelhante construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, ou seja, $A = B + C$ onde A é a área da figura construída sobre a hipotenusa e B e C são as área das figuras construídas sobre os catetos. Inicialmente demonstraremos esse teorema usando figuras conhecidas, tais como, quadrado, círculos e triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Em seguida apresentaremos o caso geral.

Figura 63 – Pólya.



Fonte : <https://matefil.com/george-polya/>

7.2.1.1 Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo

Considere a Figura 64 . Pelo Teorema 5.1.16, os quadrados A , B e C são semelhantes. Daí, segue diretamente do Teorema de Pitágoras 7.1.1 que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$A = B + C$$

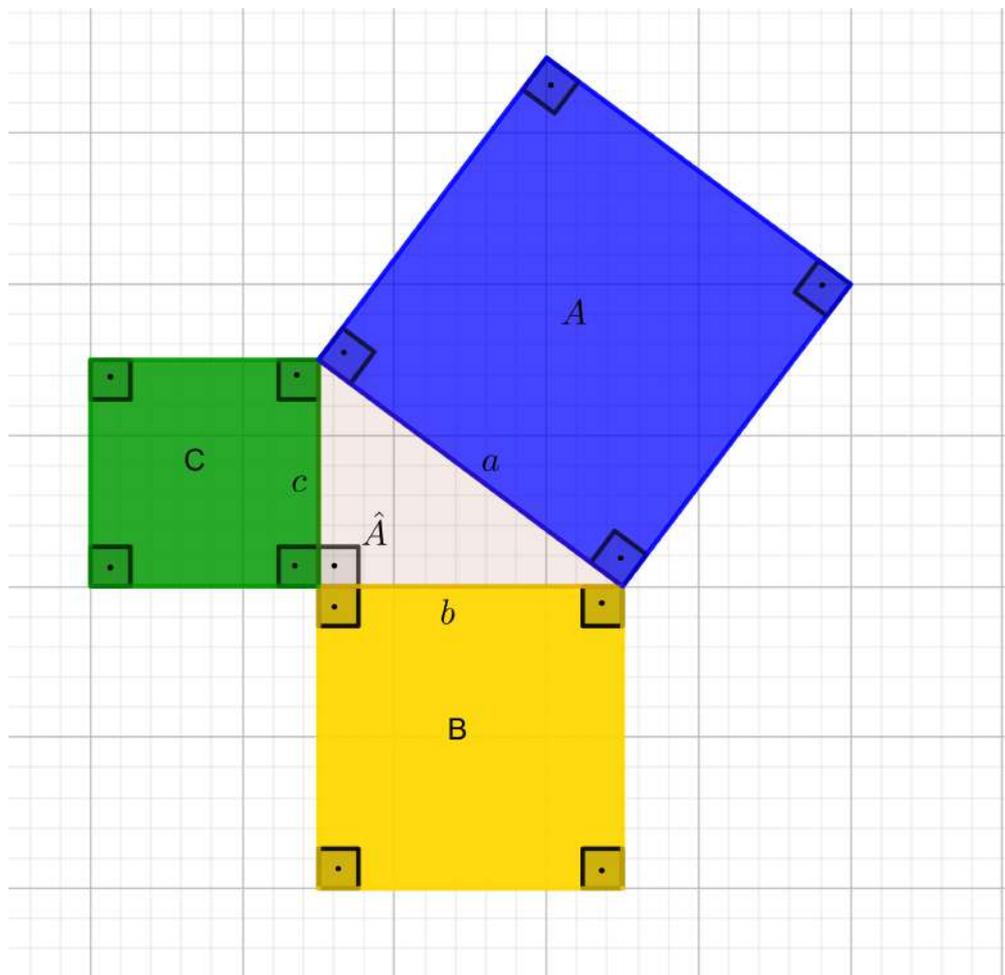
7.2.1.2 Triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo retângulo

Sejam os triângulos de áreas A , B e C equiláteros construídos sobre a hipotenusa a e os catetos b e c , respectivamente, do triângulo retângulo (ver Figura 65), pelo Teorema 5.2.1, esses triângulos são semelhantes.

Sabemos que $A = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, $B = b^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e $C = c^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Daí temos :

$$B + C = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = A.$$

Figura 64 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.

7.2.1.3 Círculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo

Sejam C_1, C_2 e C_3 círculos construídos respectivamente sobre a hipotenusa a e os catetos, b e c , do triângulo retângulo (ver Figura 66). Pelo Teorema 5.1.14, C_1, C_2 e C_3 , são semelhantes.

Por simplicidade, denotaremos de C_1, C_2 e C_3 as áreas desses círculos. Daí, temos:

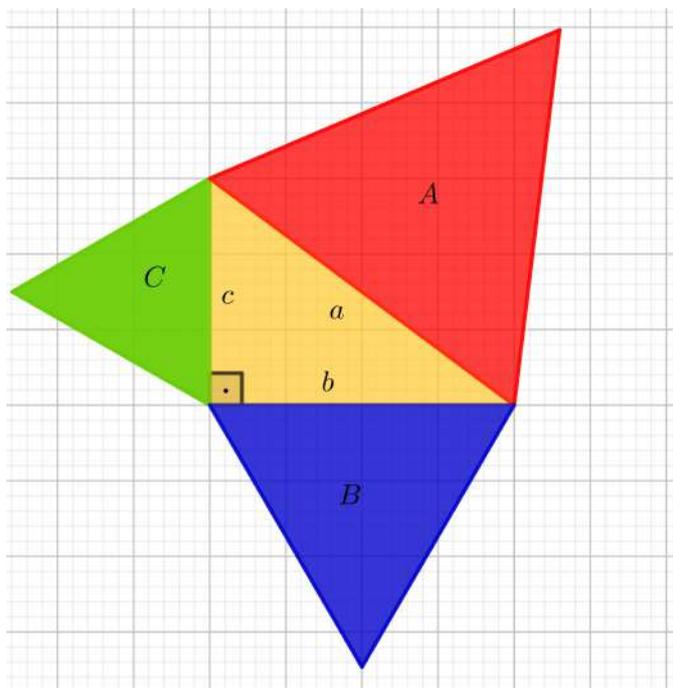
$$C_1 = \frac{a^2\pi}{4}$$

$$C_2 = \frac{b^2\pi}{4}$$

$$C_3 = \frac{c^2\pi}{4}$$

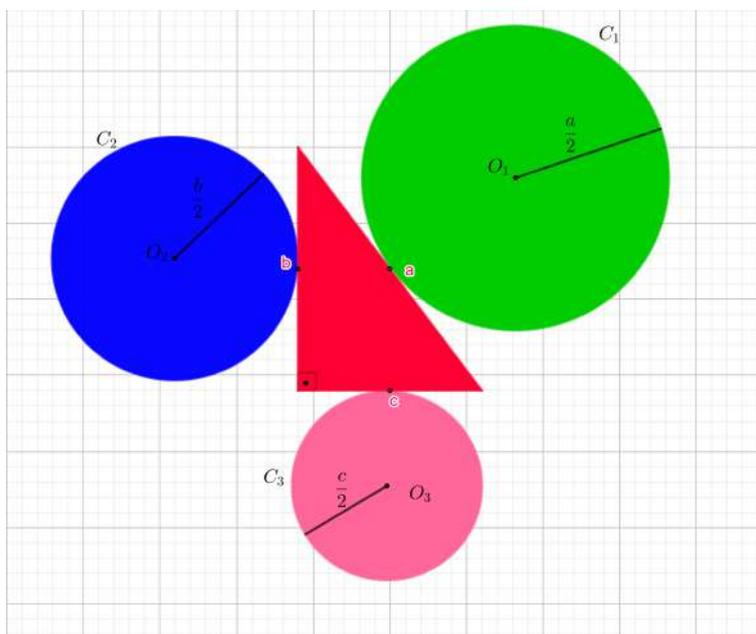
$$C_2 + C_3 = \frac{\pi}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\pi}{4}a^2 = C_1$$

Figura 65 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.

Figura 66 – Círculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo



Fonte: A Autora

7.3 Teorema de Pólya

Nesta seção, mostraremos a relação existente entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer construídas sobre a hipotenusa a e os catetos, b e c , de um triângulo retângulo e enunciamos o Teorema de Pólya que é uma generalização dos casos anteriores.

Teorema 7.3.1 (Teorema de Pólya). *Sejam A , B e C figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, então a área de A é a soma das áreas de B e C , ou seja, $A = B + C$.*

Demonstração.

Denotaremos por A , B e C as áreas das figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e os catetos, b e c , do triângulo retângulo (ver Figura 67) com as seguintes razões de semelhanças:

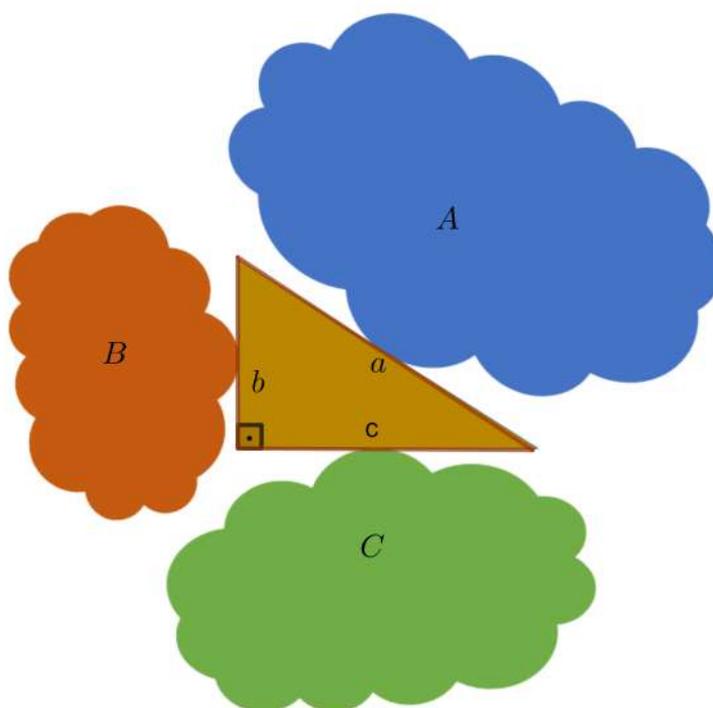
- i. Entre B e A : $\frac{b}{a}$;
- ii. Entre C e A : $\frac{c}{a}$.

Pelo Teorema 6.2.2 ,temos:

$$B + C = \left(\frac{b}{a}\right)^2 A + \left(\frac{c}{a}\right)^2 A = A\left(\frac{b^2 + c^2}{a^2}\right) = A.$$

Portanto $B + C = A$.

Figura 67 – Figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.



Note que, se A , B e C , forem quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo essa relação recai no Teorema de Pitágoras. Logo, o Teorema de Pólya é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

7.4 Alguns casos interessantes do Teorema de Pólya

Nessa seção, mostraremos o Teorema de Pólya com algumas figuras semelhantes poucos usuais no contexto matemático para torná-lo mais atraente.

Usamos a figura de uma borboleta (ver Figura 68) para a construção de borboletas semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo, (ver Figura 69).

Figura 68 – Borboleta.



Fonte: <https://i.pinimg.com/564x/d2/e1/d2/d2e1d29f0c23917851cae8cb7b2933c9.jpg>

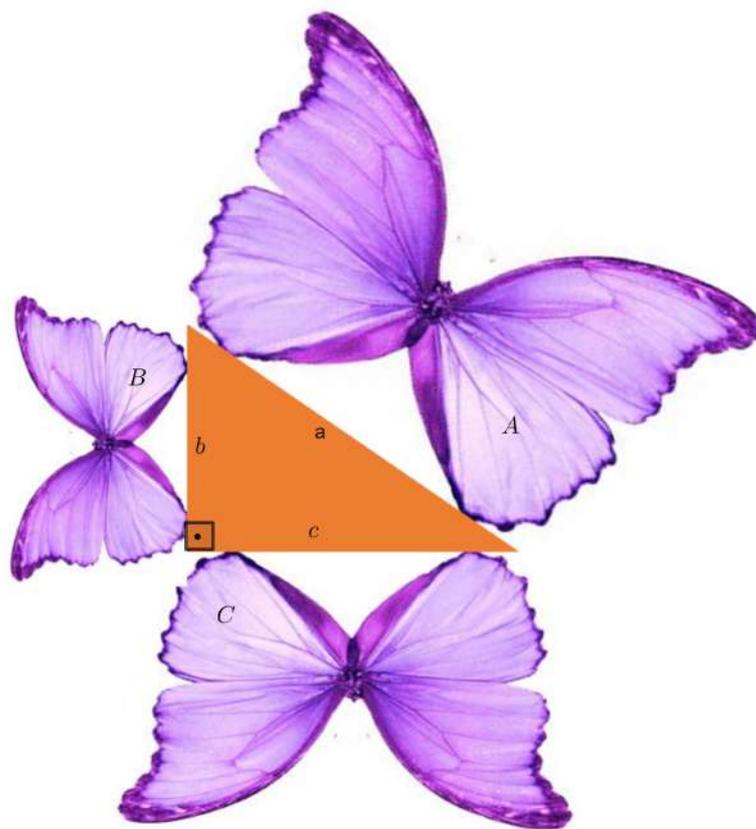
Considere A , B e C as áreas ocupadas pelas borboletas construídas sobre a hipotenusa a e os catetos b e c do triângulo retângulo (ver Figuras 69) com as seguintes razões de semelhanças:

- i. Entre B e A : $\frac{b}{a}$;
- ii. Entre C e A : $\frac{c}{a}$.

Pelo Teorema 7.3.1, temos: $B + C = A$.

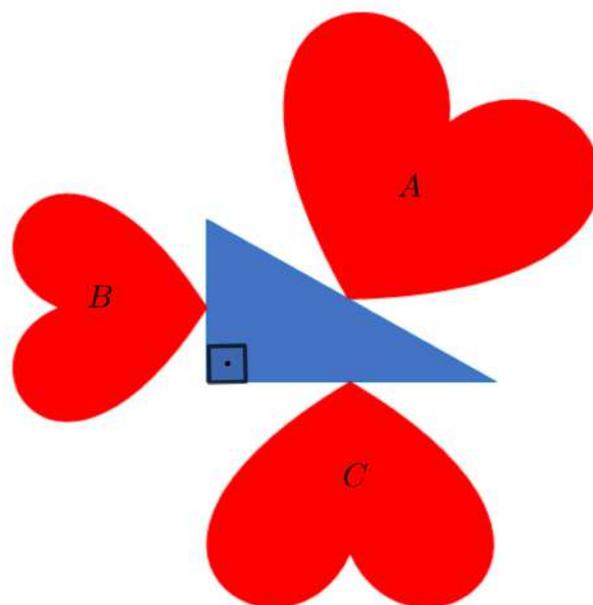
Analogamente, considerando três “corações” semelhantes construídos sobre a hipotenusa a e os catetos, b e c do triângulo retângulo, (ver Figura 70), mostra-se que $A = B + C$.

Figura 69 – Borboletas semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.

Figura 70 – Corações semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.

8 Construção de materiais didáticos para ensinar o Teorema de Pólya

Neste capítulo apresentamos sugestões de construções de materiais didáticos para ensinar o Teorema de Pólya, de forma geométrica que faz parte do objetivo da nossa pesquisa, estimulando o uso de áreas de figuras semelhantes e promovendo a geometrização desse teorema.

8.1 Construção de quebra-cabeças

Uma forma de confeccionar o material didático que servirá de apoio para ensinar o Teorema de Pólya é construir um quebra-cabeça, usando quadrados de diferentes tamanhos e a partir deles formar figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo. Veja uma sugestão na Figura 71 .

Também podemos formar um quebra-cabeça utilizando formas triangulares, como na Figura 72.

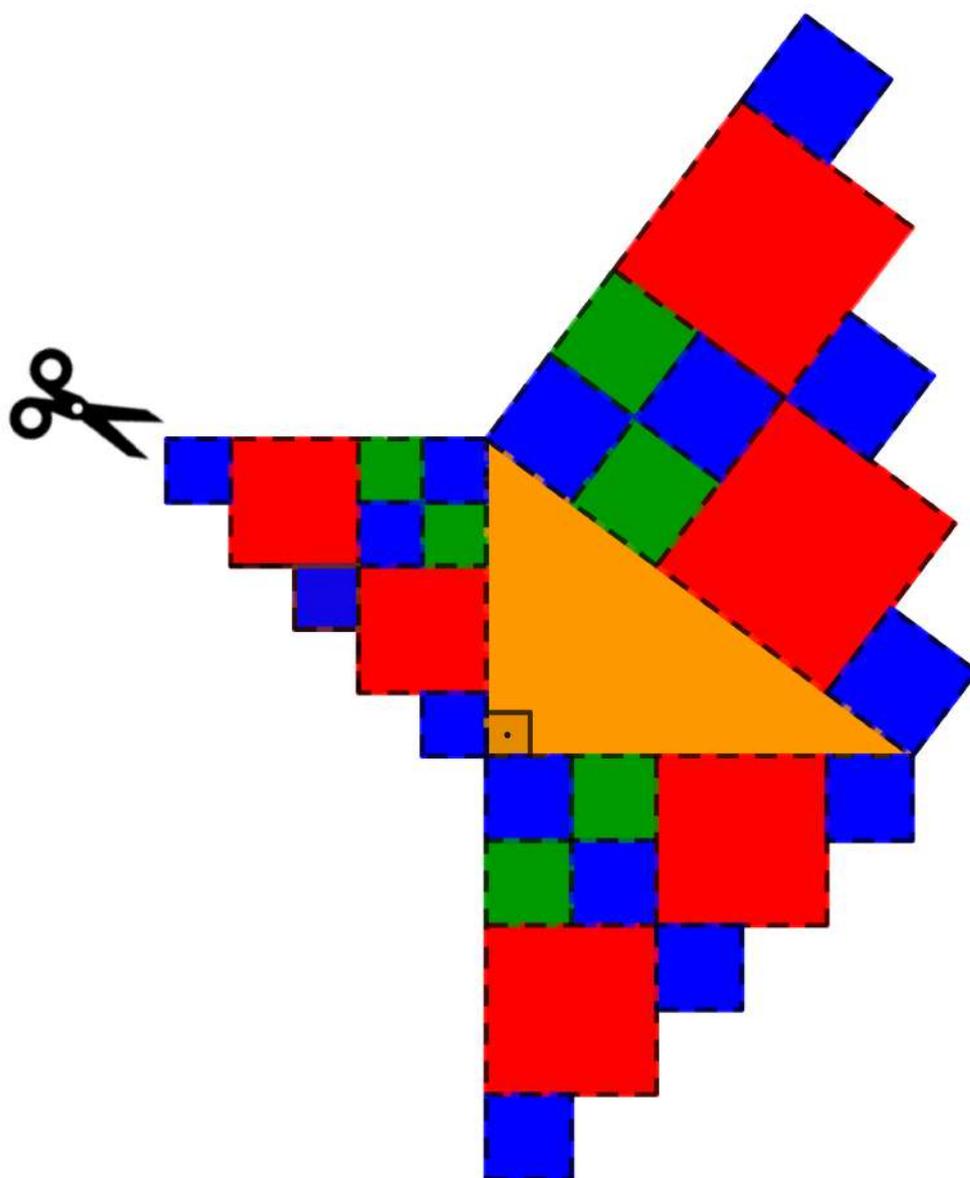
Esses quebra-cabeças podem ser construídos em EVA, cartolina, papelão ou papel ofício. Usando essas formas geométricas podemos montar diferentes figuras semelhantes, mostrando a validade do Teorema de Pólya. Além de ser um material que estimula o interesse e a criatividade dos alunos, promove o entendimento geométricos dos teoremas de Pitágoras e de Pólya.

8.2 Como usar o material didático do Teorema de Pólya em sala de aula

De acordo com o número de alunos, o professor poderá dividir a turma em equipes e cada equipe constroem figuras semelhantes, com as peças do quebra-cabeça da Figura 71 ou da Figura 72 sobre os lados do triângulo retângulo e verificar que a relação $A = B + C$ é válida.

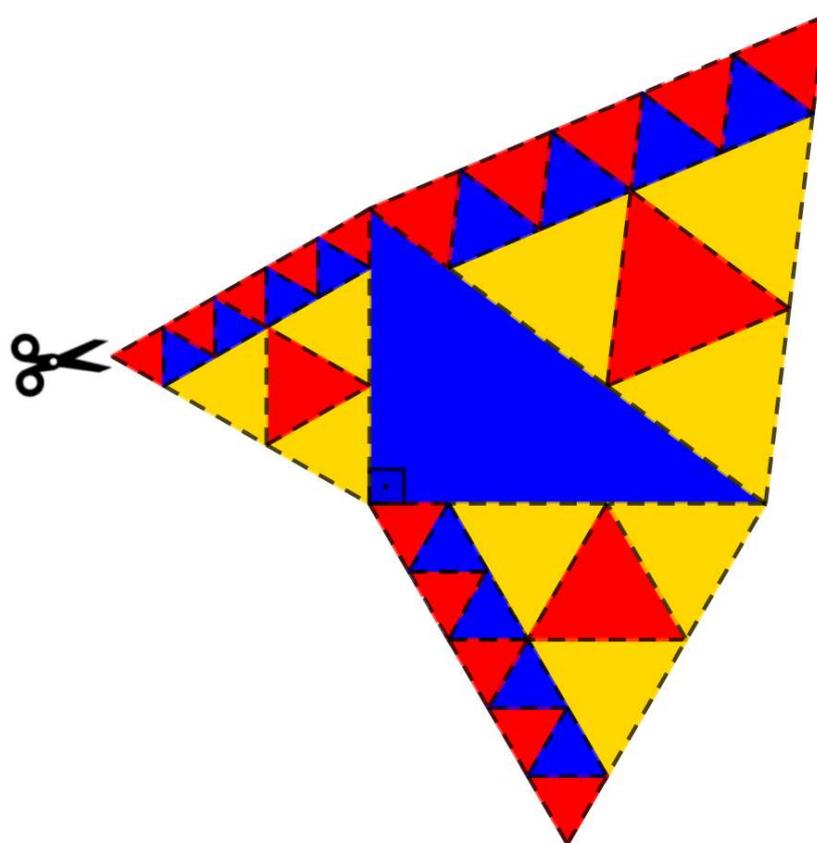
Com o uso dos quebra-cabeças sugeridos nessa seção os alunos podem formar figuras semelhantes quaisquer sobre os lados do triângulo retângulo, estimulando assim a sua criatividade. E o professor deve levar os alunos a concluírem que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos, consolidando o Teorema de Pólya.

Figura 71 – Quebra-cabeça com quadrados construídos sobre os lados do triângulo re-
tângulo.



Fonte: A Autora.

Figura 72 – Quebra-cabeça com triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.

9 Duas Sequências Didáticas para o professor apresentar os Teoremas de Pitágoras e de Pólya em sala de aula

Neste capítulo, para desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, apresentaremos duas sequências didáticas, que promovem a geometrização do Teorema de Pitágoras que serão aplicadas aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e também no 1º do Ensino Médio. Haja vista a importância da geometria na demonstração e compreensão desses teoremas. Pois as formas geométricas possibilitam uma demonstração dinâmica do Teorema de Pitágoras, despertando o interesse e a curiosidade dos estudantes. Além disso, mostraremos uma generalização do Teorema de Pitágoras com figuras semelhantes, Teorema de Pólya, e sugerimos uma sequência didática abordando esse teorema que estimula o pensamento geométrico dos estudantes. Para isso, usamos como referências (PERETTI; COSTA, 2013), (BRASIL, 2018), (ZABALA, 2015) e (TELARIS, 2003).

9.1 Sequência didática

Sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, etapa por etapa e em diferentes graus de dificuldade, com objetivos definidos para ensinar um conteúdo.

Uma sequência didática pode ser desenvolvida seguindo os seguintes tópicos:

1. Público-alvo: indicar a série que será aplicada a sequência didática;
2. Avaliação diagnóstica;
3. Habilidades da BNCC: explicitar as habilidades da BNCC contempladas na sequência didática;
4. Objetivo Geral: indicar o objetivo central que se deseja alcançar com a sequência didática;
5. Objetivos específicos: indicar os objetivos específicos, em conformidade com o tema e o objetivo geral que se deseja alcançar;
6. Materiais usados: listar os materiais necessários para a aplicação da sequência didática;

7. Conteúdo prévio: verificar os conteúdos necessários para um bom desempenho dos estudantes na realização das atividades da sequência didática;
8. Avaliação: verificar o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes, com o objetivo de uma futura intervenção para suprir as possíveis dificuldades que, por ventura, possam surgir em determinados conteúdos;
9. Tempo de realização: estimar o tempo necessário para a aplicação da sequência didática;
10. Desenvolvimento da atividade: descrever cada atividade aplicada com detalhes, de forma a favorecer o desenvolvimento da sequência didática.

Antes da aplicação de uma sequência didática é necessário fazer uma avaliação diagnóstica com os alunos. Pois, dessa forma, o professor saberá onde intervir para se ter um bom desenvolvimento da sequência didática, alcançando assim os objetivos desejados.

Sem dúvida, é difícil conhecer os diferentes graus de conhecimento de cada menino e menina, identificar o desafio de que necessitam, saber que ajuda requerem e estabelecer a avaliação apropriada para cada um deles a fim que se sintam estimulados a se esforçar em seu trabalho. Mas o fato de que custe não deve nos impedir de buscar meios ou formas de intervenção, que cada vez mais, nos permitam dar uma resposta adequada às necessidades pessoais de todos e de cada um de nossos alunos. (ZABALA, 2015, p.36)

Zabala em (ZABALA, 2015) já mencionava essa dificuldade, pois as nossas turmas são heterogêneas e apresentam diferentes níveis de aprendizagens. Mas os professores devem buscar formas de inserir atividades que possam corrigir essa distorção de conhecimentos através de metodologias, como por exemplo, uma sequência didática adequada aos objetivos almejados.

Como nosso objetivo principal é apresentar o Teorema de Pitágoras na sua versão geométrica e apresentar o Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras, iremos sugerir, nas seções seguintes, sequências didáticas abordando esses teoremas.

As sugestões de sequências didáticas apresentadas nessa seção possibilitam ao professor acompanhar a aprendizagem dos educandos desde o Teorema de Pitágoras até chegar ao Teorema de Pólya. Podemos considerar como um avanço no ensino do famoso Teorema de Pitágoras, pois nas escolas não se apresentam o Teorema de Pólya. Sendo assim, os estudantes desconhecem essa generalização do Teorema de Pitágoras.

9.2 Uma sugestão de sequência didática para os teoremas de Pitágoras e de Pólya

Nesta seção, apresentaremos uma sequência de atividades de diferentes níveis de dificuldade com objetivo de mostrar geometricamente, com o uso de áreas de figuras semelhantes, os teoremas de Pitágoras e de Pólya.

Seguimos o modelo apresentado na Seção 9.1.

9.2.1 Público-alvo

Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

9.2.2 Habilidades da BNCC

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

9.2.3 Avaliação diagnóstica para inserir os teoremas de Pitágoras e de Pólya

Inicialmente os professores devem aplicar uma avaliação diagnóstica para aferir os conhecimentos prévios de alunos do 9º ano, Ensino Fundamental e 1º ano, Ensino Médio para a aplicação das atividades, envolvendo os teoremas de Pitágoras e de Pólya.

A avaliação diagnóstica deve ser feita sem revisão, para não interferir nos conhecimentos prévios dos alunos.

Veja uma sugestão de questões para a avaliação diagnóstica no Apêndice C.

Após a realização da avaliação diagnóstica, se for necessário o professor, deverá revisar os conteúdos que os estudantes apresentam dificuldades para depois realizar as atividades sobre os teoremas de Pitágoras e de Pólya geometricamente.

9.3 Sequência didática para a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras

Os estudantes, no 1º ano do Ensino Médio, conhecem o Teorema de Pitágoras como sendo $a^2 = b^2 + c^2$. Essa atividade vai proporcionar aos estudantes a terem uma visão geométrica desse teorema, não associando somente a fórmula, dando assim um significado geométrico ao Teorema de Pitágoras.

9.3.1 Atividade 1

- Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras.

9.3.2 Objetivo Geral

- Mostrar o Teorema de Pitágoras na sua versão geométrica, não associar somente a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$.

9.3.3 Objetivo Específicos

- Mostrar a relação da geometria com a álgebra, indicando que a expressão do Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$ é uma representação de áreas dos quadrados construídos sobre a hipotenusa e catetos, respectivamente, do triângulo retângulo;
- Relacionar o conceito de área de quadrados à fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, dando um significado geométrico ao Teorema de Pitágoras.

9.3.4 Materiais usados

- Giz ou marcador para quadro branco;
- Quadro;
- Cartolina;
- Régua;
- Cola;
- Folha de papel ofício;
- Folha de papel quadriculado.

9.3.5 Conhecimentos prévios

- Área de região quadrangular;
- Semelhança de polígonos;
- Ângulos.

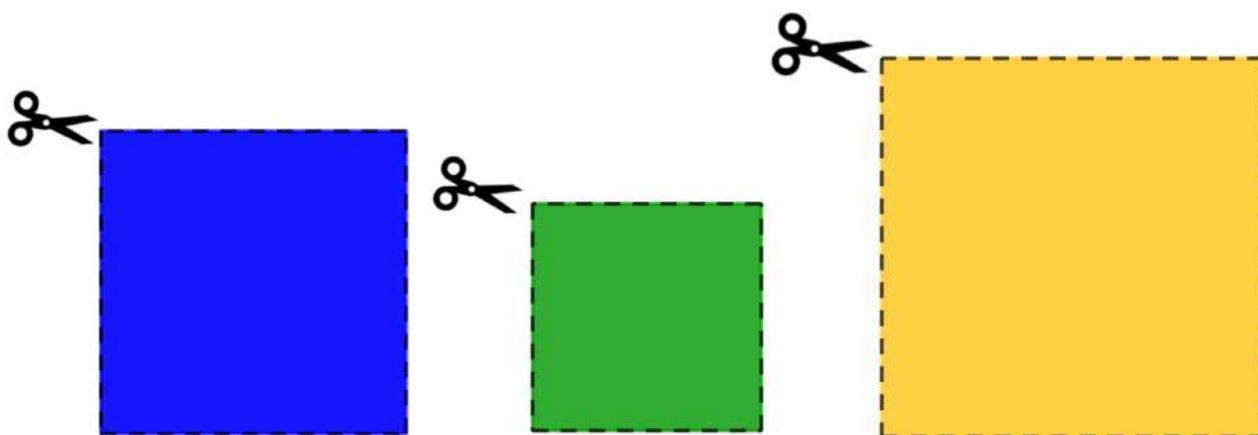
9.3.6 Tempo de realização

- Duas aulas.

9.3.7 Desenvolvimento da atividade

- I. Inicialmente entregar a cada estudantes três quadrados, de cores diferentes, medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm, conforme Figura 73. Por medidas de segurança (caso seja necessário), entregar os quadrados já recortados para evitar o manuseio de tesouras em sala de aula;

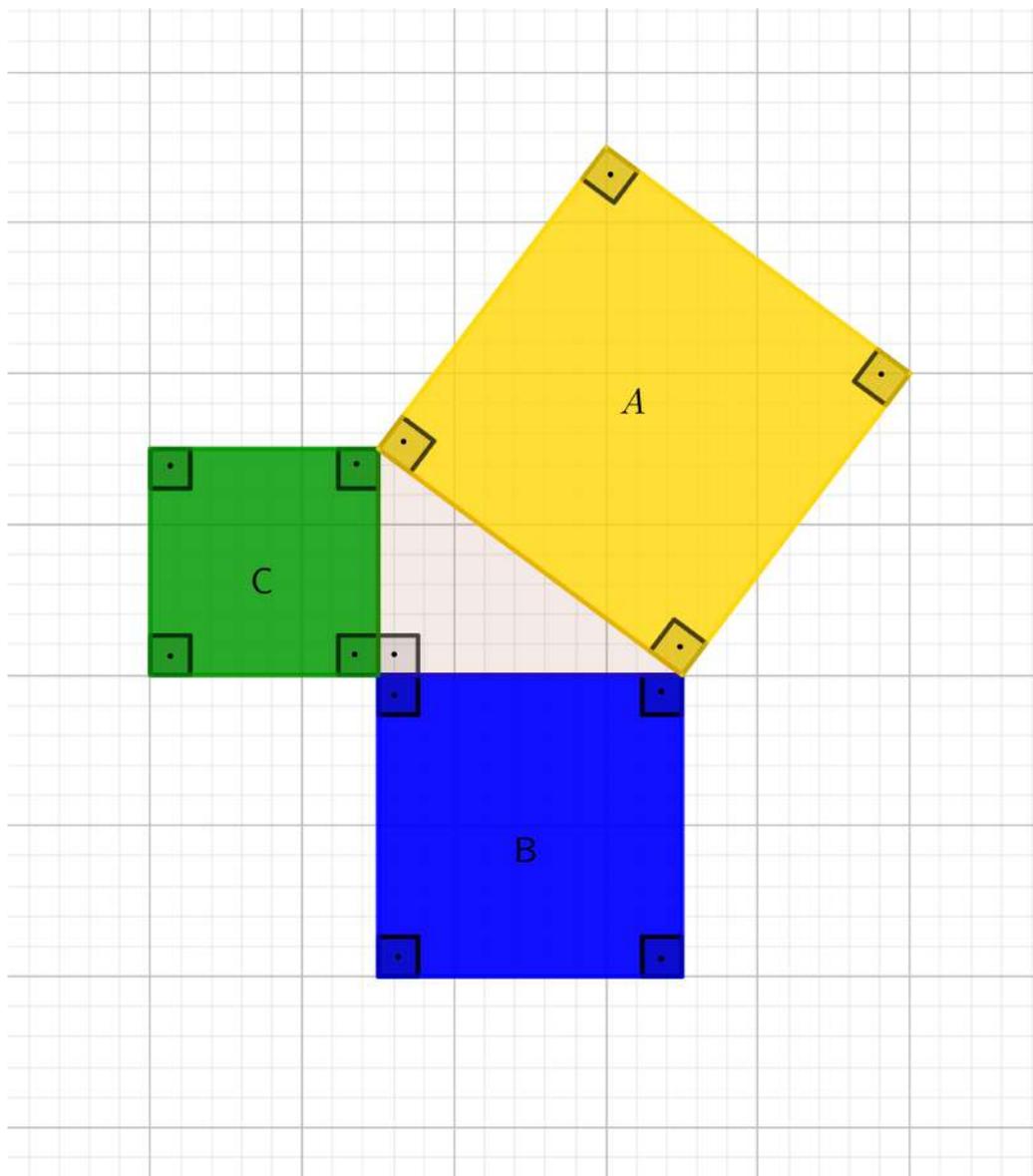
Figura 73 – Quadrados para recortar.



Fonte: A autora.

- II. Solicitar aos alunos, que desenhem, em papel quadriculado, um triângulo retângulo de catetos 3cm e 4cm e coleem esses quadrados sobre os lados desse triângulo, de maneira a formar a Figura 74;
- III. Pedir aos estudantes para calcular a área desses quadrados;
- IV. Em seguida, solicitar aos estudantes para somarem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e comparar com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa;

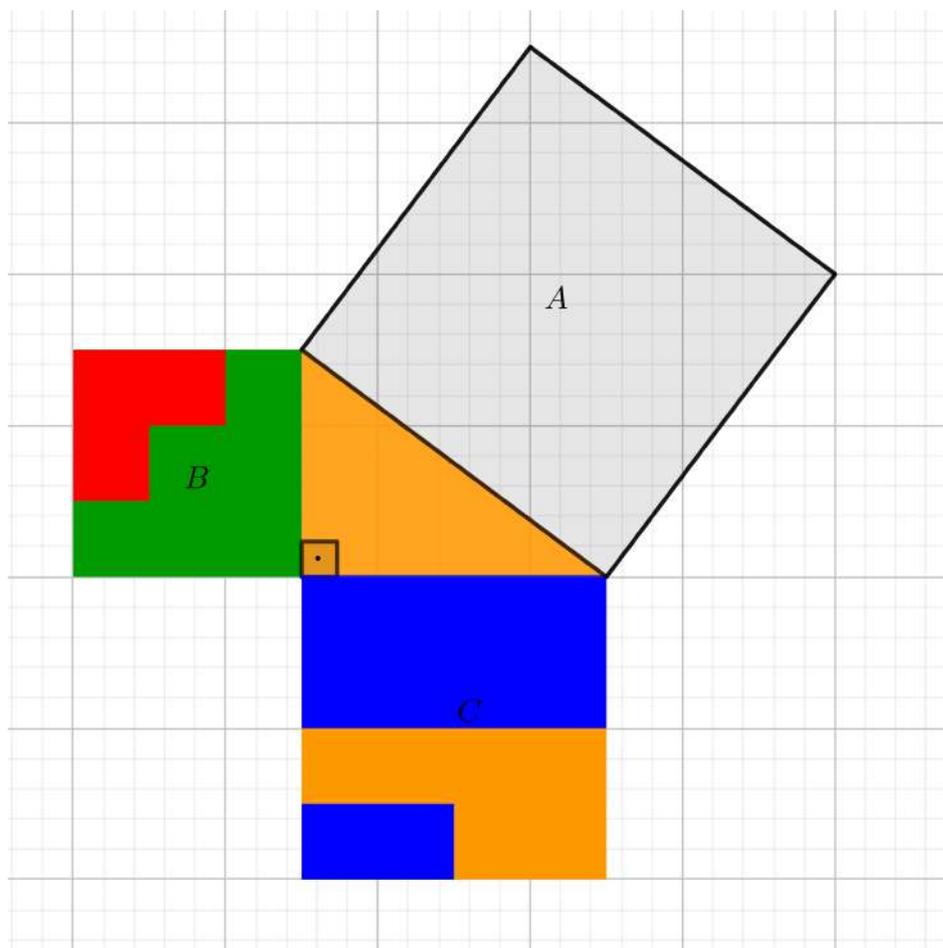
Figura 74 – Quadrados construídos sobre os lados do triângulo Retângulo.



Fonte: A autora.

- V. Os estudantes deverão concluir que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos;
- VI. Entregar aos estudantes uma folha de papel ofício com a Figura 75 e solicitar aos estudantes que cole no caderno;
- VII. O professor entrega aos estudantes a Figura 76, para ser recortada na linha tracejada;
- VIII. O professor solicita aos estudantes que cole os polígonos obtidos, após o recorte da Figura 76, sobre o quadrado, construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo da figura colada no caderno, de forma que não haja sobreposição de

Figura 75 – Teorema de Pitágoras com quadrados.

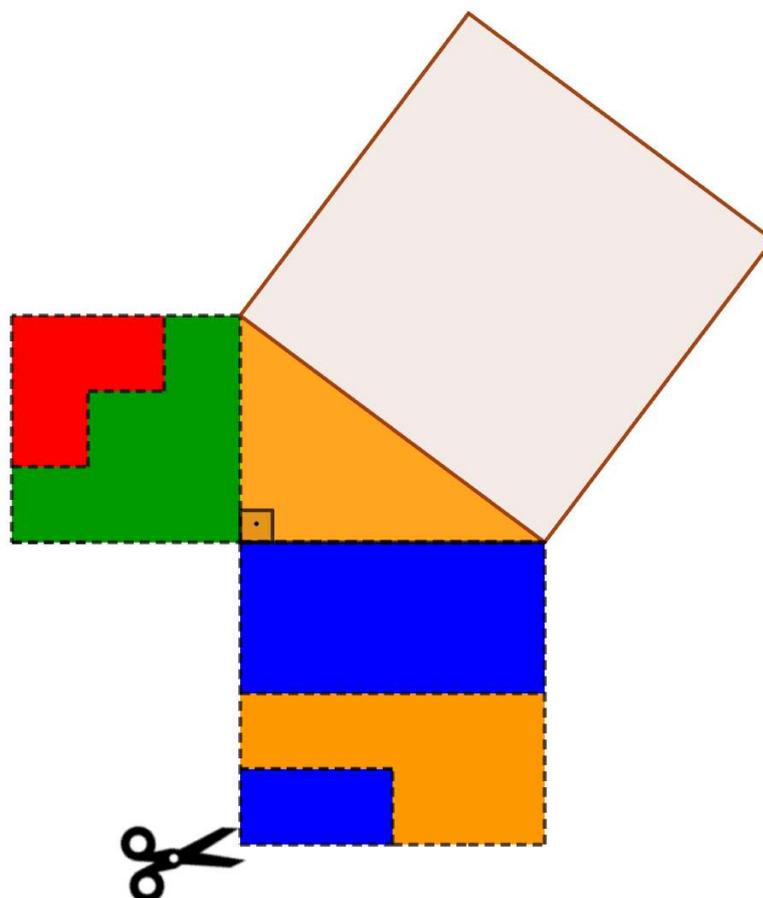


Fonte: A autora.

polígonos e nem espaços vazios. Uma possível forma de fazer essa colagem é mostrada na Figura 77;

- IX. Ao final da atividade, o professor levará aos alunos a concluírem que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, Teorema de Pitágoras, em sua forma geométrica;
- X. Enunciar o Teorema de Pitágoras sob a ótica geométrica: Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, ou seja: $a^2 = b^2 + c^2$, ou ainda $A = B + C$;
- XI. Falar que esse resultado é válido para todo triângulo retângulo, sendo conhecido como Teorema de Pitágoras;
- XII. Ressaltar a importância desse teorema na resolução de problemas de geometria relacionados ao triângulo retângulo.

Figura 76 – Quadrados para recorte.



Fonte: A autora.

9.3.8 Sugestão para avaliação da atividade 1

1. Construa quadrados sobre os lados do triângulo, (Figura 78) e calcule suas áreas.

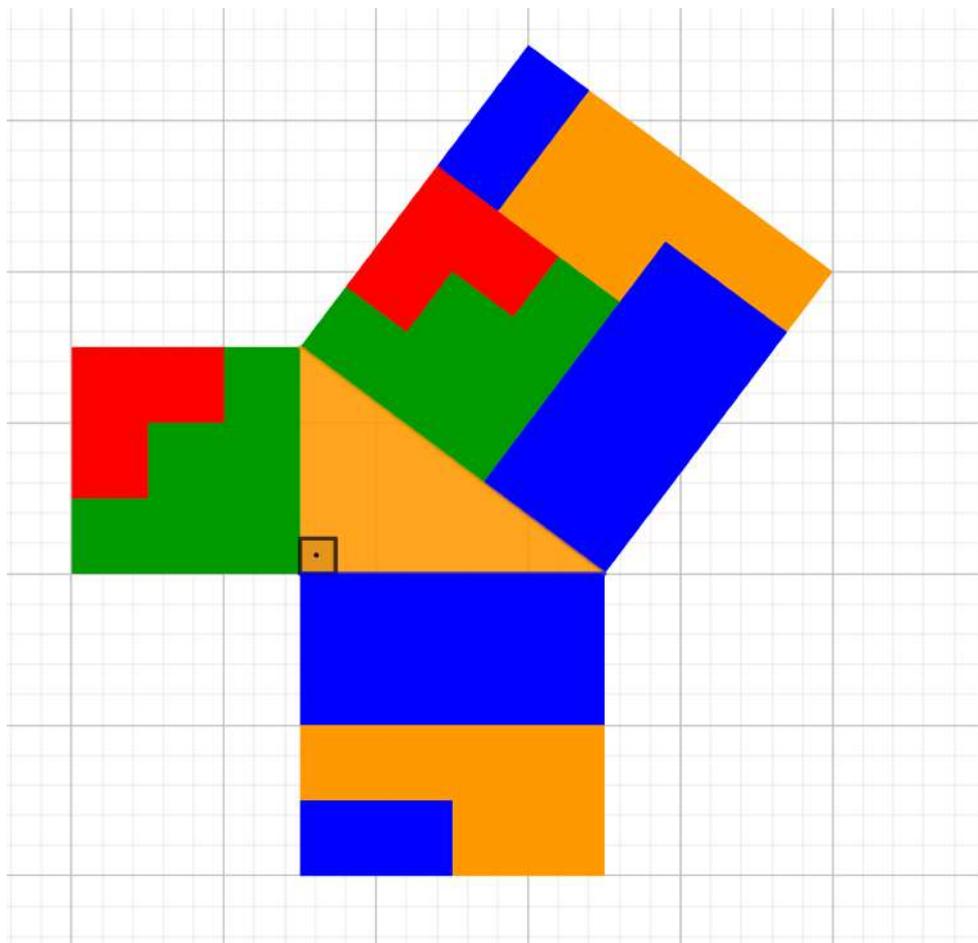
9.4 Sequência didática para a demonstração geométrica do Teorema de Pólya

Nesta seção apresentaremos atividades, usando figuras conhecidas com o objetivo de promover uma demonstração geométrica do Teorema de Pólya para estudantes do 9º do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.

9.5 Atividade 1

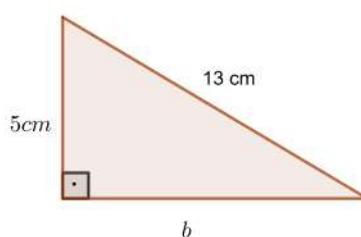
- Sobre a generalização do Teorema de Pitágoras com uso de triângulos equiláteros.

Figura 77 – Colagem de polígonos sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.



Fonte: A autora.

Figura 78 – Área de quadrados.



Fonte: A autora.

9.5.1 Objetivo Geral:

- Mostrar a generalização do Teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes quaisquer construídos sobre os lados do triângulo retângulo, no caso desses polígonos serem decompostos em triângulos equiláteros.

9.5.2 Objetivos específicos:

- Trabalhar com decomposição de polígonos para generalizar o Teorema de Pitágoras geometricamente;
- Dar uma versão totalmente geométrica para o Teorema de Pólya, usando triângulos equiláteros.

9.5.3 Conhecimentos prévios:

- Área de triângulos equiláteros;
- Identificar triângulo semelhantes;
- Congruência de triângulos;
- Semelhança.

9.5.4 Tempo de realização:

- Duas aulas.

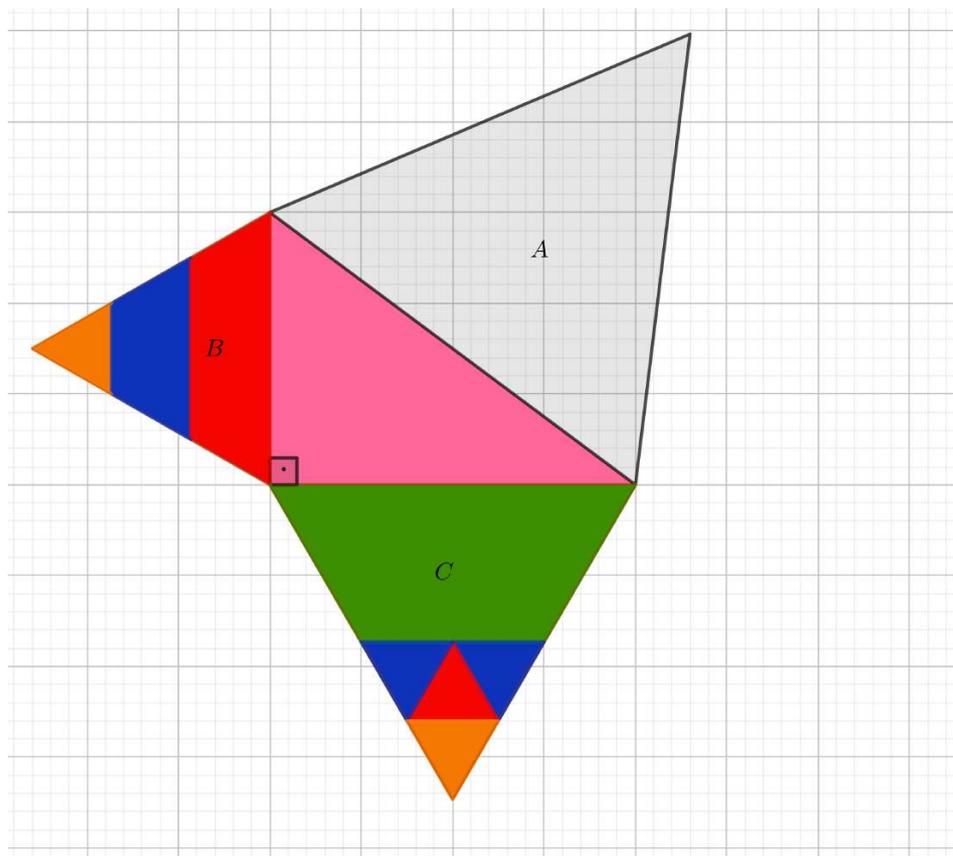
9.5.5 Desenvolvimento da atividade

- I. Inicialmente o professor entregar aos estudantes uma folha de papel ofício com a Figura 79, para ser colada no caderno;
- II. O professor entrega aos estudantes a Figura 80, para ser recortada na linha tracejada;
- III. O professor solicita aos estudantes que cole os polígonos, obtidos após o recorte da Figura 80, sobre o triângulo construído na hipotenusa do triângulo retângulo da figura colada no caderno, de forma que não haja sobreposição de polígonos e nem espaços vazios. Uma possível forma de colar esses polígonos apresentamos na Figura 81;
- IV. Ao final da atividade, o professor levará os alunos concluírem que a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos, ou seja $A = B + C$.

9.5.6 Sugestão para avaliação da atividade 1

1. Calcular as áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo (ver Figura 82) e verificar a relação existente entre a soma das

Figura 79 – Pitágoras com triângulos equiláteros.



Fonte: A autora.

áreas dos triângulos construídos sobre os catetos e a área do triângulo construído sob a hipotenusa.

2. De forma geral, calcular a área dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo e verificar a relação existente entre a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos e a área do triângulo construído sobre a hipotenusa (ver Figura 83).

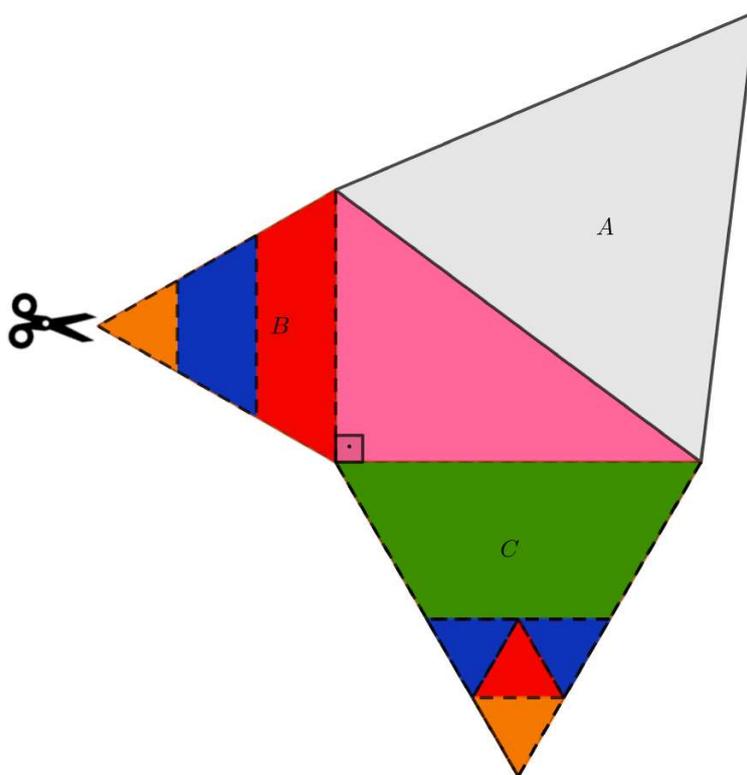
9.6 Atividade 2

- Sobre generalização do Teorema de Pitágoras com uso de hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

9.6.1 Objetivo Geral

- Mostrar a generalização do Teorema de Pitágoras para hexágonos regulares (semelhantes) construídos sobre os lados do triângulo retângulo, usando triângulos equiláteros.

Figura 80 – Triângulo para recorte.



Fonte: A autora.

9.6.2 Objetivos específicos:

- Dar uma versão totalmente geométrica para o Teorema de Pólya, usando hexágonos regulares;
- Identificar triângulos semelhantes.

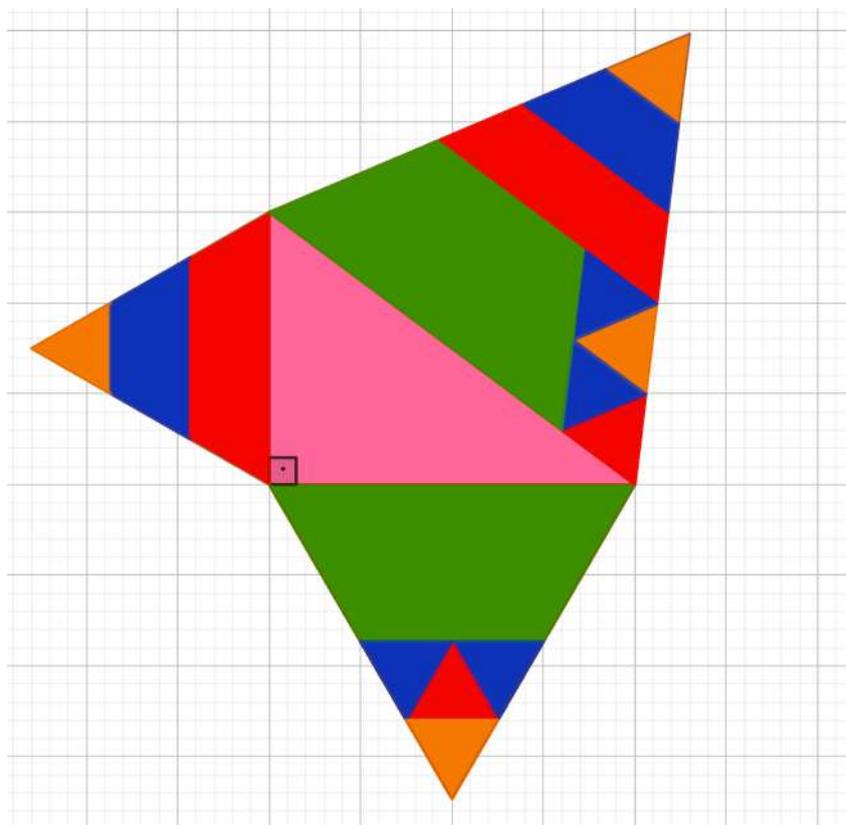
9.6.3 Conhecimentos prévios:

- Área de triângulo equilátero;
- Congruência de triângulos;
- Semelhança.

9.6.4 Tempo de realização

Duas aulas.

Figura 81 – Triângulo sobre a hipotenusa.



Fonte: A autora.

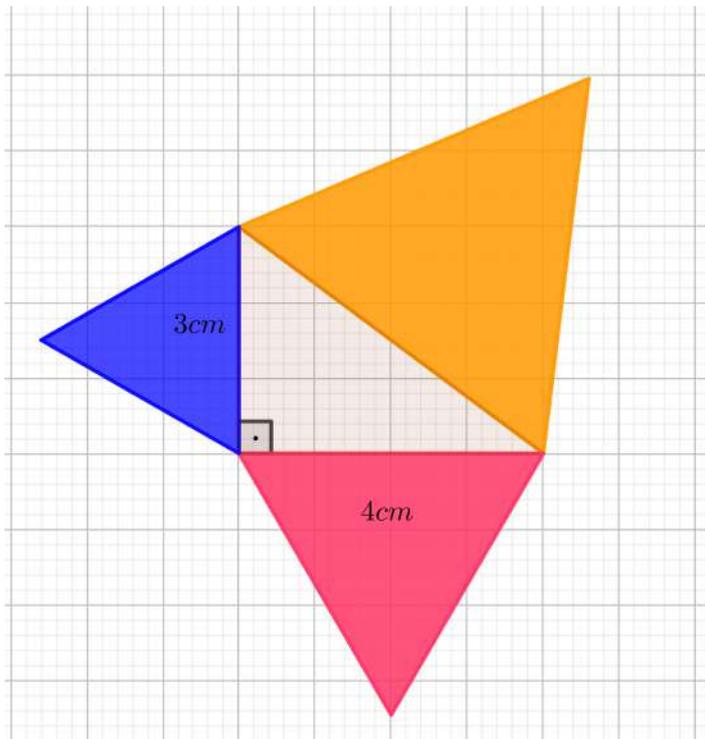
9.6.5 Desenvolvimento da atividade

- I. O professor entrega aos estudantes numa folha de papel ofício a Figura 84;
- II. O professor estimula os alunos a concluírem que cada hexágono pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes;
- III. O professor solicita aos estudantes para verificarem que na Figura 84, a área do triângulo construído sobre a hipotenusa, decomposto em triângulos menores, é igual a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos do triângulo retângulo. Essa verificação é feita através da contagem dos triângulos pequenos no interior dos triângulos construídos sobre os lados do triângulo retângulo;
- IV. Daí, o professor levará os estudantes a concluírem que a área dos hexágonos construídos sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos hexágonos construídos sobre os catetos.

9.6.6 Sugestão para a avaliação da atividade 2

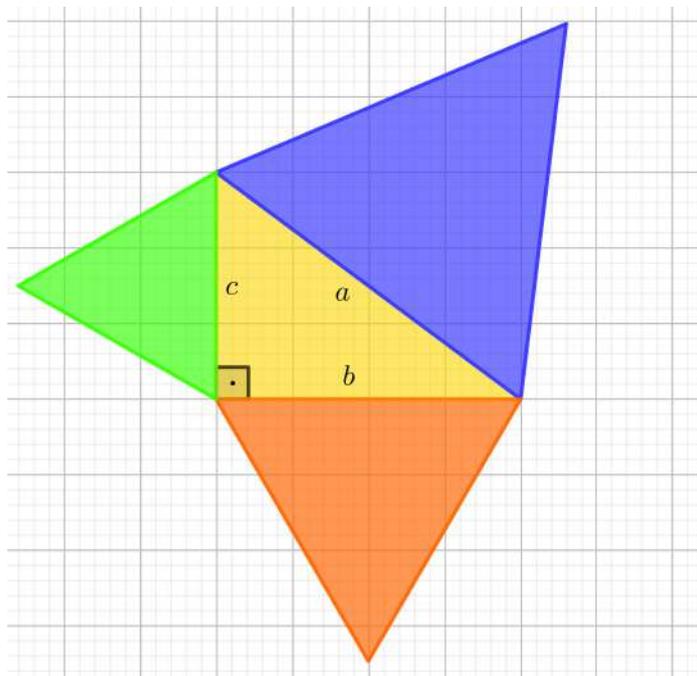
1. Qual é a área do hexágono vermelho da Figura 85 ?

Figura 82 – Área de triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo.



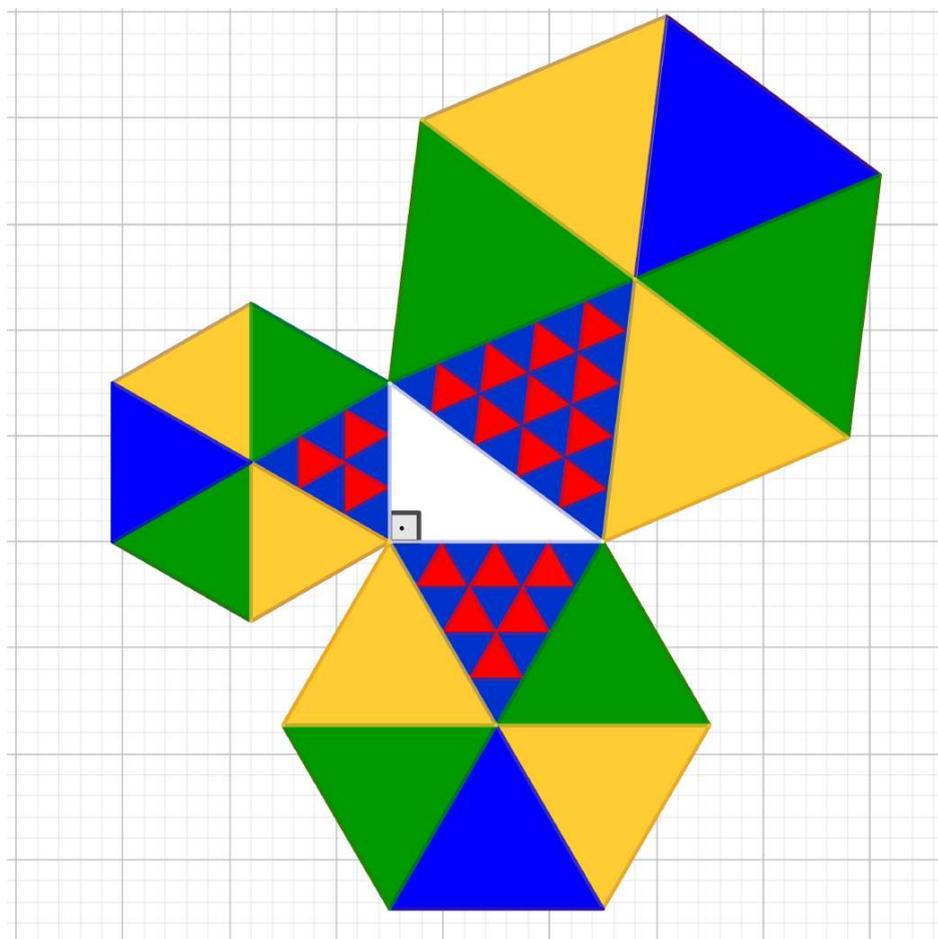
Fonte: A autora.

Figura 83 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo de hipotenusa a , catetos b e c .



Fonte: A autora.

Figura 84 – Áreas dos hexágonos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A autora.

9.7 Atividade 3

- Sobre generalização do Teorema de Pitágoras para figuras quaisquer.

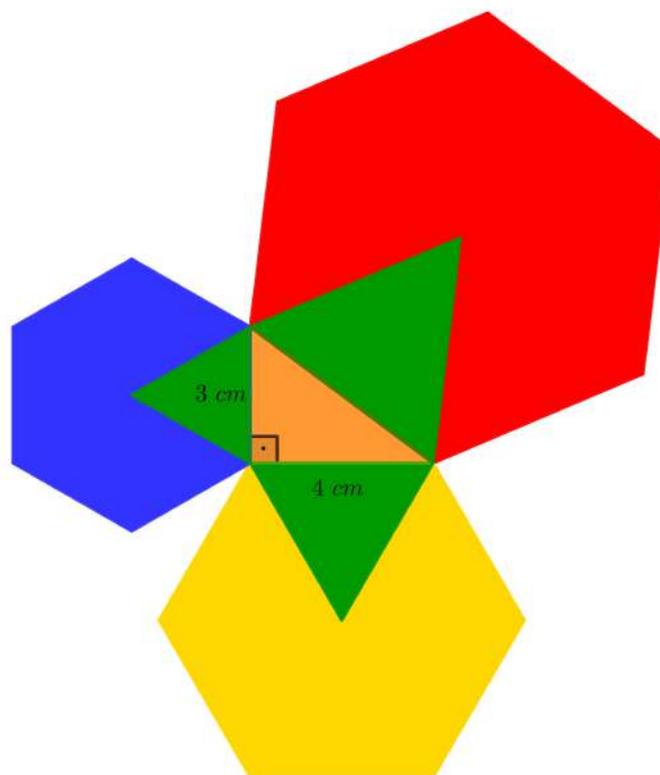
9.7.1 Objetivo Geral

- Mostrar a generalização do Teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes quaisquer construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

9.7.2 Objetivos específicos

- Identificar figuras semelhantes;
- Mostrar a generalização do Teorema de Pitágoras em figuras semelhantes não convencionais.

Figura 85 – Área de hexágonos.



Fonte: A autora.

9.7.3 Conhecimentos prévios:

- Área de triângulo equilátero;
- Semelhança.

9.7.4 Tempo de realização

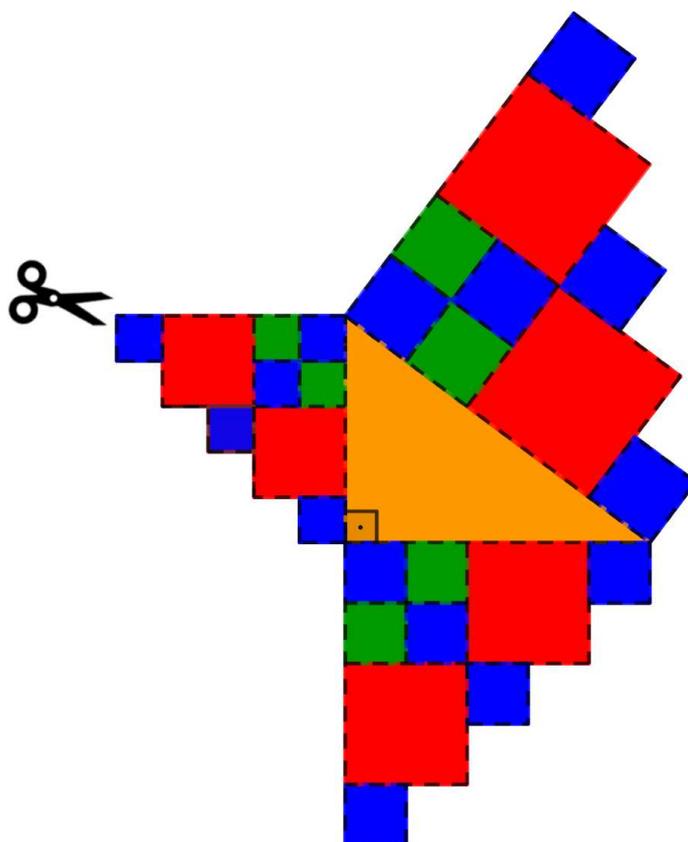
Duas aulas.

9.7.5 Desenvolvimento da atividade

- I. O professor organiza os estudantes em equipes;
- II. O professor entrega aos estudantes a Figura 87, para ser recortada na parte tracejada;
- III. O professor solicita as equipes que formem figuras semelhantes, usando os triângulos equiláteros, obtidos após o recorte da Figura 87, sobre os lados do triângulo retângulo;

IV. O professor levará os estudantes a concluírem que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos do triângulo retângulo, se essas figuras forem semelhantes, enunciando o Teorema de Pólya.

Figura 86 – Quebra cabeça com quadrados.



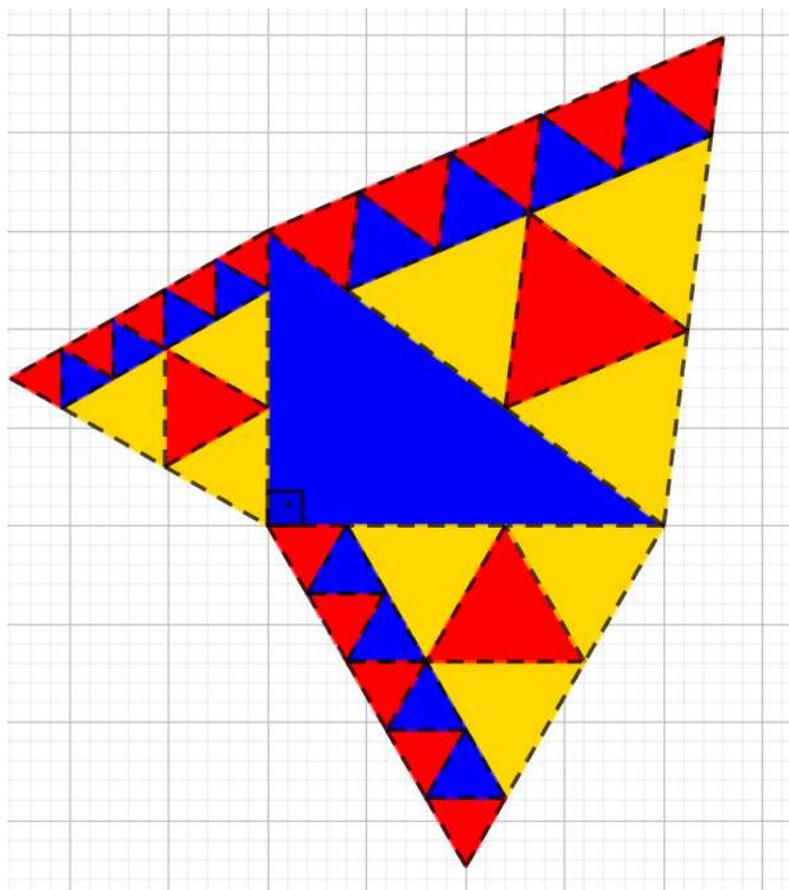
Fonte: A autora.

9.7.6 Sugestão para avaliação da atividade 3

Nesta seção apresentaremos algumas sugestões de atividade com polígonos e figuras não convencionais, construídas sobre os lados do triângulo retângulo, para tornar a generalização do Teorema de Pitágoras mais atrativa.

1. Qual é a relação existente entre as áreas das figuras, (ver Figura 88), construídas sobre os lados do triângulo retângulo?
2. Qual a relação existente entre as áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo, ver Figura 89 ?

Figura 87 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



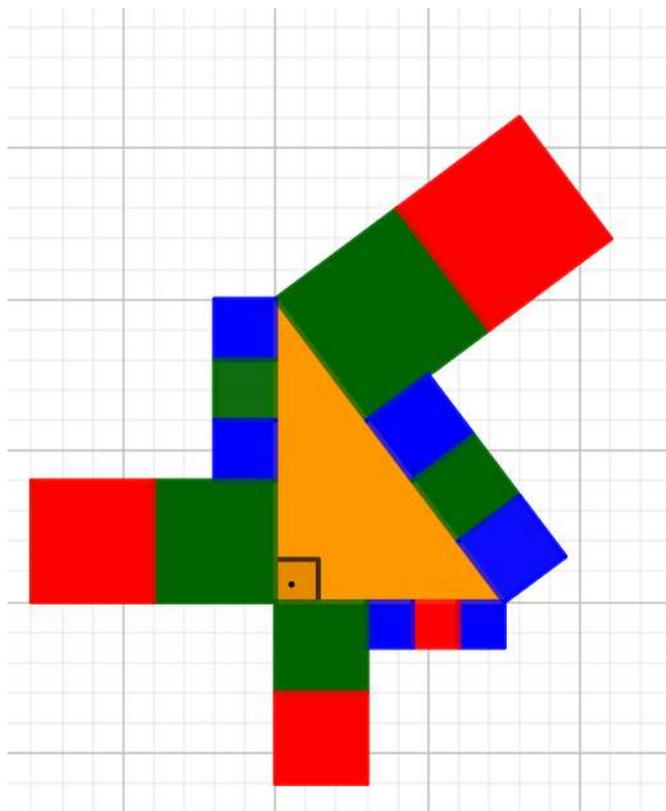
Fonte: A autora.

3. Qual é a relação existente entre as áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo, ver Figura 90 ?

A generalização do Teorema de Pitágoras que apresentamos nesse capítulo é o Teorema de Pólya. Os livros didáticos do Ensino Básico não apresentam o Teorema de Pólya, limitando-se apenas a apresentação do Teorema de Pitágoras.

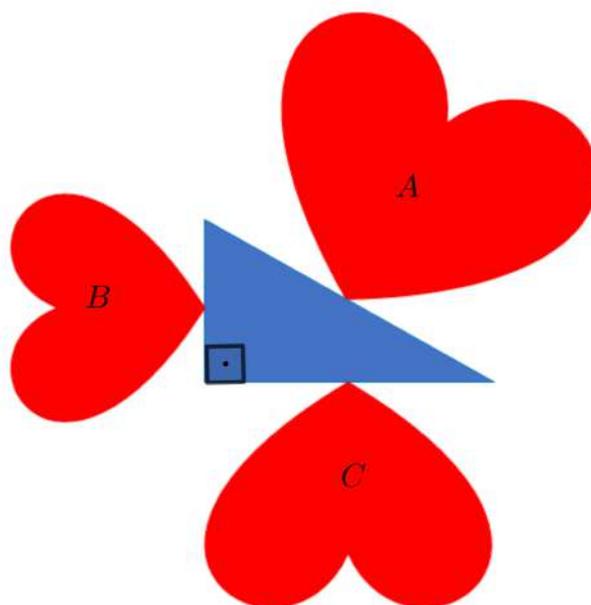
Disponibilizamos as figuras usadas nas sequências didáticas dos teoremas de Pitágoras e de Pólya no Apêndice D.

Figura 88 – Polígonos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



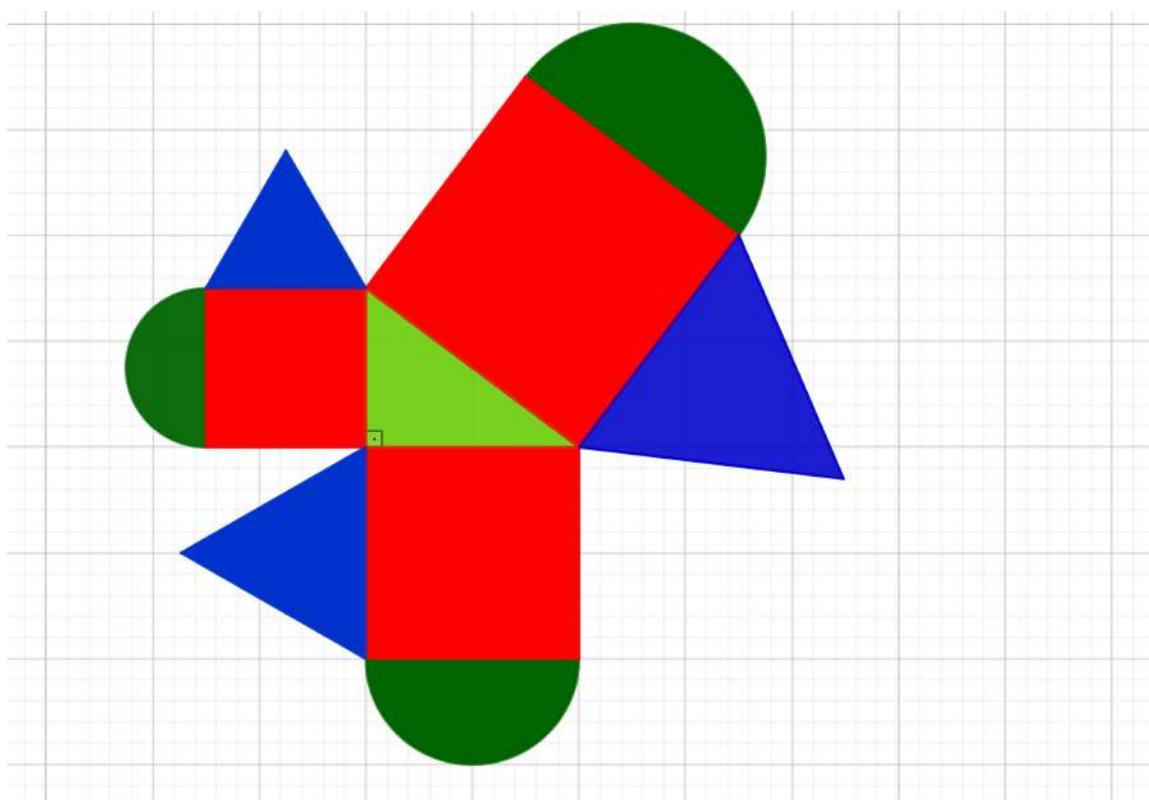
Fonte: A autora.

Figura 89 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A autora.

Figura 90 – Polígonos e semicírculos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A autora.

10 Aplicação das Sequências Didáticas de uma Interpretação Geométrica dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya

As sequências didáticas do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Pólya, apresentadas no Capítulo 9 foram aplicadas pela professora Idalice Maria Santiago Oliveira, na turma do 1º ano B, com 34 alunos, numa escola pública, localizada na cidade de Boqueirão, no estado da Paraíba.

Para realizarem as atividades das sequências didáticas, os alunos foram divididos em duplas para facilitar o engajamento e o desenvolvimento das atividades.

Neste capítulo faremos um relato de experiência da aplicação dessas sequências didáticas.

10.1 Aplicação da Avaliação Diagnóstica

Inicialmente, no período de uma aula os alunos fizeram a avaliação diagnóstica, (ver Figuras 91 e 92), sugerida no Capítulo 9, com o objetivo de verificar o nível de conhecimentos básicos para a aplicação das atividades relacionadas aos teoremas de Pitágoras e de Pólya.

Figura 91 – Alunos realizando a avaliação diagnóstica.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora

Figura 92 – Alunos realizando a avaliação diagnóstica.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora

Na semana seguinte a avaliação diagnóstica foi necessário fazer uma revisão sobre conceitos básicos de semelhança e áreas de figuras planas, mais especificamente área de quadrado, triângulo equilátero e hexágono regular. Assim os alunos foram preparados para realizar as atividades referentes aos teoremas de Pitágoras e de Pólya.

10.2 Aplicação da Sequência Didática do Teorema de Pitágoras

As atividades relativas ao Teorema de Pitágoras foram realizadas no período de duas aulas.

No primeiro momento, os alunos desenharam em uma folha de papel quadriculado, um triângulo retângulo com catetos medindo quatro centímetros e três centímetros (ver Figuras 93 e 94). Em seguida, recortaram e colaram sobre esses catetos, quadrados de lados com mesma a medida e sobre a hipotenusa colaram um quadrado de medida cinco centímetros. Ao calcular a área de cada quadrado, os estudantes constataram que a soma das áreas dos quadrados colados sobre os catetos é igual a área do quadrado colado sobre a hipotenusa. Após essa constatação, houve uma conversação entre a professora e os estudantes sobre esse resultado. De princípio, os alunos não perceberam que esse fato se refere ao Teorema de Pitágoras.

No segundo momento, os alunos recortaram os polígonos que compunham os quadrados construídos sobre os catetos (ver Figuras 95 e 96) e com eles formaram o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo (ver Figura 97), constatando que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo. E a partir daí, esse resultado é apresentado aos alunos como a forma geométrica do Teorema de Pitágoras.

Figura 93 – Alunos desenhando um triângulo retângulo para colar quadrados sobre os seus lados.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 94 – Alunos desenhando um triângulo retângulo para colar quadrados sobre os seus lados.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Para finalizar, os alunos realizaram e encontram o resultado correto da avaliação da atividade 1 sem dificuldade.

Figura 95 – Alunos recortando os polígonos para formarem quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora

Figura 96 – Alunos recortando os polígonos para formarem quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.

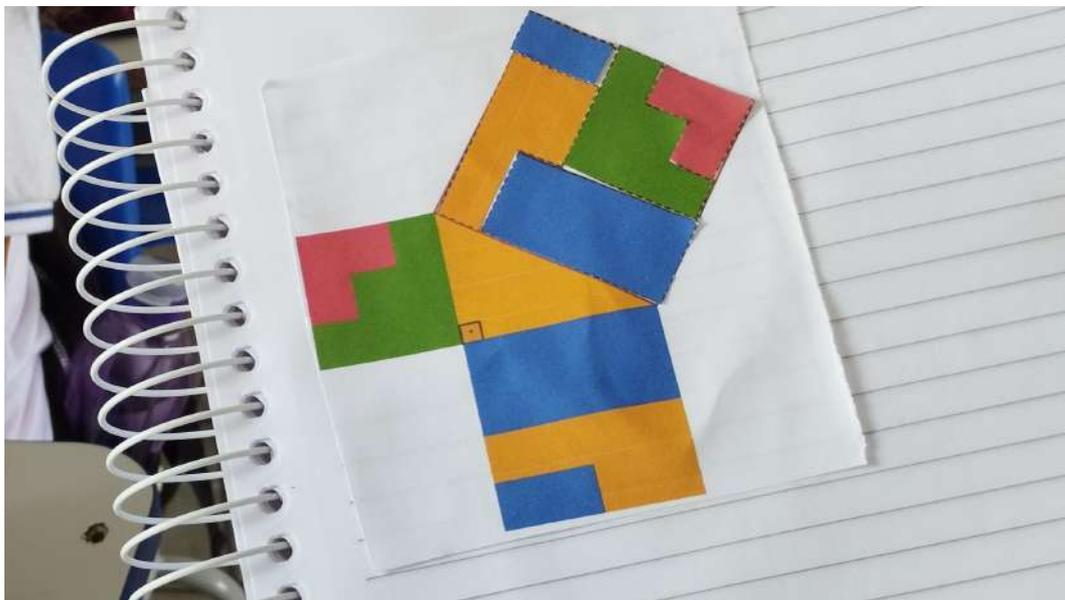


Fonte: Pesquisa realizada pela autora

10.3 Aplicação da Sequência Didática do Teorema de Pólya

No segundo dia foi aplicada a primeira atividade relativa ao Teorema de Pólya. Os alunos não tiveram dificuldade para realizar a atividade. Recortaram os polígonos que

Figura 97 – Quadrado construído, pelos alunos, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 98 – Quadrado construído, pelos alunos, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

formavam os triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo e com esses polígonos formaram um triângulo equilátero sobre a hipotenusa do triângulo retângulo (ver Figuras 99 e 100). Dessa forma, os alunos perceberam que a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo.

Os alunos realizaram essa atividade com muita empolgação principalmente quando perceberam a relação entre as áreas estudadas no Teorema de Pitágoras também é vá-

Figura 99 – Alunos recortando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

lida para triângulos semelhantes construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, no nosso caso usamos triângulos equiláteros (ver Figuras 102 e 103).

No terceiro dia, os alunos realizaram a atividade 2, dessa vez usando os hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Inicialmente, perceberam que cada hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros (ver Figura 104). Daí, já sabendo da relação existente entre as áreas de triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Foi fácil os alunos constatarem que a área de hexágono regular construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre os catetos.

No quarto dia, os alunos realizaram a atividade 3. Sendo uma atividade mais lúdica, de forma mais livre, os alunos formaram figuras semelhantes com as peças do quebra-cabeça da Figura 106. E a partir dessas construções (ver Figuras 107, 108 e 109) os alunos foram levados a concluir que esse resultado é o Teorema de Pólya, uma generalização do Teorema de Pitágoras.

Essa atividade foi muito interessante, os alunos se divertiram muito em busca de formar figuras semelhantes sobre os catetos do triângulo retângulo e de forma intuitiva aplicaram a recíproca do Teorema de Pitágoras (Figura 108).

Figura 100 – Alunos recortando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 101 – Alunos colando os polígonos para formarem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 102 – Triângulos equiláteros construídos, pelos alunos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 103 – Triângulos equiláteros construídos, pelos alunos sobre os lados do triângulo retângulo.



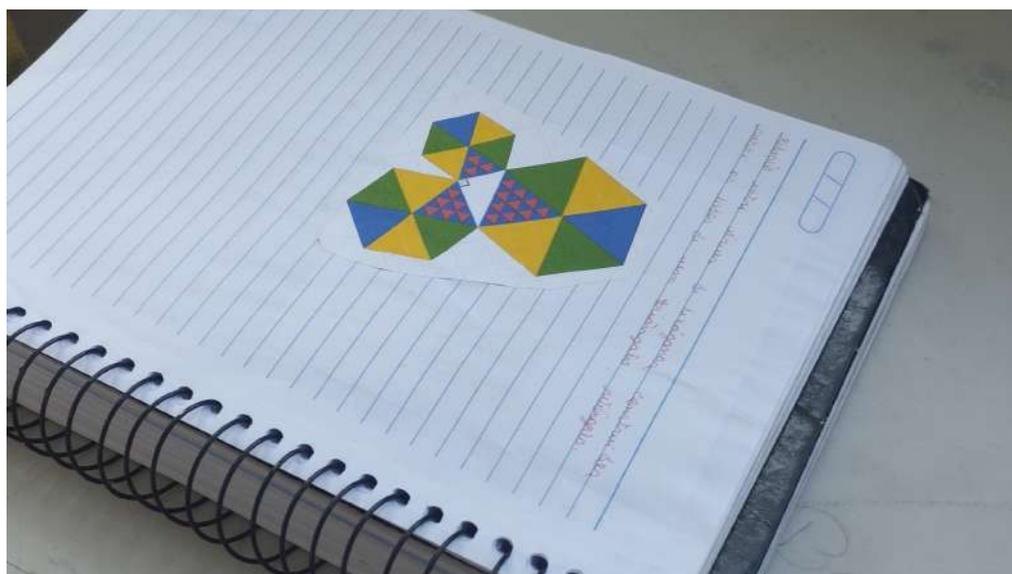
Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 104 – Hexágonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 105 – Hexágonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo.



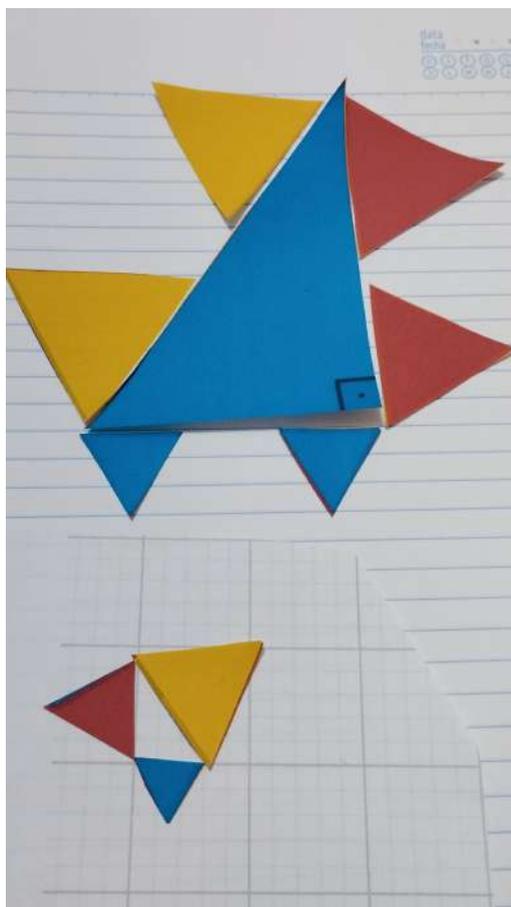
Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 106 – Quebra- cabeça para construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 107 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 108 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 109 – Construção de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

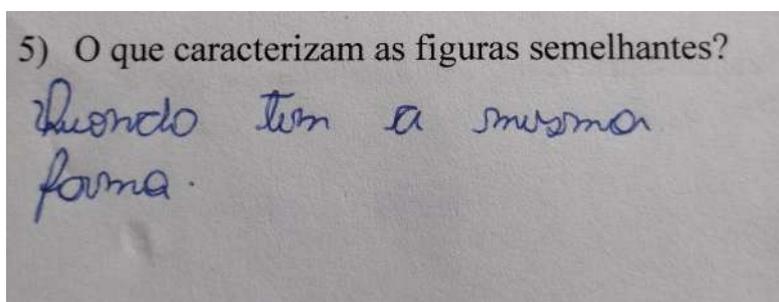
11 Análise das Aplicações das Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya em sala de aula

Neste capítulo faremos uma análise da aplicação da avaliação diagnóstica e das sequências didáticas do Capítulo 10.

11.1 Análise da avaliação diagnóstica

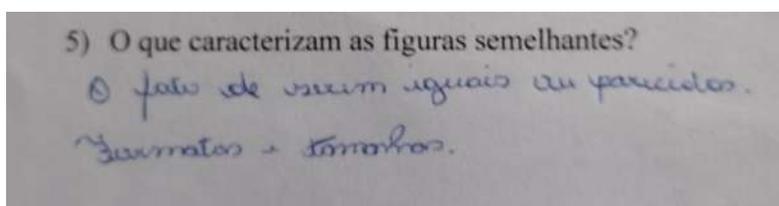
Com a avaliação diagnóstica foi detectado que os alunos conhecem as características de um triângulo retângulo e conhecem figuras semelhantes. Associam figuras semelhantes ao formato e tamanho. Vejamos algumas de suas respostas nas Figuras 110, 111 e 112.

Figura 110 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

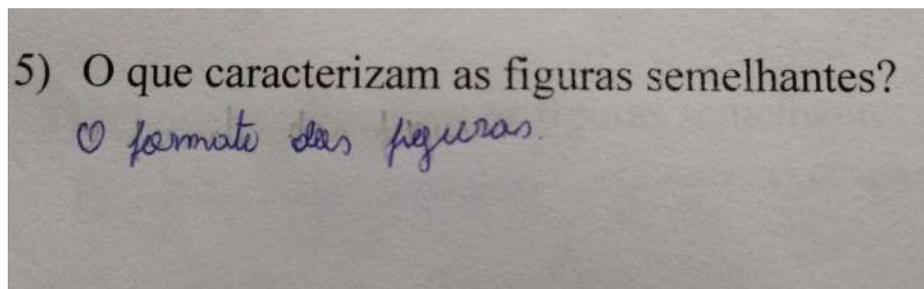
Figura 111 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

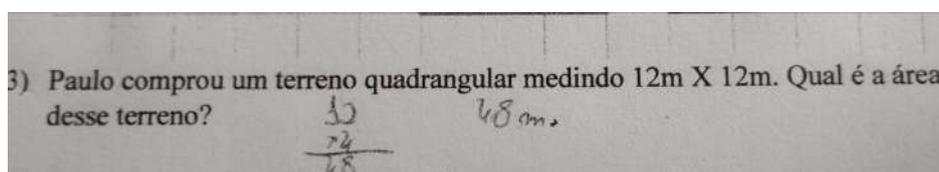
Alguns alunos apresentaram dificuldades em calcular a área de um quadrado, confundindo área com perímetro (veja Figura 113). Daí, foi necessário fazermos uma revisão de conceitos básicos de Geometria Plana, como área e perímetro de polígonos, mais especificamente quadrado e triângulo equilátero, que foram utilizados nas

Figura 112 – Caracterização de semelhança, de figuras, pelos alunos.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 113 – Avaliação diagnóstica.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

sequências didáticas para os teoremas de Pitágoras e de Pólya. Essa revisão foi feita no período de uma aula.

Após a revisão iniciamos a aplicação das sequências didáticas que serão analisadas na próxima seção.

11.2 Análise da aplicação das sequências didáticas dos teoremas de Pitágoras e de Pólya

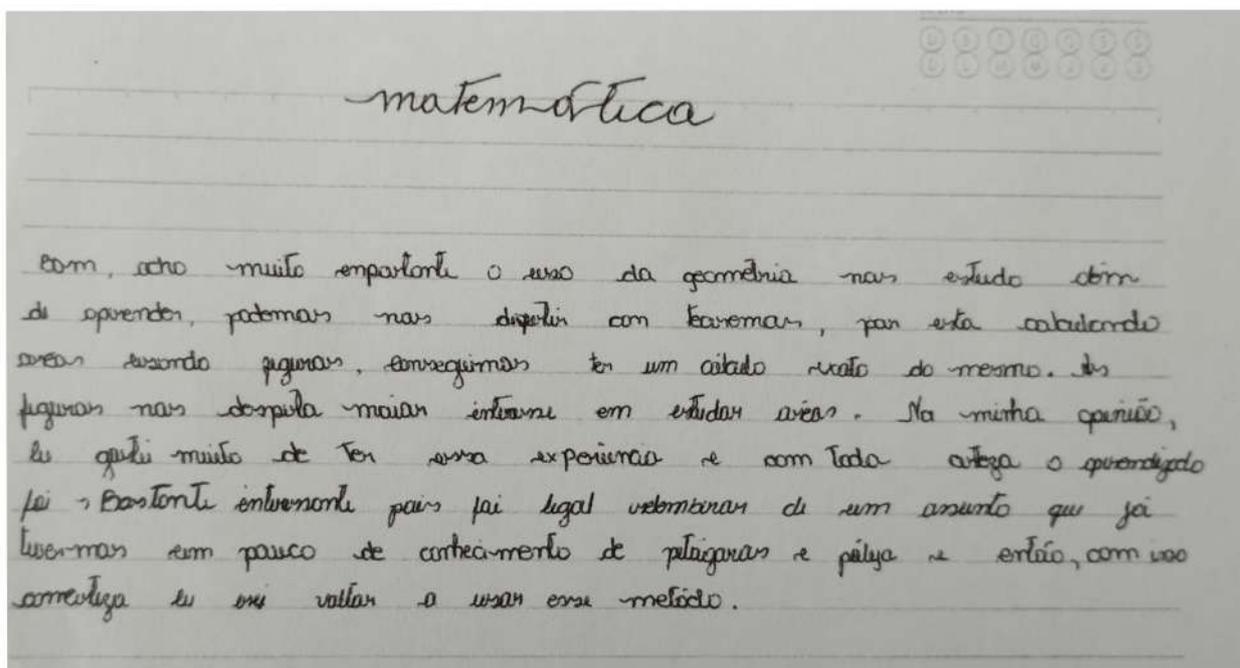
Durante a realização das atividades das sequências didáticas, os alunos se mostraram mais participativos e empolgados por ser algo diferente das atividades convencionais que geralmente eles realizam.

Os alunos, no 1º ano do Ensino Médio, conhecem e estão acostumados com o Teorema de Pitágoras no seu formato algébrico, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, e muitas vezes confundem catetos e hipotenusa do triângulo retângulo. E também não relacionam a^2 , b^2 e c^2 como áreas de quadrados de lados a , b e c respectivamente.

A forma geométrica do Teorema de Pitágoras despertou nos alunos o gosto pela Geometria, principalmente no cálculo de áreas. Vejamos alguns de seus depoimentos nas Figuras 114, 115, 116 e 117.

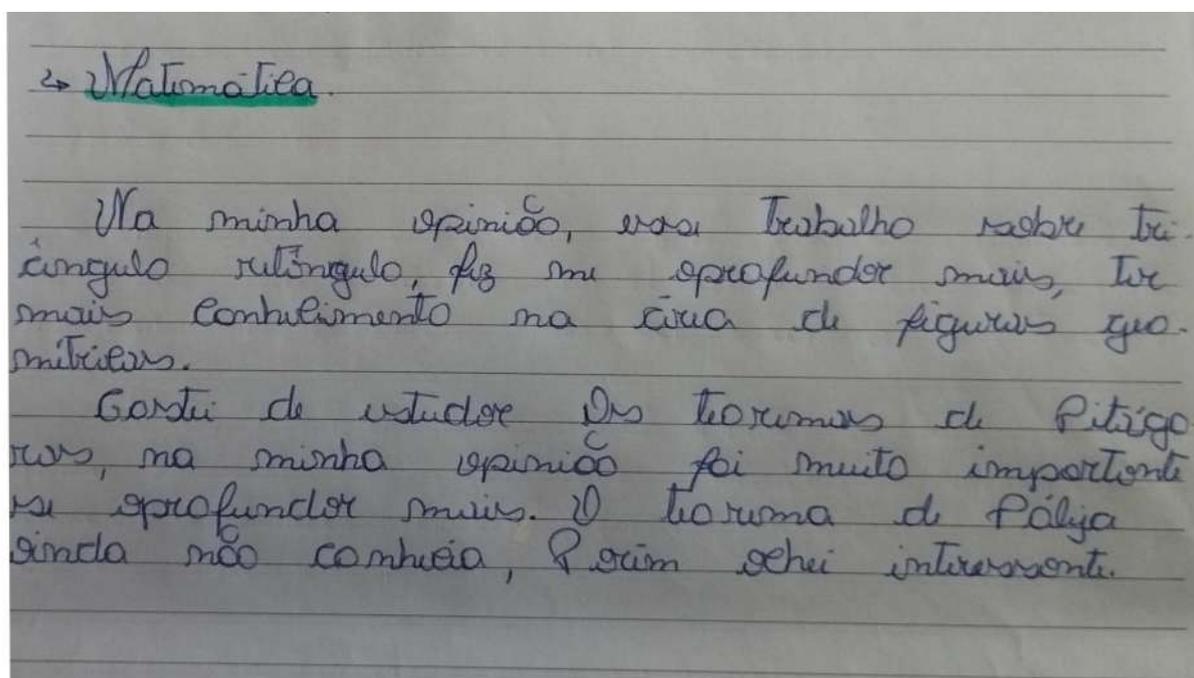
O Teorema de Pólya, foi uma novidade para os alunos, eles não sabiam da existência dessa generalização do Teorema de Pitágoras. Pois, o Teorema de Pólya não é apresentado nos livros didáticos do Ensino Básico.

Figura 114 – Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

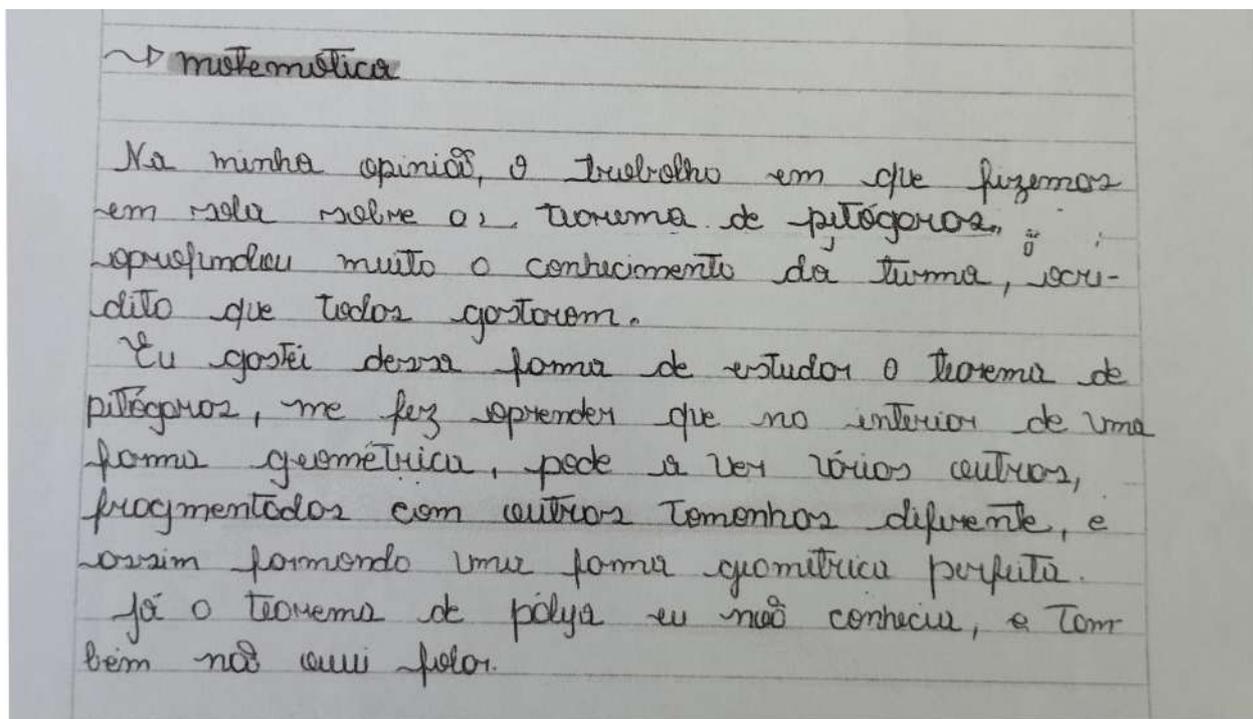
Figura 115 – Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

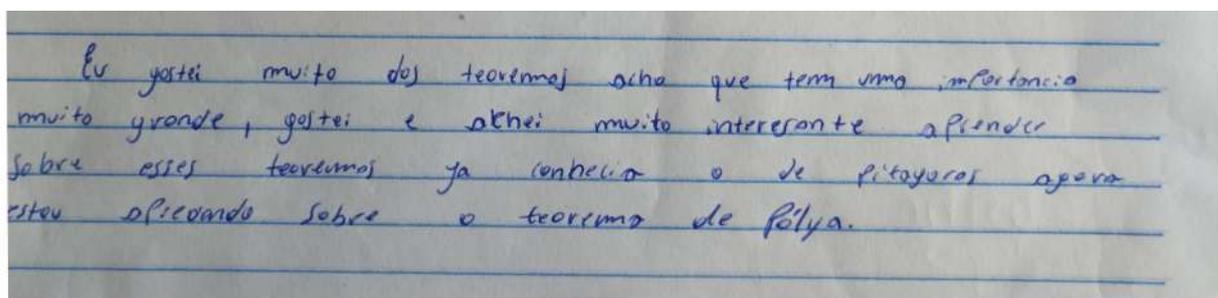
Os alunos ficaram muito entusiasmados ao construírem triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo e perceberem a relação existente entre suas áreas: a

Figura 116 – Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

Figura 117 – Depoimento de alunos sobre as Sequências Didáticas dos Teoremas de Pitágoras e de Pólya.



Fonte: Pesquisa realizada pela autora.

área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos do triângulo retângulo. Despertando assim o interesse em outras formas geométricas, hexágonos regulares e figuras semelhantes.

As sequências didáticas para os teoremas de Pitágoras e de Pólya mostraram aos alunos que $a^2 = b^2 + c^2$ é uma relação de áreas de quadrados. Sugeriram ainda que a relação de áreas é válida para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo, resultando no Teorema de Pólya, ou seja $A = B + C$ com A, B e C as áreas construídas sobre a hipotenusa e catetos, respectivamente, do

triângulo retângulo.

A geometrização de teoremas, no nosso caso os teoremas de Pitágoras e de Pólya, os tornam mais atrativos aos olhos dos estudantes. Pois, a Geometria dá um aspecto visual aos teoremas, possibilitando uma aprendizagem mais significativa. No nosso caso, os alunos ao lembrarem dos teoremas de Pitágoras e de Pólya terão em mente a imagem que os representam.

12 O uso do Software GeoGebra para dinamizar os teoremas de Pitágoras e de Pólya

O *GeoGebra* é um software de Matemática gratuito, dinâmico que utiliza Álgebra e Geometria, podendo ser usado em todos os níveis de ensino.

Neste capítulo, apresentamos animações dos teoremas de Pitágoras e de Pólya usando o Software GeoGebra. Assim, apresentaremos aos alunos do Ensino Básico, os teoremas de Pitágoras e de Pólya, de forma dinâmica, eficiente e atrativa. Pois, não há dúvida que o uso de aplicativos digitais tornam as aulas de Matemática mais atraentes para os estudantes.

Na concepção de Mathias em (MATHIAS; SILVA; LEIVAS, 2019, p.63) “devido a esse dinamismo proveniente das tecnologias digitais, é possível aliar as demonstrações matemáticas ou, até mesmo, as resoluções de problemas, a animações”.

A partir desta perspectiva, mostraremos algumas figuras, que foram usadas nas sequências didáticas, para os teoremas de Pitágoras e de Pólya do Capítulo 9 que podem ser utilizadas no software GeoGebra para mostrar geometricamente os teoremas de Pitágoras e de Pólya.

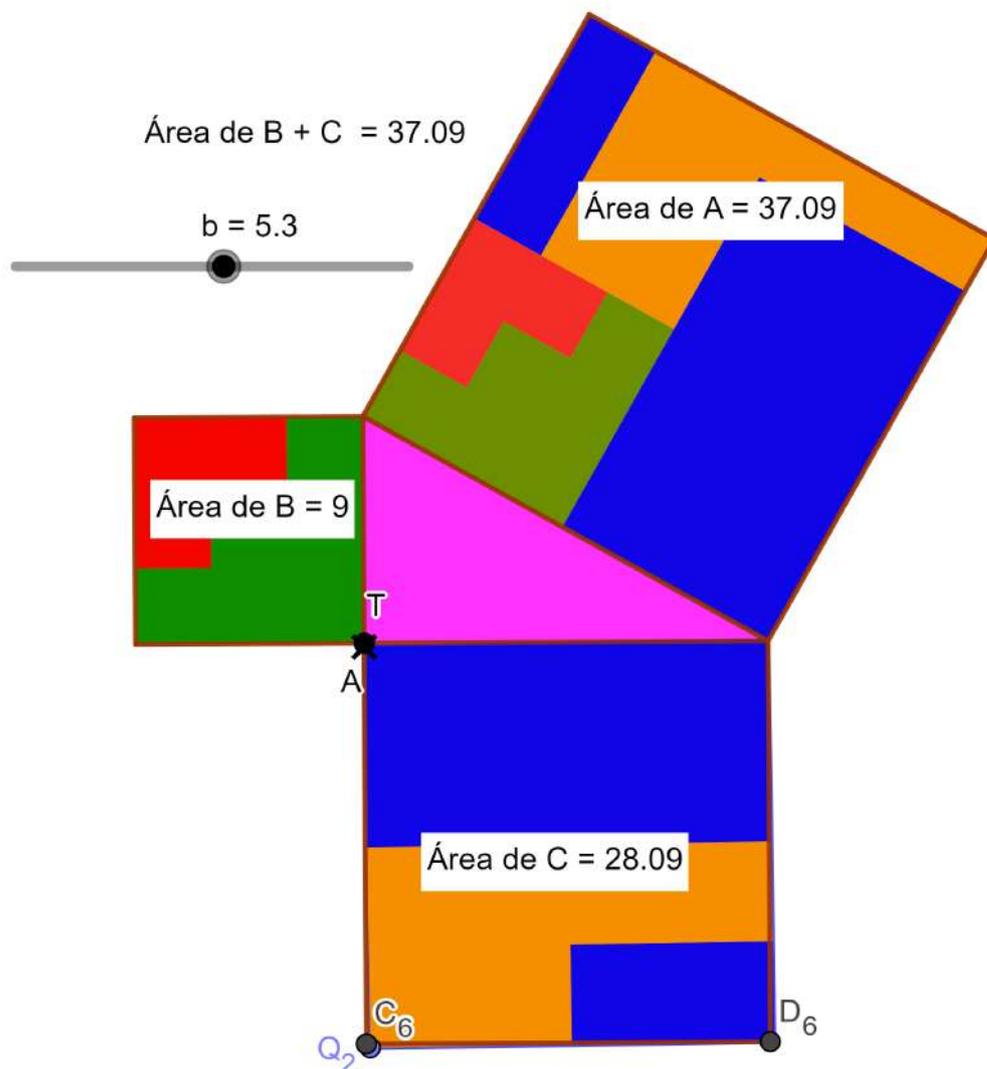
12.1 Teorema de Pitágoras com o uso do Software GeoGebra

Nesta seção, mostraremos como usar o Software GeoGebra para dar uma animação do Teorema de Pitágoras, usando a Figura 76.

No primeiro momento, construímos a Figura 118 no GeoGebra, de forma que ao juntarmos o ponto A com o ponto T , forma-se a Figura 119. Ao movimentarmos o controle deslizante alteramos o tamanho dos lados do triângulo retângulo e as peças que compõem os quadrados sobre os lados do triângulo retângulo vão modificando o seu tamanho, mas a relação $A = B + C$ é mantida. Obtendo assim uma animação do Teorema de Pitágoras.

E para mostrar a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo também elaboramos um quebra-cabeça de forma que as peças se encaixem nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, conforme Figura 120. Essas peças se encaixam perfeitamente para triângulos retângulos com medidas 3, 4 e 5 (ver Figura 121). Pois, ao alterarmos os valores dos catetos as peças

Figura 119 – Movimentação, no Geogebra, de quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.



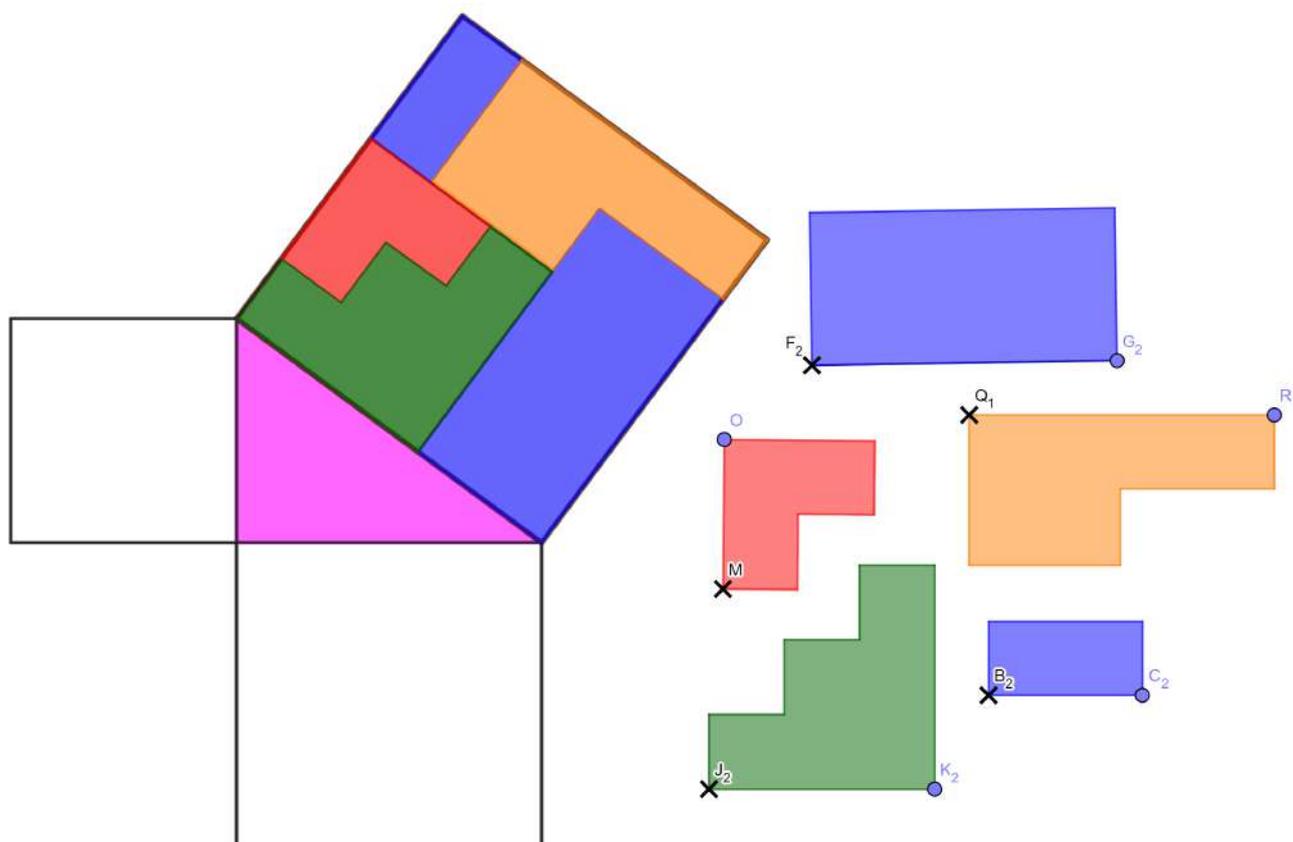
Fonte: A Autora.

os lados do triângulo retângulo. Para isso, inicialmente construímos no GeoGebra um triângulo retângulo e sobre os lados do triângulo retângulo construímos triângulos equiláteros (ver Figura 122).

O objetivo das peças desse quebra-cabeça é cobrir os triângulos equiláteros, construídos sobre os catetos. Essas peças são congruentes aos polígonos que revestem a hipotenusa. As medidas utilizadas nesse quebra-cabeça são para triângulos 3, 4 e 5. Mas podemos generalizar para um triângulo retângulo qualquer. Assim, mostra-se que a área do triângulo equiláteros sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos triângulos equiláteros sobre os catetos do triângulo retângulo (ver Figura 123).

Para mostrar que, a área do hexágono construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos hexágonos construídos sobre os catetos usamos

Figura 120 – Quebra-cabeça para o Teorema de Pitágoras.



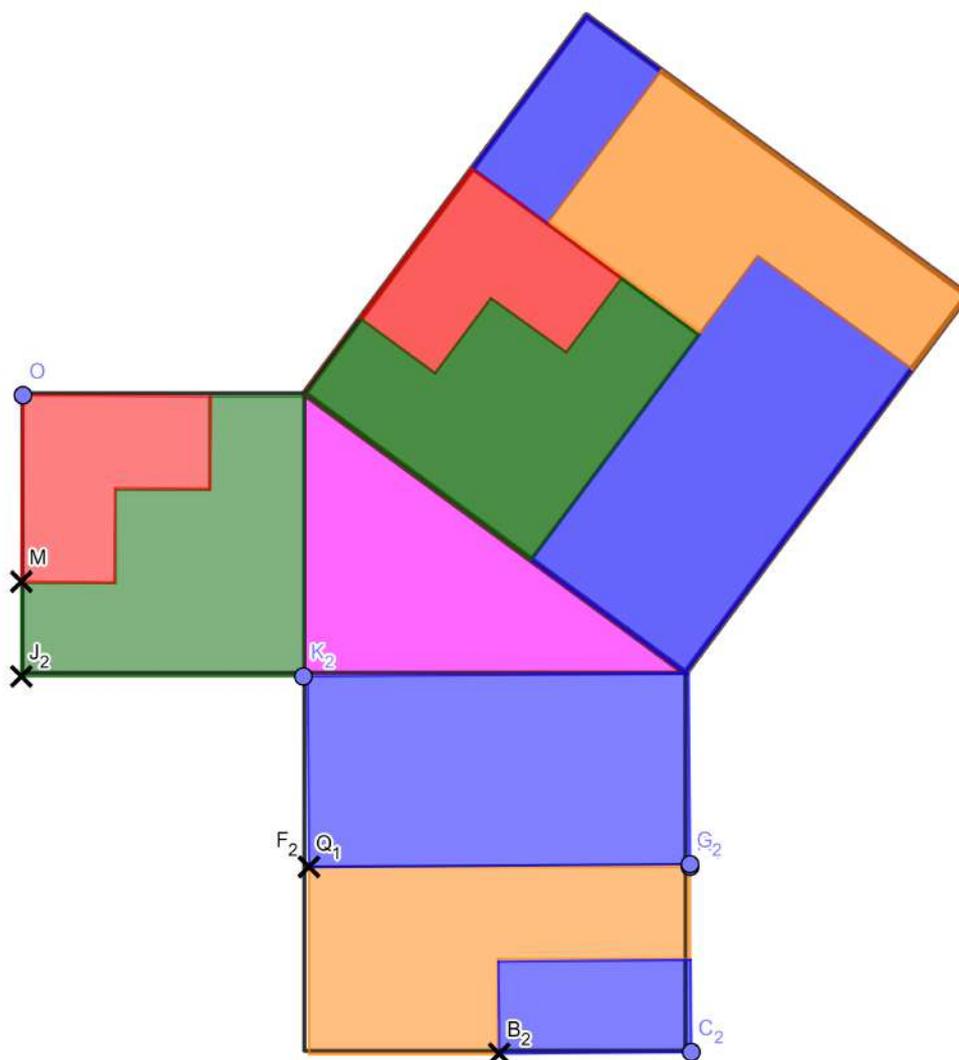
Fonte: A Autora.

a construção da Figura 124, pois ao movimentarmos o controle deslizante as áreas dos hexágonos se alteram e a relação de áreas permanece, ou seja, $A = B + C$. Da mesma forma, mostramos a relação de áreas com os semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo na Figura 125.

Agora que já mostramos a relação de áreas, de figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo com quadrados, triângulos equiláteros e semicírculos, então os alunos já podem deduzir essa relação com a montagem de figuras como Figura 126. Para fazermos essa montagem juntamos o quadrado vermelho com o cateto que possui a mesma medida de seu lado. Assim surgirá sobre a hipotenusa e sobre o outro cateto quadrados vermelhos. Do mesmo modo, colocamos o triângulo e o semicírculo de modo a formar a Figura 127.

De forma geral, podemos utilizar o quebra-cabeça da Figura 128, para fazer a montagem de figuras semelhantes, construídas sobre os lados do triângulo retângulo para introduzir o Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras. Mostrando a relação existente entre as áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo, ou seja, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

Figura 121 – Quebra-cabeça com peças poligonais para dinamizar o Teorema de Pitágoras.



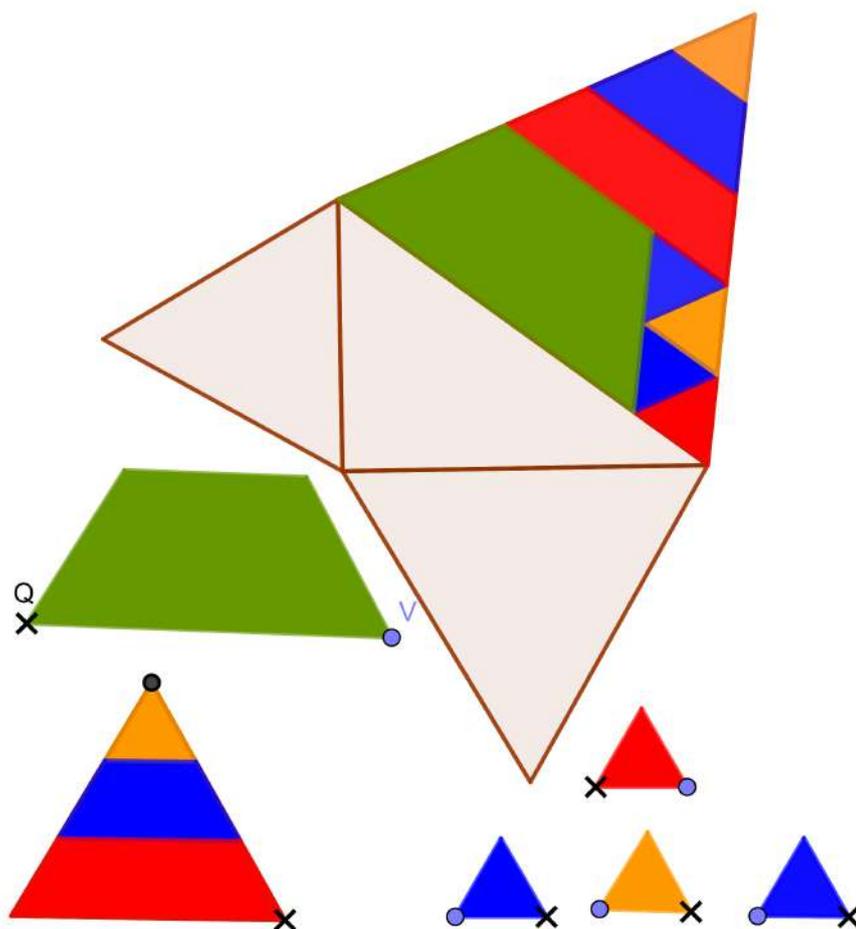
Fonte: A Autora.

Para movimentarmos os quadrados do quebra-cabeça da Figura 128, construímos no GeoGebra a Figura 129 que ao juntarmos os pontos de mesma cor na hipotenusa do triângulo retângulo, formam-se figuras semelhantes sobre os catetos (ver Figura 130).

As figuras apresentadas nesse capítulo podem ser utilizadas para mostrar os teoremas de Pitágoras e de Pólya em sua forma geométrica, possibilitando assim uma forma visual e dinâmica desses teoremas com o uso do software GeoGebra. Aplicar os recursos digitais torna o estudo de teoremas mais atrativo e dinâmico, facilitando a aprendizagem dos alunos em todos os níveis de ensino.

Através do link <https://www.geogebra.org/m/vqrc5jec>, o leitor poderá acessar as figuras para fazer as movimentações e demonstrações que foram mostradas nesse capí-

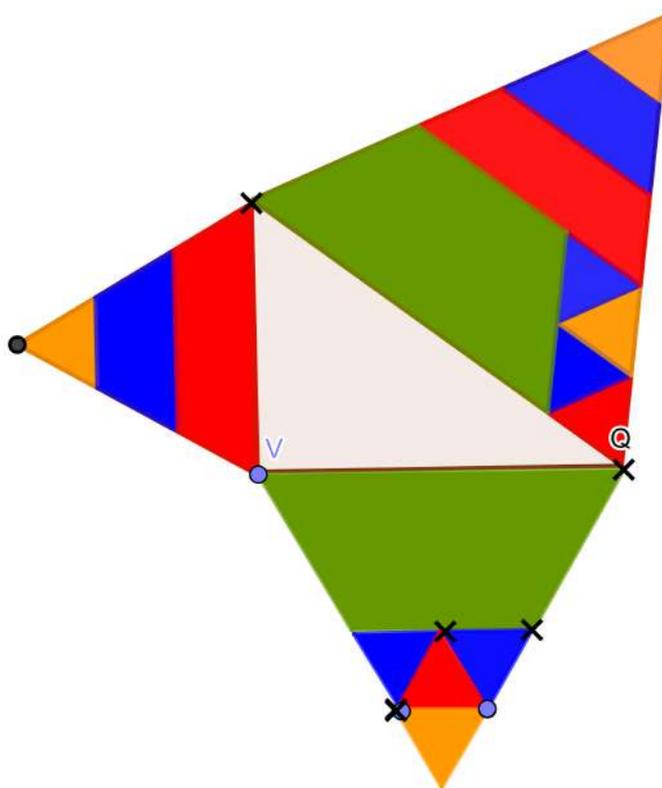
Figura 122 – Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya, considerando triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: A Autora.

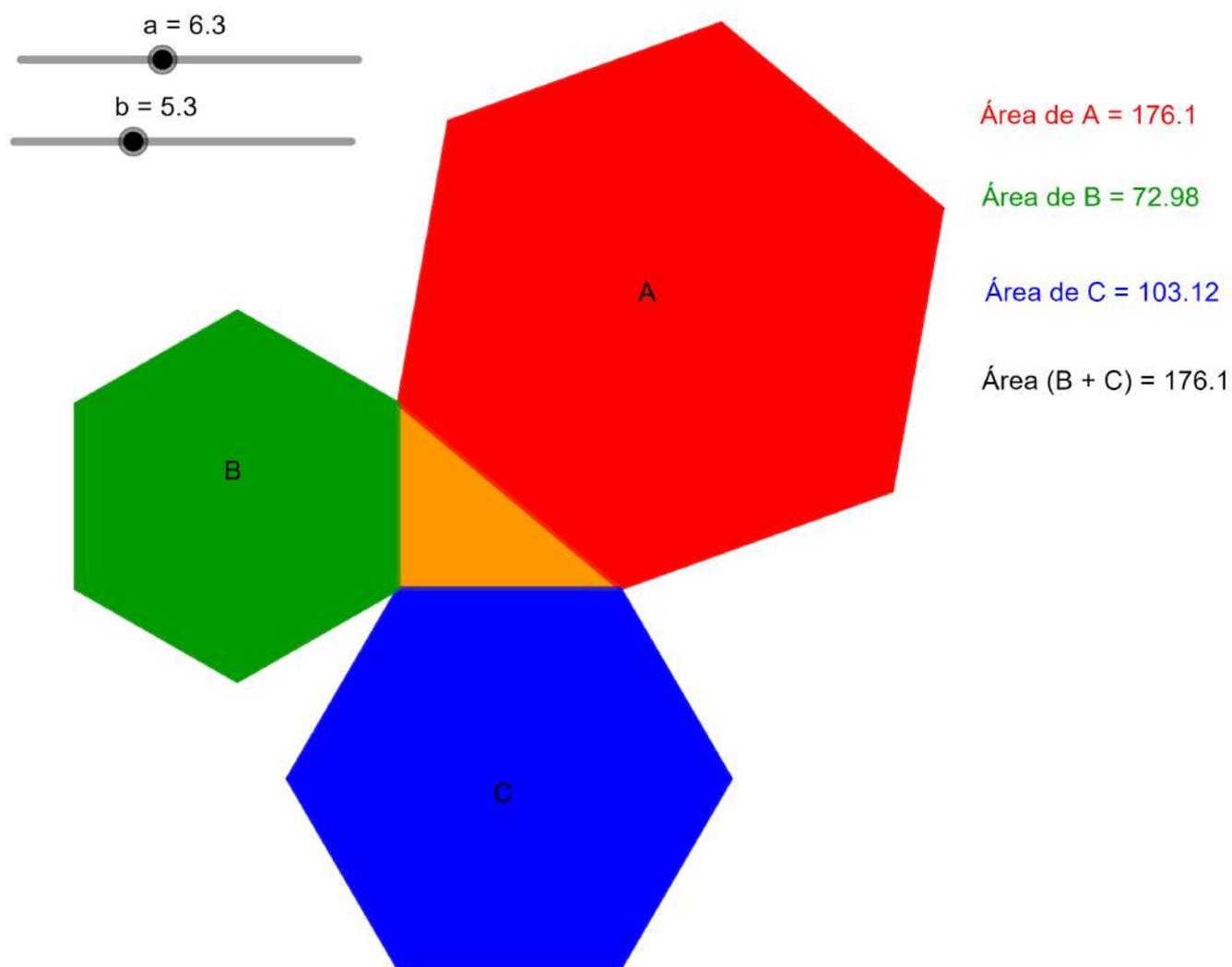
tulo.

Figura 123 – Quebra-cabeça com peças poligonais para dinamizar o Teorema de Pólya, considerando triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



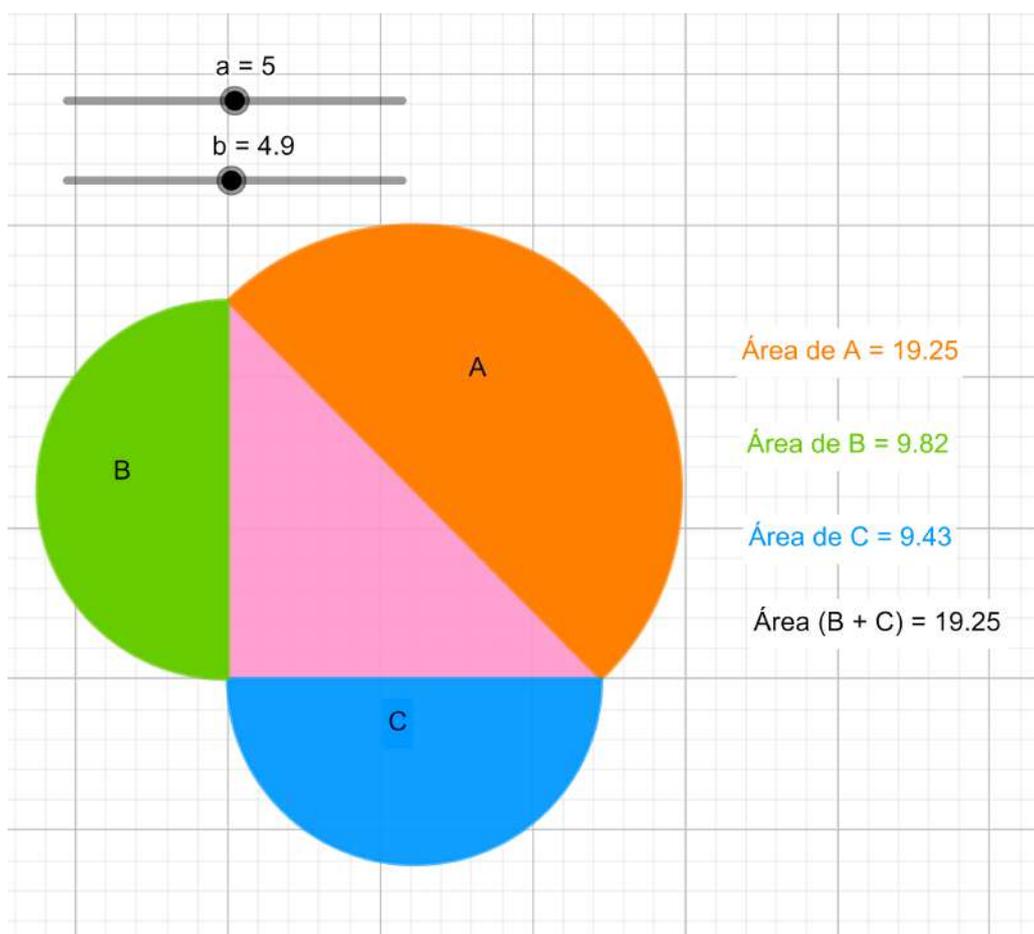
Fonte: A Autora.

Figura 124 – Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



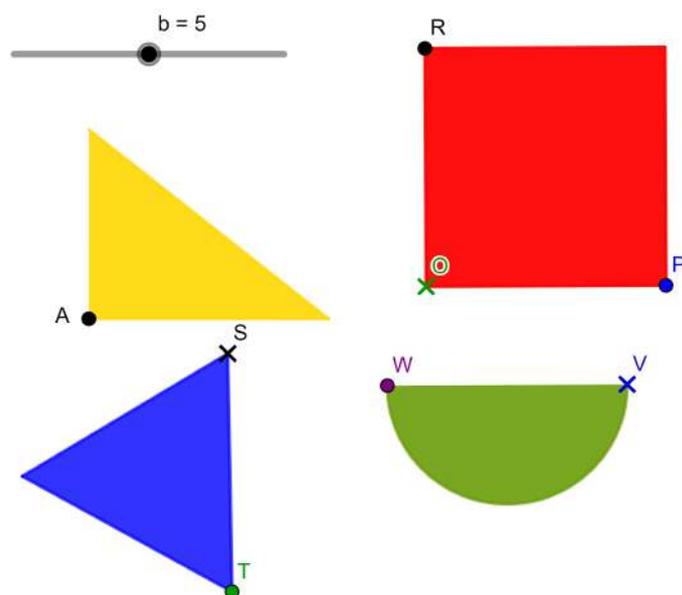
Fonte: A Autora.

Figura 125 – Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



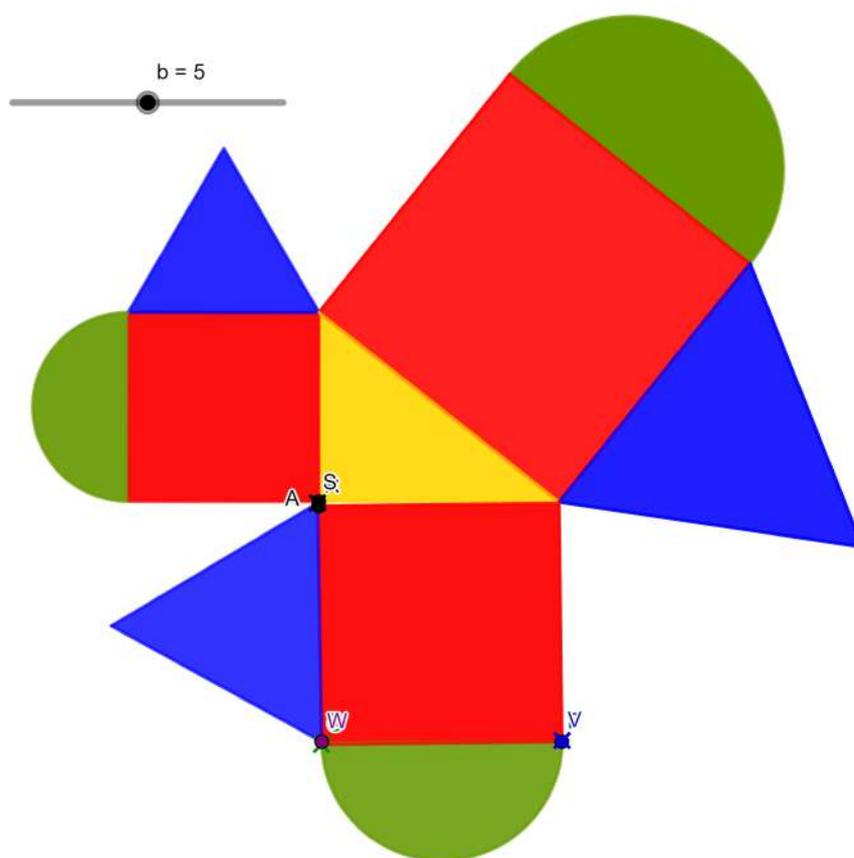
Fonte: A Autora.

Figura 126 – Peças para montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.



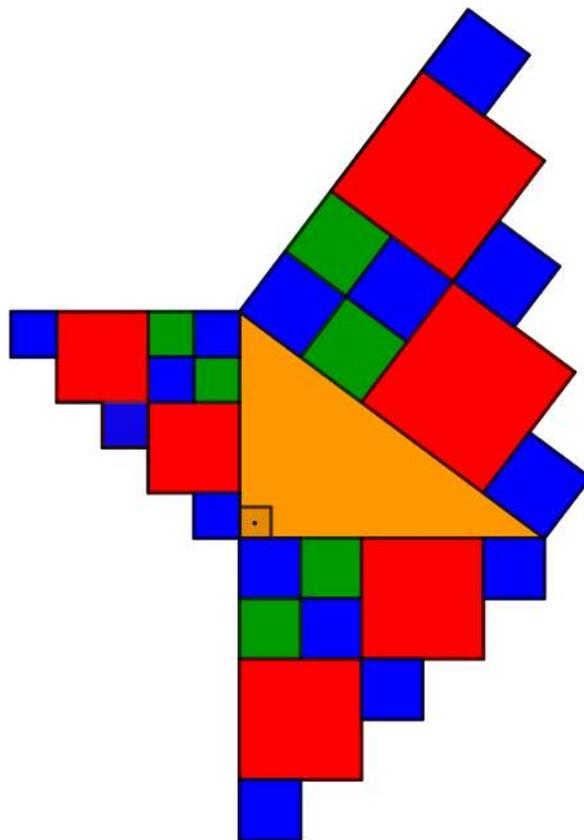
Fonte: A Autora.

Figura 127 – Exemplo de montagem de figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo.



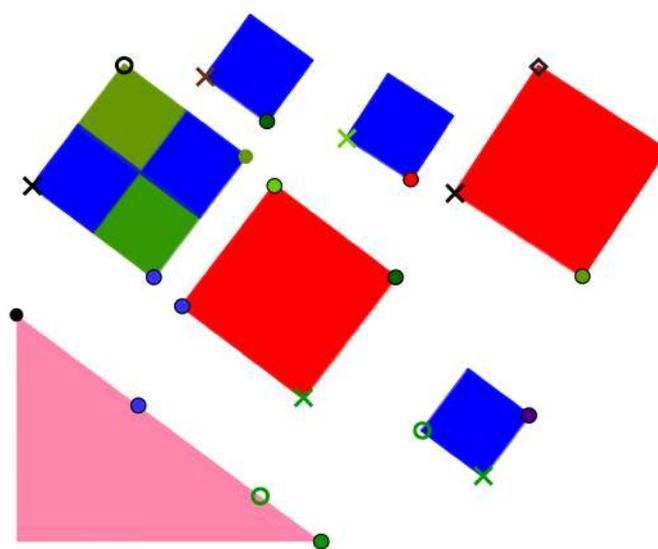
Fonte: A Autora.

Figura 128 – Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya.



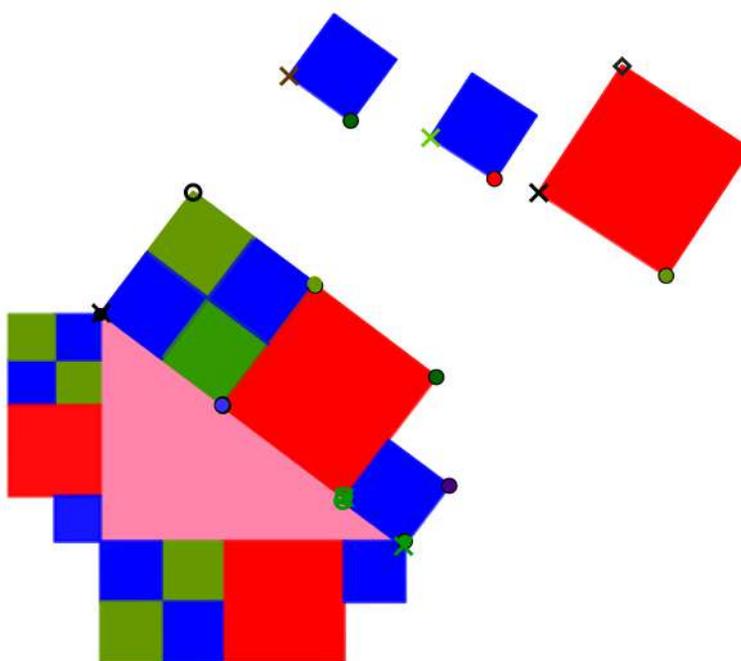
Fonte: A Autora.

Figura 129 – Quebra-cabeça para o Teorema de Pólya.



Fonte: A Autora.

Figura 130 – Figuras semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo, usando quadrados.



Fonte: A Autora.

13 Conclusões

Concluimos que as formas geométricas dos teoremas de Pitágoras e de Pólya possibilitam uma aprendizagem mais significativa para os estudantes. Pois, a Geometria favorece a compreensão desses teoremas e desenvolve o pensamento dos estudantes, principalmente relacionado a áreas. Os estudantes passam a compreender que a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ está relacionada a áreas e não é apenas letras sem sentido. Com a Geometria é possível trazer os teoremas para o mundo real, dando formas e visibilidades a esses teoremas.

Com a aplicação das sequências didáticas do Capítulo 9 foi possível perceber o quanto as formas geométricas atraem os estudantes, despertando os seus interesses no estudo dos teoremas. Além disso, desenvolvem o pensamento lógico dedutivo, principalmente nas atividades usando quebra-cabeça por possibilitarem um maior dinamismo e compreensão desses teoremas.

Com relação aos recursos digitais, no nosso caso o software GeoGebra, concluimos que o uso de tal recurso fortalece e dinamiza conceitos importantes relacionados ao estudo de Matemática, especificamente conceitos de áreas e semelhanças de figuras que são aplicados para as versões geométricas dos teoremas de Pitágoras e de Pólya. O uso do GeoGebra torna a apresentação dos teoremas de forma mais dinâmica, despertando interesse nos estudantes.

A apresentação do Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras é uma novidade no Ensino Básico e proporcionou aos estudantes uma noção mais geral do Teorema de Pitágoras. Assim, compreenderam que a relação $A = B + C$, com A , B e C as áreas das figuras construídas sobre a hipotenusa a e os catetos b e c do triângulo retângulo, respectivamente, é válida para quaisquer figuras semelhantes.

Referências

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. São Paulo: SBM, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 42, 62 e 158.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harbra, 1978. Citado na página 53.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 09 jan 2023. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 30 e 102.
- BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e aplicações*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2015. Citado na página 31.
- CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 40.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 48, 52 e 68.
- HELLMEISTER, A. C. P. *Geometria em Sala de Aula*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 88.
- LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1993. Citado na página 48.
- LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 25, 78, 82, 83 e 88.
- LIMA, E. L. *Coordenadas no Plano*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 25, 48, 51, 58 e 65.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. Citado na página 45.
- LIMA, E. L. et al. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado na página 45.
- LOOMIS, E. S. *The Pythagoreen Theorem*. New York: National Council of Teachers of Mathematics, 1940. Citado na página 89.
- MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. da; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019. Citado na página 140.
- MORAIS FILHO, D. C. d. *Dez ou Onze Temas Interessantes de Matemática Elementar*. Campina Grande: EDUFCG, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 73.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 25, 42, 43, 58 e 74.

OBMEP. *George Pólya*. 2020. Disponível em: <clubes.obmep.org.br/blog/b_bgpolya>. Acesso em: 07 jan 2023 às 11h55min. Citado na página 88.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. da. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, p. 1–15, 2013. Citado na página 102.

TELARIS. *Sequência didática Teorema de Pitágoras*. 2003. Disponível em: <https://plurall-content.s3.amazonaws.com/oeds/NV_ORG/PNLD/PNLD20/Telaris_Matematica/9ano/03_BIMESTRE/08_VERSAO_FINAL/03_PDFS/19_TEL_MAT_9ANO_3BIM_Sequencia_didatica_2_TRTAT.pdf>. Acesso em: 08 fev 2023. Citado na página 102.

THOMAS, G. B.; FINNY, R. *Cálculo*. São Paulo: Livros Técnicos Científicos, 1965. Citado na página 31.

WAGNER, E. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. 2010. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br>>. Acesso em: 05 de Mar de 2023 às 10h55min. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.

ZABALA, A. *A prática educativa como ensinar*. Porto Alegre: Penso Editora, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 102 e 103.

Apêndices

APÊNDICE A – Derivada de uma função

Apresentamos, neste Apêndice, a definição de derivada de uma função que foi aplicada no Capítulo 3.

A.1 Derivada de uma função

Definição A.1.1. A *derivada* de uma função $\phi(t)$ em um ponto $t \in (a, b)$ é o limite, quando existe,

$$\phi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t}.$$

A derivada nos extremos a e b são as derivadas laterais à direita e à esquerda, respectivamente.

APÊNDICE B – Recíproca do Teorema de Pitágoras

Apresentamos, neste Apêndice, a demonstração da Recíproca do Teorema de Pitágoras que foi utilizada no Capítulo 5, na Seção 5.1 para demonstrar a Proposição 5.1.7.

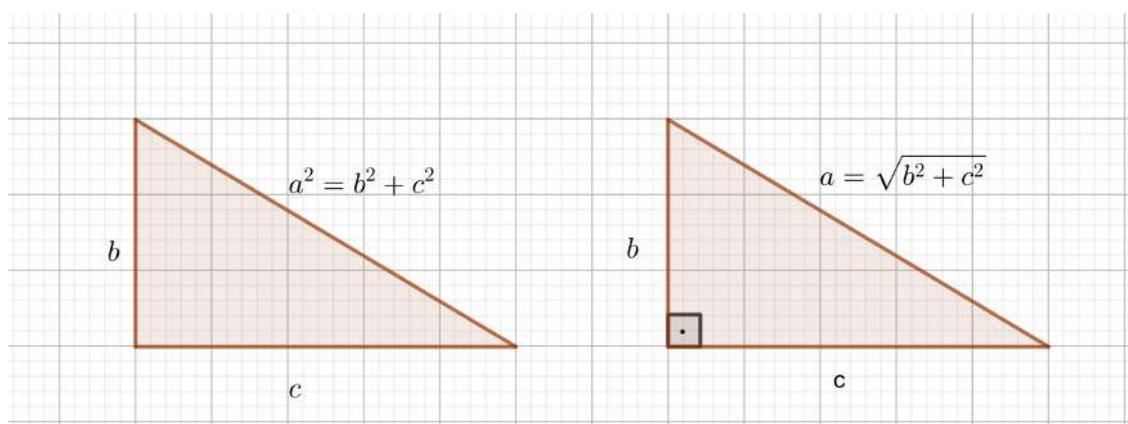
B.1 Recíproca do Teorema de Pitágoras

Teorema B.1.1 (Recíproca do Teorema de Pitágoras). *Um triângulo que possui lados medindo a , b e c . Se $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a .*

Demonstração.

Considere o triângulo de lados a , b e $a^2 = b^2 + c^2$ (Figura 131). Construa um novo triângulo retângulo de catetos com medidas b e c , daí, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo retângulo tem medida $\sqrt{b^2 + c^2}$, logo o triângulo do enunciado do teorema é congruente ao novo triângulo, assim também é retângulo e sua hipotenusa mede a . (BARBOSA, 1995, 99). ■

Figura 131 – Recíproca do Teorema de Pitágoras.



Fonte: A autora.

APÊNDICE C – Sugestão de avaliação diagnóstica da Seção 9.2.3 do Capítulo 9

C.1 Avaliação Diagnóstica

- Um triângulo retângulo possui um ângulo de:
 - 120°
 - 90°
 - 100°
 - 160°
- Um dos triângulos da figura 132 é retângulo. Qual deles ?

Figura 132 – Triângulos.



Fonte: A autora.

- Paulo comprou um terreno quadrangular medindo $12\text{m} \times 12\text{m}$. Qual é a área desse terreno?
- Faça um x no par de figuras semelhantes, ver Figuras , 133, 134, 135 e 136 :
- O que caracterizam as figuras semelhantes?

Figura 133 – Par de semicírculos.



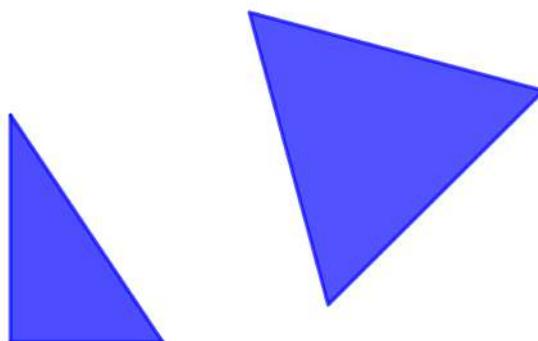
Fonte: A autora.

Figura 134 – Par de estrelas.



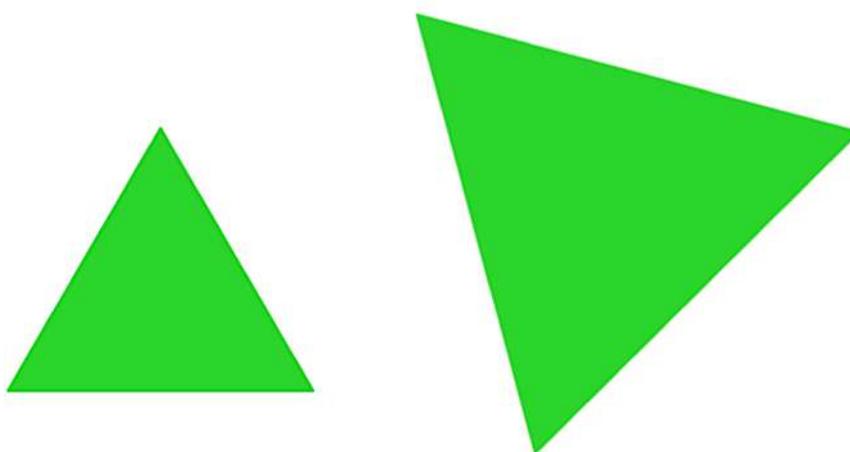
Fonte: A autora.

Figura 135 – Par de triângulos azuis.



Fonte: A autora.

Figura 136 – Par de triângulos equiláteros.

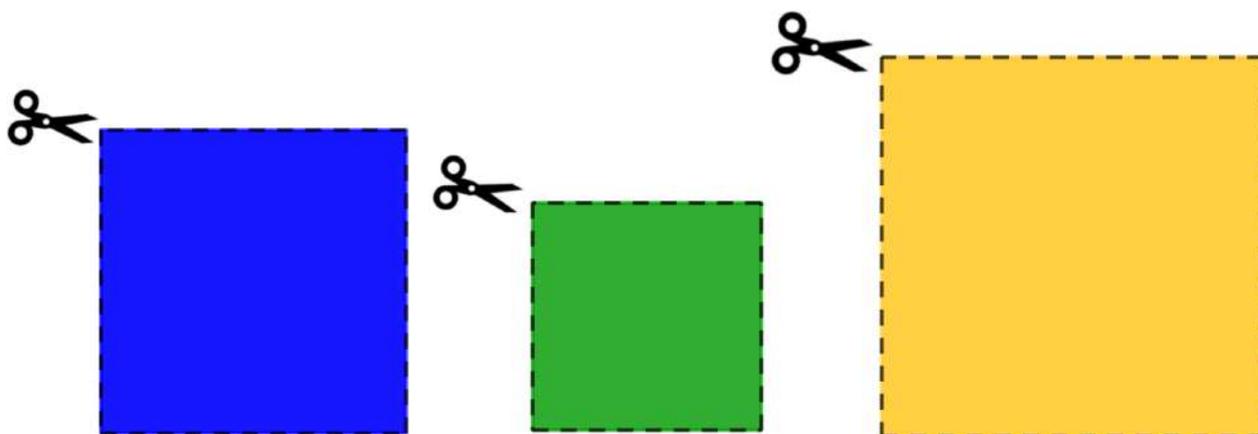


Fonte: A autora.

APÊNDICE D – Figuras usadas nas aplicações das sequências didáticas para os teoremas de Pitágoras e de Pólya

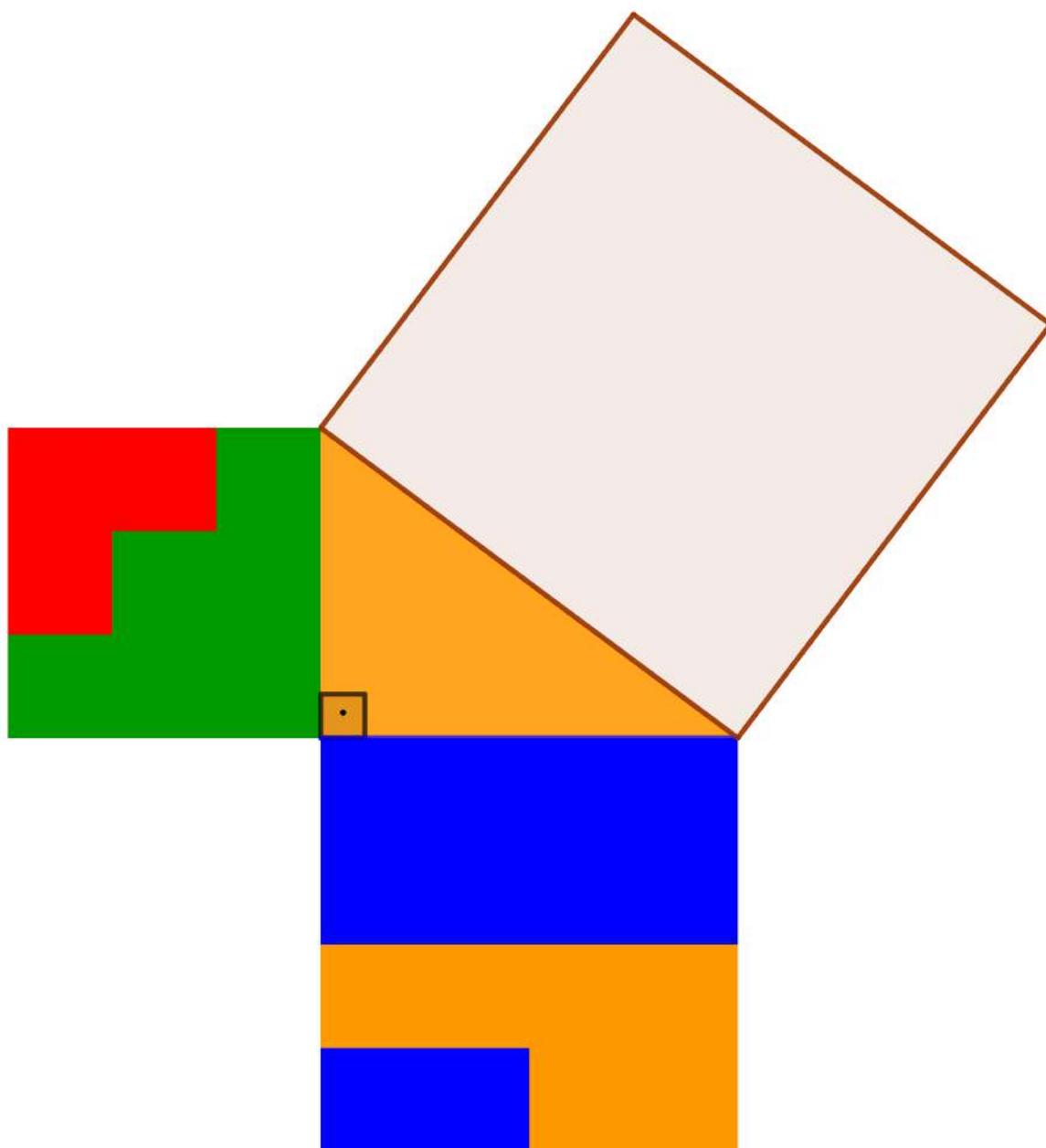
Neste Apêndice disponibilizaremos as figuras sugeridas nas sequências didáticas do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Pólya do Capítulo 9.

Figura 137 – Quadrados para aplicação da atividade 1.



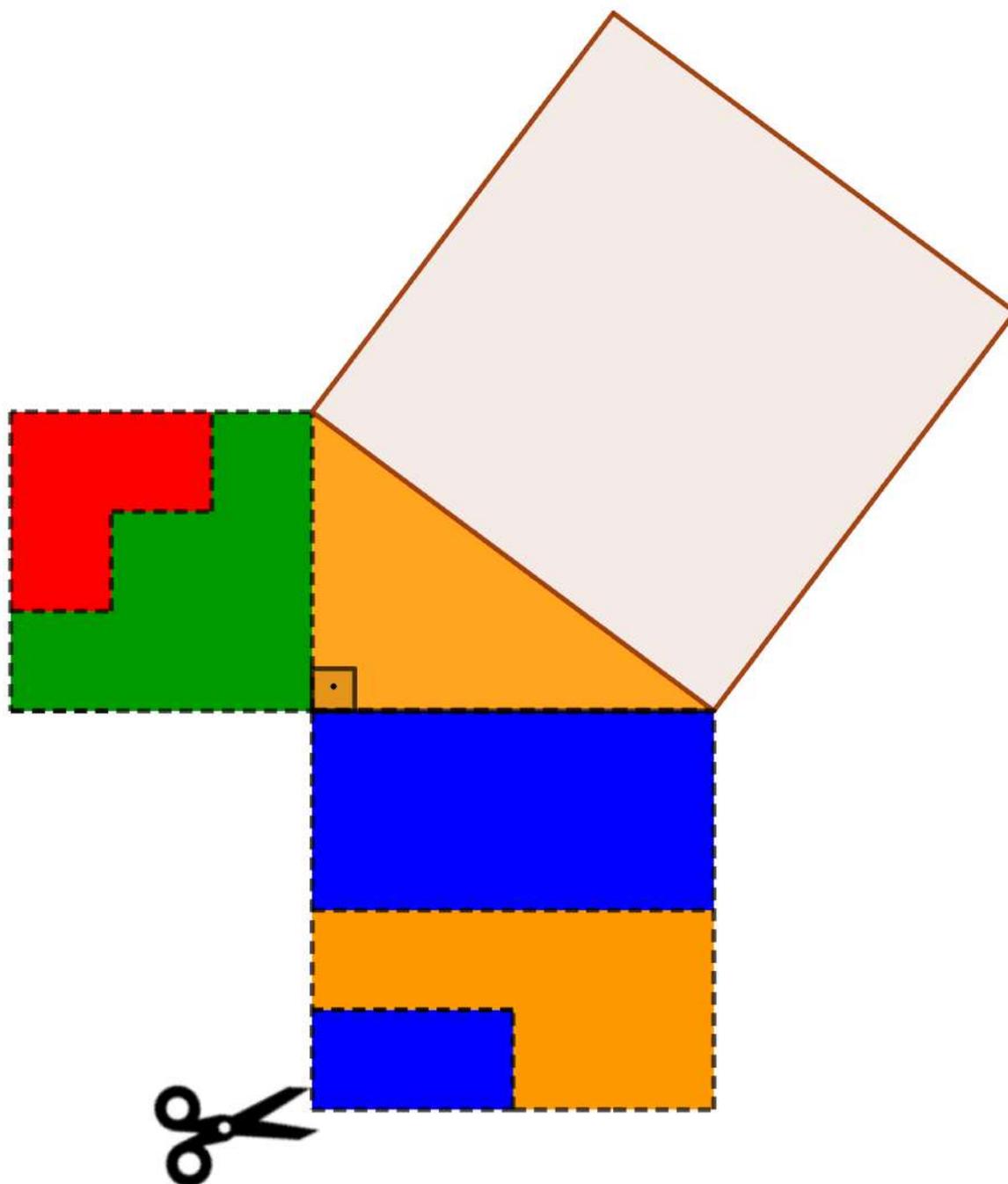
Fonte: A autora.

Figura 138 – Figura, para ser colada no caderno, para a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras da atividade 1.



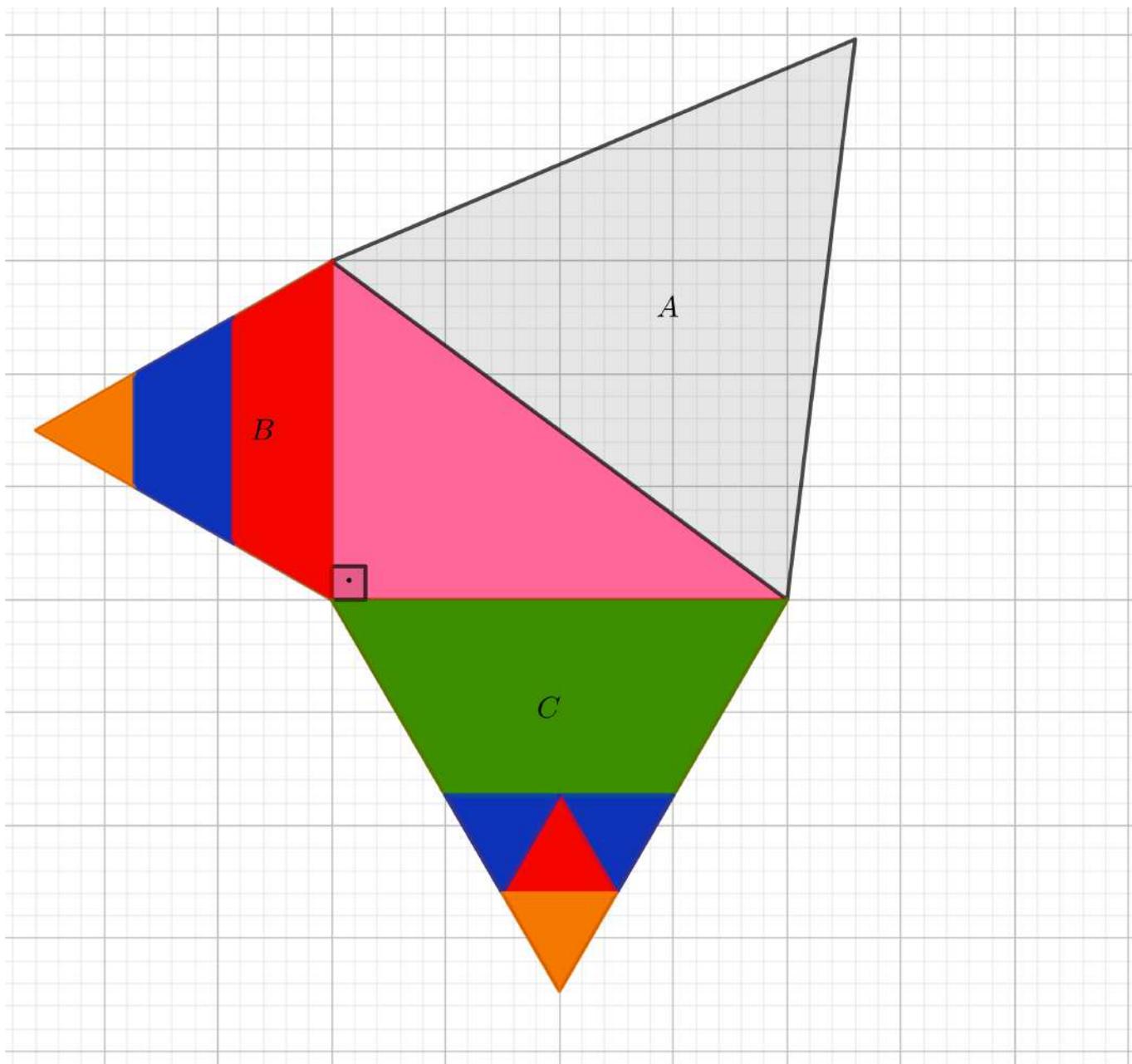
Fonte: A autora.

Figura 139 – Figura usada na aplicação da atividade 1.



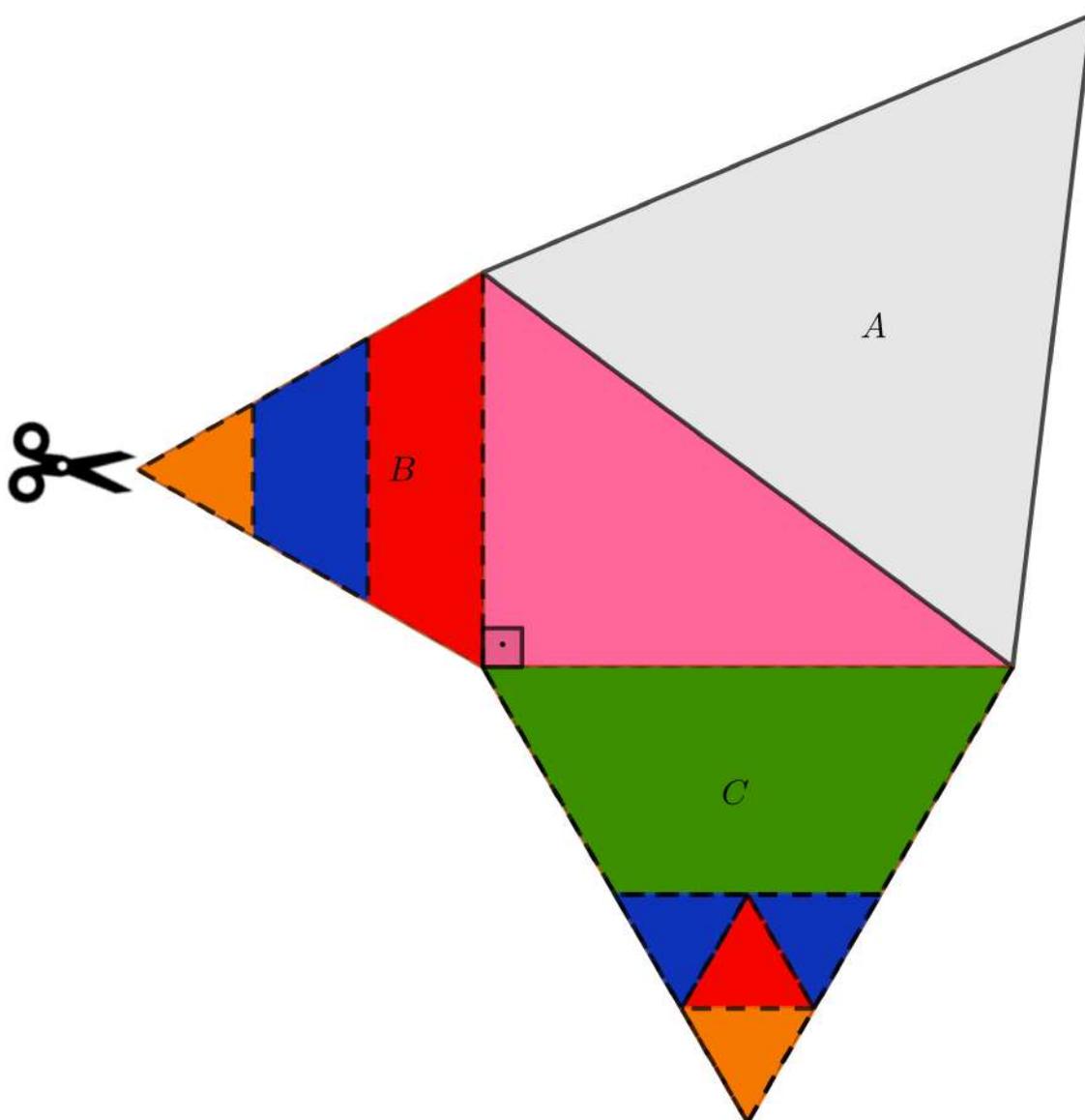
Fonte: A autora.

Figura 140 – Figura para ser colada no caderno na aplicação da atividade 2.



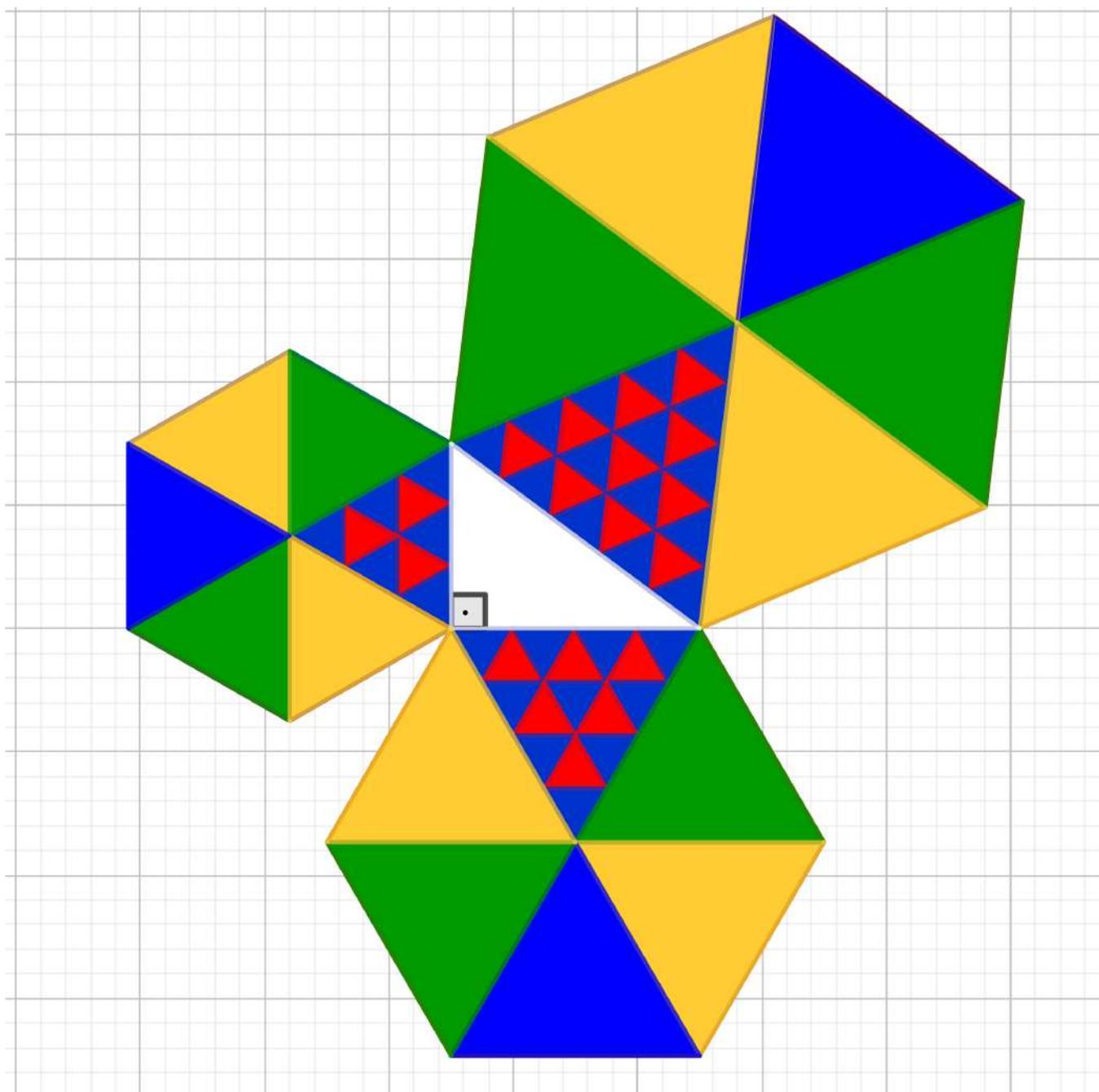
Fonte: A autora.

Figura 141 – Figura tracejada usada na aplicação da atividade 2.



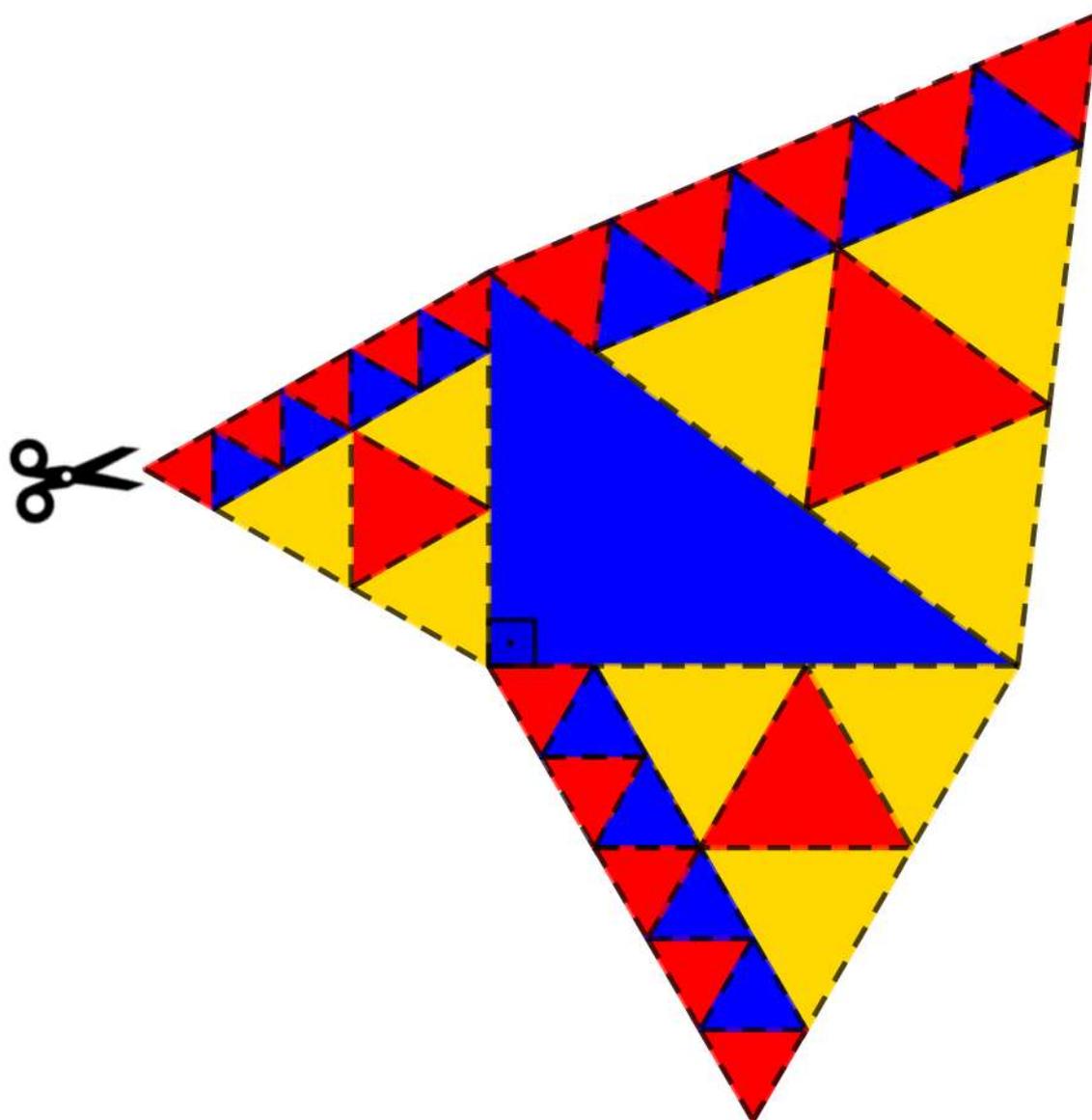
Fonte: A autora.

Figura 142 – Figura usada na aplicação da atividade 3 .



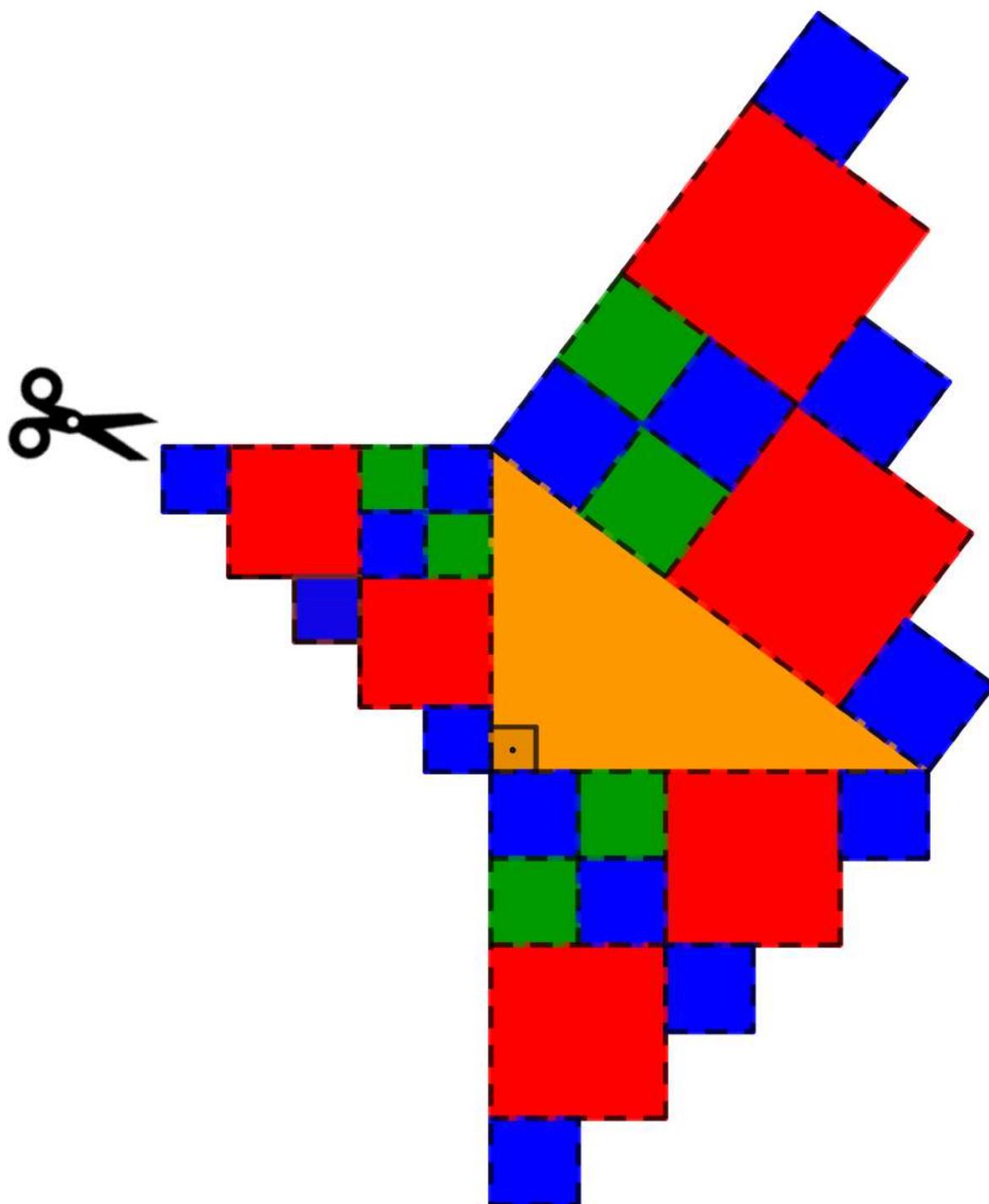
Fonte: A autora.

Figura 143 – Figura para confecção do quebra-cabeça triangular para a aplicação da atividade 4.



Fonte: A autora.

Figura 144 – Figura para confecção do quebra-cabeça com quadrados para a avaliação da atividade 4.



Fonte: A autora