UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rafael Augusto Albuquerque Macedo

Sistema Lineares e Métodos Numéricos: uma proposta para o Ensino Médio

Campina Grande - PB
Agosto/2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rafael Augusto Albuquerque Macedo

Sistema Lineares e Métodos Numéricos: uma proposta para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida

Campina Grande - PB
Agosto/2023

Rafael Augusto Albuquerque Macedo

Sistemas Lineares e Métodos Numéricos: uma proposta para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 25 de agosto de 2023:

Profa.Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida- UFCG
Orientadora

Profa. Dra Emanuela Regia de Sousa Coelho -UEPB
Membro externo

Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo- UFCG
Membro interno

Campina Grande - PB
Agosto/2023

M141s Macedo, Rafael Augusto Albuquerque.
Sistemas lineares e métodos numéricos: uma proposta para o ensino médio / Rafael Augusto Albuquerque Macedo. – Campina Grande, 2023.
78 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação: Profa. Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida".
Referências.

1. Matemática. 2. Equações Lineares. 3. Métodos Diretos. 4. Métodos Iterativos. 5. Linguagem Computacional Python. I. Almeida, Deise Mara Barbosa de. II. Título.

CDU 517.9(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Dedico este trabalho em especial aos meus pais, Jonas e Vilma Macedo, que de forma direta sempre me ajudaram e ajudam para que eu possa conquistar meus sonhos e objetivos. À minha esposa Amanda Macedo, por ser meu porto seguro e que sem ela por perto os resultados não seriam os mesmos. E ao meu filho tão amado, Antônio Macedo, que a maior realização da minha vida é ver você feliz!

Agradecimentos

Agradeço este trabalho a Deus que, diante de tantos obstáculos, fez renascer em mim força e vontade para concluí-lo, guiando o meu caminho, ajudando-me na procura das respostas para a finalização do mesmo.

Agradeço em especial, aos meus pais, Jonas e Vilma Macedo, pelo amor, dedicação e apoio nas horas mais difíceis, inclusive aos meus irmãos, Ana Beatriz, Gabriel Henrique, Marcos Vinícius e Lucas Emanuel, amo vocês.

Este trabalho só foi possível através do apoio, suporte e incentivo da minha esposa Amanda Macedo. Amo você.

Ao meu pequeno Antônio Macedo, que me faz ser uma pessoa melhor a cada dia na função de pai. Te amo Meu Filho.

A minha família, Albuquerque Macedo, por tudo o que vocês representam para mim.

À minha orientadora, Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida, pelo seu compromisso político e educacional do qual me acompanhou em todas as etapas deste trabalho e que por muitas vezes se fez na função de uma amiga, de uma mãe, de uma ouvinte, de uma conselheira. Obrigado querida Professora.

Aos meus amigos de turma, André Macedo, Andresson Alquino, Benildo Virgínio, Carlos Gonzaga, Cláudio Teodista, Eli Azevedo, Érico Andrade, Erivan Barbosa, Gilmar Veríssimo, Gilvandro Melo, Idalice Santiago, João Evayr, Wellington Rodrigues e Wirander Rosa, obrigado por tudo. Conseguimos. Vencemos.

À Universidade Federal de Campina Grande que, junto à Unidade Acadêmica de Matemática, oferta com imenso compromisso o curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

Aos docentes do Departamento de Matemática da UFCG, principalmente aos que estão vinculados ao PROFMAT. Quero agradecer também à secretária da UAMat, Isabela Souza, por toda prestatividade e cordialidade.

E a todos meus amigos e colegas que de forma direta ou indiretamente contribuíram para que chegasse até aqui.

"Não só isso, mas também nos gloriamos nas tribulações,
porque sabemos que a tribulação produz perseverança;
a perseverança, um caráter aprovado;
e o caráter aprovado, esperança.
(Bíblia Sagrada, Romanos 5, 3-4)

Resumo

A importância do estudo dos Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio se deve por sua utilização na modelagem de diversos problemas. Esses problemas vão desde os mais simples envolvendo duas equações e duas incógnitas até problemas de áreas tecnológicas e científicas dos quais abrange um número alto de variáveis necessitando de métodos mais elaborados e robustos de resolução. O presente trabalho tem como principal objetivo, apresentar e relacionar a historicidade, o conceito, a importância e as aplicações do estudo de Sistemas de Equações Lineares utilizando os métodos numéricos de resolução diretos e os iterativos. Aliando a isso, a utilização da linguagem computacional Python, como um recurso digital e tecnológico, propondo a utilização dos códigos desses métodos como ferramenta pedagógica a serem utilizadas nas aulas de Matemática com alunos do Ensino Médio. Além disso, este trabalho propõe uma Sequência Didática que explora os conceitos de programação, passa por matrizes, por conceitos de Sistemas de Equações Lineares e por fim, aborda a solução de sistemas numericamente.

Palavras-chave: Matemática. Equações Lineares. Métodos Diretos. Métodos Iterativos. Linguagem Computacional Python.

Abstract

The importance of studying Systems of Linear Equations in High School is due to their use in modeling various problems. These problems range from the simplest involving two equations and two unknowns to problems in technological and scientific areas which cover a high number of variables requiring more elaborate and robust methods of resolution. The main objective of this work is to present and relate the historicity, concept, importance and applications of the study of Systems of Linear Equations using direct and iterative numerical resolution methods. Combined with this, the use of the Python computational language, as a digital and technological resource, proposing the use of the codes of these methods as a pedagogical tool to be used in Mathematics classes with high school students. Furthermore, this work proposes a Didactic Sequence that explores programming concepts, goes through matrices, concepts of Systems of Linear Equations and finally, addresses the solution of systems numerically.

Keywords: Mathematics. Linear Equations. Direct Methods. Iterative Methods. Python Computational Language.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Os Sistemas de Equações Lineares além de estarem presentes em todos os ramos do conhecimento, também estão relacionados com muitos problemas importantes do dia a dia, dos quais são muito úteis para a resolução desses problemas. Por exemplo, como em um problema relacionado a tráfego de veículos, balanceamento de equações químicas, no controle de estoque e no teste de qualidade de um produto. Assim, é um tema de bastante relevância no ensino de Matemática, do qual a teoria de Sistemas de Equações Lineares é a base e uma parte fundamental da Álgebra Linear, um tema que é usado na maior parte da matemática moderna. Em diversos ramos da matemática aplicada e ciências naturais, podemos encontrar vários usos de sistemas lineares. Exemplos são a Física (Circuito Elétrico), a Economia (modelos fechado e aberto de Leontief), as Engenharias (Ruído Acústico), a Biologia (Relação entre dosagem do medicamento e peso), a Navegação (GPS) e a Aviação (Tripulação de Voo). Além disso, é ferramenta fundamental para trabalhar com os alunos outros conteúdos de Matemática, como Matrizes, Determinantes, Modelagem, Otimização, entre outros.

Neste trabalho abordaremos o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, com métodos numéricos de resolução quase nunca utilizados no Ensino Básico, que no caso são os métodos diretos: (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os métodos iterativos: (*Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel*). Esses métodos estarão aliados com a linguagem computacional Python objetivando a utilização dos códigos desses métodos como ferramenta pedagógica a serem utilizadas com alunos do Ensino Médio. A utilização desses métodos e de recursos tecnológicos são baseados nas Competências Gerais e Específicas encontradas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e na Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, voltada para sua utilização na educação básica. Para corroborar nossa proposta, fazemos uma análise relativa a esse assunto em alguns documentos oficiais de ensino, finalizando com uma Proposta de Aula para o Ensino Básico.

Assim, por meio do presente trabalho, espera-se que esses métodos de resolução de sistemas de equações lineares sejam ferramentas de estudo e que possa contribuir com a formação educacional de alunos e professores, e que se possível, tais professores possam levar tais métodos e o uso da linguagem computacional para o ambiente acadêmico, utilizando-as em aulas interativas, buscando maior participação dos alunos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo central deste trabalho é criar uma ferramenta de auxílio para o professor do qual possa introduzir de maneira mais clara o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares resolvidos através dos métodos diretos: (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os métodos iterativos: (*Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel*) para facilitar o processo de ensino-aprendizagem, abordando suas importâncias e aplicações, relacionando a historicidade do estudo de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, com a prática do uso de novas tecnologias, através da Linguagem Computacional Python.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Auxiliar o professor no ensino de Sistemas de Equações Lineares através dos métodos de resolução diretos e os iterativos em aplicações práticas;
- Auxiliar a interpretação e compreensão do aluno e do professor no ensino-aprendizagem de sistemas equações lineares;
- Propor uma Sequência Didática aplicável ao Ensino Médio que utilize a linguagem de programação Python associada à linguagem matemática na abordagem de Sistemas de Equações Lineares.

1.2 Organização

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos. O Capítulo 1 se encarrega de introduzir esta dissertação, expondo os seus objetivos, sua organização e estruturação. O Capítulo 2 trata da fundamentação teórica, onde é analisada a importância dos recursos tecnológicos na educação e onde também se encontra presente na BNCC que sugere o uso das tecnologias associadas à Linguagem Matemática. O Capítulo 3, por sua vez, aborda o contexto histórico das Matrizes e dos Sistemas Lineares. Já o Capítulo 4 define os Métodos de Resolução de Sistemas Lineares Diretos e Iterativos: Fatoração LU, Fatoração de Cholesky, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. O Capítulo 5 propõe uma sequência didática que orienta sobre o uso da Linguagem de Programação Python no ensino do Sistema de Equações Lineares através dos métodos de resolução diretos: (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os iterativos: (*Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel*).

2 Uso da Tecnologia na Educação

Neste início de século vivemos numa sociedade em constante mudança, na era digital, tecnológica, da informação e da comunicação, onde conseguimos levar os fatos que ocorrem em locais distantes do nosso país para qualquer lugar, de modo que estes fatos podem alterar e influenciar as nossas vidas, em que podemos, por exemplo, comunicar, debater e jogar com pessoas do mundo inteiro, numa interação jamais vista em outra época da História da Humanidade.

De acordo com Leite (2014), pode-se identificar a presença da tecnologia em quase todas as áreas de atividade humana; sua presença parece irreversível. Podemos presenciar, nos últimos anos, um grande avanço tecnológico o qual passou a fazer parte do cotidiano de muitas pessoas e, é claro, está presente em muitas escolas. É devido a essa grande potencialidade que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) contribuem para que as fronteiras entre o mundo cada vez mais globalizado sejam quebradas a todo instante. Segundo Macedo (2014), através dessas tecnologias, nós somos levados a um conhecimento cada vez mais rápido, fácil, interativo e acompanhado de um raciocínio lógico.

Num contexto educacional, todo e qualquer tipo de mudança traz grandes desafios, pois nesta nova configuração social, o universo da informação dos alunos (e professores) ampliou-se a uma escala nunca antes imaginada. As informações, saberes e conhecimentos são produzidos a partir de tantas fontes diferentes e com tanta velocidade que se torna impossível abrangerem tudo. De acordo com Leite (2014), assim como a tecnologia para o uso do homem expande suas capacidades, a presença dela na sala de aula amplia seus horizontes e seu alcance em direção à realidade.

É fundamental desenvolver competências relacionadas à tecnologia em alunos da Educação Básica. A maioria dos jovens consegue interagir com as novas tecnologias, porém, muitos não conseguem se expressar e criar coisas novas a partir dela.

A educação, assim como as demais organizações, sofre uma forte pressão por mudanças. Hoje, as formas de ensinar precisam ser atualizadas. O ambiente cultural tornou-se muito diferente do ambiente escolar: os alunos desmotivam-se e aprendem pouco. Pozo (2002) cita que, não só muda o que se aprende como também a forma como se aprende. A aprendizagem também precisa evoluir.

Segundo Saraiva (2022), com a pandemia do COVID-19, foram perceptíveis os enormes avanços que as tecnologias digitais trouxeram para a educação. O uso de recursos tecnológicos por meio de computadores e softwares, não foram apenas benéficos, mas também, a única alternativa para manter as aulas funcionando, de forma online.

Se for colocada em prática de forma responsável e criativa, as novas tecnologias são uma grande aliada da educação, ao ponto de promover diversos benefícios para os alunos e professores, dos quais têm o poder de dinamizar o processo de ensino-aprendizagem. Porém, vale enfatizar, que as tais tecnologias não substituem o papel do professor, sendo fundamental que este saiba conduzir a utilização dessas novas mídias e softwares, pois, de acordo com Oliveira (2022), dotando das ferramentas e estratégias corretas é possível utilizar a tecnologia para promover o desenvolvimento escolar, sabendo que o uso desenfreado da mesma pode ocasionar problemas e atrapalhar a evolução dos alunos. Logo,

> "... o professor não se torna indispensável de forma alguma neste contexto, muito pelo contrário, com tantas informações disponíveis, é, por meio da mediação do professor com metodologias e intervenções pedagógicas adequadas, que os alunos terão condições de absorver as melhores informações, ter um olhar crítico, transformá-las em conhecimento." (CONTIN, 2016)

Para que uma nova tecnologia seja utilizada nas escolas é preciso que o professor esteja seguro e preparado para isso e do qual não implica dizer que a educação deva ser voltada exclusivamente para o uso de novas tecnologias e que a melhoria do aprendizado dependa delas. No caso específico de matemática, não é a simples utilização de algum recurso tecnológico que a tornará mais fácil ou que os alunos apreenderão mais.

A escola e os professores devem manter-se atualizados em seus meios de ensino, acompanhando o avanço das novas gerações, pois a escola está envolvida na globalização que exige transformações em todas as áreas e a tecnologia surge com novas maneiras de pensar e agir, transformando o nosso dia a dia. Já os professores, é preciso conscientização para potencializar suas aulas, organizando e acompanhando práticas que utilizem a tecnologia. Nesse sentido,

> "A tecnologia é de primordial necessidade, pois promove oportunidades de aprendizagem e interatividade tanto para o professor como para o aluno. A escola é um local de constante transformação e a tecnologia educacional é uma dessas ferramentas para a transformação." (MACHADO; LIMA, 2017)

Com o avanço tecnológico constante, os professores se deparam com um turbilhão de informações e recursos tecnológicos, tornando-se um desafio, do qual é difícil para o educador filtrar quais recursos escolher e como trabalhar o conteúdo matemático em questão para mediar o conhecimento a seus alunos.

> "Computador e internet na sala de aula nas mãos de professores treinados formam um importante instrumento de ensino. Ter acesso à internet não é mais uma questão de aumentar a capacidade de raciocínio. Passou a ser vital. É como saber ler e escrever nos anos 50." (KOCH, 2013)

A tecnologia tornou-se um novo meio para contribuir na construção de conhecimentos, porém, os alunos possuem conhecimento avançados nestes ambientes tecnológicos em relação aos seus professores, pelo fato de estarem diariamente em contato com tecnologias digitais, diferente de seus professores.

Segundo Camillo e Medeiros (2018), as tecnologias, no domínio da educação, trouxeram, além do acesso à informação de forma mais dinâmica a possibilidade de exercer um processo de ensino-aprendizagem mais inovador, moderno, atrativo e atento às demandas sociais. Não são ferramentas, apenas, do professor para que esses possam se capacitar, e, dessa forma, tornar as suas aulas mais modernas e atrativas. É algo a ser experienciado, também, pelo educando, visto que ambos, professor e aluno, comunicam-se, diariamente, a partir de redes e comunicações virtuais. Nesse sentido, o principal desafio é trazê-las para o contexto escolar.

> "A educação diz respeito ao "processo de desenvolvimento da capacidade física, intelectual e moral da criança e do ser humano em geral, visando à sua melhor integração individual e social". Para ocorrer essa integração é necessário que valores, conhecimentos, hábitos e comportamentos sociais sejam ensinados e aprendidos por meio da educação para ensinar sobre as tecnologias na base da identidade e da ação do grupo e que se faça uso destas mesmas tecnologias para ensinar as bases da educação." (SOUZA; PEREIRA; MACHADO, 2018)

2.1 A importância da tecnologia sobre o olhar da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada pelo MEC em 2018, que define as aprendizagens necessárias para os estudantes brasileiros da Educação Básica, traz para a Formação Geral Básica 10 competências gerais para toda a Educação Básica e um conjunto de competências específicas para cada área de conhecimento e, para da uma dessas áreas, há varias habilidades a serem desenvolvidas. No caso para a área de Matemática, apresenta 8 competências específicas para o Ensino Fundamental e 5 para o Ensino Médio.

Nesse sentido, a BNCC contempla o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável das tecnologias digitais tanto de forma transversal – presentes em todas as áreas do conhecimento e destacadas em diversas competências e habilidades com objetos de aprendizagem variados – quanto de forma direcionada – tendo como fim o desenvolvimento de competências relacionadas ao próprio uso das tecnologias, recursos e linguagens digitais –, ou seja, para o desenvolvimento de competências de compreensão, uso e criação de tecnologias digitais da informação e comunicação - TDICs em diversas práticas sociais, como destaca a competência geral 5:

> "Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." (BRASIL, 2018)

No caso para a área de Matemática, a BNCC evidencia uma competência específica para o Ensino Fundamental afirmando que, processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

- COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - 5: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

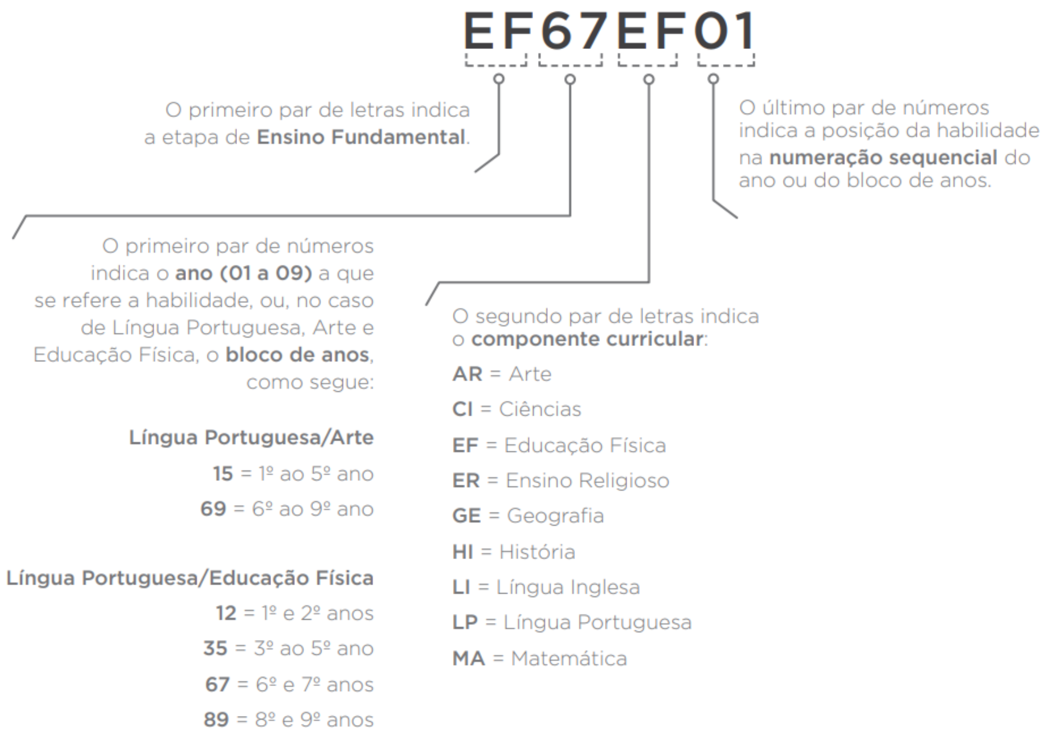
E evidencia uma competência para o Ensino Médio concluindo que os alunos possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas:

- COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO - 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

De acordo a com Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, as tecnologias da informação e comunicação estão presentes em diversos setores de nossa sociedade, impactando de forma contundente a todos que atuam nas diversas áreas. Nessa perspectiva, a preparação dos estudantes, bem como de todos os demais indivíduos, precisa ser principiada no ensino básico. Ferramentas tecnológicas como o computador, os diversos softwares, a calculadora, o smartphone, o tablet, os vários Apps, os games, dentre outros, são utilizadas com intuito de aumentar a eficiência do ensino e desenvolver o senso crítico, o raciocínio lógico e dedutivo, a capacidade de observação, de pesquisa e estratégias de comunicação, Paraíba (2018).

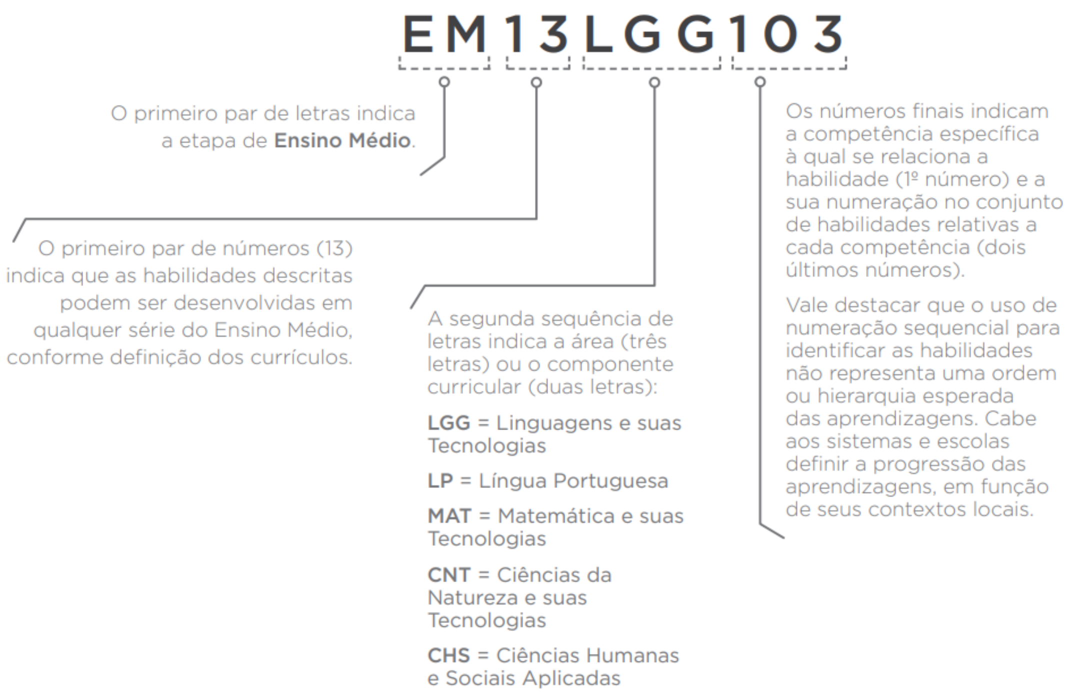
A BNCC e a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba esclarecem como as aprendizagens estão organizadas e explica a composição de códigos alfanuméricos criados para identificar tais aprendizagens, como podemos exemplificar:

Figura 1 – Código Alfanumérico do Ensino Fundamental



Fonte: (BRASIL, 2018)

Figura 2 – Código Alfanumérico do Ensino Médio



Fonte: (BRASIL, 2018)

Ainda de acordo com a BNCC, as possibilidades de organização curricular das aprendizagens de Matemática são várias, porém, algumas habilidades deixam evidente o uso das TDICs, como no caso das habilidades:

- **(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou **tecnologias digitais**.
- **(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, **preferencialmente com o uso de tecnologias digitais**, no contexto da educação financeira.
- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, **recorrendo ou não a softwares ou aplicativos** de álgebra e geometria dinâmica.
- **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma **linguagem de programação** na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Na direção de substituir o modelo único de currículo do Ensino Médio por um modelo diversificado e flexível, a Lei nº 13.415/2017[4] alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), estabelecendo que o currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, com isso, algumas habilidades foram retiradas da nova BNCC, como no caso da **EM13MAT410** e **EM13MAT411** que trata respectivamente, da associação do conceito e reconhecimento de matriz, determinantes e sistemas de equações lineares. Porém, seguindo as orientações da própria BNCC, a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, implementou no seu sistema de ensino características regionais, diante da diversidade histórica, social, ambiental e cultural Paraíba (2018). Com isso, no que se refere a área de Matemática, a Proposta incluiu no seu currículo as habilidades que tratam de Matrizes e Sistemas Lineares, do qual será tema deste trabalho e garantirá a implementação do estudo.

De acordo com a BNCC, a área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas

[4] Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Ainda de acordo com Brasil (2018), também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.

A preocupação com os impactos das transformações ocasionada pelas tecnologias na sociedade está expressa na BNCC e se explicita já nas competências gerais para a Educação Básica. Diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais são tematizadas, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação.

Portanto, para a BNCC, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas, com isso, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho.

2.2 Linguagem computacional no ensino de matemática

Com bases nessas informações e orientações dos documentos normativos, este trabalho utilizará linguagem computacional Python como ferramenta pedagógica para ser utilizada com alunos do Ensino Médio em paralelo com o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares e também para favorecer e ampliar a visão de mundo dos alunos no processo de ensinar e aprender matemática. De acordo Souza (2023), a linguagem de programação pode ajudar os estudantes do Ensino Médio a abrir caminhos e oportunidades. Aprender a programar pode possibilitar o desenvolvimento das habilidades de raciocínio, organização do pensamento e comunicação ao elaborar estratégias para a resolução de problemas matemáticos.

A escolha da linguagem computacional Python dentre várias linguagens existentes se deu pelo fato que esta linguagem tem um grande potencial pedagógico, pela sua simplicidade e fácil entendimento, que facilita o ensino e a compreensão dos conceitos de codificação, alem do mais, seu uso é gratuito e livre.

> "A linguagem de programação Python é muito interessante como primeira linguagem de programação devido á sua simplicidade e clareza. Embora simples, é também uma, linguagem poderosa, podendo ser usada para administrar sistemas e desenvolver projetos. É uma linguagem clara e objetiva, pois vai direto ao ponto, sem rodeios." (MENEZES, 2019)

Um dos objetivos desta pesquisa é propor atividades que envolvam programação e conteúdos matemáticos, oportunizando a alunos e professores descobertas e caminhos diferentes de uma aula tradicional, do qual é importante ressaltar que a matemática e a programação estão intimamente ligadas, a programação elevou a matemática a um novo patamar. Segundo Wolfram (2017), podemos evidenciar este fato, uma vez que os problemas reais do século XXI só puderam ser solucionados devido a existência do computador, esta é uma das justificativas que a programação deve entrar no sistema educacional como uma parte fundamental da disciplina de matemática.

3 Contexto Histórico das Matrizes e dos Sistemas Lineares

Segundo Santos (2017), os trabalhos com matrizes e determinantes iniciaram no século II a.C. Os babilônios estudaram problemas que tiveram como soluções sistemas lineares de duas variáveis, no qual estão preservados em tabletes de argila. Os Chineses, no início de seus estudos, que segundo Boyer (1996), surgiram 1000 a.C., desenvolveram livros relacionados ao tratamento de cálculos astronômicos, promoveram contribuições a respeito das propriedades relacionadas ao triangulo retângulo, frações, geometria relacionada à álgebra e a na aritmética, dos quais, tais conteúdos foram abordados em grande parte pelo livro chinês mais influente de matemática denominado de *"Chui-Chang Suan-Shu"* ou *"Nove capítulos sobre a arte matemática".* Ainda de acordo com Boyer (1996) os Chineses gostavam especialmente de diagramas e apresentaram os primeiros registros de um quadrado mágico, disposto da seguinte forma:

Figura 3 – Quadrado Mágico

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: (BOYER, 1996)

Ainda segundo o autor, é interessante observar que o quadrado mágico teve seu primeiro registro efetuado pelos chineses. É provável que sua origem seja ainda mais antiga, porém, como não foi registrada, não foi dada a conhecer. Os chineses gostavam especialmente de diagramas e o livro *"Nove capítulos sobre a arte matemática"* contém 246 problemas dentre os quais, um é resolvido através desse quadrado mágico, o qual motivou os Chineses a relacionar esse diagrama à resolução de sistemas de equações lineares simultâneas. Como exemplo abaixo:

"Há três tipos de milho, dos quais três feixes do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois feixes do primeiro tipo, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um feixe do primeiro tipo, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho há em um feixe de cada tipo?"

Nas notações de hoje esse problema se apresentaria como o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} .$$

Ainda de acordo com Boyer (1996) afirma que para resolver esse problema, eram efetuadas operações sobre colunas na matriz associada ao quadrado mágico:

Figura 4 – Quadrado Mágico referente ao Sistema de Equações

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Fonte: (BOYER, 1996)

Para reduzi-la a:

Figura 5 – Quadrado Mágico após operações efetuadas

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Fonte: (BOYER, 1996)

A fim de representar as equações na forma $36z = 99$; $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais calcula-se os respectivos valores de z, y e x. Nesse sentido, verifica-se uma caracterização inicial de matrizes, de forma intuitiva, associada ao diagrama do quadrado mágico. De acordo com Sousa, Sabino e Sabino (2017), a única diferença entre o método atual para o chinês (antigo) é que escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz em vez de colunas. Além disso, as equações nas colunas são escritas da direita para a esquerda.

Ainda segundo os autores, a teoria dos determinantes surgiu simultaneamente através dos estudos de dois grandes matemáticos: Seki Shinsuke Kowa no Japão, e Gottfried Wilhelm Leibniz na Alemanha, ambos resolviam sistemas de equações lineares de maneiras diferentes, porém com o mesmo propósito: encontrar as soluções através de eliminações. O termo matriz veio com James Joseph Sylvester, em 1850, e com seu amigo Arthur Cayley, em 1858.

De acordo com Boyer (1996), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), faz referência pela primeira vez no Ocidente ao método de determinantes, onde em 1693, ele apresenta uma caracterização para indicar linhas e colunas, originadas a partir de equações lineares simultâneas:

$$\begin{array}{rcl} 10+11x+12y=0 & & 1_0+1_1+1_2=0 \\ 20+21x+22y=0 & \text{ou} & 2_0+2_1+2_2=0. \\ 30+31x+32y=0 & & 3_0+3_1+3_2=0 \end{array}$$

Escreveríamos isso como:

$$\begin{array}{c} a_1+b_1c+c_1y=0 \\ a_2+b_2c+c_2y=0. \\ a_3+b_3c+c_3y=0 \end{array}$$

Se as equações fossem consistentes então:

$$\begin{array}{c} 1_0 2_1 3_2 + 1_0 2_2 3_1 \\ 1_1 2_2 3_0 + 1_1 2_0 3_2 \\ 1_2 2_0 3_1 + 1_2 2_1 3_0, \end{array}$$

que equivalem ao enunciado atual referente ao do determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Assim como no estudo dos chineses, Leibniz evidenciava as matrizes a partir de equações lineares simultâneas.

Ainda segundo Boyer (1996), Josep Louis Lagrange, considerado ao lado de Euler o maior matemático do século XVIII, o artigo intitulado *"Solutions Analytiques de qualques problèms sur les pyramides triangulares"*, publicado em 1975, apresentou resultados analíticos para o cálculo de área de um triangulo e o volume de um tetraedro, denotados respectivamente por A e V, como temos a seguir:

$$A = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } V = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Com isso, ele concluiu que os elementos que compõe as matrizes (denominação atual), representavam os vértices do triangulo e do tetraedro e caracterizam coordenadas de pontos no espaço, como verifica-se na fórmula para o cálculo de A e V. Assim, verifica-se que Lagrange buscou artifícios analíticos para caracterizar os elementos que compõem as linhas e colunas das matrizes.

Segundo Eves (1997), o matemático que mais desenvolveu estudos acerca dos Determinantes e consequentemente apresentou considerações significativas a respeito das matrizes foi Algustin Louiz Cauchy, nascido no ano de 1789 em Paris, e dentre as suas obras destacam-se as produções em Séries Infinitas, Teoria das Funções Reais Complexas, Equações Diferenciais, Probabilidade e Física-Matemática. Entre as principais contribuições temos a demonstração de um teorema que envolvem os conteúdos de Matrizes e Determinantes, que também foi citada por Leibniz, o qual foi proposto da seguinte maneira:

"Se A e B são matrizes $n \times n$, então $|A \,.\, B| = |A| \,.\, |B|$".

De acordo com Lima, Pereira e Chaquiam (2018), a partir do teorema exposto, verifica-se que apesar de ele não citar a nomenclatura *"ordem"*, mas considera que A e B são matrizes $n \times n$ (classificação intuitiva das matrizes quadradas), caracterizando mais um elemento para as matrizes. Além disso, destaca-se a relação entre o determinante e as matrizes, a qual, também foi citada na abordagem feita por Leibniz.

Segundo Boyer (1996), Arthur Cayley, em sua grande obra *"Menoir on the Theory of Matrices"* a respeito da teoria das matrizes, do ano de 1858, revela o poder da álgebra matricial. A qual surge a partir da Teoria das Transformações Lineares Simultâneas, onde a partir dessa construção, Cayley mostrou que ao inverter a ordem das matrizes com letras maiúsculas pelas minúsculas o produto era diferente. Ou seja, não conseguia-se retornar ao sistema de origem. Com isso, mostrou que a multiplicação matricial não é comutativa, como no exemplo abaixo, consideremos a transformação T_1:

$$T_1 = \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

do qual aplicaremos uma outra transformação, denotada T_2:

$$T_2 = \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases} .$$

Observemos que em T_2 existem variáveis presentes em T_1. Assim, se aplicarmos T_1 em T_2, teremos um resultado equivalente a transformação composta, do tipo:

$$T_1T_2 = \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y, \end{cases}$$

Porém, se invertêssemos a ordem de T_1 e T_2, de modo que T_2 seja a transformação:

$$T_2 = \begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy, \end{cases}$$

e T_1 é a transformação:

$$T_1 = \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy', \end{cases}$$

e novamente se aplicarmos T_1 em T_2, teremos:

$$T_1T_2 = \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y. \end{cases}$$

Expressando na linguagem de matrizes os resultados das transformações, verifica-se que os resultados são diferentes:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix} \text{ e}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}.$$

Mostrando que ao inverter a ordem das matrizes com letras maiúsculas pelas minúsculas o produto seria diferente. Ou seja, não conseguia-se retornar ao sistema de origem. Com isso, provou que a multiplicação matricial não é comutativa.

Cayley também apresentou uma álgebra para adição de matrizes (de dimensões iguais). A qual, é obtida somando-se os elementos correspondentes das matrizes, expôs a multiplicação de uma matriz por um escalar k, definiu a matriz identidade, denotada por I, a qual pode ser associada ao elemento neutro da multiplicação matricial e a matriz quadrada nula, como o elemento neutro da adição de matrizes.

Segundo Lima, Pereira e Chaquiam (2018), evidenciou-se a Arthur Cayley, como o matemático que apresentou a álgebra para o estudo das matrizes, além do fato, de considerar que a abordagem de matrizes deve preceder determinante.

De acordo com Sousa, Sabino e Sabino (2017), o termo Matriz foi introduzido pelo matemático inglês James Joseph Sylvester em 1850, e que anos depois, recebeu grandes contribuições de seu amigo Arthur Cayley, o qual, deu o primeiro significado da palavra Matriz, como sendo o lugar onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como:

> "[...]um bloco retangular de termos [...] que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número "p" e escolher a vontade "p" linhas e "p" colunas[...]" (TAYLOR, 1850)

De acordo com Neto (2016), a descoberta da álgebra matricial consiste na formulação de uma metodologia para que muitos números sejam operados ao mesmo tempo. Mais tarde, as matrizes se tornaram bastante úteis na programação de computadores. Atribui-se a existência dos computadores pessoais à utilização das matrizes para realização das tarefas de processamento das máquinas, o que diminui, e muito, o tamanho dos componentes necessários para seu funcionamento. Nesse processo, pessoas como Bill Gates e Steve Jobs tiveram papel importante.

Bernardes (2019) afirma que, historicamente, a noção de matriz foi a última a surgir, isto é, as matrizes foram introduzidas após determinantes, sistemas lineares, transformações lineares e formas quadráticas. Os momentos históricos de Sylvester e de Cayley mostram que sua introdução e desenvolvimento foram motivados pela necessidade de uma representação em forma de tabela. Assim, um possível encaminhamento seria introduzir o conceito de matriz quando houver necessidade da representação matricial, por exemplo, durante o estudo de sistemas lineares.

Tal desenvolvimento promoveu o conhecimento da origem e dos fatores que levaram o objeto matemático matriz a ser definido do modo como conhecemos hoje e as escolhas que o elegeram como ferramenta para resolver determinados problemas e diante disso, este trabalho busca despertar uma visão mais crítica e repassar alternativas sobre o ensino e resolução de sistemas lineares no nível básico, considerando que para uma melhor compreensão, o leitor, precisa ter um conhecimento prévio do contéudo de Matrizes.

4 Métodos para resolução de sistemas lineares

Os métodos para resolução de sistemas lineares podem ser classificados em duas categorias: métodos diretos e métodos iterativos. Os métodos diretos são aqueles que, após uma quantidade finita e conhecida de passos, fornecem a solução exata do sistema linear (caso exista). Já os métodos iterativos, constroem uma sequência de aproximações da solução do sistema linear que, sob certas condições, esta sequência converge para solução exata.

Neste trabalho iremos abordar os métodos diretos Fatoração LU e Fatoração de Cholesky; e os métodos iterativos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Esses métodos serão aliados a linguagem computacional Python objetivando a utilização dos códigos desses métodos como ferramenta pedagógica a serem utilizadas com alunos do Ensino Médio.

4.1 Métodos Diretos

Segundo Ruggiero e Lopes (1996), os métodos diretos fornecem a solução exata do sistema linear (caso ela exista) após um número finito de operações. Em outras palavras, se o sistema tem solução, os métodos diretos nos dão a solução exata do problema com somente erros de arredondamento gerados devido a aritmética do ponto flutuantes utilizada por computadores para realizar os cálculos.

Os métodos diretos abordados neste trabalho são baseados no processo de fatoração que consiste em decompor uma dada matriz no produto de duas outras matrizes mais simples com o objetivo de facilitar os cálculos. Assim, a resolução de um sistema linear será dada por resolver uma sequência de sistemas lineares mais simples.

4.1.1 Fatoração LU:

A Fatoração LU de uma matriz A quadrada de ordem m consiste em escrever A como o produto de duas matrizes L e U, ambas de mesma ordem que a matriz A; sendo L uma matriz triangular inferior e com os elementos da diagonal principal sendo 1 e U uma matriz triangular superior, ou seja, $A = LU$. Daí vem o nome desta fatoração, L de *Lower* (inferior) e U de *Upper* (superior).

Lembremos que a diagonal principal de uma matriz quadrada, que é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, são os elementos da matriz em que o número da linha é igual ao número da coluna, ou seja, são os elementos a_{ii}, em que $i = j$, como destacaremos no Exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Observe as matrizes quadradas abaixo, de ordem 2 e 3, respectivamente. Os elementos da diagonal principal estão destacados em vermelho.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Com isso, recordemos agora que uma matriz triangular inferior é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero; e uma matriz triangular superior é uma matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, quando tivermos uma matriz quadrada A tal que os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ a definiremos com uma matriz triangular inferior, do mesmo modo, se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, definiremos A como uma matriz triangular superior, conforme no exemplo abaixo.

Exemplo 2. *Observe as matrizes A_1 e A_2 quadradas de ordem 3, sendo que a matriz A_1 é uma matriz triangular inferior e a matriz A_2 uma matriz triangular superior.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Uma condição para que uma matriz possa ser decomposta no produto LU é que o determinante de todas as submatrizes principais devem ser diferentes de zero. De acordo com Soares (2012), dada uma matriz A quadrada de ordem n, qualquer submatriz quadrada cuja diagonal faça parte da diagonal de A, das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A, onde $1 \leq k \leq n$, é chamada uma submatriz principal (A_k). Os determinantes das submatrizes principais, simbolizado por $\det(A_k)$, são chamados menores principais de A.

No exemplo a seguir, mostraremos uma matriz quadrada A, de ordem 3, e seus menores principais .

Exemplo 3. *Uma matriz A quadrada de ordem 3*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

possui 3 submatrizes principais, consequentemente 3 menores principais.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}; \ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \ A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

e devemos ter $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ *e* $\det(A_3)$ *não nulos para utilizar a fatoração LU.*

Conforme Franco (2006), vamos enunciar formalmente a Fatoração LU com o Teorema a seguir.

Teorema 4.1 (Fatoração LU)**.** *Seja $A = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assumimos que o $det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, ..., n-1$. Então existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = ... = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tal que $LU = A$. Além disso, $det(A) = u_{11}u_{22}...u_{nn}$.*

Demonstração. De acordo com Anton e Rorres (2012), como as submatrizes A_k de A são todas não singulares, isto é, $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, ..., n$, sempre que necessário podemos permutar as linhas para obter pivôs não nulos no processo de escalonamento. Assim, podemos aplicar o escalonamento na matriz A até obtermos uma matriz triangular superior U. Isto é, existem matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_m$, ou seja, matrizes que representam as operações elementares aplicadas sobre as linhas de A durante o processo, tais que:

$$(E_m...E_3E_2E_1)A = U$$

Logo, as matrizes inversas $E_1^{-1}, E_2^{-1}, ..., E_m^{-1}$ existem e temos:

$$A = (E_m...E_3E_2E_1)^{-1}U \Leftrightarrow A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}...E_m^{-1}U$$

Chamamos $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}...E_m^{-1}$, temos portanto $A = LU$. Pelo modo como foi construído, o fator L é triangular inferior com diagonal principal unitária e seus elementos l_{ij}, para $i > j$, são os multiplicadores m_{ij} obtidos durante o processo de escalonamento e como ja vimos acima, o fator U é a matriz triangular superior obtida no final processo.

■

A seguir, conforme Franco (2006), mostraremos o processo para a construção das matrizes L e U aplicando a definição de produto e de igualdade de matrizes, isto é, impondo que $LU = A$ e, para isso, consideraremos a seguinte matriz A, quadrada de ordem n abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja então:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para obtermos os elementos da matriz L e da matriz U devemos calcular os elementos das linhas de U e os elementos da colunas de L na seguinte ordem:

1ª linha de U: Fazendo o produto da primeira linha de L por todas as colunas de U e igualando com os elementos da primeira linha de A, obtemos:

$1 \cdot u_{11} = a_{11} \Rightarrow a_{11} = u_{11}$
$1 \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow a_{12} = u_{12}$
$\vdots$
$1 \cdot u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow a_{1n} = u_{1n}$

Portanto, $u_{1j} = a_{1j}$ para $j = 1, 2, 3, ..., n$.

1ª coluna de L: Fazendo o produto de todas as linhas de L, da segunda linha até n, pela primeira coluna de U e igualando com os elementos da primeira coluna de A, abaixo da diagonal principal, obtemos:

$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$
$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$
$\vdots$
$l_{n1} \cdot u_{11} = a_{n1} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$

Assim, $l_{i1} = \dfrac{a_{n1}}{u_{11}} = \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$ para $i = 2, 3, ..., n$.

2ª linha de U: Fazendo o produto da segunda linha de L por todas as colunas de U, da segunda coluna até n, e igualando com os elementos da segunda linha de A, da diagonal principal em diante, obtemos:

$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}$
$l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}$
$\vdots$
$l_{21} \cdot u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21} \cdot u_{1n}$

Logo, $u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}$, para $j = 2, 3, ..., n$.

2ª coluna de L: Fazendo o produto de todas as linhas de L, da terceira linha até n, pela segunda coluna de U e igualando com os elementos da segunda coluna de A, abaixo da diagonal principal, obtemos:

$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}$
$l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} \cdot u_{12}}{u_{22}}$
$\vdots$
$l_{n1} \cdot u_{12} + l_{n2} \cdot u_{22} = a_{n2} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1} \cdot u_{12}}{u_{22}}$

Desse modo, $l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12}}{u_{22}}$, para $i = 3, 4, ..., n$.

Logo, se continuarmos calculando a terceira linha de U, a terceira coluna de L, a quarta linha de U, a quarta coluna de L, assim por diante, obteremos as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j, \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj}, \quad i > j. \end{cases}$$

Os sistemas lineares são formados por um conjunto de equações lineares de n incógnitas. Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal na forma $Ax = b$. De um modo geral um sistema de n equações lineares é escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. ,$$

e é representado na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou simplesmente,

$$Ax = b,$$

onde A é uma matriz dos coeficientes quadrada de ordem n, x é uma matriz vetor das variáveis, de ordem $n \times 1$ e b é uma matriz vetor dos termos constantes, de ordem $n \times 1$.

Para resolvermos um sistema linear, $Ax = b$ usando a Fatoração LU na matriz A, podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b \Leftrightarrow L(Ux) = b,$$

com isso temos:

$$Ly = b \text{ e } Ux = y.$$

Isto significa que, ao invés de resolvermos o sistema original, podemos resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$ e, então, o sistema triangular superior $Ux = y$, o qual nos fornece a solução de $Ax = b$.

De acordo com Vasconcellos (2021), dada uma matriz A quadrada, não sabemos se haverá necessidade de permutações e, portanto, não sabemos, a princípio, se a fatoração $A = LU$ existe. Caso seja necessário, para evitar o pivô nulo e que os multiplicadores tenham valores grandes, basta multiplicar a matriz A por uma matriz P de permutações construída das linhas de uma matriz identidade I, colocadas na mesma ordem das linhas pivotacionais que geram a matriz U, que realize a permutação e, então, aplicar a Fatoração LU normalmente. Fatoramos, portanto, $PA = LU$. Ainda segundo o autor, P é inversível e $P^{-1} = P^T$, logo, $A = P^T LU$. Segundo Campos (2018), para resolver o sistema $Ax = b$, tem-se:

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb,$$

fazendo,

$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb.$$

Esse processo contribui bastante para diminuir os erros de arrendondamento, produzindo, portanto, soluções melhores. A demonstração desse método $PA = LU$ poderá ser encontrada em Campos (2008).

Agora, assumindo que a matriz A possua a Fatoração LU focaremos em como resolver o sistema. A seguir, mostraremos os procedimentos da Fatoração LU para resolução de um sistema linear:

1. Verificar se a matriz A do sistema linear satisfaz as condições da Fatoração LU;

2. Decompor a matriz A na fatoração LU utilizando as fórmulas gerais;

3. Resolver o sistema $Ax = b$ usando a fatoração LU.

Veremos a seguir um exemplo de como resolver um sistema linear utilizando a Fatoração LU e seus procedimentos.

Exemplo 4. *Utilizando a Fatoração LU, qual a solução do sistema linear abaixo?*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Solução. Escrevendo o sistema linear na forma matricial do tipo $Ax = b$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Para que a matriz A, de ordem 3, satisfaça as condições da Fatoração LU, devemos ter os menores principais da matriz A diferente de zero, ou seja, $\det(A_1) \neq 0$ e $\det(A_2) \neq 0$. Temos que:

- $\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0;$

- $\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$

Agora que sabemos que a matriz A satisfaz as condições do Teorema 4.1, ou seja, que pode ser decomposta no produto LU. Iremos construir as matrizes L, triangular inferior com valores numéricos 1 na diagonal principal e U, triangular superior, ambas de mesma ordem de A, ou seja, de ordem 3 do tipo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Com isso, aplicando as fórmulas gerais definidas, obtemos:

Tabela 1 – Cálculo dos elementos da 1ª linha de U

j	a_{1j}	u_{1j}
1	$a_{11} = 3$	u_{11}
2	$a_{12} = 2$	u_{12}
3	$a_{13} = 4$	u_{13}

Fonte: Autor

Tabela 2 – Cálculo dos elementos da 1ª coluna de L

i	$\frac{a_{n1}}{u_{11}}$	l_{i1}
2	$\frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{3}$	l_{21}
3	$\frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{4}{3}$	l_{31}

Fonte: Autor

Para a **1ª linha de** U, temos o $i = 1$:

Para a **1ª coluna de** L, temos $j = 1$:

Com isso, definimos alguns elementos da matriz L e da matriz U, que agora são formadas por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Como alguns elementos não foram definidos, continuemos a aplicação das fórmulas gerais, obtendo:

Para a **2ª linha de** U, temos $i = 2$:

Tabela 3 – Cálculo dos elementos da 2ª linha de U

j	$a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}$	u_{2j}
2	$a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = \frac{1}{3}$	u_{22}
3	$a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = \frac{2}{3}$	u_{23}

Fonte: Autor

Para a **2ª coluna de** L, temos $j = 2$:

Tabela 4 – Cálculo dos elementos da 2ª coluna de L

i	$\frac{a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12}}{u_{22}}$	l_{i2}
3	$\frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}} = 1$	l_{32}

Fonte: Autor

Assim, construímos por completa a matriz L triangular inferior e definiremos outros elementos da matriz U triangular superior, do formato:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Com isso, ficaremos finalmente para obter o elemento u_{33}, considerando o $i = 3$, da seguinte forma:

Tabela 5 – Cálculo dos elementos da 3ª linha de U

j	$a_{3j} - l_{31} \cdot u_{1j} - l_{32} \cdot u_{2j}$	u_{3j}
3	$a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23} = -8$	u_{33}

Fonte: Autor

Então, teremos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Por fim, podemos verificar que, de fato, $LU = A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Agora que decompomos a matriz A no produto das matrizes L e U, podemos ainda calcular o determinante de A de acordo com o Teorema 4.1 da seguinte forma:

$$det(A) = u_{11}u_{22}u_{33} \Rightarrow det(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot -8 \Rightarrow det(A) = -7.$$

Agora, utilizaremos as matrizes L e U para obter a solução do sistema linear. Com isso, temos:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Substituindo a matriz A pelo produto das matrizes L e U obtidas, temos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, definindo $Ux = y$, onde y é uma uma matriz auxiliar que satisfaça a propriedade da multiplicação de matrizes, ou seja, que o número de colunas da matriz U seja igual ao número de linhas da matriz x, temos que $Ly = b$, assim:

$$LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o operação de matrizes acima, determinamos os valores dos elementos da matriz auxiliar y, assim teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ \dfrac{1}{3}y_1 + y_2 = 2 \\ \dfrac{4}{3}y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases}.$$

Portanto o sistema acima, tem como solução $y_1 = 1$, $y_2 = \dfrac{5}{3}$ e $y_3 = 0$. Agora, retornando a relação das matrizes $Ux = y$, conseguiremos determinar os valores dos elementos da matriz x.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 = \dfrac{5}{3} \\ -8x_3 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 0$, que é solução do sistema inicial. ■

Segundo Vicente (2017), um dos motivos de utilizar a Fatoração LU é que além de ser uma técnica utilizada para resolver sistemas lineares (por tornar esse trabalho mais fácil e viável de ser executado computacionalmente) e diminuir o número de cálculos em algumas operações, ela também fornece uma maneira mais eficiente de calcular a matriz inversa e um meio de avaliar o condicionamento do sistema, ou seja, se os erros de arredondamentos se propagam de forma menos importante (bem-condicionado) ou se os erros se propagam de forma mais relevante (mal-condicionado) Ávila (2019). O exemplo a seguir ilustra o condicionamento de um sistema:

Exemplo 5. *Observe que os três sistemas abaixo:*

a) $\begin{bmatrix} 71 & 41 \\ 51 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 70 \end{bmatrix}$, *com solução* $\begin{bmatrix} 10/3 \\ -10/3 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 71 & 41 \\ 52 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 70 \end{bmatrix}$, *com solução* $\begin{bmatrix} -65 \\ 115 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 71 & 41 \\ 52 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100,4 \\ 69,3 \end{bmatrix}$, *com solução* $\begin{bmatrix} -85,35 \\ 150,25 \end{bmatrix}$.

Notamos que as matrizes possuem pequenas variações numéricas nos coeficientes que fazem com que as soluções fiquem bem distintas. Quando isso acontece, dizemos que o problema é mal-condicionado.

Uma vantagem da Fatoração LU é que ela depende apenas da matriz A. Assim, podemos decompor, quando possível, a matriz A em outra duas matrizes, L e U, facilitando a resolução com sistemas lineares mais simples.

4.1.2 Fatoração de Cholesky:

De acordo com Franco (2006), as operações aritméticas da Fatoração LU podem ser simplificadas ao explorar características de certos tipos de matrizes, nesses casos, informações adicionais sobre a estruturas da matrizes são consideradas de forma a reduzir o número de operações efetuadas. Como, por exemplo, se uma matriz dos coeficientes de um sistema linear for simétrica e definida positiva, poderemos simplificar os cálculos da Fatoração LU significativamente, utilizando um tipo especial de fatoração, chamada de Fatoração de Cholesky[1].

Antes de compreendermos esse tipo de fatoração, lembraremos do que se trata uma matriz simétrica e uma matriz definida positiva. Definimos como uma Matriz Simétrica, uma matriz quadrada A de ordem n em que todos os elementos de A são iguais aos de sua matriz transposta (A^T). Desse modo, teremos que $A = A^T$, quando o números de linhas forem iguais ao de colunas e quando transpormos ordenadamente os elementos da linha de uma matriz A para a coluna de sua transposta (A^T). Com isso temos:

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall\ i = 1, 2, ..., n \text{ e } j = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow A = A^T.$$

No exemplo abaixo, temos um tipo de matriz simétrica.

Exemplo 6. *Observe que a matriz A quadrada de ordem 3 é simétrica, ou seja, $A = A^T$.*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A^T$$

[1] André-Louis Cholesky (Montguyon, 15 de outubro de 1875 — 31 de agosto de 1918) foi um cartógrafo francês. Serviu nas forças armadas francesas como engenheiro e morreu quase no final da Primeira Guerra Mundial.

Definição 4.1 (Matriz Definida Positiva)**.** *Conforme Campos (2018), é uma matriz A quadrada simétrica de ordem n, que se para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tivermos:*

$$x^T A x > 0.$$

E Franco (2006) cita que é uma matriz A quadrada simétrica de ordem n onde todos os menores principais A_k, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas são sempre positivos, ou seja:

$$\det(A_k) > 0, \ \forall \ k = 1, 2, ..., n.$$

De acordo com as definições acima e a matriz do **Exemplo 6**, a seguir, observaremos uma matriz simétrica e definida positiva (SPD).

Exemplo 7. *Vimos que a matriz A quadrada de ordem 3 do Exemplo 6 é simétrica, mas também é definida positiva pois $x^T A x > 0$ ou todos seus menores principais são maiores que zero.*

Solução. Como $A = A^T$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, temos:

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 > 0.$$

Por outro lado, verificaremos se todos os menores principais de A são maiores que zero.

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = 4 > 0, \ \det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 11 > 0 \text{ e}$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 43 > 0.$$

Assim, concluímos que a matriz A é definida positiva. E como A é simétrica, logo, a matriz A é simétrica e definida positiva(SPD).

■

Agora, definiremos alguns Lemas para auxilarem na demonstração do Teorema da Fatoração de Cholesky. As demonstrações desses Lemas poderão ser encontradas em Vitorino e Ruggiero (2023).

Lema 4.2. *Se uma matriz A quadrada de ordem n é definida positiva, então A é inversível e sua inversa é também definida positiva.*

Lema 4.3. *Se uma matriz A quadrada de ordem n é não singular, então A^TA é simétrica definida positiva.*

Lema 4.4. *Sejam uma matriz B de ordem $m \times n$ com $m \leq n$ e posto$(B) = n$ e A uma matriz quadrada de ordem n definida positiva. Então, B^TAB é definida positiva.*

Lema 4.5. *Se uma matriz A quadrada de ordem n é uma matriz definida positiva, então suas submatrizes principais A_k para $k = 1, 2, ..., n$, são definidas positivas.*

Lema 4.6. *Se uma matriz A quadrada de ordem n é uma definida positiva, então os elementos da diagonal de A são estritamente positivos, ou seja, $a_{ii} > 0, \ \forall \ i = 1, ..., n$.*

Ainda de acordo com Vitorino e Ruggiero (2023) vamos enunciar formalmente a Fatoração de Cholesky com o Teorema a seguir.

Teorema 4.7 (Fatoração de Cholesky)**.** *A é uma matriz de ordem n simétrica e definida positiva se, somente se, existe uma única matriz triangular inferior G de ordem n com elementos da diagonal principal positivos, tal que $A = GG^T$, ou seja:*

$$A = GG^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se A é definida positiva, pelo Lema 4.5, temos que suas submatrizes A_k para $k = 1, 2, ..., n$, também são definidas positivas e, pelo Lema 4.2, temos que elas são não singulares. Dessa forma, as hipóteses do Teorema 4.1 sobre a existência e unicidade da fatoração LU verifica-se para a matriz A e, portanto, existem e são únicos os fatores L e U tais que $A = LU$, com U triangular superior e L triangular inferior com diagonal unitária.

Temos que $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U)$. Como A é definida positiva ela não é singular e, portanto, $\det(A) \neq 0$. Consequentemente, $\det(U) \neq 0$ e temos que $u_{ii} \neq 0$, com $i = 1, 2, ..., n$, uma vez que U é triangular superior e seu determinante é o produto dos elementos da diagonal. Dessa forma, é possível separar o fator U em $U = D\bar{U}$, escrevendo a fatoração:

$$A = LU = LD\bar{U},$$

onde D é uma matriz diagonal com elementos da diagonal iguais a $d_{ii} = u_{ii}$ e $\bar{U}$ tem entradas na forma $\bar{u}_{ij} = \dfrac{u_{ij}}{u_{ii}}$. Como A é simétrica então $LD\bar{U}$ é simétrica e, como D é matriz diagonal, ela também é simétrica, assim teremos:

$$(LD\bar{U})^T = LD\bar{U} \Leftrightarrow \bar{U}^TD^TL^T = LD\bar{U} \Leftrightarrow \bar{U}^TDL^T = LD\bar{U}.$$

Como a fatoração LU é única, segue que $\bar{U} = L^T$. A matriz L^T é triangular superior com diagonal unitária e assim possui posto completo e é não singular. Então, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = L^T x$ e se $y \neq 0$ então $x \neq 0$. Portanto, dado $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, temos:

$$y^T D y = (L^T x)^T D (L^T x) = x^T (L D L^T) x = x^T A x > 0.$$

A última desigualdade segue do fato que A é definida positiva. Portanto, a matriz D é também definida positiva e, pelo Lema 4.6 os elementos da diagonal de D são estritamente positivos. Então, podemos escrever D como $D = \hat{D}\hat{D}$ onde $\hat{D}$ é a diagonal com entradas: $\hat{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$. Observe que podemos também, por exemplo, tomar a raiz quadrada negativa, mas para manter a unicidade, na Fatoração de Cholesky convencionamos tomar a raiz quadrada positiva. Chamando $G = L\hat{D}$, temos:

$$A = LDL^T = L\hat{D}\hat{D}L^T = GG^T$$

Obtendo assim a Fatoração de Cholesky: $A = GG^T$, onde o fator G é triangular inferior com diagonal estritamente positiva, denominado **fator de Cholesky** da matriz A.

$(\Leftarrow)$ Supondo agora que existe o fator G triangular inferior com diagonal estritamente positiva, tal que $A = GG^T$, observe que G^T é triangular superior com diagonal estritamente positiva e, portanto, é não singular. Pelo Lema 4.3, segue que $(G^T)^T G^T = GG^T = A$ é simétrica definida positiva.

■

- **Cálculo do Fator de Cholesky**:

Consideremos uma matriz A de ordem n simétrica e definida positiva, então pelo Teorema 4.7, a Fatoração de Cholesky existe e a matriz A pode ser fatorada como $A = GG^T$. Denotando g_{ij} como os elementos da matriz G, podemos escrever os elementos da matriz GG^T em função das entradas de G. E, pela igualdade de matrizes, as colunas de A são iguais as colunas de GG^T, o que significa que podemos encontrar as entradas da matriz G utilizando as entradas de A, do qual a matriz G, será obtida a partir da equação matricial:

$$A = GG^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}.$$

Igualando a primeira coluna da matriz A e da matriz GG^T poderemos determinar os elementos da primeira coluna de G, ou seja:

Para a **1ª coluna**, temos $j = 1$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^2 \\ g_{11}g_{21} \\ \vdots \\ g_{11}g_{k1} \\ \vdots \\ g_{11}g_{n1} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ e } g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \text{para } i = 2, 3, ..., n.$$

Poderemos efetuar a raiz quadrada de a_{11} pois os elementos da diagonal da matriz A são estritamente positivos, uma vez que A é definida positiva. Obtidos os elementos da primeira coluna, igualaremos as segundas colunas de A e GG^T para determinar os elementos da segunda coluna, como ilustrado a seguir:

Para a **2ª coluna**, temos $j = 2$:

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}g_{21} \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ \vdots \\ g_{k1}g_{21} + g_{k2}g_{22} \\ \vdots \\ g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{bmatrix}.$$

Como conhecemos os elementos da primeira coluna, então:

$$g_{22} = \sqrt{a_{i2} - g_{21}^2} \text{ e } g_{i2} = \frac{a_{12} - g_{i1}g_{21}}{g_{22}}, \text{para } i = 3, 4, ..., n.$$

Generalizando o processo, teremos que a k-ésima coluna será obtida comparando-se as k-ésimas colunas das matrizes A e GG^T, da seguinte forma:

Para a **k-ésima coluna**, temos $j = k$:

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}g_{k1} \\ g_{21}g_{k1} + g_{22}g_{k2} \\ \vdots \\ g_{k1}^2 + g_{k2}^2 + \ddots + g_{kk}^2 \\ \vdots \\ g_{i1}g_{k1} + g_{i2}g_{k2} + \ddots + g_{ik}g_{kk} \\ \vdots \\ g_{n1}g_{k1} + g_{n2}g_{k2} + \ddots + g_{nk}g_{kk} \end{bmatrix}.$$

Pelo fato de conhecermos os elementos g_{ij}, para $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., k-1$. Então:

$$g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - g_{k1}^2 - g_{k2}^2 - ... - g_{k(k-1)}^2} \text{ e } g_{ik} = \frac{a_{ik} - g_{i1}g_{k1} - g_{i2}g_{k2} - ... - g_{i(k-1)}g_{k(k-1)}}{g_{kk}}$$

para $i = k+1, ..., n$, portanto, simplificando as expressões, respectivamente, temos:

$$g_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ki}^2} \text{ e } g_{ik} = \frac{(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij}g_{kj})}{g_{kk}} \text{para } i = k+1, ..., n.$$

Vejamos agora os procedimentos da Fatoração de Cholesky para obtermos a solução de sistemas lineares:

- Verificar se a matriz A do sistema linear satisfaz as condições da Fatoração Cholesky;
- Decompor A em GG^T;
- Resolver $Gy = b$ e $G^T x = y$.

Mostramos a seguir como resolver um sistema linear utilizando a Fatoração de Cholesky e seus procedimentos.

Exemplo 8. *Utilizando a Fatoração de Cholesky, qual a solução do sistema linear abaixo?*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Solução. Escrevendo o sistema linear na forma matricial do tipo $Ax = b$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Para que a matriz A, de ordem 3, satisfaça as condições da Fatoração de Cholesky, devemos ter uma matriz A simétrica, ou seja, $A = A^T$ e definida positiva, logo, $\det(A_k) > 0$, com $k = 1, 2$ e 3. Observemos que a matriz A é simétrica, portanto, $A = A^T$ e verificando se os menores principais são maiores que zero, temos:

- $\det(A_1) = \det\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$;
- $\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0$;
- $\det(A_3) = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 > 0.$

Como a matriz A é simétrica e definida positiva, então ela satisfaz as condições do Teorema 4.7 e pode ser decomposta em GG^T, ou seja, $A = GG^T$ e com isso teremos:

$$A = GG^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}.$$

Obtendo os elementos da primeira coluna de G, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} g_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^2 \\ g_{21}g_{11} \\ g_{31}g_{11} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{11} = \sqrt{1} \\ g_{21}g_{11} = 1 \\ g_{31}g_{11} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{21} = 1 \\ g_{31} = 0 \end{cases}.$$

Agora, obtendo os elementos da segunda coluna de G, notamos que em alguns casos, substituiremos os valores dos elementos encontrados para auxiliar resolução da fatoração, com isso temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}g_{21} \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\begin{cases} g_{11}g_{21} = 1 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 2 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{22} = \sqrt{2 - 1^2} \\ g_{32} = \dfrac{-1}{g_{22}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{22} = 1 \\ g_{32} = -1 \end{cases}.$$

E, por fim, obtendo os elementos da terceira coluna da matriz G, temos que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}g_{31} \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g_{11}g_{31} = 0 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = -1 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 3 \end{cases}.$$

Observa-se que utilizamos somente a última equação do sistema acima devido aos outros elementos da matriz G já terem sido encontrados. Logo:

$$g_{33} = \sqrt{3 - g_{31}^2 - g_{32}^2} = \sqrt{3-1} \Rightarrow g_{33} = \sqrt{2}.$$

Portanto, obtemos a fatoração da matriz A em:

$$A = GG^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema linear na forma matricial:

$$Ax = b \Leftrightarrow (GG^T)x = b$$

pode ser resolvido através de dois sistemas triangulares, $Gy = b$ e $G^Tx = y$. Para o primeiro sistema temos:

$$Gy = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ -y_2 + \sqrt{2}y_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Consideremos agora, o segundo sistema triangular, $G^Tx = y$, para encontrar a solução do sistema linear do exemplo proposto, portanto:

$$G^Tx = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ \sqrt{2}x_3 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Com isso, a solução do sistema linear inicial é $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. ■

De acordo com Ruggiero e Lopes (1996) a vantagem da Fatoração de Cholesky é que requer menos operações aritméticas do que a Fatoração LU, onde a Fatoração LU requer aproximadamente $\frac{2n^3}{3}$ operações para ser concluída, onde n é a ordem da matriz, a Fatoração de Cholesky requer aproximadamente a metade dessas operações, ou seja, $\frac{n^3}{3}$, e isso faz com que facilite e agilize a resolução dos sistemas lineares. Ainda segundo os autores, observasse que alguns autores contam uma adição e uma multiplicação como uma operação apenas. Assim, para esses autores, a Fatoração LU realiza cerca de $\frac{n^3}{3}$ operações e a Fatoração de Cholesky, $\frac{n^3}{6}$.

4.2 Método Iterativos

Em um método direto (por exemplo, solução via fatoração LU) obtemos uma solução (caso ela exista) depois de realizarmos um número finito de operações (só teremos a solução ao final do processo). Já os métodos iterativos, quando convergem, gradativamente melhoram a qualidade de uma aproximação inicial (ou estimativa inicial ou chute inicial) da qual deve ser fornecida. Segundo Biloti (2020), quanto mais tempo puderem ser executados, melhor será a aproximação conseguida, ou seja, os métodos iterativos tem por finalidade o melhoramento contínuo da solução aproximada até que esta esteja precisa o "suficiente". De acordo com Kremer (2009), não se pode garantir a priori que os métodos iterativos resolvam qualquer tipo de sistema, é necessário analisar certos critérios estabelecidos em relação ao sistema. Já os métodos diretos resolvem todos os tipos de sistema determinados, mas alguns de forma mais demorada.

Veremos nesta Seção dois métodos iterativos, o Método de Gauss-Jacobi e o Método de Gauss-Seidel, para obter uma aproximação para a solução de um sistema linear. Geralmente em um método iterativo, iniciamos com uma aproximação inicial para a solução (que pode ser ruim, ou seja, que essa aproximação não esteja o mais próximo possível da solução exata) e vamos melhorando essa aproximação através de sucessivas iterações.

4.2.1 Método Gauss-Jacobi

Os métodos iterativos se dividem em estacionários e não-estacionários. Um método é estacionário quando cada solução aproximada é obtida do anterior sempre pelo mesmo processo Kremer (2009). Entre os métodos iterativos estacionários, temos o Método de

Gauss[2]-Jacobi[3] que é um procedimento iterativo para a resolução de sistemas lineares que tem a vantagem de ser mais simples de se implementar computacionalmente e está menos sujeito ao acúmulo de erros de arredondamento. Sua desvantagem, no entanto, é não funcionar em todos os casos.

O método consiste em gerar, a partir de uma aproximação inicial para a solução do sistema, uma sequência de vetores que convirja para a solução exata, efetuando o mesmo processo uma quantidade finita de vezes, ou seja, criar um processo recursivo através de um sistema equivalente a $Ax = b$, tal que a sequência de vetores produzida por esse processo convirja para a solução x, independentemente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Como dito anteriormente, não se pode garantir que os métodos iterativos resolvam qualquer tipo de sistema, é necessário analisar alguns critérios para que seja possível saber se o sistema converge ou não. Dois desses critérios são chamados de **Critério das Linhas e Critério das Colunas**.

- Critério das linhas:

  Uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n, satisfaz o Critério das Linhas se:

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1, \text{ onde } \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}.$$

- Critério das colunas:

  Uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n, satisfaz o Critério das Colunas se:

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1, \text{ onde } \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|}{|a_{kk}|}.$$

Segundo Paiva (2023), uma matriz que satisfaz o critério das linhas é dita estritamente diagonal dominante e quanto menor o valor de α, mais rápida será a convergência. A seguir, temos um exemplo para ilustrar a verificação do Critério das Linhas.

Exemplo 9. *Observe que o sistema abaixo satisfaz o critério das linhas, logo é dita estritamente diagonal dominante.*

[2] Karl Friedrich Gauss (Brunswick, 30 de abril de 1777 — 23 de fevereiro de 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia. Entre outras coisas, desenhou o heptadecágono, inventou o telégrafo e definiu o conceito de números complexos.

[3] Karl Gustav Jakob Jacobi (Potsdam, 10 de dezembro de 1804 — 18 de fevereiro de 1851) foi um matemático alemão, que fez contribuições fundamentais para funções elípticas, dinâmica, equações diferenciais e teoria dos números.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Solução. Critério das Linhas:

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = 0,3 < 1, \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0,4 < 1 \text{ e } \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0,5 < 1.$$

Como:

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = 0,5 < 1,$$

o método converge. ■

Uma consequência interessante desse critério é que a ordem das equações podem influenciar o resultado do método apesar de não alterar em nada no sistema. Por exemplo, o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 12 \end{cases}$$

não satisfaz o critério das linhas, já que temos o $\alpha_1 = 3$. Logo, pode ser que o método convirja ou que não convirja. No entanto, se trocarmos as duas primeiras equações de lugar e ficarmos com:

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 12 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema original e satisfaz o critério das linhas ($\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ e $\alpha_3 < 1$) e com isso, temos a certeza que o método converge. Então sempre que um sistema não satisfizer o critério das linhas, é adequado, caso possível, tentar reorganizar as equações entre elas para tornar o método convergente.

A seguir, temos duas definições necessárias que podem garantir que a solução do sistema $Ax = b$ convirja.

Definição 4.2. *Uma sequência de vetores $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ converge para um vetor x, se*

$$\lim_{k \to \infty} \| x^{(k)} - x \| = 0.$$

Notação: $x^{(T)} \to x$.

Definição 4.3. *O raio espectral de uma matriz $A \in M$ quadrada de ordem n é definido como*

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, i \in 1, 2, ..., n,$$

onde λ_i são os autovalores de A.

De acordo com Campos (2018), a determinação do raio espectral da matriz iteração $\rho(C)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$. Por isso, para alguns métodos estacionários, como no caso do Método Gauss-Jacobi, usualmente se utiliza o critério das linhas para prever a convergência.

A cada passo do método iterativo, a solução é obtida com uma exatidão crescente, e a partir do momento que as iterações são iniciadas de acordo com uma aproximação inicial, existem critérios que definem a melhor hora de parar de fazer as iterações, esse momento é chamado de **Critério de Parada**.

O processo deve ser interrompido quando algum critério de parada for satisfeito, e neste trabalho, vamos adotar como critério de parada o **Erro Absoluto** e o **Número Máximo de Iterações** (k_{max}). Sendo assim, serão geradas novas aproximações até que o processo seja interrompido quando tivermos um Erro Absoluto menor que a tolerância (ϵ), que define com qual exatidão a solução é calculada, ou quando um Número Máximo de Iterações(k_{max}) for alcançado. Em notação simbólica, o método será interrompido quando:

$$\parallel x^{(k+1)} - x^{(k)} \parallel < \epsilon \text{ ou } k > k_{max}.$$

Nos algoritmos será adotada a norma ∞ no Erro Absoluto, ou seja,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \epsilon.$$

Com isso, a ideia principal do método iterativo é transformar um sistema $Ax = b$ em outro equivalente da forma:

$$x = Cx + g,$$

tal que convirja com qualquer valor de $x^{(0)}$ se, e somente se, $\rho(C) < 1$, sendo $\rho(C)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração C e onde A é uma matriz quadrada de ordem n, x é uma matriz vetor das variáveis, de ordem $n \times 1$, b é uma matriz vetor dos termos constantes, de ordem $n \times 1$, C uma matriz quadrada de ordem n e g uma matriz vetor, de ordem $n \times 1$.

Com isso, deduziremos o Método Gauss-Jacobi, considerando os sistemas lineares na forma $Ax = b$ e supondo sem perda de generalidade que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Assim temos:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. .$$

A forma como o Método de Gauss-Jacobi transforma $Ax = b$ em $x = Cx + g$ é feita isolando cada coordenada x_i do vetor x na i-nésima equação do sistema. Logo,

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 & = & (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ x_3 & = & (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{array}\right. .$$

Desta forma, para o sistema linear, o Método de Gauss-Jacobi consiste em dada uma aproximação inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$ e uma tolerância (ϵ), gera-se uma sequência de vetores:

$$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T,\ k = 1, 2, 3, \cdots,$$

que converge para a solução exata, através do processo iterativo definido por:

$$\left\{\begin{array}{ccc} {x_1}^{(k+1)} & = & (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ {x_2}^{(k+1)} & = & (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ {x_3}^{(k+1)} & = & (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {x_n}^{(k+1)} & = & (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{array}\right. .$$

Desta forma, temos um sistema equivalente:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g.$$

Agora, obtendo $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ a partir de $Ax = b$, vamos escrever o método de outra maneira.

Consideraremos $A = L + D + U$, em que, L é uma matriz inferior de A, D é uma matriz diagonal formada pela diagonal de A e U uma matriz triangular superior de A, escrevemos o sistema linear $Ax = b$ como:

$$(L + D + U)x = b \Leftrightarrow Dx = (-L - U)x + b \Leftrightarrow x = D^{-1}(-L - U)x + D^{-1}b.$$

Determinando a sequência de vetores $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, temos que a igualdade acima pode ser convertida em um processo iterativo formando a recorrência:

$$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + g,$$

tal que $J = D^{-1}(-L - U)$ é a matriz de iteração do Método Gauss-Jacobi e $g = D^{-1}b$ e que tem representação matricial na forma:

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{(k+1)} \\ {x_2}^{(k+1)} \\ {x_3}^{(k+1)} \\ \vdots \\ {x_n}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {x_1}^k \\ {x_2}^k \\ {x_3}^k \\ \vdots \\ {x_n}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Como ja abordado neste trabalho, uma das vantagens do método é que a convergência independe da aproximação inicial x^0 e segundo Campos (2018), usualmente, faz-se $x^{(0)} = 0$. Usando este valor na iteração:

$$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + g,$$

tem-se que:

$$x^{(1)} = g \Rightarrow x_i^{(1)} = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Deste modo, este valor pode ser tomado como a aproximação inicial:

$$x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

A seguir, resolveremos um exemplo de sistemas equações lineares utilizando o método Gauss-Jacobi.

Exemplo 10. *Resolver o sistema linear abaixo considerando* $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -1,8 \\ 5,5 \\ 7,3 \end{bmatrix}$ *e* $\epsilon = 0,1$.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}.$$

Solução. Para $k = 1$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (10 - 3x_2 - x_3)/6 \\ x_2^{(1)} = (16 - 4x_1 + 3x_3)/9 \\ x_3^{(1)} = (14 - x_1 + x_2)/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = (10 - 3 \cdot 5,5 - 7,3)/6 \\ x_2^{(1)} = (16 - 4 \cdot (-1,8) + 3 \cdot 7,3)/9 \\ x_3^{(1)} = (14 - (-1,8) + 5,5)/3 \end{cases}.$$

Com isso, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -2,3 \\ x_2^{(1)} = 5,01 \\ x_3^{(1)} = 7,1 \end{cases}.$$

Com o fim da primeira iteração, verificaremos se o critério de parada foi atingindo utilizando $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \epsilon$, logo:

$$| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} | = | -2,3 - (-1,8) | = 0,5 > 0,1.$$

Observemos que para $\| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \|$ o critério de parada não foi atingido, com isso continuaremos as iterações.

Para $k = 2$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = (10 - 3x_2^{(1)} - x_3^{(1)})/6 \\ x_2^{(2)} = (16 - 4x_1^{(1)} + 3x_3^{(1)})/9 \\ x_3^{(2)} = (14 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = (10 - 3 \cdot 5,01 - 7,1)/6 \\ x_2^{(2)} = (16 - 4 \cdot (-2,3) + 3 \cdot 7,1)/9 \\ x_3^{(2)} = (14 - (-2,3) + 5,01)/3 \end{cases}.$$

Assim, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -2,02 \\ x_2^{(2)} = 5,17 \\ x_3^{(2)} = 7,1 \end{cases}.$$

Utilizando o critério de parada $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \epsilon$ para a segunda iteração, temos:

$$| x_1^{(2)} - x_1^{(1)} | = | -2,02 - (-2,3) | = 0,28 > 0,1.$$

Novamente o critério de parada não foi atingido. Logo, seguimos com as iterações:
Para $k = 3$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = (10 - 3x_2^{(2)} - x_3^{(2)})/6 \\ x_2^{(3)} = (16 - 4x_1^{(2)} + 3x_3^{(2)})/9 \\ x_3^{(3)} = (14 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)})/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = (10 - 3 \cdot 5,17 - 7,1)/6 \\ x_2^{(3)} = (16 - 4 \cdot (-2,02) + 3 \cdot 7,1)/9 \\ x_3^{(3)} = (14 - (-2,02) + 5,17)/3 \end{cases}.$$

Portanto, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -2,10 \\ x_2^{(3)} = 5,04 \\ x_3^{(3)} = 7,06 \end{cases}.$$

Verificando o critério de parada, temos:

$$| x_1^{(3)} - x_1^{(2)} |=| -2,10 - (-2,02) |= 0,08 < 0,1$$
$$| x_2^{(3)} - x_2^{(2)} |=| 5,04 - 5,17 |= 0,13 > 0,1.$$

Como $\| x_2^{(3)} - x_2^{(2)} \|> \epsilon$, as iterações devem continuar.
Para $k = 4$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = (10 - 3x_2^{(3)} - x_3^{(3)})/6 \\ x_2^{(4)} = (16 - 4x_1^{(3)} + 3x_3^{(3)})/9 \\ x_3^{(4)} = (14 - x_1^{(3)} + x_2^{(3)})/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(4)} = (10 - 3 \cdot 5,04 - 7,06)/6 \\ x_2^{(4)} = (16 - 4 \cdot (-2,10) + 3 \cdot 7,06)/9 \\ x_3^{(4)} = (14 - (-2,10) + 5,04)/3 \end{cases}.$$

Com isso, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -2,03 \\ x_2^{(4)} = 5,06 \\ x_3^{(4)} = 7,04 \end{cases}.$$

Utilizando o critério de parada para a quarta iteração, temos:

$$| x_1^{(4)} - x_1^{(3)} |=| -2,03 - (-2,10) |= 0,07 < 0,1$$
$$| x_2^{(4)} - x_2^{(3)} |=| 5,06 - 5,04 |= 0,02 < 0,1$$
$$| x_3^{(4)} - x_3^{(3)} |=| 7,04 - 7,06 |= 0,02 < 0,1.$$

Logo:

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| < 0,1.$$

Assim, o critério de parada foi satisfeito para as três análises, portanto o processo será interrompido e a aproximação da solução do sistema original será:

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} -2,03 \\ 5,06 \\ 7,04 \end{bmatrix}.$$

Como a solução exata do sistema é:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

podemos perceber que o método Gauss-Jacobi converge para a solução do sistema.

■

Com isso, mostraremos abaixo os procedimentos resumidamente da utilização do Método de Gauss-Jacobi para a resolução de sistemas lineares:

- Escolher uma estimativa inicial, ou seja, $x^{(0)}$;
- Calcular as aproximações sucessivas $x^{(k)}$ a partir da iteração $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$;
- Continuar a gerar estimativas até que um dos critérios de paradas sejam alcançados, ou seja, $\parallel x^{(k+1)} - x^{(k)} \parallel < \epsilon$ ou $k > k_{max}$.

4.2.2 Método Gauss-Seidel

O método Gauss-Seidel[4], também estacionário, difere-se do Gauss-Jacobi por utilizar todos os valores que já foram calculados anteriormente na mesma iteração, fazendo com que reduza o número de iterações até obter a tolerância determinada, ou seja, no momento de se calcular $x_n^{(k+1)}$ usaremos todos os valores $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)} ..., x_{n-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados na iteração anterior.

A nova solução de $x^{(k+1)}$ dado uma solução $x^{(k)}$ é calculada através das equações:

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} & = & (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2{}^{(k+1)} & = & (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ x_3{}^{(k+1)} & = & (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} & = & (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases}.$$

Com isso, na hora de calcular o $x_2^{(k+1)}$ não utilizaremos o $x_1^{(k)}$ pois uma nova iteração ja terá sido calculada, o $x_1^{(k+1)}$. O mesmo acontece no $x_3^{(k+1)}$ do qual utilizaremos os dados mais atualizados de x_1 e x_2, que no caso serão $x_1^{(k+1)}$ e $x_2^{(k+1)}$, ou seja, aproveitaremos os valores encontrados em cada iteração ao invés de ficar usando os da última.

[4] Philipp Ludwig von Seidel (Zweibrücken, 23 de outubro de 1821 — Munique, 13 de agosto de 1896) foi um matemático alemão. Descobriu conceito analítico crucial da convergência uniforme e decompôs as aberrações monocromáticas de primeira ordem em cinco aberrações constituintes. Estas são comumentemente referenciadas como as cinco aberrações de Seidel.

De acordo com Campos (2018), seja o sistema $Ax = b$, com a matriz A sendo decomposta tal que $A = D + E + F$, sendo D uma matriz diagonal, E uma matriz triangular inferior e F uma matriz triangular superior com diagonais nulas. Assim, o sistema pode ser escrito como:

$$(D + E + F)x = b \Leftrightarrow (D + E)x = -Fx + b,$$

ou na forma de iteração obtida pela recorrência:

$$x^{(k+1)} = (-(D + E)^{-1}F)x^k + (D + E)^{-1}b \Leftrightarrow x^{(k+1)} = Sx^k + g,$$

onde, a matriz $S = (-(D + E)^{-1}F)$ é a matriz iteração do Método Gauss-Seidel e $g = (D + E)^{-1}b$.

Ainda segundo Campos (2018), um modo mais prático de implementar este método, sem usar a matriz de iteração que utiliza inversa é dado por:

$$(D + E + F)x = b \Leftrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

Na forma de recorrência,

$$(D + E)x^{(k+1)} = -Fx^k + b \Leftrightarrow Dx^{(k+1)} = -Ex^{(k+1)} - Fx^k + b.$$

E escrevendo a equação acima na forma matricial, obtemos as equações de iterações do Método de Gauss-Seidel.

$$Dx^{(k+1)} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {x_1}^{(k+1)} \\ {x_2}^{(k+1)} \\ {x_3}^{(k+1)} \\ \vdots \\ {x_n}^{(k+1)} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {x_1}^k \\ {x_2}^k \\ {x_3}^k \\ \vdots \\ {x_n}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma que o Método Gauss-Jacobi possui critérios de convergência, **Critério de Linhas e Critério de Colunas**, o Método de Gauss-Seidel também possui. Neste caso, seja $Ax = b$ um sistema linear para garantir a convergência, o método de iteração deverá satisfazer um dos critérios, **Critério de Linhas ou Critério de Sassenfeld**.

- Critério de Sassenfeld: Seja uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada de ordem n. Sejam β_i, $i = 1, 2, ..., n$ dados por:

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}, \ \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|\beta_j}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

De acordo com Ruggiero e Lopes (1996), o Método de Gauss-Seidel converge para a solução de $Ax = b$, independentemente da escolha de $x^{(0)}$, se satisfazer:

$$\beta = \max_{1 \le i \le n} \beta_i < 1,$$

além disso, quanto menor for β mais rápida será a convergência.

No exemplo a seguir, verificaremos como funciona o método de Gauss-Seidel na prática.

Exemplo 11. *Utilizando o sistema linear do exemplo anterior, resolveremos pelo Método Gauss-Seidel* $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -1,8 \\ 5,5 \\ 7,3 \end{bmatrix}$ *e* $\epsilon = 0,1$.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}.$$

Solução. Para $k = 1$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (10 - 3x_2 - x_3)/6 \\ x_2^{(1)} = (16 - 4x_1^{(1)} + 3x_3)/9 \\ x_3^{(1)} = (14 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = (10 - 3 \cdot 5,5 - 7,3)/6 = -2,3 \\ x_2^{(1)} = (16 - 4 \cdot (-2,3) + 3 \cdot 7,3)/9 = 5,23 \\ x_3^{(1)} = (14 - (-2,3) + 5,23)/3 = 7,17 \end{cases}.$$

Com isso, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -2,3 \\ x_2^{(1)} = 5,23 \\ x_3^{(1)} = 7,17 \end{cases}.$$

Utilizando como critério de parada $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \epsilon$, temos:

$$| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} | = | -2,3 - (-1,8) | = 0,5 > 0,1.$$

Observemos que para $\| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \|$ o critério de parada não foi atingido, com isso continuaremos as iterações.

Para $k = 2$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = (10 - 3x_2^{(1)} - x_3^{(1)})/6 \\ x_2^{(2)} = (16 - 4x_1^{(2)} + 3x_3^{(1)})/9 \\ x_3^{(2)} = (14 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)})/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = (10 - 3 \cdot 5,23 - 7,17)/6 = -2,14 \\ x_2^{(2)} = (16 - 4 \cdot (-2,14) + 3 \cdot 7,17)/9 = 5,12 \\ x_3^{(2)} = (14 - (-2,14) + 5,12)/3 = 7,09 \end{cases}.$$

Assim, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -2,14 \\ x_2^{(2)} = 5,12 \\ x_3^{(2)} = 7,09 \end{cases}.$$

Verificaremos novamente se essa segunda iteração satisfaz o critério de parada, com isso temos:

$$\mid x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \mid = \mid -2,14 - (-2,3) \mid = 0,16 > 0,1.$$

Novamente o critério de parada não foi atingido, logo, seguimos com as iterações:

Para $k = 3$, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = (10 - 3x_2^{(2)} - x_3^{(2)})/6 \\ x_2^{(3)} = (16 - 4x_1^{(3)} + 3x_3^{(2)})/9 \\ x_3^{(3)} = (14 - x_1^{(3)} + x_2^{(3)})/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = (10 - 3 \cdot 5,12 - 7,09)/6 = -2,07 \\ x_2^{(3)} = (16 - 4 \cdot (-2,07) + 3 \cdot 7,09)/9 = 5,06 \\ x_3^{(3)} = (14 - (-2,07) + 5,06)/3 = 7,04 \end{cases}.$$

Logo, resolvendo as iterações, temos:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -2,07 \\ x_2^{(3)} = 5,06 \\ x_3^{(3)} = 7,04 \end{cases}.$$

Utilizando o critério de parada para esta nova iteração, temos:

$$\mid x_1^{(3)} - x_1^{(2)} \mid = \mid -2,07 - (-2,14) \mid = 0,07 < 0,1$$
$$\mid x_2^{(3)} - x_2^{(2)} \mid = \mid 5,06 - 5,12 \mid = 0,06 < 0,1$$
$$\mid x_3^{(3)} - x_3^{(2)} \mid = \mid 7,04 - 7,09 \mid = 0,05 < 0,1.$$

Logo:

$$\max_{1 \le i \le 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| < 0,1.$$

Assim, o critério de parada foi satisfeito para as três análises, portanto o processo será interrompido e a aproximação da solução do sistema original será:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} -2,07 \\ 5,06 \\ 7,04 \end{bmatrix}.$$

Como a solução exata do sistema é:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

podemos perceber que o método Gauss-Seidel converge para a solução do sistema.

■

Como podemos observar, a resolução do exemplo do mesmo sistema linear pelo Método Gauss-Geisel em comparação com o Método Gauss-Jacobi, diminuiu em uma iteração para conseguirmos uma aproximação da soluçao exata do sistema com a tolerância definida. Valle (2022) afirma que, os métodos iterativos, que geralmente não modificam significativamente a estrutura da matriz A, possuem papel importante na resolução de sistemas lineares principalmente quando A é esparsa e que o método de Gauss-Seidel é, evidentemente, superior ao método de Gauss-Jacobi. Contudo, o método de Gauss-Jacobi pode ser interessante se implementado usando computação paralela.

5 Proposta de Sequência Didática

Um dos propósitos deste trabalho é mostrar que a Sequência Didática é um meio eficiente para se aplicar os conteúdos de matemática no ensino básico, sobretudo os estudos de matrizes e sistemas de equações lineares, com os métodos de resolução diretos e iterativos citados neste trabalho, envolvendo linguagem computacional Python. Podendo permitir uma série de oportunidades comunicativas, Souza (2023) afirma que, a Sequência Didática é um valioso instrumento de planejamento de ensino para professores de qualquer disciplina. Assim como os projetos didáticos e as atividades permanentes ou ocasionais, as sequências didáticas são uma modalidade organizativa de ensino, cuja finalidade é expressar uma sequência de etapas que tem o objetivo de sistematizar um conteúdo e promover a assimilação de um saber.

Neste capítulo, sugere-se, uma sequência didática para a disciplina de Matemática no Ensino Médio, para buscar um aprimoramento do processo de aprendizado, de tal modo que possa torná-lo mais eficiente. Tal proposta de Sequência Didática, tanto pode ser aplicada individualmente como em grupo, dividindo cada atividade para um grupo de alunos, de preferência no Laboratório de Informática, para que os alunos tenham acesso as computadores. Ao término de cada atividade, os grupos devem fazer uma breve apresentação de como resolveram as tarefas. Nesse momento, o foco é trabalhar uma breve revisão do conteúdo proposto e a socialização das atividades por parte dos alunos. Momento em que o professor pode também fazer algumas considerações a respeito dos conceitos e dos significados de matrizes e de sistemas de equações lineares, ao mesmo tempo em que os alunos expõem suas dificuldades com a linguagem computacional, se tiverem.

Propõem-se que esta Sequência Didática seja aplicada logo após o estudo de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares com os métodos de resolução diretos (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os iterativos (*Gauss-Jacobi e Gauss- Seidel*) sendo necessário toda a assimilação do conteúdo dos métodos em conformidade com que expõe o Capítulo 4 deste trabalho. Sugere-se que, nas primeiras aulas desta Sequência Didática, seja promovido aos alunos um breve tutorial acerca do manuseio da Linguagem Computacional Python; e nas aulas subsequentes apresentar problemas matemáticos dos quais irão aumentando o nível de dificuldade de compreensão e programação.

Tomaremos como referência a Sequência Didática sugerida por Souza (2023), adaptada para o conteúdo proposto neste trabalho e baseada na Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba. Esta linha de desenvolvimento é feita a partir de atividades que irão junto com a linguagem Python abordar cada um dos conteúdos matemáticos selecionados e suas respectivas implementações computacionais, da qual consiste em um prosseguimento de 11 aulas, onde cada uma das aulas é organizada por três tópicos: Tempo estimado, Desenvolvimento e Resultados esperados qualitativos. A Aula 1 (Subseção 5.1.1) apresenta a Linguagem de Programação Python e alguns Ambientes de Desenvolvimento Integrados - (IDEs) que permitem o seu manuseio. A Aula 2 (Subseção 5.1.2) introduz a programação com Python: Estudo sobre as Variáveis, Comentários, Interatividade com o Usuário e Operadores Básicos. A Aula 3 (Subseção 5.1.3) dá sequência ao tutorial apresentado e exercita novos comandos e funções necessárias para a construção de expressões numéricas. A Aula 4 (Subseção 5.1.4) diagnostica os conhecimentos prévios e as possíveis dificuldades dos alunos. A Aula 5 (Subseção 5.1.5) propõe a elaboração de programas envolvendo matrizes. A Aula 6 (Subseção 5.1.6), por sua vez, propõe o primeiro problema a ser programado, o qual está relacionado a sistemas de equações lineares. Na Aula 7 (Subseção 5.1.7), damos início as resoluções de sistemas lineares com os métodos diretos usando a Fatoração LU. Já a Aula 8 (Subseção 5.1.8) usaremos a Fatoração de Cholesky. As Aulas 9 (Subseção 5.1.9) e 10 (Subseção 5.1.10), respectivamente, utilizam as resoluções de sistemas de equações lineares pelos métodos iterativos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Por fim, a Aula 11 (Subseção 5.1.11) sugere a realização de uma avaliação sobre o que foi vivenciado no decorrer da sequência didática.

5.1 Designação da Sequência Didática

Título: Resolução de Sistemas de Equações Lineares pelos métodos diretos (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e pelos os iterativos (*Gauss-Jacobi e Gauss- Seidel*).

Professor: Rafael Augusto Albuquerque Macedo.
Turmas: 2° Ano do Ensino Médio.
Duração: 18 horas-aulas.

Área do conhecimento: Matemática e Suas Tecnologias.
Componente curricular: Matemática.
Campo/Eixo: Álgebra e Funções.
Objeto de Conhecimento: Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

Habilidades:

- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT410) Associar o conceito de matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares às situações nas quais são utilizadas planilhas eletrônicas.
- (EM13MAT411) Reconhecer um sistema de equações associado a uma matriz com o intuito de resolver situações problemas.

Objetivos:

- Apresentar a Linguagem de Programação Python como um recurso digital e tecnológico para trabalhar Resoluções de Sistemas Lineares.
- Promover um breve tutorial sobre comandos e funções primordiais para o manuseio da Linguagem de Programação Python.
- Sugerir problemas que utilizem a linguagem de programação para codificar programas que usem conceitos sobre tópicos específicos de Matemática do Ensino Médio.
- Dominar e diferenciar os métodos diretos (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e pelos os iterativos (*Gauss-Jacobi e Gauss- Seidel*).
- Operar com matrizes e suas classificações, de acordo com seu tipo definido.
- Reconhecer a representação algébrica de equações lineares.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo sistemas de equações lineares.

Recursos:

- Quadro branco e lápis;
- Projetor Multimídia e Notebooks;
- Laboratório de Informática;
- Computadores e Celulares.

5.1.1 Aula 1 - Apresentação da Linguagem Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Apresenta-se para a turma a Linguagem de Programação Python, expondo sua história, suas características e suas potencialidades.

  - Momento II: Apresenta-se a função `print()` e propõe-se para a turma, como forma de exercício, a codificação e a execução do um primeiro comando: imprimir a mensagem "`Seja bem-vindo ao ambiente de programação!`".

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Espera-se que os alunos se empolguem com a nova metodologia e que a partir da explicação e orientação do Professor possam aguçar a curiosidade e buscar tutorias gratuitos na internet e mini-vídeos explicativos para que possam executar o primeiro exercício e se sentirem confortáveis, arriscarem novas mensagens.

5.1.2 Aula 2 - Introdução à Programação com Python: Estudo sobre as Variáveis, Comentários, Interatividade com o Usuário e Operadores Básicos.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre comandos e funções primordiais para a programação com Python. Uma aula conceitual, expositiva e demonstrativa sobre os três tipos de Variáveis (`str, int e float`), sobre como inserir comentários na codificação, sobre como criar uma interatividade com o usuário por meio a função `input()` e sobre os Operadores Básicos (aritméticos, comparação e lógicos). Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 6 – Aula 2: Exercícios

AULA 2 - EXERCÍCIOS
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que converta metros para centímetros.
QUESTÃO 2 - Elabore um programa que solicite três números inteiros do usuário e imprima a soma destes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Para esse segundo momento, com o auxílio do professor, de tutorias e mini-vídeos disponibilizados gratuitamente na internet, almeja-se que os alunos criem os dois pequenos programas utilizando os operadores básicos. Para os alunos que sentirem dificuldade, aconselha que o professor oriente e revise os tutorias e se persistirem as dúvidas, o próprio professor pode elaborar o programa.

5.1.3 Aula 3 - Programação com Python: Estudo das Operações Matemáticas e Construção de Expressões Numéricas.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Proporciona-se uma aula conceitual e expositiva dos códigos dos símbolos das operações matemáticas para a construção de expressões numéricas. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 7 – Aula 3: Exercícios

AULA 3 - EXERCÍCIOS
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que trabalhe com as operações básicas e construa expressões numéricas.
QUESTÃO 2 - Elabore um programa que calcule o resto da divisão inteira entre dois números. Utilize apenas as operações de soma e subtração para calcular o resultado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Almeja-se nessa aula, que os alunos consigam elaborar os dois programas com as operações básicas matemáticas e que possam criar exemplos de expressões numéricas das quais possam resolver no caderno e verificar a sua resposta com o programa elaborado.

5.1.4 Aula 4 - Avaliação Diagnóstica

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min.)
  - Momento II: 1 aula (50 min.)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Realização de uma Avaliação Diagnóstica para sondar os conhecimentos dos alunos e diagnosticar as suas habilidades e lacunas acerca do manuseio da linguagem de programação Python, como também, sobre as operações básicas e as expressões numéricas.

  - Momento II: Discussão coletiva conduzida pelo professor sobre as respostas corretas das questões da Avaliação Diagnóstica. Sugere-se que, a partir do diagnóstico pragmático realizado após a aplicação da avaliação, o professor conduza um debate, permitindo a participação dos alunos, para suprir as deficiências e lacunas referentes ao manuseio da linguagem de programação Python, como também, sobre as operações básicas e as expressões numéricas.

  Apresenta-se abaixo uma sugestão para esta Avaliação Diagnóstica.

Tabela 8 – Aula 4: Avaliação Diagnóstica

AULA 4 - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA
QUESTÃO 1 - Qual a função que se utiliza para imprimir uma mensagem na execução de um programa?
QUESTÃO 2 - Qual a função que se utiliza para promover uma interatividade com o usuário na execução de um programa?
QUESTÃO 3 - Quais são os tipos de variáveis utilizadas no Python e como elas são declaradas?
QUESTÃO 4 - Quais são os operadores aritméticos utilizados no Python?
QUESTÃO 5 - O que é a indentação e qual a sua finalidade?
QUESTÃO 6 - Resolva as expressões numéricas abaixo e elabore um programa como forma de verificar sua resposta.
a) $5.(64 - 12 : 4)$. b) $480 : 20.[86 - 12.(5 + 2)]2$. c) $-[-12 - (-5 + 3)]$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

- Espera-se que os alunos consigam realizar por completa e corretamente a Avaliação Diagnóstica e que toda a turma no final possa debater na correção os melhores caminhos para suprirem alguma deficiência até aquele momento.

5.1.5 Aula 5 - Matrizes com Programação com Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre pacotes específicos com o objetivo de trabalhar com os alunos conceitos básicos de matrizes, assim como a posição dos elementos que a compõem. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 9 – Aula 5: Exercício

AULA 5 - EXERCÍCIO
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que crie uma matriz 3×3 que permita ao usuário digitar os valores dos elementos dessa matriz, exibindo no final a matriz com a formatação correta.
QUESTÃO 2 - Elabora um programa em que o usuário forneça uma matriz de ordem 3 e verifique se a matriz digitada é uma matriz identidade.
QUESTÃO 3 - Elabore um programa em que o usuário forneça uma matriz de ordem 3 e verifique se a matriz digitada é uma matriz triangular superior.
QUESTÃO 4 - Elabore um programa em que o usuário forneça uma matriz de ordem 3 e verifique se a matriz digitada é uma matriz triangular inferior.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Para essa aula, as dúvidas estarão mais frequentes, principalmente para os alunos que não venham se dedicando tanto na Linguagem Python. Para isso, o professor deve auxiliá-lo na elaboração do programa para que ele se mantenha interessado e focado na aula. Sugere-se também, que o professor repasse os conceitos das matrizes trabalhadas no exercício.

5.1.6 Aula 6 - Equações Lineares com Programação com Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre pacotes específicos para a solução de sistemas lineares, o Numpy e o Scipy. Uma aula conceitual, expositiva e demonstrativa sobre função `solve()`. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 10 – Aula 6: Exercício

AULA 6 - EXERCÍCIO
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que resolva o seguinte problema de sistema de equações lineares: Na lanchonete de uma escola, os pastéis e os sucos têm preços únicos. Um aluno pagou 16 reais por 2 pastéis e 3 copos de suco natural, e seu colega pagou 29 reais por 4 pastéis e 5 copos de suco natural. Qual o preço do pastel e do copo de suco natural?

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Para esta aula, os alunos deverão usar os pacotes específicos para a construção do sistema de equações lineares com 2 incógnitas. Nesta aula também, pode-se criar desafios para determinar as matrizes inversas quadradas de ordem 2 utilizando sistemas lineares. Para os alunos que não conseguirem a elaboração do programa, sugere-se ao professor, auxiliá-lo na construção.

5.1.7 Aula 7 - Resolução de Sistemas Lineares utilizando o método direto: Fatoração LU com Programação com Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre os códigos específicos para a resolução de sistemas de equações lineares através da Fatoração LU. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 11 – Aula 7: Exercício

AULA 7 - EXERCÍCIO
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que satisfaça a resolução de sistemas de equações lineares pelo método da Fatoração LU e verifique se esse programa satisfaz a solução do **Exemplo 4**. Caso não consiga, solicite o programa ao professor e teste sistemas nesse programa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Espera-se que poucos alunos consigam a elaboração desse programa, com isso, o professor deve fornecer a programação mais simples que achar necessária e solicitar que os alunos testem sistemas de equações lineares nesse programa e que gere um debate sobre os sistemas escolhidos.

- Sugestão de Implementação na Linguagem Python de acordo com Justo (2020):

```
>>> from __future__ import division
>>> import numpy as np
>>> from numpy import linalg
def fatoraLU(A):
U = np.copy(A)
n = np.shape(U)[0]
L = np.eye(n)
for j in np.arange(n-1):
for i in np.arange(j+1,n):
L[i,j] = U[i,j]/U[j,j]
for k in np.arange(j+1,n):
U[i,k] = U[i,k] - L[i,j]*U[j,k]
U[i,j] = 0
```

```
    return L, U
```

Código-fonte 5.1 – Aula 7: Exercício (Questão 1)

5.1.8 Aula 8 - Resolução de Sistemas Lineares utilizando o método direto: Fatoração de Cholesky com Programação com Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre os códigos específicos para a resolução de sistemas de equações lineares através da Fatoração de Cholesky. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 12 – Aula 8: Exercício

AULA 8 - EXERCÍCIO
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que satisfaça a resolução de sistemas de equações lineares pelo método da Fatoração Cholesky e verifique se esse programa satisfaz a solução do **Exemplo 8**. Caso não consiga, solicite o programa ao professor e teste sistemas nesse programa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Espera-se que poucos alunos consigam a elaboração desse programa, com isso, o professor deve fornecer a programação mais simples que achar necessária e solicitar que os alunos testem sistemas de equações lineares nesse programa e que gere um debate sobre os sistemas escolhidos.

- Sugestão de Implementação na Linguagem Python de acordo com Justo (2020):

```
# implementação de algoritmo simbólico
# para a decomposição de Cholesky
```

```
B = A[:,:] # faz cópia da matriz A

for k in range(0,n):
for i in range(0,k):
s = 0.
for j in range(0,i):
s += B[i,j]*B[k,j]
B[k,i] = (B[k,i] - s)/B[i,i]
s = 0.
for j in range(0,k):
s += s + B[k,j]*B[k,j]
B[k,k] = sp.sqrt(B[k,k] - s)

# saída
B
```

Código-fonte 5.2 – Aula 8: Exercício (Questão 1)

5.1.9 Aula 9 - Resolução de Sistemas Lineares utilizando o método iterativo: Gauss-Jacobi com Programação com Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre os códigos específicos para a resolução de sistemas de equações lineares através do método de Gauss-Jacobi. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 13 – Aula 9: Exercício

AULA 9 - EXERCÍCIO
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que satisfaça a resolução de sistemas de equações lineares pelo método Gauss-Jacobi e verifique se esse programa satisfaz a solução do **Exemplo 10**. Caso não consiga, solicite o programa ao professor e teste sistemas nesse programa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Espera-se que poucos alunos consigam a elaboração desse programa, com isso, o professor deve fornecer a programação mais simples que achar necessária e solicitar que os alunos testem sistemas de equações lineares nesse programa e que gere um debate sobre os sistemas escolhidos.

- Sugestão de Implementação na Linguagem Python de acordo com Justo (2020):

```
from __future__ import division
import numpy as np
from numpy import linalg

def jacobi(A,b,x0,tol,N):
#preliminares
A = A.astype('double')
b = b.astype('double')
x0 = x0.astype('double')

n=np.shape(A)[0]
x = np.zeros(n)
it = 0
#iteracoes
while (it < N):
it = it+1
#iteracao de Jacobi
for i in np.arange(n):
x[i] = b[i]
for j in np.concatenate((np.arange(0,i),np.arange(i+1,n))):
x[i] -= A[i,j]*x0[j]
x[i] /= A[i,i]
#tolerancia
```

```
if (np.linalg.norm(x-x0,np.inf) < tol):
return x
#prepara nova iteracao
x0 = np.copy(x)
raise NameError('num. max. de iterações excedido.')
```

Código-fonte 5.3 – Aula 9: Exercício (Questão 1)

5.1.10 Aula 10 - Resolução de Sistemas Lineares utilizando o método iterativo: Gauss-Seidel com Programação com Python.

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 1 aula (50 min)
  - Momento II: 1 aula (50 min)

- Desenvolvimento:

  - Momento I: Promove-se para a turma um tutorial sobre os códigos específicos para a resolução de sistemas de equações lineares através do método de Gauss-Seidel. Sugere-se a utilização de um projetor multimídia para expor os conceitos e demonstrações.

  - Momento II: Propõe-se para a turma um exercício que possibilite a prática e o uso dos conceitos estudados no Momento I. Apresenta-se, a seguir, uma sugestão de questões para este exercício.

Tabela 14 – Aula 10: Exercício

AULA 10 - EXERCÍCIO
QUESTÃO 1 - Elabore um programa que satisfaça a resolução de sistemas de equações lineares pelo método Gauss-Seidel e verifique se esse programa satisfaz a solução do **Exemplo 11**. Caso não consiga, solicite o programa ao professor e teste sistemas nesse programa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Espera-se que poucos alunos consigam a elaboração desse programa, com isso, o professor deve fornecer a programação mais simples que achar necessária e solicitar que os alunos testem sistemas de equações lineares nesse programa e que gere um debate sobre os sistemas escolhidos.

- Sugestão de Implementação na Linguagem Python de acordo com Justo (2020):

```
from __future__ import division
import numpy as np
from numpy import linalg

def gauss_seidel(A,b,x0,tol,N):
#preliminares
A = A.astype('double')
b = b.astype('double')
x0 = x0.astype('double')

n=np.shape(A)[0]
x = np.copy(x0)
it = 0
#iteracoes
while (it < N):
it = it+1
#iteracao de Jacobi
for i in np.arange(n):
x[i] = b[i]
for j in np.concatenate((np.arange(0,i),np.arange(i+1,n))):
x[i] -= A[i,j]*x[j]
x[i] /= A[i,i]
print(x[i],A[i,i])
#tolerancia
if (np.linalg.norm(x-x0,np.inf) < tol):
return x
#prepara nova iteracao
x0 = np.copy(x)
raise NameError('num. max. de iteracoes excedido.')
```

Código-fonte 5.4 – Aula 10: Exercício (Questão 1)

5.1.11 Aula 11 - Considerações e Avaliações

- Tempo estimado: 2 aulas de 50 min.

  - Momento I: 2 aulas

- Desenvolvimento:

- Momento I: Discussão coletiva conduzida pelo professor sobre a implementação da linguagem computacional no contexto da educação matemática. Sugere-se que o professor conduza um debate, permitindo a participação dos alunos, para suprir as deficiências e lacunas referentes ao manuseio da linguagem de programação Python, como também, sobre os conteudos de Matrizes e Resolução de Sistemas de Equações Lineares pelos métodos diretos (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e pelos os iterativos (*Gauss-Jacobi e Gauss- Seidel*).

- Resultados Esperados Qualitativos:

  - Com o final da Sequência Didática, espera-se que os alunos tenham avançado no ensino-aprendizagem dos conteúdos da área de Matemática trabalhados e revisados das aulas e que a linguagem computacional tenha bastante aproveitada no contexto da educação matemática e que eles possam buscar mais conhecimentos para os outros conteúdos e áreas.

5.2 Ponderações sobre a Sequência Didática

O ato de planejar faz com que o professor busque organizar sua prática pedagógica no contexto escolar, refletindo sobre os objetivos que deseja alcançar, tendo clareza de que o planejamento é um princípio necessário para o bom desenvolvimento da prática em sala de aula. Esta Sequência Didática auxilia o professor a organizar o seu trabalho de forma gradual, partindo de níveis de conhecimento que os alunos que eles não dominam para chegar aos níveis que eles precisam dominar, outra necessidade dessa Sequência é a realização de atividades em dupla e/ou em grupos para que os alunos consigam trocar conhecimento e auxiliar uns aos outros. Souza (2023) afirma que, a sequência didática pode ser de grande valia para os professores, como também para os alunos. Almeja-se contribuir efetivamente para o desenvolvimento do letramento matemático dos discentes. Espera-se também fornecer aos professores uma metodologia eficiente ao propor o uso desse recurso didático tecnológico.

6 Conclusões

A solução de um conjunto de equações é muito mais difícil quando as equações não são lineares. Entretanto, grande parte das aplicações envolve somente equações lineares, porém quando o sistema é de grande porte devemos escolher o método numérico adequado para preservar a máxima precisão. Quando nos deparamos com um sistema de equações lineares, temos como objetivo principal encontrar uma solução para ele, da qual deve satisfazer simultaneamente todas as equações lineares. Este trabalho consistiu em apresentar quatro métodos numéricos de resolução de sistemas de equações lineares que quase nunca são utilizados no ensino básico na área de Matemática.

A exploração dos Métodos Diretos e Iterativos citados neste trabalho, busca a abordagem de novos conceitos e a discussão de novas estratégias para a solução de problemas de sistemas de equações lineares, dos quais são uma ferramenta útil para a resolução de vários problemas práticos e importantes do dia a dia.

Como forma de não ocasionar a exclusão tecnóloga e digital dos discentes, conforme orientação da BNCC, buscou-se implementar as práticas educacionais, de modo que foi introduzido as TDICs nas aulas de Matemática com a utilização da Linguagem de Programação Python como um recurso digital e tecnológico. Desta forma, espera-se que tenha favorecido a formação educacional dos estudantes e contribuído com o trabalho pedagógico do professor.

Que a proposta da Sequência Didática sirva para motivar e auxiliar os professores de Matemática do Ensino Médio a utilizarem a metodologia, os métodos de resolução e os recursos tecnológicos em suas aulas.

Esperamos que este trabalho contribua para o aperfeiçoamento de alunos e professores, levando-os a refletir sobre a importância de se trabalhar sistemas de equações lineares com novos métodos numéricos possibilitando o entendimento da importância desse estudo e a compreensão de como ultilizá-los para resolver problemas do cotidiano e, fazendo uso da linguagem computacional como ferramenta para o desenvolvimento do ensino de matemática.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações, 10ª Ed.* Porto Alegre: Bookman, 2012. Citado na página 31.

BERNARDES, A. Uma proposta para integrar a história da matemática ao ensino de matemática: História das matrizes e as regras do discurso matemático. *Revista Brasileira de História, Educação e Matemática - Volume 04, Número 1, 84 – 101*, São Paulo, 2019. Citado na página 28.

BILOTI, R. *Cálculo Numérico.* 2020. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~biloti/an/211/sl-09.html>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 47.

BOYER, C. *História da matemática. 2ª ed.* São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 26.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 21.

CAMILLO, C. M.; MEDEIROS, L. M. Educação do campo e suas práticas educativas: a tecnologia em prol da formação de professores. *In: Simpósio de Tecnologias e Educação a Distância no Ensino Superior*, 2018. Citado na página 17.

CAMPOS, f. F. F. *Algoritmos Numéricos: Uma abordagem moderna do Cálculo Numérico, 3ª Ed.* Rio de Janeiro: LTC, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 34, 40, 50, 52 e 56.

CAMPOS, L. E. da S. *Um Estudo sobreFatoração de matrizes e a resolução de sistemas lineares.* Campinas: [s.n.], 2008. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/422950>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 34.

CONTIN, A. A. *Educação e tecnologias.* Londrina: Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A, 2016. Citado na página 16.

EVES, H. *Introdução a História da Matemática.* Campinas: Editora da UNICAMP, 1997. Citado na página 26.

FRANCO, N. M. B. *Cálculo Numérico, 1ª Ed.* São Paulo: Pearson Universidades, 2006. Disponível em: <http://galdino.pbworks.com/w/file/fetch/134978082/Livro_Neide.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 39 e 40.

JUSTO, D. A. R. *Cálculo Numérico: Um Livro Colaborativo.* Rio Grande do Sul: [s.n.], 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado 4 vezes nas páginas 68, 69, 71 e 73.

KOCH, M. Z. *As tecnologias no cotidiano escolar: uma ferramenta facilitadora no processo ensino-aprendizagem.* 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/

bitstream/handle/1/498/Koch_Marlene_Zimmermann.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 16.

KREMER, I. *Metodos Iterativos para Sistemas Lineares*. 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96623/Ivandra.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 47.

LEITE, L. S. c. e. a. *Tecnologia Educacional: Descubra suas possibilidades na sala de aula - 8ª ed.* Rio de Janeiro: Vozes, 2014. Citado na página 15.

LIMA, L. d.; PEREIRA, M.; CHAQUIAM, M. Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática -Volume 05, Número 14, 51 – 63*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

MACEDO, R. A. A. *A influência das TIC (Tecnologia da Informação e Comunicação) nas Práticas Educacionais do Ensino da Matemática*. Campina Grande: [s.n.], 2014. Disponível em: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/10915/1/PDF%20-%20RAFAEL%20AUGUSTO%20ALBUQUERQUE%20MACEDO.pdf>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 15.

MACHADO, F. C.; LIMA, M. de F. W. P. O uso da tecnologia educacional: Um fazer pedagógico no cotidiano escolar. *SCIENTIA CUM INDUSTRIA, V. 5, N. 2,*, p. 44 — 50, 2017. Citado na página 16.

MENEZES, N. N. C. *Introdução a programação com python: Algoritmos e Lógica de Programação Para Iniciantes*. São Paulo: Novatec, 2019. Citado na página 22.

NETO, J. E. *História da matemática*. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. Citado na página 28.

OLIVEIRA, R. *Benefícios e desafios da tecnologia na educação A tecnologia na educação estimula a autonomia do aluno no processo de ensino-aprendizagem.* 2022. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/escolas/beneficios-e-desafios-da-tecnologia-na-educacao>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 16.

PAIVA, A. *Sistemas Lineares: Metodos Iterativos*. 2023. Disponível em: <https://sites.icmc.usp.br/apneto/cursos/material/linsis_iterativo.pdf>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 48.

PARAíBA, P. C. do Ensino Médio da. Paraíba: [s.n.], 2018. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1q7hNWJL7ScfzW26dAjqXai9oUVpLs4Zf/view>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

POZO, J. I. *Aprendizes e mestres: a cultura da aprendizagem*. Porto Alegre: ARTMED, 2002. Citado na página 15.

RUGGIERO, M. A.; LOPES, V. L. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2a ed.* São Paulo: Makron Books, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 29, 47 e 57.

SANTOS, J. *Histórias e aplicações de Matrizes e Determinantes.* 2017. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2017/11/historias-aplicacoes-matrizes-determinantes.html>. Acesso em: 08 Jul 2023. Citado na página 23.

SARAIVA, E. *8 benefícios da tecnologia na educação e dicas valiosas para sua IES!* 2022. Disponível em: <https://blog.saraivaeducacao.com.br/tecnologia-na-educacao/>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 15.

SOARES, M. J. *Álgebra Linear.* 2012. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/36970/1/TextosAL_ECONOMIA.pdf>. Acesso em: 02 Jul 2023. Citado na página 30.

SOUSA, F. B. de; SABINO, E. R.; SABINO, E. R. *Abordagem Histórica e Conceitual sobre os Sistemas de Equações Lineares e sua Relação com matrizes e Determinantes.* 2017. Disponível em: <https://encurtador.com.br/hjnAJ>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.

SOUZA, J. E. de. *O uso da Linguagem de Programação Python na Resolução de Problemas Matemáticos no Ensino Médio.* Campina Grande: [s.n.], 2023. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2023/03/Disserta%C3%A7%C3%A3o-PROFMAT-Jo%C3%A3o-Evayr-Organizada.pdf>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado 3 vezes nas páginas 21, 60 e 74.

SOUZA, V. V. d.; PEREIRA, E. C.; MACHADO, C. C. A presença da tecnologia na educação do campo: mapeamento da produção científica nacional dos últimos cinco anos. *Rev. Bras. Educ. Camp., v. 3, n. 1, p. 245-259*, 2018. Citado na página 17.

TAYLOR, R. New and united series of the philosophical magazine, annals of philosophy, and journal of science. *Philosophical Magazine and Journal of Science, Volume XXXVII*, London, p. 363–370, 1850. Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=umn.319510006140893&view=1up&seq=6>. Citado na página 28.

VALLE, M. E. *Cálculo Númérico - Métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.* 2022. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula07.pdf>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 59.

VASCONCELLOS, J. P. C. da Silva de. *Estudo da Fatoração de matrizes com aplicações naresolução de sistemas lineares e em processamento de imagens.* Volta Redonda: [s.n.], 2021. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/22823/Joao%20Pedro.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 34.

VICENTE, D. de O. N. *Matrizes, sistemas lineares e fatoração LU.* Natal: [s.n.], 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/25982/1/MatrizesSistemasFatoracao_Vicente_2017.pdf>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 38.

VITORINO, A.; RUGGIERO, M. A. G. *Álgebra Linear e Aplicações.* 2023. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/fat_cholesky.html>. Acesso em: 02 Jul 2023. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

WOLFRAM, C. *Conrad Wolfram: "80matemática não serve para nada"*. 2017. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2017/10/30/economia/1509378342_617037.html>. Acesso em: 09 Jul 2023. Citado na página 22.

ÁVILA, S. L. *Cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica com MATLAB*. Florianópolis: Publicações do IFSC, 2019. Citado na página 38.