UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Flávia Shirley Tavares Vieira

Uma Análise Curricular do Ensino Médio Antes e Depois do Enem e uma Contribuição com Itinerários Formativos sobre Determinantes

Campina Grande - PB
16 de setembro de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Flávia Shirley Tavares Vieira

Uma Análise Curricular do Ensino Médio Antes e Depois do Enem e uma Contribuição com Itinerários Formativos sobre Determinantes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
16 de setembro de 2024

Flávia Shirley Tavares Vieira

Uma Análise Curricular do Ensino Médio Antes e Depois do Enem e uma Contribuição com Itinerários Formativos sobre Determinantes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 16 de agosto de 2024:

gov.br Documento assinado digitalmente
DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
Data: 16/09/2024 12:31:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

gov.br Documento assinado digitalmente
AMAURI DA SILVA BARROS
Data: 10/09/2024 08:26:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Amauri da Silva Barros
Examinador externo - UFAL

Romildo Nascimento de Lima

Dr. Romildo Nascimento de Lima
Examinador interno - UFCG

Campina Grande - PB
9 de setembro de 2024

Dedico este trabalho aquela que me incentiva desde criança, que é sinônimo de amor e sempre será minha maior fonte de inspiração, minha mãe.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por me sustentar até aqui e me proporcionar a realização desse sonho.

A minha filha Maria Júlia, que deu sentido especial a minha existência e me motiva a ser uma pessoa melhor.

A meu esposo e companheiro de todas as horas Cláudio Teodista, que cuida de nossa família com muito amor e zelo, com sabedoria me ajudou a acreditar em meu potencial e cuidou de tudo para que pudesse me dedicar a esse sonho.

Aos meus pais Eleane e Francisco, que são minha base e desempenharam papel fundamental, contribuindo para me tornar quem sou hoje, como também a dar prosseguimento aos estudos.

A minha irmã e amiga Cléssia Luana, que acompanhou de perto toda essa trajetória, suportando meus momentos de aperreio e stress, dando todo o suporte aqui em casa, cuidando de mim e da minha família e sempre me incentivando a prosseguir mesmo quando achava que não seria possível.

A minha amiga Adelma, a qual considero como irmã, pela força, orientação, por sempre incentivar a ir em busca dos meus sonhos, vibrando junto comigo a cada conquista.

A minha psicóloga Marcela, que foi fundamental nesse processo, onde as emoções falavam mais alto, me ajudando a reconhecer-me como pessoa e contribuindo fortemente para acreditar em meu potencial e ir em busca de tudo o que acredito.

Ao meu professor e orientador Daniel Cordeiro, peça fundamental para a conclusão desse trabalho. A ele minha admiração e gratidão pelas valiosas contribuições, conhecimentos transmitidos e pela preocupação e cuidado comigo, principalmente durante o período em que precisei me preparar para a 2ª qualificação.

A minha turma 2022: Alexandre, Antônia, Antônio Marcos, Emidio, Geovane, Lucivaldo, Mozart, Pedro, Rejane, Renan, Renato, Ruth, Silvana, Thiago e Tiago Melo por toda a força, incentivo e aprendizado em todos os momentos. Esse curso não seria a mesmo sem cada um de vocês. Gratidão por me acolherem tão bem, em meio a tantos momentos desafiadores. Levo cada um de vocês em meu coração.

Não poderia deixar de agradecer as colegas e amigas que construí durante o curso as quais tenho um enorme carinho e admiração: Antônia e Silvana. Vocês foram fundamentais para tornar o curso mais leve, obrigada pela amizade, paciência e compreensão.

Aos professores Amauri da Silva e Romildo Nascimento por ter aceito o convite para fazer parte da banca examinadora e por todas as contribuições para que possamos melhorar ainda mais o nosso trabalho.

Um agradecimento professor Romildo que com compromisso e responsabilidade exerceu com excelência o cargo de coordenador do programa PROFMAT-UFCG, estando sempre a disposição para o que precisássemos.

Aos meus professores do programa PROFMAT-UFCG: Leomarques, Luiz Antônio, Marcelo, Arimatéia, Daniel Cordeiro, Jaime e Fernando que são exemplos de profissionais. Obrigada por todas as contribuições em minha construção pessoal e profissional. Vocês são inspiração para mim.

A Capes por ter concedido a bolsa de incentivo durante o primeiro ano do curso.

A COMPROV por ter disponibilizado um importante documento para realização de nossa pesquisa.

Aos professores da UFCG e do IFRN que participaram da nossa pesquisa por toda atenção e importantes contribuições.

Aos professores do Ensino Médio Idalice Santiago e Cláudio Teodista, que dedicaram um pouco do seu tempo para ler nossa proposta de eletiva, contribuindo de forma significativa para o aperfeiçoamento dessa proposta.

A secretária Isabela e a todo o pessoal de apoio do UAMat na pessoa de Aninha.

Agradecer também a banca examinadora, pela disponibilidade de ler nosso trabalho e pelas valiosas contribuições em nossa dissertação de mestrado.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que esses sonho se concretizasse.

"Lancem sobre ele toda a sua ansiedade,
porque ele tem cuidado de vocês."
(Bíblia Sagrada, 1 Pedro 5, 7)

Resumo

Diante das mudanças com a substituição dos antigos vestibulares pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), percebemos significativas alterações nos currículos de Matemática. Nas provas do ENEM, alguns conteúdos de Matemática são bastante recorrentes (Razão/Proporção, Matemática Financeira, Geometria Espacial, etc), enquanto outros passaram a ser pouco cobrados e até excluídos (Cônicas, Determinantes, Números Complexos, Sistemas, etc). Tudo isso tem causado grande prejuízo para aqueles que pretendem ingressar em algum curso como Engenharias, Computação e especialmente, Matemática, pois alguns desses conteúdos são pré-requisitos para algumas disciplinas desses cursos. Analisaremos o currículo e quais os conteúdos eram cobrados em períodos anteriores e posteriores aos vestibulares da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Dentre os conteúdos que estão ausentes, destacamos os Determinantes que não tem sido cobrado nas provas do ENEM e tem sido abordado brevemente em livros didáticos. Diante disso, fizemos uma abordagem não encontrada em livros didáticos direcionada para professores que pretendem aprofundar os conhecimentos sobre determinantes e apresentando também algumas aplicações. Elaboramos um questionário para sondar, através dos professores de alguns cursos da UFCG, qual a relevância do estudo dos determinantes, se os alunos do curso irão precisar desses conhecimentos em cursos superiores e qual a opinião sobre os determinantes não serem cobrados nas provas do ENEM. Por fim, elaboramos uma sugestão de Itinerário Formativo através de uma eletiva apresentando os determinantes de foma clara e objetiva, contribuindo para a formação futura de calouros de alguns cursos universitários da UFCG.

Palavras-chave: Vestibulares. BNCC. UFCG.

Abstract

Given the changes with the replacement of the old entrance exams by the National High School Examination (ENEM), we noticed significant changes in the university curricula. mathematics. In the Enem tests, some mathematics content is quite common (Ratio/Proportion, Financial Mathematics, Spatial Geometry, etc.), while others began to be little charged and even excluded (Conics, Determinants, Complex Numbers, Systems, etc.), resulting in great loss for those who intend to enroll in a course such as engineering, computing and especially, mathematics, as some of these contents are prerequisites for some subjects of these courses. We will analyze the curriculum and what content was required in periods before and after the entrance exams at the Federal University of Campina Grande (UFCG). Among the contents that are absent, we highlight the Determinants that have not been covered in the Enem tests and have been briefly addressed in Didatic books. In view of this, we took an approach not found in textbooks aimed at teachers who intend to deepen their knowledge about determinants and also presenting some applications. We developed a questionnaire to investigate, through the teachers of some UFCG courses, the relevance the study of determinants, whether course students will need this knowledge and what is the opinion about determinants not being covered in the Enem tests. Finally, we developed a suggestion for Training Itineraries through an elective presenting the determinants in a clear and objective way, contributing to the formation future of freshmen in some university courses at UFCG.

Keywords: Entrance Exams. BNCC. UFCG.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho discorre em breve abordagem sobre o currículo de matemática baseando-se em documentos oficiais como Constituição Federal, Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Procuramos analisar as mudanças corridas após os antigos vestibulares serem substituídos pelo Novo Exame Nacional do Ensino Médio, isto é, quando passou a ser à principal forma de ingresso às universidades do país.

Para realizar uma análise minuciosa sobre como funcionavam e quais conteúdos eram cobrados nos vestibulares da UFCG, usamos o programa de vestibular do ano 2010 disponibilizado pela Comprov (Comissão de Processos Vestibulares), fizemos a comparação com o que tem sido cobrado no Exame Nacional do Ensino Médio, tomando como base a sua matriz referência. Percebemos que ao longo dos anos, muitos conteúdos tem sido extintos das salas de aula, devido a sua não cobrança no Exame Nacional do Ensino Médio.

Desenvolvemos em nosso trabalho um levantamento referente aos anos 2020, 2021, 2022 e 2023 sobre os conteúdos que estão presentes no Exame Nacional do Ensino Médio, demonstrando os resultados obtidos através de tabelas e gráficos. Apresentamos mais adiante os critério utilizados na escolha do conteúdo por questão e construímos também uma tabela comparativa com os assuntos apresentados no programa de vestibular 2010 da UFCG e os que constam na Matriz referência do ENEM. Mediante essa análise, buscamos entender como essas mudanças interferem em livros didáticos e nas salas de aula do Ensino Médio.

No decorrer da pesquisa, constatamos que Determinantes é um dos assuntos que não tem sido recorrentes no Exame Nacional do Ensino Médio nos últimos anos. Desenvolvemos um estudo sobre Determinantes, com uma abordagem diferenciada, inclusive não encontrada em livros didáticos, contendo uma apresentação inicial dos Determinantes em Sistemas Lineares, a construção e definição por permutação para Determinantes de ordem qualquer, apresentando também as propriedades e teoremas que auxiliam na resolução simplificada de alguns Determinantes como também as suas respectivas demonstrações.

Ainda na abordagem sobre Determinantes, apresentaremos aplicações em diversas áreas as quais consideramos primordial na motivação desse estudo. Destacamos que essa abordagem sobre Determinantes é voltada para o professor de Matemática, onde o objetivo principal é auxiliar no aprofundamento dos conhecimento sobre o assunto.

Fizemos em nosso trabalho uma pesquisa com professores da UFCG de alguns curso universitários como Engenharia Elétrica, Computação, Estatística, Física e Matemática. Buscamos através da ferramenta Google Forms identificar qual a importância do estudo de determinantes para um profissional formado no curso (Estatística, Engenharia Elétrica, Física e Matemática), se um estudante ingressante irá precisar dos conhecimentos de Determinantes, caso a resposta seja sim, constatar quais disciplinas e qual o período em que o aluno precisará desses conhecimentos, por fim, qual a opinião do professor em relação aos Determinantes estarem saindo do Ensino Médio devido a sua não cobrança nos últimos anos do Exame Nacional do Ensino Médio.

Referente a elaboração do itinerário formativo, faremos uma proposta de eletiva destinada a alunos do Ensino Médio que pretendem ingressar em curso que seja necessário o estudo sobre determinantes. A proposta do curso é apresentar conceitos, definição, propriedades, exemplos e aplicações de forma clara, despertando o interesse no estudo dos Determinantes e contribuindo para os que ingressarem no curso desejado não tenham dificuldade no que se refere a essa temática.

1.1 Objetivos

Nosso trabalho possui como principal objetivo, contribuir para o ensino e a aprendizagem dos Determinantes de forma clara, objetiva e eficiente. Mostrando a sua importância e aplicações nas diversas áreas, contribuindo para professores e alunos que pretendem ingressar em alguns cursos universitários como matemática, engenharia elétrica, física e estatística, como também analisar os assuntos que saíram do currículo de matemática na etapa do Ensino Médio com a inserção do ENEM.

1.1.1 Objetivos Específicos

Destacamos alguns objetivos específicos, os quais consideramos importantes na elaboração e desenvolvimento do nosso trabalho:

- Realizar uma abordagem sobre o currículo de Matemática e suas modificações, antes e depois do Exame Nacional do Ensino Médio;
- Identificar os conteúdos mais frequentes, pouco cobrados e até excluídos no Exame Nacional do Ensino Médio;
- Fazer uma análise comparativa dos conteúdos que eram cobrados nos antigos vestibulares da UFCG com os que são cobrado no Exame Nacional do Ensino Médio;
- Mostrar uma abordagem diferenciada para Determinantes não encontrada em livros didáticos que auxiliem professores do Ensino Médio;

- Apresentar a presença dos Determinantes em Sistemas Lineares de ordem até 3;
- Mostrar a definição dos Determinantes por permutação;
- Apresentar as propriedades dos determinantes com suas respectivas demonstrações;
- Abordar Teoremas como Laplace e Jacobi e também regras como Sarrus, Chió e Cramer.
- Apresentar aplicações sobre os Determinantes como forma de motivar o seu estudo;
- Identificar se os Determinantes são necessários em cursos de Engenharia Elétrica, Estatística, Física e Matemática;
- Analisar a importância do estudo de Determinantes para os cursos universitários citado acima;
- Entender como professores dos referidos cursos enxergam a ausência dos Determinantes no Exame Nacional do Ensino Médio e consequentemente das salas de aula;
- Propor uma eletiva para alunos que pretendem ingressar em cursos superiores em que os conhecimentos sobre Determinantes são imprescindíveis.

1.2 Organização

Nosso trabalho ficou dividido em 11 capítulos, onde no primeiro trazemos a introdução, onde falamos sobre as etapas e desenvolvimento do trabalho e apresentamos os objetivos gerais e específicos de nossa pesquisa e mais 10 capítulos.

No Capítulo 2 falamos sobre o currículo no período dos vestibulares baseados nos principais documentos que norteavam o currículo e o programa de vestibular da UFCG.

No Capítulo 3 abordamos sobre o currículo de matemática após o surgimento do Exame nacional do Ensino Médio, os reflexos dessa mudanças, destacamos o que encontramos em sua Matriz Referência e também falamos brevemente sobre a Reforma do Ensino Médio.

No Capítulo 4 foi realizada uma análise das questões do ENEM durante os anos de 2020 a 2023, esses resultados foram apresentados por meio de gráficos e tabelas e fizemos também uma comparação sobre o que era cobrado dos conteúdos de Matemática dos programas de vestibulares da UFCG e como tem sido cobrado na Matriz Referência do ENEM.

No Capítulo 5 apresentamos a motivação para definição dos Determinantes, em seguida algumas definições preliminares para finalmente apresentar a definição geral de determinantes por permutação. Serão expostas algumas observações da definição que serão base para demonstração das propriedades de determinantes, sendo apresentado também a matriz em blocos.

No Capítulo 6 apresentaremos definições preliminares, motivação para definição e o Teorema de Laplace, contendo nesse capítulo uma breve abordagem sobre matrizes triangulares, Regra de Chió e alguns exemplos desses resultados.

No capítulo 7 falaremos sobre o cálculo da matriz inversa através do Determinante e exemplos.

O Capítulo 8 foi destinado à aplicações dos Determinantes na Geometria Analítica, Plana e Espacial e até na Física, como também presentação sobre a Regra de Cramer.

No Apêndice A será abordada uma proposta de eletiva para alunos do Ensino Médio que pretendem ingressar em cursos superiores que seja necessário conhecimentos sobre determinantes.

No Capítulo 9 discorreremos sobre uma entrevista realizada com professores dos cursos de Engenharia Elétrica, Computação, Estatística, Física e Matemática.

No Capítulo 10 teremos as considerações finais do nosso trabalho.

2 O Currículo Escolar no Período dos Vestibulares - Antes do Enem

No decorrer dos anos a educação tem passado por expressivas alterações que se fazem necessárias devido as mudança do público alvo (alunado) e até da própria sociedade. Tem-se buscado uma educação efetiva, em meio a atrativos, como tecnologias e redes sociais. Tudo isso reflete em alterações nos importantes documentos que fundamentam e regem a educação brasileira.

Atualmente, vemos que não é suficiente o aluno dominar aquilo que é ensinado, mas saber aplicar e desenvolver habilidades que o ajudem a desempenhar um papel de forma consciente e crítica na sociedade. Quando adentramos nessas mudanças ocorridas na educação, destacamos, frente ao ingresso às universidades, a substituição dos antigos vestibulares pelo Exame Nacional do Ensino Médio, havendo na época, bastante resistência por parte das instituições como também dos candidatos aos cursos superiores.

Neste capítulo falaremos brevemente sobre o Ensino Médio, apresentaremos como se davam os programas dos vestibulares da UFCG, destacaremos documentos oficiais que foram fundamentais para a seleção do que foi ensinado em Matemática na época dos vestibulares, considerando que esses documentos serão uma importante ferramenta para fundamentar nosso trabalho.

2.1 Documentos Oficiais Sobre o Currículo no Período dos Vestibulares

O Ensino Médio, com exceção da modalidade EJA (Educação de Jovens e Adultos) é considerado a última etapa da Educação Básica, com duração mínima de três anos e tem sido bastante discutido devido as constantes mudanças ao longo dos anos. Inicialmente, consideramos importante destacar a Constituição Federal de 1988 (BRASIL, 1988) , onde o Ensino Médio estava previsto como Educação Básica, isso é percebido em seu inciso II do artigo 208, onde garantia como dever do estado:

> Progressiva extensão da obrigatoriedade e gratuidade ao ensino médio. (Brasil, 1988, p. 127).

Logo depois, com a Emenda Constitucional n$^{\underline{o}}$ 14/96, esse texto é modificado para

> Progressiva universalização do ensino médio gratuito. (Brasil, 1988, p. 127).

O Ensino Médio deixa de ser obrigatório para as pessoas e a sua oferta passa a ser dever do estado, ou seja, podendo ter acesso a esse nível de ensino todos aqueles que tiverem interesse. Neste mesmo documento, em seu Art. 2010, já se falava sobre conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, que posteriormente seria considerado uma espécie de base para uma formação nacional comum curricular.

Em 20 de dezembro de 1996 com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996), Lei 9394, em seu artigo 26, a Base Nacional Comum Curricular é regulamentada da seguinte forma:

> Os currículos do Ensino Fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (Brasil, 1996, p.10).

Neste caso, percebemos que as discussões sobre os currículos escolares é uma temática atual, mas está presente em vários documentos oficiais há bastante tempo.

O ministério da educação, com o desejo de auxiliar os profissionais de educação em seu desenvolvimento do currículo, elaborou os Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental do 1º ao 5º ano (BRASIL, 1997), distribuídos em 10 volumes, com sua consolidação em 1997. Segundo o documento referido, um dos principais resultados esperados com a sua consolidação é o desenvolvimento do aluno para:

> ...enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres. (Brasil, 1997, p.7).

No documento referente aos PCN's que tratam da área de Matemática, tanto o Ensino Fundamental como o Ensino Médio (não obrigatório), destaca-se como obrigatório o ensino da Matemática, interferindo

> ...fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (Brasil, 1998, p. 15)

No ano seguinte, em 1998, tivemos a criação do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), com o principal objetivo de avaliar o ensino das escolas no Brasil.

Em 2000, foram lançados os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (EM) (BRASIL, 2000a), com o intuito de propagar a reforma curricular, como também, orientar e atualizar o professor na elaboração do seu planejamento, obtendo assim, uma melhoria na qualidade da educação brasileira.

Esse documento é dividido em 4 volumes, onde o primeiro volume aborda sobre as Bases Legais, o segundo sobre Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, o terceiro Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e por último e não menos importante, Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Com o passar dos anos, ocorreram várias mudanças na humanidade, destacamos a inserção das novas tecnologias, ocorridas principalmente nas décadas de 60 e 70, com o elevado nível no desenvolvimento da indústria. Uma outra mudança foi o aumento considerável de cerca de 90% das matrículas no Ensino Médio, apenas no período de 1988 à 1997, onde o público entre 15 e 17 anos não ultrapassam 25%, isso segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP).

Foi constatado também nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2000a) que grande parte dessas matrículas foram para o ensino noturno, dessa forma, acreditamos que grande parte dos matriculados são pessoas que não tiveram acesso ao ensino na idade própria.

Portanto, diante de todas essas mudanças, faz-se necessário uma reformulação no currículo e nas metodologias aplicadas pelos professores, até porque além das decorrentes mudanças da sociedade, o público alvo do Ensino Médio tem mudado.

Dessa forma, foi necessário refletir sobre o papel da educação brasileira, dentre elas a necessidade da escola integrar-se às dimensões de cidadania e trabalho. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000a), tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentado e baseado no acúmulo de informações, desencadeando em desinteresse por parte dos alunos.

2.2 Reforma do Ensino Médio

O Ministério da educação, por intermédio da Secretaria de Educação Média e Tecnológica organizou a reforma para o ensino médio, com a primeira proposta elaborada pelo Diretor Ruy Leite Berger Filho do departamento da Educação Média e Tecnológica e pela coordenadora do projeto, professora Eny Marisa Maia. Na primeira proposta dessa reforma, tem-se uma organização curricular em Áreas de Conhecimento, com o objetivo de facilitar o desenvolvimento dos conteúdos, buscando por esse ângulo, a interdisciplinaridade e contextualização.

Foram realizadas reuniões com a equipe técnica de coordenação do projeto e representantes de todas as secretarias Estaduais de Educação. Posteriormente os documentos foram submetidos à apreciação dos secretários de estado em reuniões da CONSED (Conselho Nacional dos Secretários de Educação). Vale lembar que este documento foi discutido em debates com a população, temos como exemplo o debate organizado pela Folha de São Paulo em 1997, havendo a participação de sindicatos dos professores, a associação de estudantes, representantes de escolas particulares, obtendo assim sua aprovação pelo Conselho Nacional de Educação em 01 de junho de 1998.

Com todas essas mudanças na educação, faz-se necessário a formação do professor para estar preparado frente aos novos desafios, no entanto, as entidades responsáveis pouco investem nesse sentido, embora grande parte dos documentos oficias ressaltem a importância da formação dos professores. Apesar da pós-graduação ser uma forma de capacitar o professor e melhorar o ensino das escolas, muitos são os relatos de pós-graduandos que possuem cargas horárias exorbitantes e que para concluírem seus cursos precisam se desdobrar, justamente por não terem o apoio dos estados ou municípios nos quais atuam.

A UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura), ao elaborar as diretrizes gerais para orientar a proposta curricular, aponta como Eixos Estruturais, também conhecido como os 4 Pilares Da Educação :

- Aprender a Conhecer;
- Aprender a fazer;
- Aprender a Viver;
- Aprender a ser.

O currículo deverá estar vinculado a esses pilares, com a seleção dos conteúdos significativos de acordo com a proposta do ensino médio.

Com essa reforma Curricular do Ensino Médio, foi determinado que as disciplinas fiquem divididas em áreas do conhecimento:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias
- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
- Ciências Humanas e suas Tecnologias

2.3 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Os PCN's são um importante documento que no período dos vestibulares norteava e orientava o professor no que deveria ser ensinado nas instituições de ensino. De acordo com a Complementação dos PCN's lançada no ano 2000 (BRASIL, 2000b) os Eixos Estruturadores desenvolvidos de forma concomitante nas 3 séries do Ensino Médio são:

1. Álgebra Números e Funções
    - Variações de Grandezas
    - Trigonometria
2. Geometria e Medidas
    - Geometria Plana

- Geometria Espacial
- Geometria Métrica
- Geometria Analítica

3. Análise de Dados

- Estatística
- Contagem
- Probabilidade

2.4 Programa dos Vestibulares da UFCG

É importante identificar quais conteúdos tem saído do ensino médio após a substituição dos antigos vestibulares pelo ENEM, sendo assim, realizaremos uma análise dos conteúdos cobrados antes do ENEM, neste caso, focaremos nos conteúdos de Matemática cobrados nos vestibulares, especificamente nos da UFCG. É importante observar que estes conteúdos influenciavam diretamente nos temas que eram abordados nas salas de aula, pelos professores, neste caso, não fazia muito sentido para os alunos estudarem aquilo que não seriam cobrado nos vestibulares.

Ao pesquisar documentos que contemplassem os conteúdos de Matemática cobrados nos vestibulares da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), encontramos um Programa de Matemática do ano 2010, elaborado pela Comissão de Processos e Vestibulares (Comprov), acreditamos que não diferem muito dos conteúdos cobrados no vestibulares dos anos anteriores. Em uma breve apresentação deste documento, é enfatizado que os conteúdos básicos cobrados nos vestibulares, são os mesmos ensinados no Ensino Médio.

Segundo (COMPROV, 2005) o vestibular da UFCG era dividido em duas etapas, a primeira etapa poderia ser realizada ao final da 2º série do Ensino Médio e a segunda etapa ao final da 3º série do Ensino Médio, uma outra forma de ingressar seria realizando as duas etapas ao final da 3º série do Ensino Médio ou quando o candidato houvesse concluído o Ensino Médio. Para cada uma dessas etapas, apresentaremos a lista dos conteúdos de Matemática cobrados:

PROGRAMA PARA A PRIMEIRA ETAPA

- Noções Básicas de Conjuntos;
- Relações e Funções;
- Funções Reais de Variável Real;

- As Funções Exponencial e Logarítmica;
- Sequências;
- Trigonometria;
- Geometria Plana;
- Geometria Espacial;
- Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

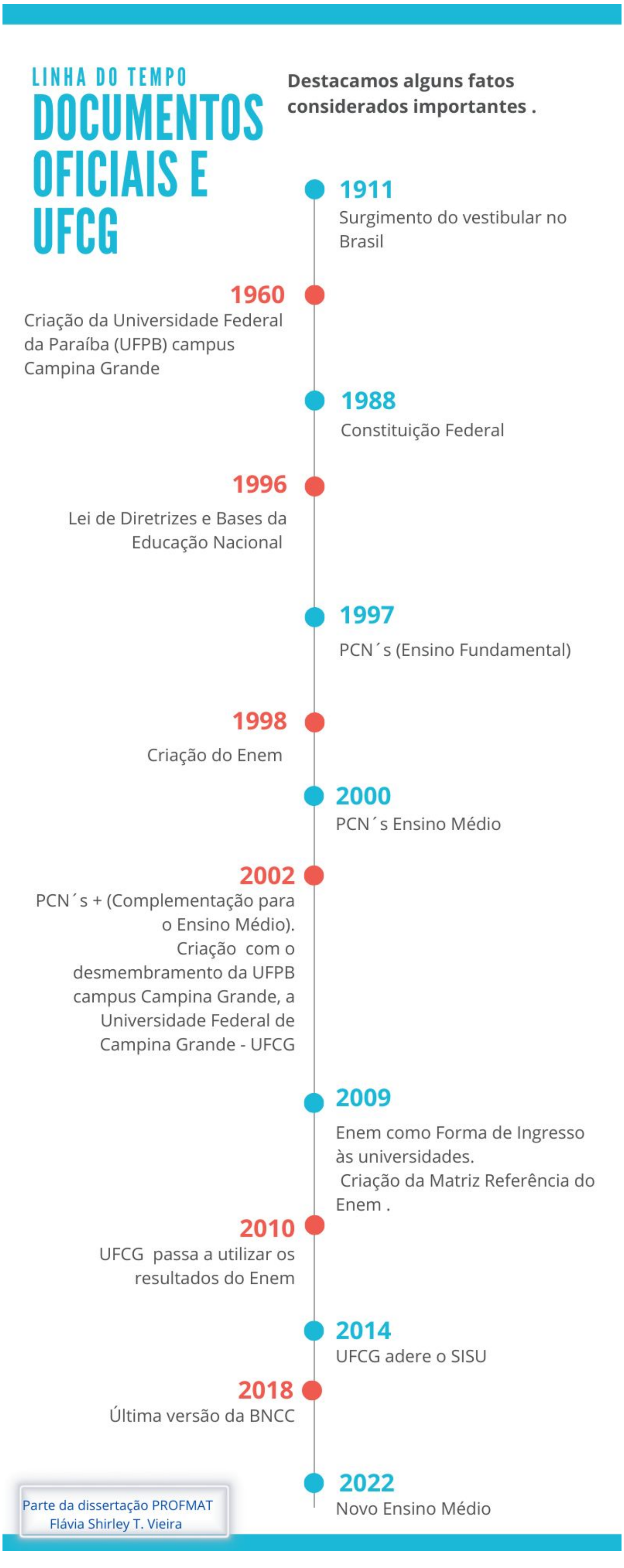
PROGRAMA PARA A SEGUNDA ETAPA

- Geometria Analítica;
- Números Complexos;
- Polinômios;
- Análise Combinatória e Probabilidade;
- Noções de Matemática Financeira;
- Noções de Estatística.

Mais a frente veremos que muitos desses conteúdos que estavam presentes nesse programa não constam no que é cobrado no ENEM e , consequentemente, no que é ensinado no Ensino Médio.

Produzimos uma linha do tempo destacando a criação de alguns documentos oficias e fatos que consideramos importantes para compreender e nos situarmos na construção dos currículos antes e depois dos vestibulares da UFCG.

Figura 1 – Linha do Tempo



Fonte: Autores, 2024.

3 O currículo Escolar Posterior aos Vestibulares - Período do ENEM

Neste capítulo, falaremos brevemente sobre pontos que consideramos importantes em alguns documentos oficiais, abordaremos sobre o ENEM e como a sua Matriz de Referência interfere nos conteúdos ensinados na etapa do Ensino Médio.

3.1 Documentos Oficiais Sobre o Currículo Após os Vestibulares

Nesta sessão, falaremos sobre o ENEM e sua Matriz de Referência, pois é um importante documento que acaba influenciando no que é ensinado no Ensino Médio, abordaremos um pouco sobre a BNCC e destacaremos também algumas mudanças no currículo com o Novo Ensino Médio.

3.1.1 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)

Consideremos algumas mudanças recentes na LDB, (BRASIL, 1996), temos uma de 2017 sobre como devem se dar os currículos:

> Os currículos do ensino médio deverão considerar a formação integral do aluno, de maneira a adotar um trabalho voltado para a construção de seu projeto de vida e para sua formação nos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais (Incluído pela Lei 13.415 de 2017, p.15)

Percebemos que algumas palavras chaves deste trecho são bastante utilizadas e destaca a importância de o currículo estar relacionado com o aluno em sua totalidade, diferente do que era encontrado em documentos mais antigos, principalmente quando é enfatizado os aspectos do desenvolvimento cognitivo e socioemocionais do indivíduo.

O que é ensinado no Ensino Médio está diretamente vinculado ao Ensino Fundamental, isso é percebido na própria finalidade do Ensino Médio no artigo 35 da LDB (BRASIL, 1996):

> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; (Brasil, 1996, p.15)

3.1.2 Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM

No ano de 1998 foi criado o Exame Nacional do Ensino Médio, aplicado pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), a princípio, com o objetivo de avaliar o ensino da Educação Básica Brasileira nas escolas públicas e privadas. Já em 2009 o ENEM passou por mudanças significativas, substituindo os vestibulares e tornando-se a principal forma de ingresso às universidades de todo país. É importante evidenciar que faz-se necessário a realização do ENEM para ter acesso a programas como PROUNI[1] , FIES[2] e SISU[3]

Segundo uma nota emitida pela UFCG em 04 de maio de 2010, a universidade passou a utilizar, neste mesmo ano, os resultados do ENEM em seu processo de seleção do vestibular, no entanto, não houve a adesão do SISU no primeiro momento. Na época, o então atual reitor elogiou o Enem e considerou o exame melhor que os vestibulares (ver anexo).

No ano de 2014 a UFCG adere ao SISU, dessa forma, passa a considerar a pontuação do Enem de forma integral e como consequência, os vestibulares da UFCG deixam de existir.

O ENEM é composto por 180 questões objetivas, sendo uma produção de redação e 45 questões para cada área do conhecimento, são elas:

- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Química, Física e Biologia;
- Ciências Humanas e suas Tecnologias: História, Geografia, Filosofia e Sociologia;
- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias: Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Educação Física, Artes e Tecnologias da Informação e Comunicação;
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática.

A prova é dividida em dois dias, isto é, cada dia é composto por 90 questões, incluindo a redação no segundo dia, vale lembrar que a prova de Matemática possui peso de 25% da prova objetiva.

As questões, com exceção da redação, são corrigidas pelo TRI (Teoria de Resposta ao Item), no qual é avaliado não apenas a quantidade de acertos, como também a quantitativa e qualitativa do candidato, baseada em alguns parâmetros e evitando um bom desempenho para os que resolvem a prova no chute.

As provas do ENEM são baseadas em competências e habilidades, as habilidades são o saber fazer, imaginamos que você já deve ter visto alguém que sabe acelerar, trocar de marchas e frear um automóvel, será que podemos afirmar que esta pessoa é um bom motoristas?! Na verdade, não, para ser um bom motorista, não é suficiente ter

[1] Foi criado pelo governo federal em 2004, ofertando bolsas de estudo integrais e parciais (50%) em instituições particulares de educação superior.

[2] É considerado uma ação do ministério da educação para financiar cursos superiores não gratuitos, criado em 1975 e reformulado em 1999.

[3] Criado em 2009, é um sistema gerenciado pelo Ministério de Educação em que instituições públicas de ensino superior ofertam vagas para cursos de graduação para participantes do ENEM.

a habilidade de acelerar, trocar de marcha e frear, faz-se necessário a prática e o saber lidar com as situações adversas do trânsito. Adquirindo essas habilidades e colocando-as em prática constantemente, obtem-se a competência de ser um bom motorista, desse modo, a competência é algo mais abrangente e pode ser entendida como o conjunto de habilidades.

3.1.3 Matriz Referência do Enem

A Matriz Referência do ENEM é o documento que possui em sua estrutura os conteúdos exigidos, assim como competências e habilidades que podem ser cobradas nessa avaliação nacional de larga escala.

Este documento possui 5 eixos cognitivos comum a todas as áreas:

- Dominar linguagens (DL);
- Compreender fenômenos (CF);
- Enfrentar situações-problema (SP);
- Construir argumentação (CA);
- Elaborar propostas (EP).

Em Matemática e suas Tecnologias, a Matriz Referência do Enem destaca 30 Habilidades e 7 Áreas de Competências. Destacaremos aqui essas competências:

- Competência de Área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais;
- Competência de Área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;
- Competência de Área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- Competência de Área 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- Competência de Área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas;
- Competência de Área 6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;

- Competência de Área 7: Compreender o caráter aleatório e não- determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

3.1.4 Base Nacional Comum Curricular

No decorrer dos anos ocorreram diversas conferências, discussões, seminários e resoluções que levaram a construção da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para etapa do Ensino Médio, o I Seminário que ocorreu entre os dias 17 a 19 de junho de 2015, onde foi instituído a Comissão de Especialistas para elaboração da BNCC. Sua primeira versão foi promulgada em 16 de setembro de 2015. A sua terceira e última versão foi entregue em 02 de abril de 2018 pelo Ministério da Educação ao Conselho Nacional de Educação (CNE). A Base Nacional Comum Curricular é considerada de acordo com o documento (BRASIL, 2017, p. 517):

> um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. (Brasil, 2018, p. 517).

Como destacado no Capítulo 1, a BNCC é um documento anunciado na própria Constituição Federal como também na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o principal intuito é uma formação nacional comum com conteúdos mínimos baseado em 10 competências gerais. É considerado um documento obrigatório para as escolas públicas e particulares, contribuindo na elaboração de seus currículos e fazendo com que ocorra uma evolução na qualidade do ensino no Brasil.

Uma informação importante é que língua portuguesa e Matemática são as únicas disciplinas que fazem parte dos 3 séries do Ensino Médio, isso é o que afirma na BNCC-Ensino Médio pg. 32:

> ...Língua Portuguesa e Matemática, considerando que esses componentes curriculares devem ser oferecidos nos três anos do Ensino Médio. (Brasil, 2018, p.32).

Encontramos em mais um documento que os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental devem ser a base e o aprofundamento do que será ensinado na etapa do Ensino Médio, isto é, segundo a BNCC- Ensino Médio (BRASIL, 2018) na Área de Matemática e suas Tecnologias pg. 517:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9° ano do Ensino Fundamental. (Brasil, 2018, p.517)

É por meio de questões contextualizadas do ENEM que se avaliam as competências que constam na BNCC. Percebemos que o tema de determinantes não consta nesse documento e consequentemente não tem sido abordado no Ensino Médio. Consideramos importante apresentar alguns dos impactos que a ausência desse conteúdo tem causado para alguns cursos universitários.

Na área de Matemática e suas Tecnologias encontramos Competências Específicas e para cada uma, um conjuntos e habilidades associadas que devem ser alcançadas nessa etapa. Destacamos mais adiante as Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

    - Habilidade 1: Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
    - Habilidade 2: Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
    - Habilidade 3: Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
    - Habilidade 4: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
    - Habilidade 5: Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
    - Habilidade 6: Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este

ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

    - Habilidade 1: Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
    - Habilidade 2: Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
    - Habilidade 3: Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

    - Habilidade 1: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
    - Habilidade 2: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
    - Habilidade 3: Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

- Habilidade 4: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- Habilidade 5 Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- Habilidade 6: Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- Habilidade 7: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Habilidade 8: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- Habilidade 9: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Habilidade 10: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
- Habilidade 11: Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- Habilidade 12: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- Habilidade 13: Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

- Habilidade 14: Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
- Habilidade 15: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
- Habilidade 16: Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

   - Habilidade 1: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
   - Habilidade 2: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
   - Habilidade 3: Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
   - Habilidade 4: Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
   - Habilidade 5: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
   - Habilidade 6: Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

- Habilidade 7: Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

   - Habilidade 1: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
   - Habilidade 2: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
   - Habilidade 3: Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
   - Habilidade 4: Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
   - Habilidade 5: Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
   - Habilidade 6: Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
   - Habilidade 7: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
   - Habilidade 8: Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- Habilidade 9: Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
- Habilidade 10: Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
- Habilidade 11: Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Neste caso, além dessas habilidades destacadas na BNCC outras podem ser contempladas de acordo com a realidade e necessidades da escola. Diante dessa nova abordagem, baseada em competências e habilidades, a matemática não será fragmentada e estará vinculada a aplicações, buscando desse modo, um maior interesse por parte do estudante.

Neste documento é destacado também os objetos do conhecimento:

- Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

- Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

- Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

- Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

- Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

3.1.5 Novo Ensino Médio

O Novo Ensino Médio surge com Lei 13.415/2017 que altera a LDB trazendo consigo mudanças significativas para o Ensino Médio. Dentre elas destacamos que a carga horária será ampliada de 2.400 para 3.000 horas, destinando dessa carga horária, pelo menos 1.200 horas para os itinerários formativos.

Uma das propostas é tornar o Ensino Médio mais flexível, o aluno como protagonista, possibilitando a escolha dos itinerários formativos de acordo com o seu projeto de vida.

Segundo o Portal do (MEC,) :

> Os itinerários formativos são o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no ensino médio. (MEC, 2017).

O Ensino Médio passará por uma nova organização curricular, onde uma parte será baseada na BNCC e também na oferta de diferentes itinerários formativos, onde o foco serão as áreas do conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências Humanas e Sociais e Ciências da Natureza) como também a formação técnica e profissional.

É importante destacar que a BNCC não será trabalhada por disciplinas, e sim por áreas do conhecimento, fazendo com que os professores tralhem em conjunto e estimulando o desenvolvimento de projetos, oficinas e atividades que não tenham como foco as aulas expositivas e os conhecimentos fragmentados.

3.2 Influência do Novo ENEM em Alguns Assuntos Explanados no Ensino Médio

Como já citado, encontramos em alguns documentos oficiais que uma das finalidades do Ensino Médio é a consolidação e o aprofundamento do que é ensinado até o 9º ano do Ensino Fundamental, isso impacta diretamente nos livros didáticos, no que é cobrado no Exame Nacional do Ensino Médio e nas salas de aula do Ensino Médio. Hoje à proposta tem sido bem diferente da época dos antigos vestibulares, pois tem-se uma maior preocupação em mostrar a importância e a aplicação do que é ensinado, inclusive, como vimos, os conhecimentos são ensinados baseados em competências e habilidades, por outro lado, com as mudanças do Novo Ensino Médio, o tempo destinado a Matemática propriamente dita, tem ficado cada vez mais reduzido.

Ao fazer a seleção do que é ensinado, os professores buscam abordar conteúdos que constam na Matriz de Referência do ENEM, pois ensinar aquilo que não será aplicado de forma imediata, acaba não despertando o interesse dos alunos. É importante refletir se o que é cobrado no ENEM será suficiente para dar prosseguimento à estudos posteriores nas diversas áreas.

Ao analisar o documento que norteia o que é cobrado no ENEM, percebemos os conhecimentos matemáticos de forma sucinta e é assim que tem sido repassado nas salas de aula atualmente, principalmente devido ao fator tempo. Para os professores que conhecem a realidade da sala de aula, sabe que muitos assuntos levam bastante tempo para que os alunos consigam assimilar.

Alguns questionamentos que são importante fazermos: será que essa redução dos conteúdos ensinados no Ensino Médio está sendo benéfica para a aprendizagem? Será que os professores estão sendo capacitados para atuar de forma eficiente nas suas salas de aula com as constantes mudanças e com as diversas disciplinas que são necessárias para complementar sua carga horária e que pouco tem a ver com a área de formação do professor?

3.3 Alguns Assuntos Deixam de Ser Cobrados

O documento que consta nos programas de vestibulares da UFCG ressalta que o vestibular iria avaliar o domínio dos conteúdos do Ensino Médio e é percebido que há um maior número de conteúdos cobrados nos antigos vestibulares comparado com os que constam na Matriz de Referência do ENEM. Isso acaba gerando um desfalque nos conhecimentos propostos nessa etapa de ensino, à longo prazo, para aqueles que pretendem dar prosseguimento aos estudos ou ingressar em algum curso onde esses conteúdos são necessários, sentirão bastante dificuldade. Sabemos que a dificuldade não é de hoje, no entanto, o fato de não ter visto esses conteúdos, ao menos de forma superficial acaba gerando grandes problemas futuros, até porque os cursos superiores são desafiadores, principalmente nos primeiros semestres.

Como será o desempenho de um ingresso no curso de Matemática que não possui conhecimentos sobre função inversa? E quanto aos alunos de Engenharias e Física não ter visto Números Complexos no Ensino Médio? E para os de Engenharia Civil não ter conhecimentos sobre Determinantes, que acaba sendo um facilitador na redução do tempo que os computadores levam para resolver Equações Diferenciais necessárias para a construção da estrutura de um prédio?

Ficam os questionamentos, mas consideramos que possivelmente a ausência de conteúdos que eram ensinados na época dos vestibulares e atualmente tenham sido deixamos de lado no Ensino Médio, possa gerar dificuldade para dar prosseguimento a estudos posteriores.

4 Análise do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e das Provas dos Vestibulares

Alguns conteúdos acabam sendo bastante recorrentes em questões do Exame Nacional do Ensino Médio, enquanto outros, são pouco cobrados ou até mesmo excluídos. A ausência desses conteúdos acaba gerando prejuízo, principalmente para aqueles que pretendem realizar algum curso superior em que esses conteúdos sejam pré-requisitos para algumas disciplinas.

Os conteúdos mais cobrado nas provas do ENEM tem sido Razão/Proporção, Geometria Plana, Geometria Espacial e Aritmética, enquanto os poucos cobrados referem-se a Sistema de Numeração, Trigonometria, Conjuntos, Matrizes/Determinantes e Exponencial/Logaritmo, temos que Conjuntos e Números Complexos não tem sido cobrados no ENEM durante os anos pesquisados.

Mais a diante, na Seção 4.1 apresentaremos a pesquisa que realizamos com as questões do Exame Nacional do Ensino Médio, nela foi analisado quais os conteúdos que foram cobrados nos anos de 2020, 2021, 2022 e 2023, partindo dos resultados obtidos, reafirmaremos o que foi dito no parágrafo anterior.

4.1 Critérios Utilizados na Seleção das Questões/Conteúdos

Há um grande número de questões requerendo mais de um assunto para sua resolução, desse modo, para cada questão fizemos a escolha de apenas um desses assuntos e um dos critérios utilizados para essa escolha foi definir qual desses assuntos foram mais importante na resolução da questão.

Assim, segue as especificações dos conteúdos para se chegar nos resultados apresentados acima.

FUNÇÕES: Constantes, identidade , linear e afim, quadrática, modular.

ARITMÉTICA: Frações, números decimais, números e cálculos simples.

RAZÃO E PROPORÇÃO: Regra de três (simples e composta), razão, escala, dependência linear, vazão, velocidade média, divisão proporcional.

ANÁLISE COMBINATÓRIA: Princípio fundamental da contagem, princípio aditivo, arranjos, permutações, fatorial e combinações.

PROBABILIDADE: Experimento aleatório, espaço amostral e evento.

ESTATÍSTICA: Representação e análise de dados, média, moda, mediana, desvio padrão e variância.

GEOMETRIA PLANA: Características das figuras, área e perímetro.

GEOMETRIA ESPACIAL: Características das figuras, planificação, simetrias, projeções, volume.

GEOMETRIA ANALÍTICA: Números na reta, coordenadas cartesianas, plano, espaço e cônicas.

EXPONENCIAL LOGARITMO: Equações, inequações, funções e logaritmos decimais.

SEQUÊNCIAS E PADRÕES NUMÉRICOS: Lei de formação de sequências, PA e PG.

TRIGONOMETRIA: Razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria na circunferência, arco, ângulo, relações fundamentais e funções trigonométricas.

MATRIZES / DETERMINANTES: Tipos de matrizes, operações,matriz transposta e inversíveis, definição de determinantes, teorema fundamental de Laplace, propriedades, abaixamento de ordem de um determinante e matriz de Vandermonde.

EQUAÇÕES / SISTEMAS: Equações, sistema de equações e sistemas lineares.

ANÁLISE DE GRÁFICOS E TABELAS: Interpretação dos dados e informações de gráficos / tabelas.

ANÁLISE DE FIGURAS: Quando não há conceito sobre geometria, apenas a análise metodológica de figuras.

CONJUNTOS: Linguagem dos conjuntos, união, intercessão e complementar.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO: Sistema decimal posicional.

MATEMÁTICA FINANCEIRA: Porcentagem, juros, descontos.

NÚMEROS COMPLEXOS: Operações, forma geométrica e trigonométrica, potenciação, radiciação e equações binomiais

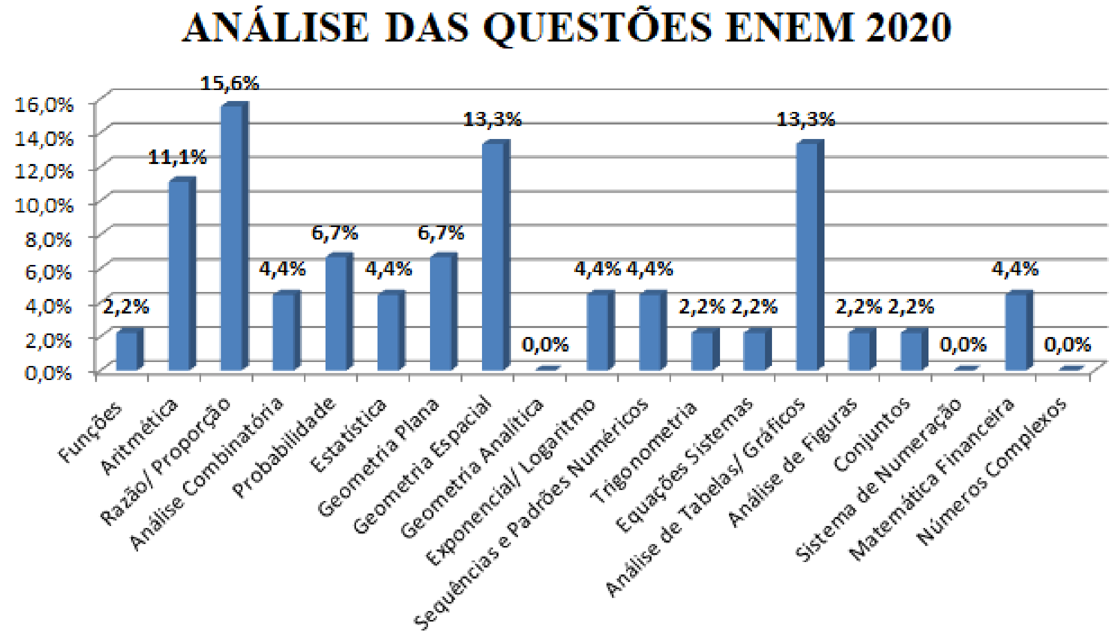
A seguir, serão apresentadas as tabelas e os respectivo gráfico referente à pesquisa realizada:

Tabela 1 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2020

TEMAS	QUANTIDADE DE QUESTÕES
Funções	1
Aritmética	5
Razão/ Proporção	7
Análise Combinatória	2
Probabilidade	3
Estatística	2
Geometria Plana	3
Geometria Espacial	6
Geometria Analítica	0
Exponencial/ Logarítmo	2
Sequências Padrões Numéricos	2
Trigonometria	1
Matrizes/ Determinantes	1
Equações/ Sistemas	1
Análise de Tabelas/ Gráficos	6
Análise de Figuras	1
Conjuntos	1
Sistema de Numeração	0
Matemática Financeira	2
Números Complexos	0

Fonte: Autores, 2024.

Figura 2 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2020



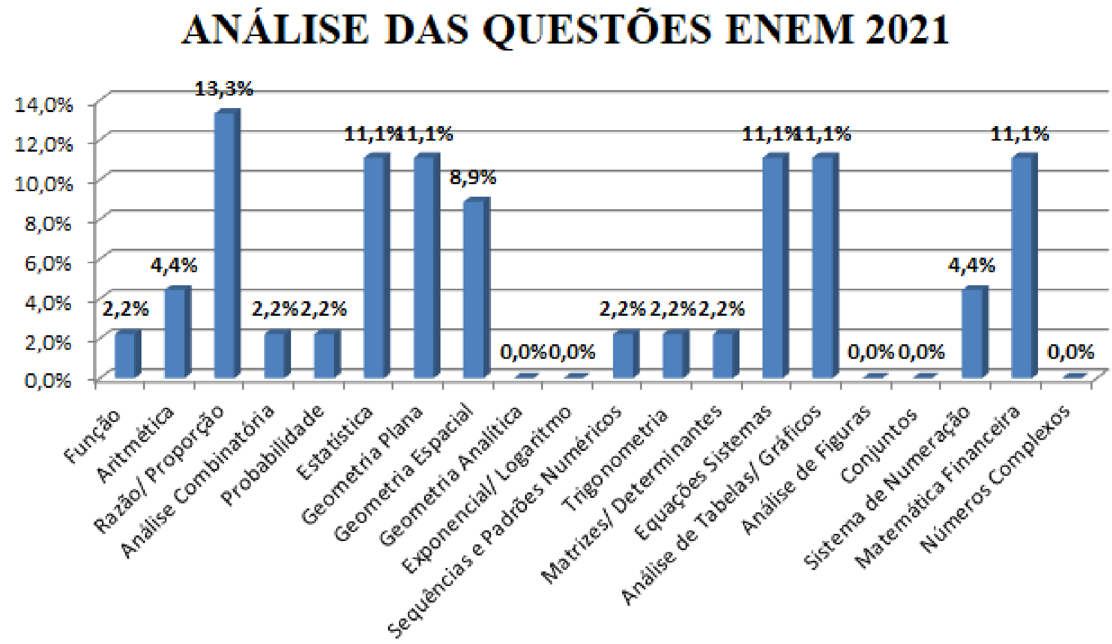
Fonte: Autores, 2024.

Tabela 2 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2021

TEMAS	QUANTIDADE DE QUESTÕES
Funções	1
Aritmética	2
Razão/ Proporção	6
Análise Combinatória	1
Probabilidade	1
Estatística	5
Geometria Plana	5
Geometria Espacial	4
Geometria Analítica	0
Exponencial/ Logaritmo	0
Sequências Padrões Numéricos	1
Trigonometria	1
Matrizes/ Determinantes	1
Equações/ Sistemas	5
Análise de Tabelas/ Gráficos	5
Análise de Figuras	0
Conjuntos	0
Sistema de Numeração	2
Matemática Financeira	5
Números Complexos	0

Fonte: Autores, 2024.

Figura 3 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2021



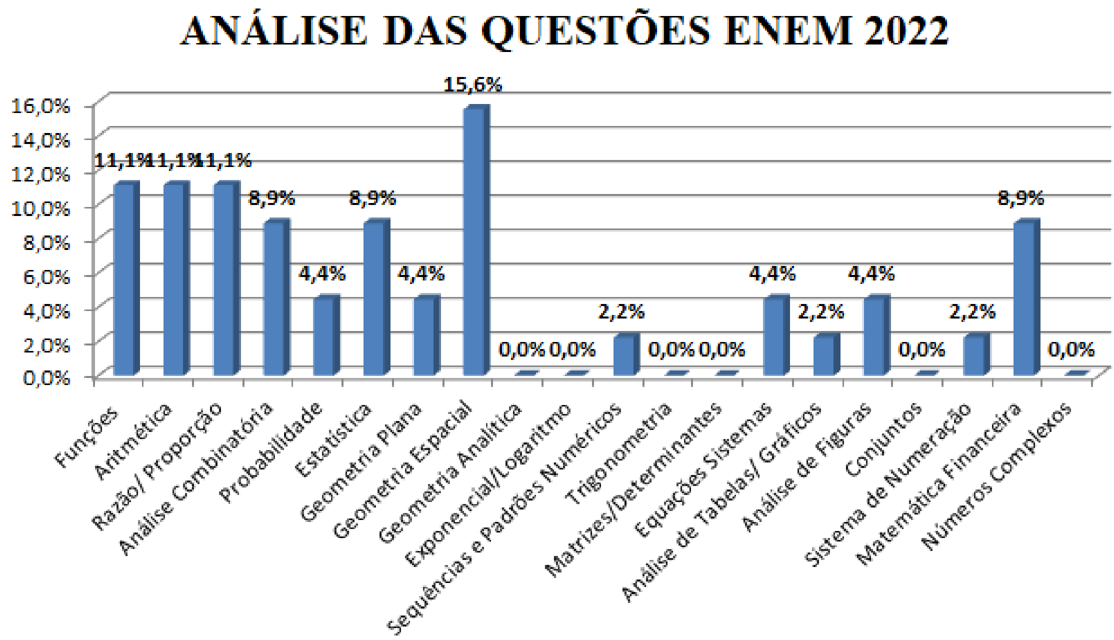
Fonte: Autores, 2024.

Tabela 3 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2022

TEMAS	QUANTIDADE DE QUESTÕES
Funções	5
Aritmética	5
Razão/ Proporção	5
Análise Combinatória	4
Probabilidade	2
Estatística	4
Geometria Plana	2
Geometria Espacial	7
Geometria Analítica	0
Exponencial/ Logarítmo	0
Sequências Padrões Numéricos	1
Trigonometria	0
Matrizes/ Determinantes	0
Equações/ Sistemas	2
Análise de Tabelas/ Gráficos	1
Análise de Figuras	2
Conjuntos	0
Sistema de Numeração	1
Matemática Financeira	4
Números Complexos	0

Fonte: Autores, 2024.

Figura 4 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2022



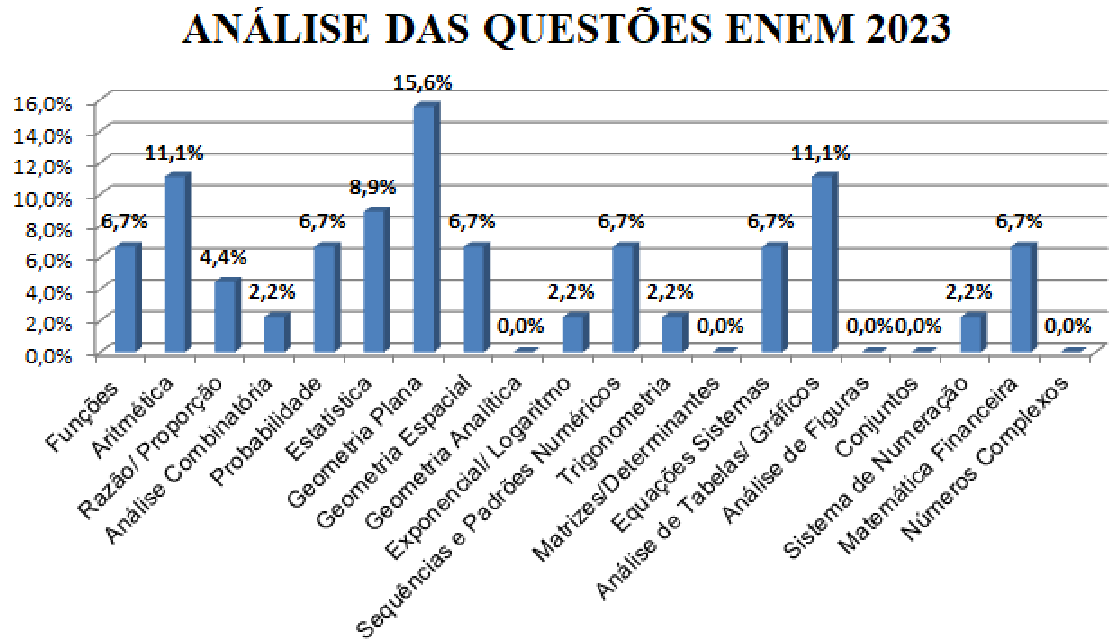
Fonte: Autores, 2024.

Tabela 4 – ANÁLISE DAS QUESTÕES - ENEM 2023

TEMAS	QUANTIDADE DE QUESTÕES
Funções	3
Aritmética	5
Razão / Proporção	2
Análise Combinatória	1
Probabilidade	3
Estatística	4
Geometria Plana	7
Geometria Espacial	3
Geometria Analítica	0
Exponencial / Logaritmo	1
Sequências / Padrões Numéricos	3
Trigonometria	1
Matrizes / Determinantes	0
Equações / Sistemas	3
Análise de Tabelas/ Gráficos	5
Análise de Figuras	0
Conjuntos	0
Sistema de Numeração	1
Matemática Financeira	3
Números Complexos	0

Fonte: Autores, 2024.

Figura 5 – GRÁFICO (ENEM 2023)



Fonte: Autores, 2024.

4.2 Análise Geral das Questões Durante os Anos de 2020 a 2023

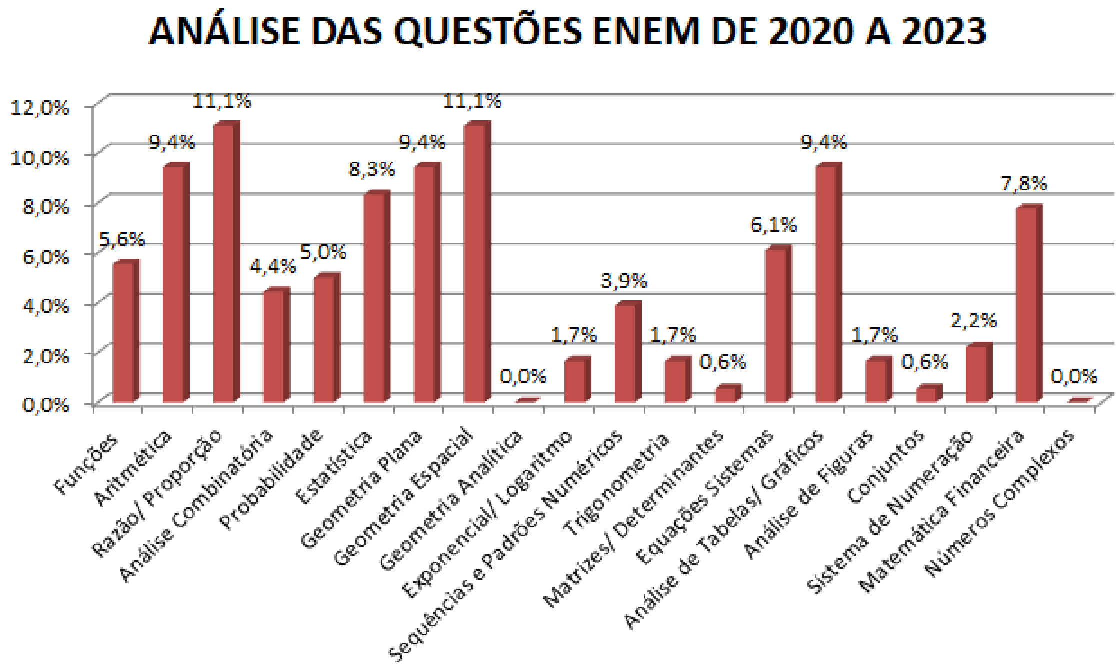
TEMAS	2020	2021	2022	2023	TOTAL
Funções	1	1	5	3	10
Aritmética	5	2	5	5	17
Razão / Proporção	7	6	5	2	20
Análise Combinatória	2	1	4	1	8
Probabilidade	3	1	2	3	9
Estatística	2	5	4	4	15
Geometria Plana	3	5	2	7	17
Geometria Espacial	6	4	7	3	20
Geometria Analítica	0	0	0	0	0
Exponencial / Logaritmo	2	0	0	1	3
Sequências / Padrões Numéricos	2	1	1	3	7
Trigonometria	1	1	0	1	3
Matrizes / Determinantes	0	1	0	0	1
Equações / Sistemas	1	5	2	3	11
Análise de Tabelas/ Gráficos	6	5	1	5	17
Análise de Figuras	1	0	2	0	3
Conjuntos	1	0	0	0	1
Sistema de Numeração	0	2	1	1	4
Matemática Financeira	2	5	4	3	14
Números Complexos	0	0	0	0	0

Durante nossa pesquisa bibliográfica, encontramos duas dissertações do PROFMAT (MENEZES, 2021) e (FILGUEIRAS, 2019) as quais realizaram uma pesquisa referente aos conteúdos que caíram no Exame Nacional do Ensino Médio nos anos de 2009 a 2019 e referente ao conteúdo de matrizes e determinantes foram apresentadas tabelas que mostraram que esse tema foi cobrado apenas nos anos de 2012, 2018 e 2019. Ao ir em busca dessa questões, vimos que no ano de 2012 foi cobrado o produto de matrizes, em 2018 soma do elementos das linhas de uma matriz e em 2019 a soma dos elementos das colunas de uma matriz.

Um fato que consideramos importante destacar é que os registros de questões cobrando Geometria Analítica tem se reduzido ao longo dos anos, pois segundo (FILGUEIRAS, 2019) temos um registro de 12 questões durante os anos de 2015 a 2018 e ao comparar com os anos da nossa pesquisa (2020 a 2023) não encontramos questões abordando esse tema.

Decidimos dar continuidade a essa análise, realizando a pequisa durante os anos de 2020, 2021, 2022 e 2023. Um diferencial em nossa pesquisa e que julgamos importante

Figura 6 – GRÁFICO (ENEM DE 2020 A 2023)



Fonte: Autores, 2024.

apresentar quais os critérios utilizados na seleção que fizemos dos conteúdos/questões do Exame Nacional do Ensino Médio, até porque dependendo do critério utilizado, os resultados obtidos serão distintos. Mesmo quando o Exame Nacional do Ensino Médio não era utilizado como forma de ingresso às universidades (1998-2008), segundo (MENEZES, 2021) não houve aparição de Matrizes e Determinantes.

De acordo com nossa pesquisa, percebemos que o conteúdo de Matrizes/Determinantes foi cobrado apenas 1 questão no ano de 2021 (Questão 156 da prova amarela) e vimos que sua resolução se dá por soma dos elementos de uma matriz, para consultar a resolução ver (TEODISTA, 2021). Portanto, desde a criação do ENEM, não houve questões cobrando os conceitos sobre Determinantes.

Assim, escolhemos o conteúdo de Determinantes para elaborar uma proposta de itinerário formativo, através de uma eletiva. Essa escolha se justifica pelo fato do conteúdo de determinantes não estar frequente nas provas do ENEM, e sua abordagem no Ensino Médio ser de forma superficial. Isso baseado em alguns livros didáticos pesquisados, os quais citaremos mais adiante, na Seção 5.1.

4.3 Conteúdos cobrados nos Vestibulares x Enem

Muito se fala sobre os conteúdos de Matemática que antigamente eram abordados no Ensino Médio e atualmente tem sido suprimidos com a implementação do Novo ENEM. De fato, isso é percebido quando comparamos os programas dos antigos vestibulares com os conteúdos que são contemplados na Matriz Referência ENEM.

Nesta seção apresentaremos os conteúdos que constam no programa de vestibular da UFCG no ano de 2010 e analisaremos se eles constam ou não no Exame Nacional do Ensino Médio, tomando como base a sua Matriz de Referência do ENEM.

Percebemos que dentre os 33 conteúdos encontrado no programa do vestibular da UFCG 2010, 14 deles não estão presentes, ao menos de forma explicita na Matriz de Referência do ENEM, isso corresponde aproximadamente 42%, quase metade dos conteúdos.

Por sua vez, dentre os conteúdos que estão ausentes no Exame Nacional do Ensino Médio e que geralmente não são apresentadas aplicações quando ensinados, sendo muitas vezes considerados conteúdos inúteis e desconexos da nossa realidade, escolhemos estudar detalhadamente os Determinantes. Iremos presentá-lo de forma diferenciada em nosso trabalho, fazendo uma abordagem não encontrada em livros e apresentando uma interessante construção para esse tema.

É provável que nosso aluno se pergunte onde eles irão usar o Determinante, para os que pretendem ingressar em algum curso superior, talvez não saibam que dependendo do curso, os conceitos de Determinantes serão imprescindíveis para dar continuidade ao curso, dentre eles Matemática, Física, Computação e Engenharias.

Cabe destacar que nem tudo que é ensinado e que não é utilizado na prática ou que não conseguimos identificar de forma explícita em nosso cotidiano é inútil, podemos citar o estudo sobre cônicas que apesar de ser um dos conteúdos extintos do ENEM e consequentemente do Ensino Médio, engana-se quem pensa que não possui aplicações, a própria propriedade referente dos focos de uma parábola é usada na construção de Antenas parabólicas, em espelhos parabólicos (encontrados em automóveis) e até fogões solares.

Quando consideramos o estudo sobre determinantes, que apesar de não ser apresentado de forma palpável, possui diversas aplicações que serão apresentadas mais adiante, no Capítulo 9. Para ter uma ideia, ao ligar um celular ou tv, temos implicitamente um circuito elétrico, onde é utilizado Determinantes.

Tabela 5 – ANÁLISE DOS CONTEÚDOS

x : consta
● : não consta

ASSUNTOS	VESTIBULAR UFCG	ENEM
Noções de conjuntos	x	●
Conjuntos Numéricos	x	x
Relações	x	●
Estudo de Funções do 1° e 2° Grau	x	x
Módulo (Funções, Equações e Inequações)	x	●
Composição de Funções	x	●
Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas	x	●
Função Inversa	x	●
Funções Exponencial e Logarítmica	x	x
Progressões	x	x
Círculo Trigonométrico	x	x
Lei do Senos e Cossenos	x	●
Fórmulas de Transformações Trigonométricas	x	●
Identidades Trigonométricas	x	●
Funções, Equações e Inequações Trigonométricas	x	x
Teorema de Tales	x	x
Congruência e Semelhança de Triângulos	x	x
Áreas de Figuras Planas	x	x
Comprimentos, Áreas e Volumes de Sólidos Geométricos	x	x
Matrizes e Determinantes	x	●
Sistemas de Equações	x	x
Posições de Retas	x	x
Distância entre Dois Pontos	x	x
Equações a Reta	x	x
Distância de um Ponto a uma Reta	x	●
Condição de Alinhamento entre três pontos	x	●
Ângulo e Interseção entre Retas	x	x
Estudo das Cônicas	x	●
Números Complexo	x	●
Polinômios	x	x
Análise Combinatória e Probabilidade	x	x
Noções de Matemática Financeira	x	x
Noções de Estatística	x	x

Fonte: Autores, 2024.

5 Determinantes

De acordo com os livros do Ensino Médio pesquisados, a abordagem de determinantes é reduzida a matrizes de até 3ª ordem, em consequência disso, as propriedades de Determinantes, assim como importantes teoremas não são apresentados.

Apresentaremos a definição de matrizes e a seguir uma abordagem diferenciada direcionada a professores, onde apresentaremos uma os conhecimentos sobre determinantes que não são encontrados em livros didáticos, desenvolvendo uma construção partindo da finalidade inicial na criação dos Determinantes, que era resolver sistemas lineares, apresentaremos também a definição de determinantes para ordem qualquer, suas propriedades, importantes teoremas que facilitam a resolução de Determinantes de ordem superior a 3, assim como exemplos e importantes aplicações.

5.1 Matrizes

Definição 5.1. *Vamos trabalhar com uma classe de objetos, as matrizes, que agora definiremos. Consideremos um corpo K e dois números inteiros $m, n \geq 1$. Uma* ***matriz de ordem*** *$m \times n$ é uma disposição de $m \cdot n$ números de K da forma*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Podemos abreviar a notação dessa matriz, escrevendo $[a_{ij}]$, $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Dizemos que a matriz acima tem m linhas e n colunas. Por exemplo, a primeira coluna da matriz é

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

e a segunda linha da matriz é $[a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}]$. Chamamos o elemento a_{ij} de ***entrada de posição*** *(i, j) da matriz. Se indicarmos por A a matriz acima, então a i-ésima linha de A é indicada por A_i, e é definida como sendo*

$$A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}].$$

A j-ésima coluna de A é indicada por A^j, e é definida como sendo

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{m}j \end{pmatrix}.$$

Os exemplos de matrizes são bem conhecidos e seguirão ao longo de todo texto. A seguir definiremos o determinante de uma matriz.

5.2 Motivação para a Definição de Determinante

Apresentaremos alguns conceitos iniciais sobre determinante através da solução de sistemas lineares.

- Consideremos o sistema de ordem 1, com $a \neq 0$:

  $$ax = b$$

  Sua solução é dada por $\frac{b}{a}$.

  Notemos que numerador está associado a matriz $\begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$ que possui como único elemento o termo independente do sistema, já o denominador está associado à matriz que possui como único elemento o coeficientes do sistema, isto é, $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$.

- Consideremos um sistema de ordem 2, onde as operações sejam possíveis:

  $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{5.1}$$

  $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{5.2}$$

  Para determinar o valor de x_2 multiplicaremos a equação 5.1 por a_{21} e a equação 5.2 por a_{11}:

  $$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \tag{5.3}$$

  $$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \tag{5.4}$$

  Fazendo a diferença entre as equações (5.4) e (5.3), temos:

  $$\Big(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\Big)x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

implicando que:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

.

Já para determinar o valor de x_1, multiplicaremos a equação (5.1) por a_{22} e a equação (5.2) por a_{12}, daí ficamos com:

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \tag{5.5}$$

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2 \tag{5.6}$$

Fazendo a diferença entre às equações (5.5) e (5.6), obtemos:

$$\Big(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\Big)x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

implicando que:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

.

Logo, percebemos que os denominadores de x_1 e x_2 são iguais e veremos mais adiante que será o determinante associado a matriz cujos elementos são os coeficientes do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Percebamos também que, o numerador de x_1 corresponde a matriz:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Temos que, os elementos correspondentes aos coeficientes de x_1 foram substituídos pelos respectivos termos independentes do sistema, o mesmo ocorre para o numerador de x_2, isto é, os coeficientes de x_2 foram substituídos pelos respectivos termos independentes do sistema, onde a matriz associada será:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Agora, consideremos um sistema de ordem 3 de modo que sejam possíveis as operações para determinar os valores de x_1, x_2 e x_3:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{5.7}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{5.8}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{5.9}$$

Para determinar o valor de x_1 multiplicaremos a equação (5.7) por a_{21} e a equação (5.8) por a_{11}, logo

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 + a_{13}a_{21}x_3 = b_1a_{21} \tag{5.10}$$

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 = a_{11}b_2 \tag{5.11}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \tag{5.12}$$

Substituindo (5.8) pela diferença entre (5.11) e (5.10) no sistema inicial, temos

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{5.13}$$

$$\Big(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\Big)x_2 + \Big(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\Big)x_3 = \Big(a_{11}b_2 - b_1a_{21}\Big)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \tag{5.14}$$

Agora, multiplicando (5.13) por a_{31} e a equação (5.14) por a_{11}, obteremos:

$$a_{11}a_{31}x_1 + a_{12}a_{31}x_2 + a_{13}a_{31}x_3 = a_{31}b_1 \tag{5.15}$$

$$\Big(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\Big)x_2 + \Big(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\Big)x_3 = \Big(a_{11}b_2 - b_1a_{21}\Big)$$

$$a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 = a_{11}b_3. \tag{5.16}$$

Ao substituir a equação 5.16 pela diferença entre as equações 5.16 e 5.15, ficamos com

$$a_{11}a_{31}x_1 + a_{12}a_{31}x_2 + a_{13}a_{31}x_3 = a_{31}b_1$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\Big)x_2 + \Big(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\Big)x_3 = \Big(a_{11}b_2 - b_1a_{21}) \tag{5.17}$$

$$(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 = a_{11}b_3 - a_{31}b_1. \tag{5.18}$$

Consideremos $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, multiplicando (5.17) por $\dfrac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, ficamos com

$$a_{11}a_{31}x_1 + a_{12}a_{31}x_2 + a_{13}a_{31}x_3 = a_{31}b_1$$

$$(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + \left[\frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\Big(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\Big)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right] x_3 = \frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\Big(a_{11}b_2 - b_1a_{21}\Big)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{5.19}$$

$$(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 = a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \tag{5.20}$$

Substituindo a equação (5.20) pela diferença entre as equações (5.19) e (5.20) teremos

$$a_{11}a_{31}x_1 + a_{12}a_{31}x_2 + a_{13}a_{31}x_3 = a_{31}b_1$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\Big)x_2 + \Big(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\Big)x_3 = \Big(a_{11}b_2 - b_1a_{21}) \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} - (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\right] x_3 \\ &= \frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}b_2 - b_1a_{21})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} - (a_{11}b_3 - a_{31}b_1) \end{aligned} \tag{5.22}$$

Desenvolvendo a equação (5.22):

$$\begin{aligned} &\frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} x_3 \\ = \; &\frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}b_2 - b_1a_{21}) - (a_{11}b_3 - a_{31}b_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}b_2 - b_1a_{21}) - (a_{11}b_3 - a_{31}b_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})} \\ &= \frac{a_{11}a_{32}a_{11}b_2 - a_{11}a_{32}b_1a_{21} - a_{12}a_{31}a_{11}b_2 - a_{11}b_3a_{11}a_{22} + a_{11}b_3a_{12}a_{21} + a_{31}b_1a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{32}a_{11}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{13}a_{21} - a_{12}a_{31}a_{11}a_{23} - a_{11}a_{22}a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{11}a_{33}} \end{aligned}$$

Colocando a_{11} em evidência:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a_{11}(a_{32}a_{11}b_2 - a_{32}b_1a_{21} - a_{12}a_{31}b_2 - b_3a_{11}a_{22} + b_3a_{12}a_{21} + a_{31}b_1a_{22})}{a_{11}(a_{32}a_{11}a_{23} - a_{32}a_{13}a_{21} - a_{12}a_{31}a_{23} - a_{22}a_{11}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}} \\ &= \frac{a_{32}a_{11}b_2 - a_{32}b_1a_{21} - a_{12}a_{31}b_2 - b_3a_{11}a_{22} + b_3a_{12}a_{21} + a_{31}b_1a_{22}}{a_{32}a_{11}a_{23} - a_{32}a_{13}a_{21} - a_{12}a_{31}a_{23} - a_{22}a_{11}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}} \\ &= \frac{a_{21}a_{32}b_1 + a_{12}a_{31}b_2 + a_{11}a_{22}b_3 - a_{11}a_{32}b_2 - a_{12}a_{21}b_3 - a_{22}a_{31}b_1}{a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}}. \end{aligned}$$

Substituindo x_3 na equação (5.21), ficaremos com

$$x_2 = \frac{a_{11}a_{33}b_2 + a_{23}a_{31}b_1 + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}a_{31}b_2 - a_{11}a_{23}b_3 - a_{21}a_{33}b_1}{a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

Já para determinar x_1 substituiremos os valores de x_2 e x_3 na equação (5.13), daí:

$$x_1 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}a_{31}b_2 + a_{21}a_{32}b_1 - a_{22}a_{31}b_1 - a_{11}a_{32}b_2 - a_{12}a_{21}b_3}{a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

Diante das soluções encontradas de x_1, x_2 e x_3, percebemos que os denominadores serão o determinante (veremos mais adiante) da matriz dos coeficientes do sistema com 3 equações: (5.7), (5.8) e (5.9), isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, o numerador de x_1 está associado ao determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Já o numerador de x_2 está associado à matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

E, por fim, o numerador de x_3 está associado ao determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}.$$

Donde concluímos que os numeradores de x_1, x_2 e x_3 serão o determinante das matrizes associadas aos coeficientes do sistema dado, onde para cada numerador dos números x_1, x_2 e x_3 trocamos os coeficientes das suas colunas pelo respectivo termo independente do sistema.

Para mais detalhes ver (BOLDRINI, 1986).

Inicialmente o conceito apresentando em alguns livros didáticos é dito que o determinante considerado número associado a uma matriz, isso é percebido no livro (DANTE; VIANA, 2020):

> O determinante de uma matriz quadrada de ordem n é um número real associado a ela. Toda matriz quadrada tem determinante. (Dante, 2020, p. 141)

Nesse caso, consideramos que esse é um conceito incompleto sobre um determinante.

Em contrapartida, as definições de Determinantes encontradas em livros do Ensino Médio estão limitadas a determinantes de ordem 1, 2 e 3, isso é percebido em (SOUZA; GARCIA, 2016) e (IEZZI, 1997).

Vejamos adiante, a construção que elaboramos para se chegar a definição geral de Determinantes.

5.3 Definição de Determinante de ordem n, com $n \leq 3$

Faremos a definição de determinante para matrizes de ordem 1, 2 e 3 e na sequência generalizaremos a definição para uma matriz qualquer de ordem n.

- Determinante de uma matriz de ordem 1:

  $$\det[a] = |a| = a$$

- Determinante de uma matriz de ordem 2:

  $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Essa definição corresponde a solução do sistema de ordem 3 cujas equações são (5.1) e (5.2).

- Determinante de uma matriz de ordem 3:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Essa definição de determinante para matrizes de ordem 3 pode ser apresentada por alguns métodos, que irão ajudar em sua memorização, apresentaremos dois desses métodos.

5.3.1 Regra de Sarrus

Consideramos importante apresentar essa regra, por não ser fácil a memorização da definição de Determinante para Matrizes de ordem 3.

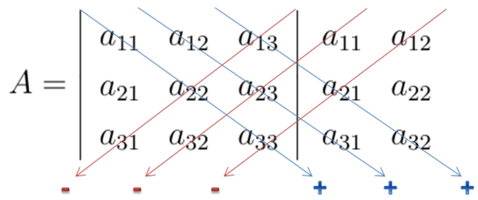
Considere uma matriz A de ordem 3:

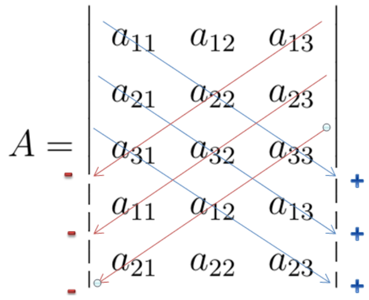
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Para aplicar a regra de Sarrus, desenvolveremos as etapas abaixo:

1. Repetiremos as duas primeiras colunas à direita da terceira coluna da matriz, ou as duas primeiras linhas abaixo da terceira linha da matriz.

   Observemos as representações abaixo:





2. Os termos precedidos com o sinal positivos serão obtidos multiplicando os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal (representadas em azul), isto é, $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$ e $a_{13}a_{21}a_{32}$.

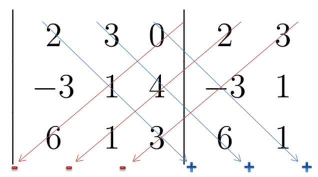
3. Os termos precedidos com o sinal negativo serão obtidos multiplicando os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária (representadas em vermelho), isto é, $-a_{13}a_{22}a_{31}$; $-a_{11}a_{23}a_{32}$ e $-a_{12}a_{21}a_{33}$.

4. Por fim, somam-se os 6 produtos encontrados nos itens 2 e 3 acima, dessa forma

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo 1. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, *determine o* $\det A$ *utilizando o método de Sarrus.*

Solução: Consideremos a imagem a seguir:

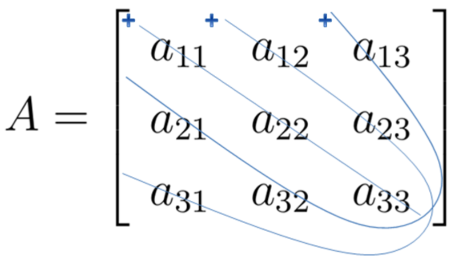


Temos,

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - [3 \cdot (-3) \cdot 3] \\ &= 6 + 72 - 8 + 27 \\ &= 97. \end{aligned}$$

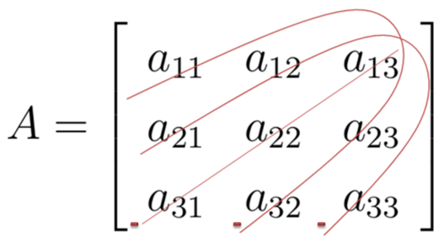
5.3.2 Regra Através de Diagrama

Uma outra forma de memorizar a definição de determinantes para matrizes de ordem 3 é com o uso dos diagramas, observemos a representação abaixo:



Para cada uma das três setas acima, teremos um produto e neste caso cada produto possui sinal positivo:

$$+a_{11}a_{22}a_{33};\, +a_{12}a_{23}a_{31} \text{ e } + a_{13}a_{21}a_{32}. \tag{5.23}$$



Para cada uma das três setas teremos um produto e, neste caso, cada produto possui sinal negativo:

$$-a_{13}a_{22}a_{31};\, -a_{11}a_{23}a_{32} \text{ e } - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{5.24}$$

O $\det A$ será soma das expressões (5.23) e (5.24) acima representadas:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Para mais detalhes sobre essa regra através de diagrama, consultar o livro do (IEZZI, 2006).

Exemplo 2. *Calcular* $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ *através do método do diagrama.*

Solução: Considere a imagem abaixo:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 6 + 40 + 126 - 14 - 45 - 48 \\ &= 65. \end{aligned}$$

5.4 Definições Preliminares

Apresentaremos algumas definições preliminares, que serão base para a compreensão da definição de determinantes por permutação. Utilizamos nesta temática, referências como (MORGADO, 2015), (STEINBRUCH, 1987) e (MADEIRA, 2017).

5.4.1 Permutação

Definição 5.2. *Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma Permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem.*

A escolha do primeiro objeto pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segunda posição pode ser feita de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupará a terceira posição pode der feita de $n-2$ modos, etc $\ldots$; a escolha do objeto que ocupará a última posição pode ser feita de 1 modo, isto é, $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$.

Exemplo 3. *Sejam os números $1, 2$ e 3. Determine suas possíveis Permutações.*

Solução: Note que a quantidade de Permutações dos números $1, 2$ e 3 é dada por $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, são elas:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ e } (3, 2, 1).$$

5.4.2 Inversão

Definição 5.3. *Dada uma permutação de números inteiros $1, 2, \ldots, n$, dizemos que existe uma inversão quando um inteiros que não está em sua posição original precede outro menor que ele.*
Quando a permutação possuir um ***número par de inversões*** *o termo correspondente a essa permutação terá o* ***sinal positivo*** *e quando a permutação possuir um* ***número ímpar de inversões*** *o termo correspondente a essa permutação terá* ***sinal negativo****.*

Exemplo 4. *Consideremos as permutações dos números $1, 2$ e 3. Encontre o número de inversões de cada uma de suas permutações.*

Solução: observemos a tabela que criamos para facilitar o que abordamos anteriormente, constando as possíveis permutações e os respectivos números de inversões dos números $1, 2$ e 3:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3)	0	$+$
(1,3,2)	1	$-$
(2,1,3)	1	$-$
(2,3,1)	2	$+$
(3,1,2)	2	$+$
(3,2,1)	1	$-$

5.5 Construção da Definição de Determinantes

Nesta seção, calcularemos o determinante de matrizes particulares (ordem 1, 2 e 3) através da definição de determinante que apresentaremos na sequência.

Consideramos importante relembrar o conceito de diagonal principal de uma matriz.

Definição 5.4. *Dada uma matriz A de ordem n:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

os ***elementos da diagonal principal*** *da matriz A corresponde a sucessão dos elementos*

$$(a_{11},\, a_{22},\, a_{33},\, \cdots, a_{nn}),$$

cujos primeiros e segundos índices são todos iguais.

5.5.1 Determinantes para Matrizes de Ordem 1

Consideremos a matriz $A = [a_{11}]$.

Notemos que a diagonal principal é composta pelo único elemento que compõe a matriz, ou seja, o elemento a_{11} e ao realizar a permutação do segundo índice desse elemento, temos uma única forma de permutá-lo. Observe a tabela:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1)	0	$+$

Desse modo, o termo referente a essa permutação será o próprio a_{11} e pelo fato da permutação possuir zero inversões (par), o sinal desse termo será positivo, daí temos

$$\det A = |a_{11}| = +a_{11} = a_{11}.$$

Para matrizes de ordem superiores a 1, essa definição ficará mais clara. É o que veremos na Seção 5.5.2

5.5.2 Determinantes para Matrizes de Ordem 2

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Para calcularmos o Determinante de A faremos a soma dos produtos dos elementos dessa matriz, obtidos permutando-se de todos os modos possíveis os segundos índices dos elementos da diagonal principal, estando fixados os primeiros índices.

No caso da matriz A a sua diagonal principal é dada por

$$a_{11}a_{22}.$$

Permutando-se de todas as formas possíveis os segundos índices do produto dos elementos da diagonal principal $(1, 2)$ apresentado acima, ficamos com:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
$(1, 2)$	0	$+$
$(2, 1)$	1	$-$

De acordo com o apresentado na tabela, os termos referentes ao produto dos elementos da diagonal principal da matriz permutando-se os segundos índices e fixando os primeiros são $a_{11}a_{22}$ e $-a_{12}a_{21}$. Fazendo soma algébrica para encontrar o determinante da matriz:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

5.5.3 Determinantes para Matrizes de Ordem 3

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Pelo que vimos na definição de determinantes de ordem 3,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Reparemos que os produtos que aparecem no determinante podem ser reescritos, de modo geral, como

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

onde $(j_1j_2j_3)$ corresponde às permutações dos números 1, 2 e 3.

Além disso, temos três termos com o sinal negativo, isso ocorre pelo fato de existirem três permutações correspondentes a esses produtos com um número ímpar de inversões.

De acordo com a tabela apresentada no Exemplo 1 teremos 6 permutações para os números 1, 2 e 3:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3)	0	$+$
(1,3,2)	1	$-$
(2,1,3)	1	$-$
(2,3,1)	2	$+$
(3,1,2)	2	$+$
(3,2,1)	1	$-$

Note que ao realizar o produto dos elementos da diagonal principal da matriz A, fixando os primeiros índices e os segundos índices correspondendo a permutação dos elementos 1, 2 e 3 destacado na tabela, ficamos com os seguintes produtos referente às permutações:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Efetuando a soma algébrica desses 6 termos, obteremos o det A, isto é,

$$\det A = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (5.25)$$

Logo, a expressão (5.25) corresponde a definição de determinantes para matrizes de ordem 3, apresentada acima.

5.5.4 Matrizes de Ordem n

Apresentaremos a generalização da definição de determinantes que foi apresentada nas seções anteriores para matrizes de ordem até 3.

É importante destacar que, não é comum encontrar este tipo de definição em livros didáticos e há livros atuais em que a definição é apresentada apenas para determinantes de ordem até 3.

Definição 5.5. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] .$$

Dizemos que,

$$\det [a_{ij}] = \sum_{p} (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

onde $j = j(j_1 j_2 \cdots j_n)$ *é o número de inversões da permutação* $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ *e* p *indica que a soma é feita considerando-se as parcelas referentes a cada uma das* $n!$ *permutações de* $(1, 2, 3, \cdots, n)$.

Essa definição é extremamente importante, pois abrange o determinante de matrizes com ordem qualquer, no entanto, acaba sendo trabalhosa para matrizes de ordem 4 ou superior.

Exemplo 5. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ *e calcule seu determinante.*

Solução: Inicialmente iremos determinar as $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutações para os números 1,2,3 e 4:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3,4)	0	+
(1,3,2,4)	1	−
(2,1,3,4)	1	−
(2,3,1,4)	2	+
(3,1,2,4)	2	+
(3,2,1,4)	1	−
(1,2,4,3)	1	−
(1,3,4,2)	2	+
(3,1,4,2)	3	−
(3,2,4,1)	2	+
(2,1,4,3)	2	+
(2,3,4,1)	3	−
(1,4,2,3)	2	+
(1,4,3,2)	1	−
(2,4,1,3)	3	−
(2,4,3,1)	2	+
(3,4,1,2)	2	+
(3,4,2,1)	3	−
(4,1,2,3)	3	−
(4,1,3,2)	2	+
(4,3,1,2)	3	−
(4,2,1,,3)	2	+
(4,2,3,1)	1	−
(4,3,2,1)	2	+

Note que, ao realizar o produto dos elementos da diagonal principal da matriz A, fixando os primeiros índices e os segundos índices correspondendo a permutação dos elementos 1, 2, 3 e 4 destacado na tabela, ficamos com os seguintes produtos referente às permutações:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$$
$$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$
$$+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$$
$$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$$
$$+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$$
$$+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$
$$-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$$
$$+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$
$$-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$$
$$+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$$
$$-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$$
$$-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$
$$+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$$
$$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$
$$+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$$
$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$
$$+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$
$$+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$$
$$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$$

Efetuando a soma algébrica desses 24 termos, obteremos o $\det A$, isto é,

$$\begin{aligned}\det A = {} & +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ & +a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & -a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.\end{aligned}$$

5.5.5 Observações da Definição

Destacaremos algumas observações em relação à definição de determinantes que serão úteis para realizar as demonstrações das propriedades de determinantes:

(i) Se a permutação $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ possui um número par de inversões, o coeficiente $(-1)^j$ do termo correspondente no somatório terá sinal positivo, caso contrário, terá sinal negativo.

(ii) Em cada termo do somatório, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um elemento de cada coluna da matriz.

(iii) Através de uma reordenação conveniente dos termos, mostra-se que também é possível definir um determinante por

$$\det [a_{ij}] = \sum_p (-1)^j a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

variando os primeiros e deixando fixos os segundos índices.

Apresentaremos à seguir as propriedades de determinantes que irão facilitar e, na maioria das vezes, reduzir o cálculo do determinante de uma matriz.

5.6 Propriedades de Determinantes

Talvez nos perguntemos qual a necessidade do estudo das propriedades de determinantes, em verdade, elas serão úteis para reduzir os cálculos dos determinantes, principalmente os que possuem ordem $n \geq 3$.

As demonstrações das propriedades de determinantes serão aplicadas através das linhas da matriz, mas todas as propriedades apresentadas se estendem também para as colunas dessa mesma matriz.

Na construção desta seção, tivemos como base algumas referências como os livros (COELHO, 2013) e (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011).

- **Propriedade 1**: *Linha nula*

  Se todos os elementos de uma linha de uma matriz A são nulos, $\det A = 0$.

  Demonstração. Podemos realizar essa prova pela observação (ii), em cada termo que aparece no cálculo de determinante há um dos elementos da linha nula e, portanto, todos os termos se anulam, e em consequência o determinante é zero. ∎

Exemplo 6. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 82 & 15 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -78 & 3 & 103 \\ 20 & 18 & 30 & 903 \end{bmatrix}$, *calcular* $\det A$.

Solução:

Pela Propriedade 1, apresentada: $\det A = \begin{vmatrix} 82 & 15 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -78 & 3 & 103 \\ 20 & 18 & 30 & 903 \end{vmatrix} = 0.$

- **Propriedade 2**: *Matriz transposta*

  Se A é uma matriz de ordem n e A^t é sua transposta, então

$$\det A^t = \det A.$$

Demonstração. Seja $A = [a_{ij}]$ e $A^t = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Então, pela definição Determinante, temos

$$\begin{aligned} \det[b_{ij}] &= \sum_p (-1)^j b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_p (-1)^j a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\ &= \det[a_{ij}]. \end{aligned}$$

■

Exemplo 7. *Seja* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução: Determinemos inicialmente o Determinante da matriz A:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 6 \cdot (-9) \cdot 5 - [5 \cdot 7 \cdot 0 + (-1) \cdot (-9) \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 8] \\ &= -56 + 0 - 270 - [0 + 18 + 144] \\ &= -326 - 162 \\ &= -488. \end{aligned}$$

Notemos que a matriz B corresponde a transposta de A e pela Propriedade 2 de Determinantes, temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \det A = -488.$$

- **Propriedade 3**: *Multiplicação de uma linha por uma constante*

  Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o Determinante fica multiplicado por uma constante.

  Demonstração. Para verificarmos, chamemos de A a matriz original e B a matriz obtida de A, multiplicando uma linha de A por uma constante K. Então, pela definição:

$$\det [b_{ij}] = \sum_P (-1)^j b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}.$$

  Pela observação (ii) temos em cada produto do somatório pelo menos um elemento dessa linha a qual foi multiplicada por K referente a matriz obtida de A, isto é,

$$b_{ij_r} = K a_{ij_k},$$

  daí,

$$\begin{aligned} \det [b_{ij}] &= \sum_P (-1)^j K a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= K \sum_P (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= K \det [a_{ij}] . \end{aligned}$$

  Portanto, $\det B = K \cdot \det A$. ■

Exemplo 8. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 21 & 36 & -12. \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução: Calculemos inicialmente o Determinante da matriz A:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot 0 \cdot (-4) + 1 \cdot (-5) \cdot 7 + 2 \cdot 12 \cdot 9 - [9 \cdot 0 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot (-4)] \\
&= 0 - 35 + 216 - (0 - 180 - 8) \\
&= 181 + 188 \\
&= 369.
\end{aligned}
$$

Notemos que a matriz B foi obtida a partir da matriz A, multiplicando a 3º linha de A por 3. Desse modo, pela 3ª Propriedade de Determinantes:

$$
\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 21 & 36 & -12. \end{vmatrix} = 3 \cdot \det A = 3 \cdot 369 = 1107.
$$

Exemplo 9. *Calculemos o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 546 & -273 & 819 \\ 4 & 6 & 12 \\ -100 & 5 & 25 \end{bmatrix}$.

Solução: De acordo com a propriedade 3 de Determinantes:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 546 & -273 & 819 \\ 4 & 6 & 12 \\ -100 & 5 & 25 \end{vmatrix} \\
&= 273 \cdot 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -20 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 2730 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -20 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 2730 \cdot [30 + 120 + 6 - (-18 + 12 - 10)] \\
&= 3730 \cdot (156 + 16) \\
&= 2730 \cdot 172 \\
&= 469560.
\end{aligned}
$$

- **Propriedade 4**: *Troca de linhas paralelas* Uma vez trocada a posição de duas linhas o Determinante troca de sinal.

Demonstração. Para facilitar a compreensão da demonstração para o caso de matrizes de ordem n, apresentaremos a demonstração para matrizes de ordem 3.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Analisaremos a partir de agora os vários casos de troca de linhas.

Seja B a matriz obtida de A trocando as linhas 1 e 3 de posição:

$$B = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

Para a matriz A ver a tabela das permutações 5.4.2.
Para encontrar os Determinantes das matrizes A e B, fixaremos os segundos índices dos elementos da matriz e permutaremos os primeiros de todos os modos possíveis.

Temos a tabela das permutações para a matriz B a seguir:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(3,2,1)	0	+
(3,1,2)	1	−
(2,1,3)	2	+
(2,3,1)	1	−
(1,2,3)	1	−
(1,3,2)	2	+

Diante do apresentado na tabela, temos

$$\det B = -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} = -\det A.$$

Seja C a matriz obtida trocando as linhas 1 e 2 da matriz A:

$$C = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

onde a tabela das permutações da matriz C será:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(2,1,3)	0	$+$
(2,3,1)	1	$-$
(3,1,2)	1	$-$
(3,2,1)	2	$+$
(1,2,3)	1	$-$
(1,3,2)	2	$+$

Assim,

$$\det C = -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} = -\det A.$$

Por fim, consideremos D a matriz obtida trocando-se as linhas 2 e 3 da matriz A:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

A tabela das permutações da matriz D está representada a seguir:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,3,2)	0	$+$
(1,2,3)	1	$-$
(2,3,1)	1	$-$
(2,1,3)	2	$+$
(3,1,2)	1	$-$
(3,2,1)	2	$+$

Logo,

$$\det D = -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} = -\det A.$$

Desse modo, ao trocar a posição de duas linhas de uma matriz, alteramos a paridade do número de inversões dos índices e, portanto, trocamos o sinal de todos os termos, ocorrendo o mesmo fato para matrizes de ordem n. ■

Exemplo 10. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, *determine* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-3)\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 7 - [7\cdot 1\cdot 5 + (-3)\cdot 4\cdot(-3) + 2\cdot 1\cdot 2] \\
&= -6 - 15 + 56 - (35 + 36 + 4) \\
&= 35 - 75 \\
&= -40.
\end{aligned}$$

Perceba que a matriz B é obtida da matriz A trocando de posição as linhas 1 e 3 . Daí, pela P Propriedade 4 apresentada:

$$\det B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = -\det A = -(-40) = 40.$$

- **Propriedade 5**: *Linhas paralelas iguais*

Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formada por elementos respectivamente iguais, estão

$$\det A = 0.$$

Demonstração. Suponhamos as linhas de índices i e k sejam formadas por elementos respectivamente iguais, isto é,

$$a_{ij} = b_{kj}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

De acordo com a Propriedade 4, se trocarmos a posição destas duas linhas, obteremos uma nova matriz B, tal que

$$\det B = -\det A. \tag{5.26}$$

Por outro lado, $A = B$, pois as filas trocadas são iguais, assim

$$\det A = \det B. \tag{5.27}$$

Das equações 5.26 e 5.27 concluímos que

$$\begin{aligned}
\det A &= -detA \Longrightarrow \\
\det A + \det A &= 0 \Longrightarrow \\
2\det A &= 0 \Longrightarrow \\
\det A &= 0.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 11. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 19 & 26 & 53 & -3 \\ 1 & 44 & -7 & 16 \\ 19 & 26 & 53 & -3 \\ 15 & 0 & -83 & 17 \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$.

Solução: Temos que a matriz A possui as linhas 1 e 3 com elementos respectivamente iguais e pela Propriedade 5 apresentada o seu determinante é

$$\det A = \begin{vmatrix} 19 & 26 & 53 & -3 \\ 1 & 44 & -7 & 16 \\ 19 & 26 & 53 & -3 \\ 15 & 0 & -83 & 17 \end{vmatrix} = 0.$$

- **Propriedade 6**: *Soma de linhas*

  Consideremos uma matriz A de ordem n, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

  em que os elementos da j-ésima coluna são tais que:

$$\begin{gathered}
a_{1j} = b_{1j} + c_{1j} \\
a_{2j} = b_{2j} + c_{2j} \\
\vdots \\
a_{nj} = b_{nj} + c_{nj}
\end{gathered}$$

isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sejam

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então teremos

$$\det A = \det B + \det C,$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pela definição de determinante, temos

$$\det [a_{ij}] = \sum_P (-1)^r a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots (b_{kr_j} + c_{kr_j}) \cdots a_{nr_n}, \tag{5.28}$$

onde,

$$j = j(r_1 r_2 \cdots (r_j + r_j) \cdots r_n)$$

corresponde ao número de inversões da permutações $r_1 r_2 \cdots (r_j + r_j) \cdots r_n$ e P indica que a soma é estendida a todas as $n!$ permutações de $r_1 r_2 \cdots (r_j + r_j) \cdots r_n$. Ao fazermos a distributiva na equação 5.28:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_P (-1)^r a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} \cdots (b_{kr_j}) + a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} \cdots (c_{kr_j}) \\
&= \sum_P (-1)^r a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} \cdots (b_{kr_j}) + \sum_P (-1)^r a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} \cdots (c_{kr_j}) \\
&= \det B + \det C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 12. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & 9 \\ 15 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, *calcular* $\det A$.

Solução:

Podemos reescrever a matriz A da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & 9 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8+5 \\ 2 & 10 & 10-1 \\ 15 & 5 & 5+0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Pela última expressão, como as colunas 2 e 3 da matriz à seguir são iguais, teremos pela Propriedade 5 de determinantes:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

então,

$$\begin{aligned}
\det A &= 0 + \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot [0 - 24 + 10 - (150 - 6 + 0)] \\
&= 5 \cdot (-14 - 144) \\
&= 5 \cdot (-158) \\
&= -790.
\end{aligned}$$

- **Propriedade 7**: *O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante (Teorema de JACOBI).*

  Adicionando a uma fila de uma matriz A, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz B, tal que

$$\det B = \det A.$$

Demonstração. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Adicionando a j-ésima linha à p-ésima multiplicada pela constante K. Obteremos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + Ka_{p1} & a_{j2} + Ka_{p2} & \cdots & a_{jn} + Ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

De acordo com a Propriedade 6:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ka_{p1} & Ka_{p2} & \cdots & Ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

já pela Propriedade 3:

$$\begin{aligned} \det B &= \det A + K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \det A + k \cdot 0 \\ &= \det A. \end{aligned}$$

Portanto, $\det B = \det A$.

Esse fato ocorre devido o determinante abaixo possuir duas linhas com elementos respectivamente iguais e pela Propriedade 5, temos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

■

Exemplo 13. *Consideremos a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$*, calcule o seu determinante.*

Solução: Adicionando, à 2ª linha da matriz A, a 1° linha multiplicada por (-1), obteremos uma uma nova matriz:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4+(-1) & 2+(-3) & 7+(-5) & 10+(-6) \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \det A.$$

Como a matriz B possui as linhas 2 e 4 iguais, então pela Propriedade 5:

$$\det B = 0 = \det A.$$

Essa propriedade será bastante útil para introduzir zeros nos elementos das linhas de uma matriz, o que facilitará o calculo do determinante dessa matriz.

- **Propriedade 8**: *Filas paralelas proporcionais*

  Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det A = 0.$$

.

Demonstração. Suponhamos que as linhas de índices i e p da matriz A sejam formadas por elementos proporcionais , isto é,

$$a_{ij} = Ka_{pj}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Então:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ka_{p1} & Ka_{p2} & \cdots & Ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \cdot 0 = 0.$$

■

Exemplo 14. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{bmatrix}$, *calcule o* $\det A$.

Solução: Notemos que de acordo com a Propriedade 8, termos:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 7 \cdot 1 & -6 & 11 \\ 2 & 7 \cdot 2 & 9 & 22 \\ 3 & 7 \cdot 3 & 15 & 55 \\ 7 & 7 \cdot 7 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\ &= 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & 11 \\ 2 & 2 & 9 & 22 \\ 3 & 3 & 15 & 55 \\ 7 & 7 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\ &= 7 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

5.6.1 Matriz em Blocos

Definição 5.6. *Uma matriz* ***triangular superior*** *é uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$. De modo análogo, uma matriz* ***triangular inferior*** *é uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$.*

Exemplo 15. *Sejam as matrizes triangulares superiores (A) e inferiores (B):*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema 5.1. *Seja A uma matriz triangular superior ou inferior em blocos com blocos diagonais $A_1, A_2, \cdots, A_n$, então*

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_n.$$

Esse é um resultado o qual consideramos importante, onde considera-se uma matriz como sendo formada por blocos de outras matrizes menores. Para mais detalhes consular (IME,), (COELHO, 2013) e (LIPSCHUTZ, 1972).

Exemplo 16. *Consideremos a matriz de ordem 5*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: A matriz A pode ser reescrita:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & \pi \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

daí,

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4,$$

$$\text{e } \det D = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 9 - (-5) = 9 + 5 = 14.$$

Portanto,

$$\det A = \det B \cdot \det D = 4 \cdot 14 = 56$$

6 Teorema de Laplace

Ao realizar o cálculo do determinante para matrizes de ordem superior a 3 não existe um método específico como o apresentado para matrizes de ordem 1, 2 e 3 no Capítulo 6. Assim, apresentaremos o Teorema de Laplace, sendo bastante útil para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz, reduzindo o seu desenvolvimento à determinantes de uma ordem inferior ao determinante da matriz original.

Com o auxílio das propriedades de determinantes, os elementos das linhas ou colunas podem tornar-se zero ou um, daí teremos um cálculo ainda mais simplificado ao utilizar o Teorema de Laplace.

Baseados nos livros mais antigos do Ensino Médio, o Teorema de Laplace é usado para definir determinantes de ordem maior do que 3, já em nosso trabalho, apresentamos a definição geral determinantes.

6.1 Definições Preliminares

Definição 6.1. *Consideremos uma matriz quadrada de ordem n. Representemos por M_{ij} a* ***submatriz*** *quadrada de ordem $(n-1)$ de A, obtida suprimindo sua i-ésima linha e j-ésima coluna. O determinante $|M_{ij}|$ é chamado* ***menor do elemento*** *a_{ij} de A.*

Exemplo 17. *Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 9 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e determine o menor do elemento a_{12}.*

Solução: Iremos determinar inicialmente a submatriz M_{12}:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

O menor do elemento a_{ij} será $\det B$:

$$\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 - [(-3) \cdot 5] = 54 + 15 = 69$$

Definição 6.2. *Chamamos* ***co-fator*** *do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, como o determinante da submatriz M_{ij} com sinal:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|.$$

Observe que os "sinais" $(-1)^{i+j}$ que acompanham os menores formam uma disposição quadriculada com os + na diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Exemplo 18. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. *Determine o menor e o co-fator do elemento* a_{23}.

Solução: Para determinar o menor do elemento a_{23}, eliminaremos a linha 2 e a coluna 3 da matriz A, observemos:

Figura 7 – Exemplo 1: Menor e Co-fator

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autores, 2024.

Desse modo, a matriz obtida é

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e o menor do elemento a_{ij} será:

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6.$$

Já para determinar o co-fator do elemento referido, fazemos

$$A_{23} \;=\; (-1)^{2+3} \cdot |M_{23}|.$$

6.2 Motivação para Definição de Determinantes

Apresentaremos a definição de determinantes para matrizes de ordem 3, isto é, um caso particular dessa definição.

Pela definição de determinantes, temos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Podemos reescrever essa soma de parcelas colocando em evidência os elementos das linhas da matriz A:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \\ |A| &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}), \\ |A| &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Isto é,

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$|A| = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$|A| = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Desse modo, é percebido que o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser escrito em função dos determinantes das submatrizes de ordem 2, ou seja,

$$\det A = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|,$$

$$\det A = -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|,$$

$$\det A = a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}, |$$

Essa propriedade apresentada referente as linhas de uma matriz também é válida para as colunas e se estende para matrizes de ordem qualquer, e é o que provaremos na seção seguinte, ainda neste capítulo.

Teorema 6.1. *O determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ é igual a soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos de qualquer linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores.*

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eliminando a linha i e a coluna j da matriz A, ficamos com a submatriz:

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$$

e

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj},$$

.

Demonstração. Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz considerada e A_{ij} o cofator do elemento a_{ij} dessa matriz. Então, queremos provar que para quaisquer i ou j,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$$

e

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}.$$

Vimos que $|A| = |A^t|$, desse modo, basta provar uma das expressões acima, provaremos a primeira, em função das linha de A. Cada parcela de $|A|$ contém uma, e apenas uma, entrada da i-ésima linha $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ de A. Logo, podemos escrever

$$|A| = a_{i1}A^*_{i1} + a_{i2}A^*_{i2} + \cdots + a_{in}A^*_{in}.$$

Note que A_{ij} corresponde a uma soma de parcelas que não tem elemento algum da i-ésima linha de A. Desse modo, o teorema estará mostrado se conseguirmos mostrar:

$$A_{ij} = (-i)^{i+j} \cdot |M_{ij}|,$$

onde M_{ij} é a matriz obtida suprimindo a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij}.

Assim, será necessário mostrar que A^*_{ij} é igual ao cofator A_{ij}. Inicialmente, consideraremos o caso em que $i = n = j$. Então a soma das parcelas de $|A|$ contendo a_{nn} é

$$a_{nn}A^*_{nn} == a_{nn}\sum_p (-1)^j a_{1j_{(1)}}a_{2j_{(2)}}\cdots a_{(n-1)j_{(n-1)}},$$

onde somamos sobre todas as permutações p para os quais $j(n) = n$, isso equivalente a somar sobre todas as permutações de $\{1, 2, \cdots, (n-1)\}$. Assim,

$$A^*_{nn} = |M_{nn}| = (-1)^{n+n}|M_{nn}| = (-1)^{2n}|M_{nn}| = A_{nn}.$$

Consideremos o caso em que i e j são arbitrários trocaremos a i- ésima linha com cada linha que sucede até ela ser a última e, em seguida, trocamos a j- ésima coluna com cada coluna que a sucede até ela ser a última. Note que o determinante $|M_{ij}|$ não se altera, por que as posições relativas das outras linhas e colunas não são afetadas por essas trocas. Contudo, o sinal de $|A|$ e de A_{ij} foi trocado $n-i$ vezes e depois $n-j$ vezes. Em vista disso,

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= (-1)^{n-i+n-j} \cdot |M_{ij}| \\
&= (-1)^{2n} \cdot (-1)^{-(i+j)} \cdot |M_{ij}| \\
&= 1 \cdot \frac{1}{(-1)^{(i+j)}} \cdot |M_{ij}| \\
&= (-1)^{(i+j)} \cdot |M_{ij}|.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 19. *Calculemos o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *pelo Teorema de Laplace.*

Solução: Para resolver o determinante de A faremos o cálculo pela linha ou coluna que possuir a maior quantidade de zeros, neste caso utilizaremos a linha 3 por possuir 2 zeros:

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 - [-9 + 4 + 15 - (1 - 18 + 30)] + 0$$

$$- 2 \cdot [18 + 4 - (-4 + 60)] = -(10 - 13) - 2 \cdot (22 - 56) = 3 + 68 = 71.$$

Portanto, $\det A = 71$.

Como já falamos acima, o Teorema de Laplace é muito útil, no entanto, ao considerar matrizes com ordem superior a 4 há um esforço computacional de cálculos muito grandes.

6.3 Dificuldade operacional

Dependendo do grau da matriz considerada, o cálculo do seu determinante nem sempre será simples de calcular, daí a importância de conhecer as propriedades, teoremas e ferramentas (apresentadas em nosso trabalho) que podem simplificar esse cálculo. Apresentaremos nessa sessão a quantidade de determinantes que serão necessários calcular para o determinante de uma matriz de ordem n utilizando o Teorema de Laplace.

- Determinante de ordem 6:

  Para um determinante de ordem 6 devemos calcular 6 determinantes de ordem 5.

- Determinante de ordem 5

  Para um determinante de ordem 5 devemos calcular 5 determinantes de ordem 4.

- Determinante de ordem 4

  Para um determinante de ordem 4 devemos calcular 4 determinantes de ordem 3.

  Em resumo, para um determinante de ordem 6 devemos calcular $6 \cdot 5 \cdot 4 = 12$ determinantes de ordem 3.

- Determinante de ordem n:

  Para um determinante de ordem n devemos calcular $n \cdot (n-1) \cdots 4$ determinantes de ordem 3. O que dará um trabalho tremendo.

6.4 Calculo do Determinante de Matrizes Triangulares

Seja A uma matriz triangular (superior ou inferior) de ordem n, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Demonstração. Consideremos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

uma matriz triangular inferior, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, o determinante de A pode ser calculado recursivamente pela primeira linha utilizando o Teorema de Laplace, podendo ser expresso como:

$$\det A \;=\; a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

isto é,

$$\det A = a_{11}A_{11} \tag{6.1}$$

A expressão 6.1 justifica pelo fato dos elementos da primeira linha que são diferentes de a_{11} serem iguais a zero.

Calculando A_{11}, temos

$$A_{11} = a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}A_{22}$$

A expressão 6.1 pode ser reescrita:

$$\det A = a_{11}a_{22}A_{22} \tag{6.2}$$

Calculando A_{22}, temos

$$A_{22} = a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{33}A_{33}$$

A expressão 6.2 pode ser reescrita:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}A_{33}$$

Procedendo recursivamente, de modo análogo, encontraremos

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$$

Em resumo,

$$\begin{array}{rcl} \det \text{A} & = & a_{11}A_{11} \\ \det A & = & a_{11}a_{22}A_{22} \\ \det A & = & a_{11}a_{22}a_{33}A_{33} \\ \vdots & & \vdots \\ \det A & = & a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{(n-1)(n-1)}A_{(n-1)} \\ \det A & = & a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}, \end{array}$$

onde A_{ij} representa a submatriz obtida ao excluir a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz original. Note ainda, que cada uma das submatrizes A_{ij} é de ordem $(n-1)$.

Portanto,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}.$$

■

De modo análogo, mostramos para matriz triangular inferior.

Exemplo 20. *Calculemos o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & p & z & 0 & 0 & 0 \\ m & n & p & x & 0 & 0 \\ b & c & d & e & y & 0 \\ a & b & c & d & e & z \end{bmatrix}$.

Solução: Notemos que a matriz A é uma matriz triangular, desse modo, pelo que foi demonstrado acima, seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\det A = x \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot z = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2.$$

6.5 Regra de Chió

Essa regra consiste em um modo de reduzir em uma unidade a ordem do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ com o objetivo de facilitar os cálculos. A regra também é importante, pois pode ser utilizada em um determinante de ordem qualquer, baixando a sua ordem em 1 unidade.

Essa regra acaba sendo uma consequência da 7ª propriedade de determinantes (5.6), também é conhecida como Teorema de Jacobi.

Para mais detalhes consultar (BOLDRINI, 1986) e (BEZERRA, 1977).

Teorema 6.2. *Considere uma matriz M de ordem $n \geq 2$*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Um determinante de M que possui $a_{11} = 1$, é igual ao determinante, obtido suprimindo em $|M|$ a linha 1 e a coluna 1, e substituindo os elementos restantes pela diferença entre eles e o produto dos dois termos que estejam nas filas suprimidas e que pertençam a linha e a coluna do elemento considerado. Esse determinante obtido será precedido do sinal positivo, pois 1+1=2 é par.

Demonstração. Seja o elemento $a_{11} \neq 1$ na matriz M, substituindo uma linha dessa matriz por uma combinação linear de outra linha, obtemos uma matriz N, perceba que $\det M = \det N$.

Neste caso, para obtermos o elemento $a_{11} = 1$, faremos a operação entre as linhas, ou seja, escolhemos a j-ésima linha da matriz a qual multiplicaremos cada elemento dessa linha por uma constante K, por fim, adicionaremos a esse produto os respectivos elementos da linha 1, isto é,

$$a_{j1} \cdot K + a_{11} = 1 \Longrightarrow K = \frac{1 - a_{11}}{a_{j1}},$$

onde $a_{j1} \neq 0$.

Desse modo, obteremos $a_{11} = 1$. Caso a matriz já possua o elemento $a_{11} = 1$, esse passo acima deve ser desconsiderado.

Sendo o elemento $a_{11} = 1$, basta realizar as operações indicada nos itens abaixo.

- Adicionaremos, à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$.

- Adicionaremos, à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$.
- Adicionaremos, à 4ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{14}$.
  ....
- Adicionaremos, à j-ésima coluna , 1ª multiplicada por $-a_{1j}$.
  ....
- Adicionaremos, à n-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$.

Seja N a matriz obtida ao efetuar as operações acima e de acordo com a 7ª propriedade de determinantes, temos $\det N = \det M$.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Percebamos que os elementos diferentes de a_11 são todos iguais a zero, isso na 1ª linha da matriz N e aplicando o Teorema de Laplace pela 1º linha (o mais recomendado em termos de cálculo), teremos:

$$\begin{aligned} \det M &= \det N = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + \dots + 0 \cdot A_{1n} \\ &= A_{11} \\ &= \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, o $\det N$ corresponde a um determinante de ordem $(n-1)$.

■

Em resumo, de acordo com a regra de Chió:

- Para obter $a_{11} = 1$, basta proceder como presentado no início da demonstração.
- Desde que M tenha $a_{11} = 1$, eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna de M.

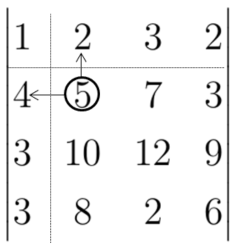
- De cada elemento restante na matriz M subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares", traçada do elemento considerado à 1ª linha e à 1ª coluna.

- Através das diferenças obtidas, construímos uma nova matriz de ordem $n-1$ onde o determinante é igual ao $\det M$

Exemplo 21. *Consideremos a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *e calculemos o seu determinante pela Regra de Chió.*

Solução: Visto que nessa matriz o elemento $a_{11} = 1$, efetuando as operações indicadas na regra de Chió:

Figura 8 – Regra de Chió- Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

Pela Regra de Chió, o determinante acima é igual ao determinante que segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 3-3\cdot 1 & 2-2\cdot 1 \\ 4 & 5-2\cdot 4 & 7-3\cdot 4 & 3-2\cdot 4 \\ 3 & 10-2\cdot 3 & 12-3\cdot 3 & 9-2\cdot 3 \\ 3 & 8-2\cdot 3 & 2-3\cdot 3 & 6-2\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante de ordem 4 pelo Teorema de Laplace usando a primeira linha, temos:

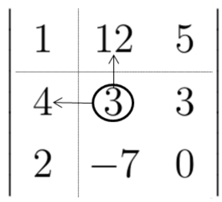
$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Percebamos que o determinante de ordem 3 acima, possui $a_{11} \neq 1$, daí utilizaremos a propriedade de determinante onde faremos o produto do número -1 pelos elementos da segunda linha e subtrairemos desse produto os respectivos elementos da 1ª linha do determinante da matriz A, sabendo que o determinante da A e o determinante da nova matriz será o mesmo, ficamos com:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2-(-3) & -(-7)-(-5) & -0-(-5) \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aplicando a regra de Chió no determinante de ordem 3 encontrado, obteremos:

Figura 9 – Regra de Chió - Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

O determinante de ordem 3 é igual a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 12-12\cdot 1 & 5-5\cdot 1 \\ 4 & 3-12\cdot 4 & 3-5\cdot 4 \\ 2 & -7-12\cdot 2 & 0-5\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -45 & -17 \\ 2 & -31 & -10 \end{vmatrix}.$$

Portanto, aplicando a Regra de Chió no determinante de ordem 3 e eliminando a sua 1ª linha e 1ª coluna, esse determinante será:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -45 & -17 \\ -31 & -10 \end{vmatrix} \\ &= (-45)\cdot(-10) - [(-17)\dot{(}-31)] \\ &= 450 - 527 \\ &= -77. \end{aligned}$$

7 Cálculo de Matriz Inversa por Determinantes

A princípio, os determinantes eram utilizados para a resolução de sistemas lineares, lá por volta do século XVII. Mais adiante, os determinantes passaram a ser estudados de forma sistematizada, é o que afirma (BOLDRINI, 1986):

> A partir de então, o uso de determinante difundiu-se muito e este conceito de um número associado a uma matriz quadrada mostrou-se extremamente útil para caracterizar muitas situações, como a de saber se uma matriz é invertível, se um sistema admite ou não solução.(BOLDRINI, 1986, p.64)

7.1 Aplicações Lineares

Nesta seção introduziremos alguns conceitos e definições encontrados no livro (LANG, 1996) que serão necessários na demonstração de alguns resultados. Sejam dois espaços vetoriais V e V' sobre um corpo K. Uma aplicação linear ou transformação linear:

$$F : V \to V'$$

é uma aplicação que satisfaz as duas propriedades seguintes:

1. Quaisquer que sejam u e v em V, vale
$$F(U + V) = F(U) + F(V).$$
2. Quaisquer que sejam c em k e v em V, vale
$$F(cv) = cF(v).$$

Teorema 7.1. *A cada matriz A de ordem n sobre o corpo K podemos associar um elemento de K, denominado seu determinante, e indicado por* $\det A$*, ou por* $\det(A^1, \cdots, A^n)$ *se $A^1, \cdots, A^n$ são as colunas de A, e que verifica a propriedade seguinte:*

- *como uma função de cada vetor-coluna, o determinante é linear, isto é, se a j-ésima coluna de A^j for igual à soma de dois vetores coluna, digamos $A^j = C + C'$, então*
$$\det(A^1, \cdots, C{+}C', \cdots, A^n) = \det(A^1, \cdots, C, \cdots, A^n) + \det(A^1, \cdots, C', \cdots, A^n).$$
Por outro lado, se $t \in K$, então
$$\det(A^1, \cdots, tA^j, \cdots, A^n) = t \det(A^1, \cdots, A^j, \cdots, A^n)$$

Para uma abordagem mais detalhada consultar o livro (LANG, 1996).

7.2 Definições Preliminares

Definição 7.1. *Definimos a* ***Matriz Identidade*** *de ordem n como sendo a matriz na qual todos os elementos são nulos, exceto os elementos da diagonal principal, que são iguais a 1. Indicamos por I_n, ou I se não for especificar a ordem da matriz. Dessa forma,*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 7.2. *Uma* ***submatriz*** *de uma dada matriz A é uma matriz obtida de A eliminando alguma(s) das suas linhas e/ou colunas.*

Definição 7.3. *Dada uma matriz A, dizemos que o* ***cofator*** *A_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|,$$

onde M_{ij} é a submatriz de A, obtida extraindo-se a i´-ésima linha e a j-ésima coluna. Com esses fatores formamos uma matriz $\bar{A}$, a qual chamaremos de matriz dos cofatores:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 7.4. *Dada uma matriz A, chamaremos de* ***matriz adjunta*** *de A à transposta da matriz dos cofatores ($\bar{A}$), representada por*

$$\bar{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

7.3 Determinante e Matriz Inversa

Nesta seção provaremos que o determinante do produto é o produto dos determinantes para matrizes de ordem 2 (faremos duas demonstrações) e 3, sendo que a demonstração para matrizes de ordem 3 irá ajudar na compreensão da demonstração do caso geral, apresentada no livro (LANG, 1996).

7.3.1 Produto de Determinantes

Proposição 7.2. *Sejam A e B duas matrizes de ordem 2. Então*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Demonstração. Considere as matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ de ordem 2. Assim,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

daí,

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}. \end{aligned}$$

Seja C o produto da matriz A pela matriz B, isto é,

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \cdot (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} \\ &\quad -a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}. \end{aligned}$$

Portanto, chegamos que

$$\det(A \cdot B) = \det C = \det A \cdot \det B$$

Logo, fica mostrado que o determinante do produto é o produto dos determinantes para matrizes de ordem 2. ■

Faremos uma segunda demonstração para as matrizes de ordem 2 que ajudará na compreensão da demonstração das matrizes de ordem n.

Demonstração. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, assim

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Seja $A \cdot B = C$ e seja C^k a k-ésima coluna de C e A^k a k-ésima coluna de A:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$C^1 = b_{11}A^1 + b_{21}A^2$$
$$C^2 = b_{12}A^1 + b_{22}A^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B) &= \det(C^1, C^2) \\
&= \det(b_{11}A^1 + b_{21}A^2, b_{12}A^1 + b_{22}A^2) \\
&= \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1 + b_{22}A^2) + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1 + b_{22}A^2) \\
&= \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1) + \det(b_{11}A^1, b_{22}A^2) + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1) + \det(b_{21}A^2, b_{22}A^2) \\
&= b_{11}b_{12}\det(A^1, A^1) + b_{11}b_{22}\det(A^1, A^2) + b_{21}b_{12}\det(A^2, A^1) + b_{21}b_{22}\det(A^2, A^2) \\
&= b_{11}b_{12}\det(A^1, A^1) + b_{11}b_{22}\det(A^1, A^2) - b_{21}b_{12}\det(A^1, A^2) + b_{21}b_{22}\det(A^2, A^2) \\
&= b_{11}b_{12}\det(A^1, A^1) + b_{21}b_{22}\det(A^2, A^2) + \det(A^1, A^2)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}).
\end{aligned}$$

Note que $\det(A^1, A^1)$ e $\det(A^2, A^2)$ são iguais a zero, pois se trata do determinante de matrizes com colunas iguais.

Daí,

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B) &= \det(A^1, A^2)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

■

Portanto, fica mostrado que o determinante do produto é o produto dos determinantes para matrizes de ordem 2.

Proposição 7.3. *Sejam A e B duas matrizes de ordem* 3. *Então,*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Demonstração. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

e seja C o produto da matriz A pela matriz B, isto é,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}.$$

Seja C^k a k-ésima coluna de C e A^k a k-ésima coluna de A:

$$C^k = b_{1k}A^1 + b_{2k}A^2 + b_{3k}A^3.$$

Daí,

$$\begin{aligned} C^1 &= b_{11}A^1 + b_{21}A^2 + b_{31}A^3 \\ C^2 &= b_{12}A^1 + b_{22}A^2 + b_{32}A^3 \\ C^3 &= b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det C \\ &= \det(C^1, C^2, C^3) \\ &= \det(b_{11}A^1 + b_{21}A^2 + b_{31}A^3, b_{12}A^1 + b_{22}A^2 + b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3). \end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão, temos

$$
\begin{aligned}
\det C &= \det(b_{11}A^1 + b_{21}A^2 + b_{31}A^3, b_{12}A^1 + b_{22}A^2 + b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) \\
&= \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1 + b_{22}A^2 + b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1 + b_{22}A^2 \\
&\quad + b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) + \det(b_{31}A^3, b_{12}A^1 + b_{22}A^2 + b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3 \\
&= \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) + \det(b_{11}A^1, b_{22}A^2, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{11}A^1, b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{21}A^2, b_{22}A^2, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) + \det(b_{21}A^2, b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{31}A^3, b_{12}A^1, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) + \det(b_{31}A^3, b_{22}A^2, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{31}A^3, b_{32}A^3, b_{13}A^1 + b_{23}A^2 + b_{33}A^3) \\
&= \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1, b_{13}A^1) + \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1, b_{23}A^2) + \det(b_{11}A^1, b_{12}A^1, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{11}A^1, b_{22}A^2, b_{13}A^1) + \det(b_{11}A^1, b_{22}A^2, b_{23}A^2) + \det(b_{11}A^1, b_{22}A^2, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{11}A^1, b_{32}A^3, b_{13}A^1) + \det(b_{11}A^1, b_{32}A^3, b_{23}A^2) + \det(b_{11}A^1, b_{32}A^3, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1, b_{13}A^1) + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1, b_{23}A^2) + \det(b_{21}A^2, b_{12}A^1, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{21}A^2, b_{22}A^2, b_{13}A^1) + \det(b_{21}A^2, b_{22}A^2, b_{23}A^2) + \det(b_{21}A^2, b_{22}A^2, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{21}A^2, b_{32}A^3, b_{13}A^1) + \det(b_{21}A^2, b_{32}A^3, b_{23}A^2) + \det(b_{21}A^2, b_{32}A^3, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{31}A^3, b_{12}A^1, b_{13}A^1) + \det(b_{31}A^3, b_{12}A^1, b_{23}A^2) + \det(b_{31}A^3, b_{12}A^1, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{31}A^3, b_{22}A^2, b_{13}A^1) + \det(b_{31}A^3, b_{22}A^2, b_{23}A^2) + \det(b_{31}A^3, b_{22}A^2, b_{33}A^3) \\
&\quad + \det(b_{31}A^3, b_{32}A^3, b_{13}A^1) + \det(b_{31}A^3, b_{32}A^3, b_{23}A^2) + \det(b_{31}A^3, b_{32}A^3, b_{33}A^3) \\
&= b_{11}b_{12}b_{13}\det(A^1, A^1, A^1) + b_{11}b_{12}b_{23}\det(A^1, A^1, A^2) + b_{11}b_{12}b_{33}\det(A^1, A^1, A^3) \\
&\quad + b_{11}b_{22}b_{13}\det(A^1, A^2, A^1) + b_{11}b_{22}b_{23}\det(A^1, A^2, A^2) + b_{11}b_{22}b_{33}\det(A^1, A^2, A^3) \\
&\quad + b_{11}b_{32}b_{13}\det(A^1, A^3, A^1) + b_{11}b_{32}b_{23}\det(A^1, A^3, A^2) + b_{11}b_{32}b_{33}\det(A^1, A^3, A^3) \\
&\quad + b_{21}b_{12}b_{13}\det(A^2, A^1, A^1) + b_{21}b_{12}b_{23}\det(A^2, A^1, A^2) + b_{21}b_{12}b_{33}\det(A^2, A^1, A^3) \\
&\quad + b_{21}b_{22}b_{13}\det(A^2, A^2, A^1) + b_{21}b_{22}b_{23}\det(A^2, A^2, A^2) + b_{21}b_{22}b_{33}\det(A^2, A^2, A^3) \\
&\quad + b_{21}b_{32}b_{13}\det(A^2, A^3, A^1) + b_{21}b_{32}b_{23}\det(A^2, A^3, A^2) + b_{21}b_{32}b_{33}\det(A^2, A^3, A^3) \\
&\quad + b_{31}b_{12}b_{13}\det(A^3, A^1, A^1) + b_{31}b_{12}b_{23}\det(A^3, A^1, A^2) + b_{31}b_{12}b_{33}\det(A^3, A^1, A^3) \\
&\quad + b_{31}b_{22}b_{13}\det(A^3, A^2, A^1) + b_{31}b_{22}b_{23}\det(A^3, A^2, A^2) + b_{31}b_{22}b_{33}\det(A^3, A^2, A^3) \\
&\quad + b_{31}b_{32}b_{13}\det(A^3, A^3, A^1) + b_{31}b_{32}b_{23}\det(A^3, A^3, A^2) + b_{31}b_{32}b_{33}\det(A^3, A^3, A^3).
\end{aligned}
$$

Percebam que na última expressão aparecem vários termos com determinantes cujas colunas são iguais, e neste caso, temos pela propriedade 5.6 que o determinante será igual a zero, desse modo

$$\begin{aligned}\det C &= b_{11}b_{22}b_{33}\det(A^1,A^2,A^3)+b_{11}b_{32}b_{23}\det(A^1,A^3,A^2)+b_{21}b_{12}b_{33}\det(A^2,A^1,A^3)\\&\quad+b_{21}b_{32}b_{13}\det(A^2,A^3,A^1)+b_{31}b_{12}b_{23}\det(A^3,A^1,A^2)+b_{31}b_{22}b_{13}\det(A^3,A^2,A^1).\end{aligned}$$

Fazendo a troca das colunas, pela propriedade 5.6, o determinante troca o sinal, assim

$$\begin{aligned}\det C &= b_{11}b_{22}b_{33}\det(A^1,A^2,A^3)-b_{11}b_{32}b_{23}\det(A^1,A^2,A^3)-b_{21}b_{12}b_{33}\det(A^1,A^2,A^3)\\&\quad-b_{21}b_{32}b_{13}\det(A^1,A^3,A^2)-b_{31}b_{12}b_{23}\det(A^1,A^3,A^2)-b_{31}b_{22}b_{13}\det(A^1,A^2,A^3)\\&= b_{11}b_{22}b_{33}\det(A^1,A^2,A^3)+b_{21}b_{32}b_{13}\det(A^1,A^2,A^3)+b_{31}b_{12}b_{23}\det(A^1,A^2,A^3)\\&\quad-b_{11}b_{32}b_{23}\det(A^1,A^2,A^3)-b_{21}b_{12}b_{33}\det(A^1,A^2,A^3)-b_{31}b_{22}b_{13}\det(A^1,A^2,A^3)\\&= \det(A^1,A^2,A^3)(b_{11}b_{22}b_{33}+b_{21}b_{32}b_{13}+b_{31}b_{12}b_{23}-b_{11}b_{32}b_{23}-b_{21}b_{12}b_{33}-b_{31}b_{22}b_{13})\\&= \det A\cdot\det B.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\det C = \det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$$

é válido para matrizes de ordem 3. ■

Teorema 7.4. *Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Então*

$$\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B.$$

Ver demonstração do Teorema 7.4 no livro (LANG, 1996) na página 101, que utiliza a ideia parecida com a demonstração que apresentamos para determinantes de ordem 3.

Definição 7.5. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz* ***inversível*** *se existir uma matriz A^{-1}, tal que*

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n.$$

Exemplo 22. *Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ e determine a inversa da matriz A.*

Solução: Seja a matriz inversa de A representada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, pela Definição 7.5 temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o que implica,

$$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ficamos com os sistemas

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 3a+4c=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2b+d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases} \quad .$$

Resolvendo os sistemas ficamos,temos

$$a = \frac{4}{5}\ , b = \frac{-1}{5}\ , c = \frac{-3}{5} \text{ e } d = \frac{2}{5}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Vejamos agora uma condição necessária e também suficiente para que uma matriz A admita inversa. Seja A não é invertível, dizemos que A é uma matriz singular. De acordo com a definição apresentada acima,

$$A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Aplicando o determinante em ambos os membros, temos:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n.$$

Pelo de demonstramos no Teorema 7.4

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Seja $\det A \neq 0$, daí

$$\frac{\det A}{\det A} \cdot \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Assim,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \ \textit{para} \det A \neq 0.$$

Logo, para que a matriz A admita inversa, devemos ter $\det A \neq 0$.

7.3.2 Matriz Adjunta

Apresentaremos nessa seção, uma forma diferente para calcular a inversa de uma matriz. Utilizaremos para isso um teorema que trata do cálculo da matriz inversa através da adjunta da matriz, faremos inicialmente a demonstração para matrizes de ordem 3 e posteriormente apresentaremos a demonstração para o caso geral.

Proposição 7.5. *Seja A uma matriz de ordem 3 e $\bar{A}'$ a matriz adjunta de A, então*

$$A \cdot \bar{A}' = A \cdot (AdjA) = (\det A) \cdot I_n.$$

Demonstração.

$$A \cdot (AdjA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = [B_{ij}]. \tag{7.1}$$

Calculemos os elementos b_{ij}:

$$b_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A \tag{7.2}$$

$$b_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} \tag{7.3}$$

$$b_{13} = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \tag{7.4}$$

$$b_{21} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} \tag{7.5}$$

$$b_{22} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \det A \tag{7.6}$$

$$b_{23} = a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \tag{7.7}$$

$$b_{31} = a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} \tag{7.8}$$

$$b_{32} = a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} \tag{7.9}$$

$$b_{33} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \det A \tag{7.10}$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na matriz $M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ em relação à primeira linha, temos:

$$\begin{aligned} \det M_1 &= a_{11}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0. \end{aligned}$$

Isso pela 1ª propriedade de determinantes. Por outro lado, temos pela equação (7.7) que

$$\det M_1 = b_{23} = 0.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na matriz $M_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ em relação à segunda linha, temos:

$$\begin{aligned} \det M_2 &= a_{21}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0. \end{aligned}$$

Isso pela 1ª propriedade de determinantes. Por outro lado, temos pela a equação (7.3) que

$$\det M_2 = b_{12} = 0.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na matriz $M_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ em relação à terceira linha, temos:

$$\begin{aligned} \det M_3 &= a_{11}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0. \end{aligned}$$

Isso pela 1ª propriedade de determinantes. Por outro lado, temos pela equação (7.4) que

$$\det M_3 = b_{13} = 0.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na matriz $M_4 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ em relação à primeira linha, temos:

$$\begin{aligned} \det M_4 &= a_{21}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0. \end{aligned}$$

Isso pela 1ª propriedade de determinantes. Por outro lado, temos pela a equação (7.5) que

$$\det M_4 = b_{21} = 0.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na matriz $M_5 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ em relação à primeira linha, temos:

$$\begin{aligned} \det M_5 &= a_{31}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{32}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{33}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \end{aligned}$$

isso pela 1ª propriedade de determinantes. Por outro lado, temos pela equação (7.8) que

$$\det M_5 = b_{31} = 0.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace na matriz $M_6 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ em relação à segunda linha, temos:

$$\begin{aligned} \det M_6 &= a_{31} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{32} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{33} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0. \end{aligned}$$

Isso pela 1ª propriedade de determinantes. Por outro lado, temos pela equação 7.9 que

$$\det M_6 = b_{32} = 0.$$

Portanto, de acordo com a equação 7.1 concluímos que

$$A \cdot (AdjA) = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}.$$

■

Teorema 7.6. *Seja A uma matriz de ordem n e $\bar{A}'$ a matriz adjunta de A, então*

$$A \cdot \bar{A}' = A \cdot (AdjA) = (\det A) \cdot I_n.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} A \cdot (AdjA) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \\ &= [C_{ij}]\,. \end{aligned}$$

Calculemos os elementos C_{ij}:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \det A \\
c_{12} &= a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1j}A_{2j} + \cdots + a_{1n}A_{2n} \\
&\vdots \\
c_{1i} &= a_{11}A_{i1} + a_{12}A_{i2} + \cdots + a_{1j}A_{ij} + \cdots + a_{1n}A_{in} \\
&\vdots \\
c_{1n} &= a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \cdots + a_{1j}A_{nj} + \cdots + a_{1n}A_{nn}
\end{aligned}$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace em relação à linha i, temos:

$$c_{1i} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0,$$

pois duas linhas da matriz acima são iguais e pela 1º propriedade de determinantes $\det = 0$. Analogamente,

$$c_{ii} = \det A$$

e

$$c_{ij} = 0,\, para\, i \neq j.$$

Então,

$$A \cdot (AdjA) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I_n.$$

Portanto,

$$A \cdot (AdjA) = (\det A) \cdot I_n. \tag{7.11}$$

■

Multiplicando toda expressão 7.11 por A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A \cdot (AdjA) &= A^{-1} \cdot (\det A) \cdot I_n \\ \Longrightarrow I_n(AdjA) &= A^{-1} \cdot (\det A) I_n \\ \Longrightarrow (AdjA) &= A^{-1} \cdot (\det A) \\ \Longrightarrow A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot (AdjA). \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (AdjA). \tag{7.12}$$

Daí:

Teorema 7.7. *Uma matriz quadrada A admite inversa se, e somente se* $\det A \neq 0$.

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (AdjA). \tag{7.13}$$

Sendo uma nova forma de calcular a inversa de uma matriz.

Exemplo 23. *Encontremos a inversa da matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ *através do cálculo do determinante.*

Solução: Inicialmente, calcularemos o determinante de A:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 40 - (15 + 24) \\ &= 40 - 39 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Calculemos os cofatores de cada um dos elementos da matriz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 18 = -18$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Desse modo, a matriz dos cofatores é representada por

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$AdjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acordo coma equação (A.18):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado nos fornece outra forma de calcular o determinante de uma matriz.

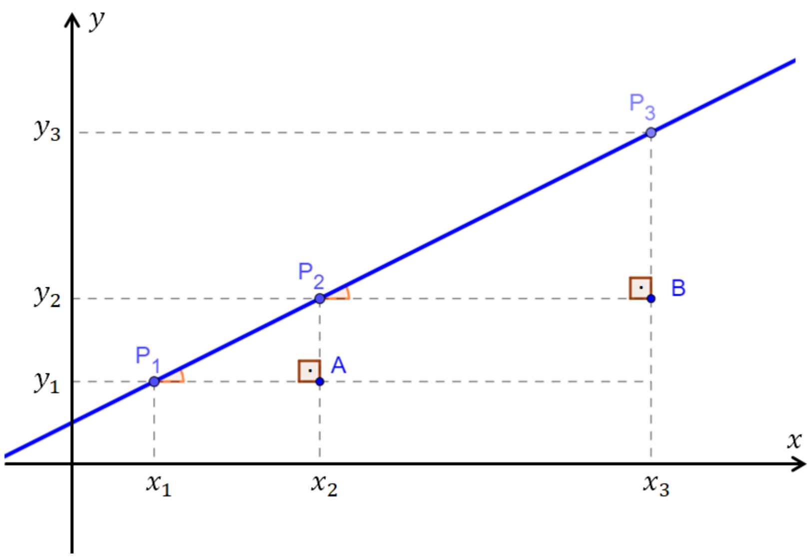
Para mais detalhes sobre a o cálculo do determinante por matriz adjunta, consultar (RONCHI,) e (BEZERRA, 1977).

8 Aplicações de Determinantes

Nesta seção será apresentada algumas aplicações de determinante em diversas áreas, pois consideramos primordial mostrar a utilidade do que é ensinado, especialmente no ensino básico, onde os alunos além de se submeter em ENEM, estão em processo de decisão para qual área seguir, para isso, precisam ter conhecimento básicos nas diversas área. Para os que escolham os cursos de Física, Matemática, Computação, Engenharias, entre outros, por exemplo precisam ter conhecimento e saber onde os determinantes são utilizados.

8.1 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Consideremos três pontos alinhados: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ representados abaixo. Consideremos também os pontos $A = (x_2, y_1)$ e $B = (x_3, y_2)$:



Fonte: Autores, 2024.

Percebamos que os triângulos AP_1P_2 e BP_2P_3 são retângulos em A e B, respectivamente.

Temos,

$$\angle A\hat{P}_1P_2 = \angle B\hat{P}_2P_3,$$

pois as retas suporte dos segmentos AP_1 e BP_2 são paralelas, desse modo, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos

$$P_1\hat{P}_2A = P_2\hat{P}_3B.$$

Assim os triângulos AP_1P_2 e BP_2P_3 são semelhantes, donde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\
\Longrightarrow (y_2 - y_1)\cdot(x_3 - x_2) &= (y_3 - y_2)\cdot(x_2 - x_1) \\
\Longrightarrow y_2x_3 - y_2x_2 - y_1x_3 + y_1x_2 &= y_3x_2 - y_3x_1 - y_2x_2 + y_2x_1 \\
\Longrightarrow y_2x_3 - y_2x_2 - y_1x_3 + y_1x_2 - y_3x_2 + y_3x_1 + y2x_2 - y2x_1 &= 0 \\
\Longrightarrow y_2x_3 - y_1x_3 + y_1x_2 - y_3x_2 + y_3x_1 - y_2x_1 &= 0
\end{aligned}$$

A expressão acima se assemelha ao cálculo do determinante.

Observemos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \\ x3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = y_2x_1 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 - y_1x_2 = 0.$$

Portanto, para que os pontos P_1, P_2 e P_3 estejam alinhados, devemos ter

$$\det A = 0,$$

onde, A é a matriz formada pelos pontos dados.

Exemplo 24. *Sejam os pontos $A = (x, 1)$, $B = (5, 0)$ e $C = (11, x)$ Determinemos para quais valores de x existe o triângulo ABC.*

Solução: Para que exista um triângulo devemos ter $x \in \mathbb{R}$ e os pontos A, B e C devem ser não colineares. Considerando o alinhamento:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 + 11 + 5x - (0 + x^2 + 5) = -x^2 + 5x + 6 = 0.$$

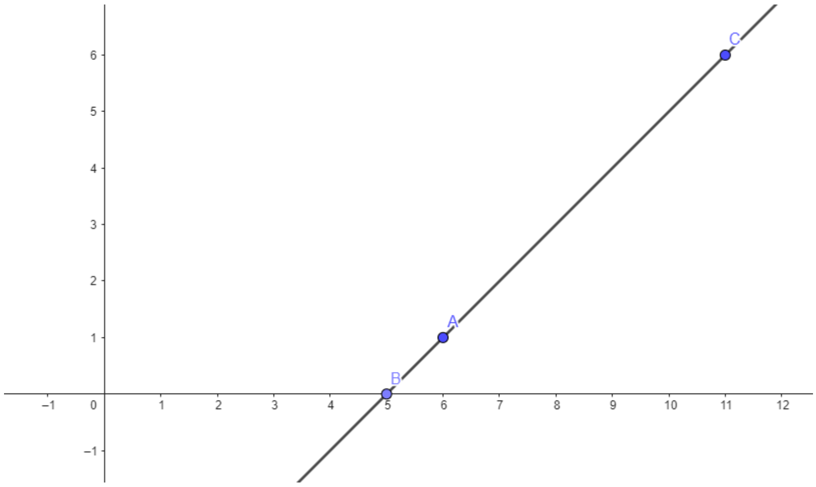
Desse modo, para obter o triângulo ABC, os pontos não podem estar alinhados, daí:

$$-x^2 + 5x + 6 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 6 \,\text{e}\, x \neq -1.$$

Logo, para obtermos o triângulo ABC, devemos ter $x \neq 6$ e $x \neq -1$, isto é,

para $x = 6$, os pontos são $A = (6, 1)$, $B = (5, 0)$ e $C = (11, 6)$ e pertencem a uma única reta, graficamente:

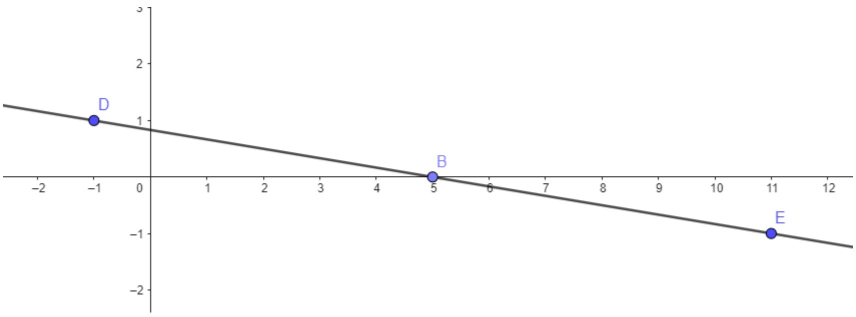
Figura 10 – Condição de Alinhamento: Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

para $x = -1$, os pontos são $A = (-1, 1)$, $B = (5, 0)$ e $C = (11, -1)$ e também pertencem a uma única reta, graficamente:

Figura 11 – Condição de Alinhamento: Exemplo I

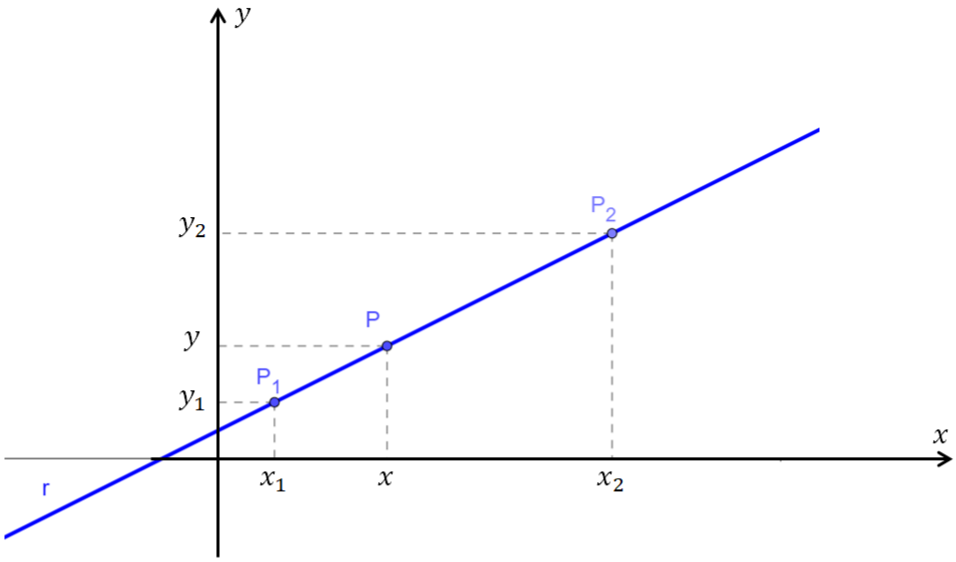


Fonte: Autores, 2024.

8.2 Equação Geral da Reta

Sejam os pontos P_1, P e P_2 pertencentes a reta r, dessa forma, podemos afirmar que eles estão alinhados e usando a condição de alinhamento de três pontos:

Figura 12 – Equação da Reta



Fonte: Autores, 2024.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = xy_1 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0 \tag{8.1}$$

$$\implies (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 = 0. \tag{8.2}$$

Consideremos $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2$, temos pela equação (8.2):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = ax + by + c = 0.$$

Exemplo 25. *Dados os pontos $A = (1, 5)$, $B = (2, -2)$ e $C = (4, 6)$, determine a equação da reta que passa por A e pelo ponto médio de BC.*

Solução: Determinemos inicialmente o ponto médio de BC:

$$\frac{BC}{2} = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (3, 2)$$

Para que a reta passe pelo ponto A e pelo ponto médio de BC, devemos ter

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5x + 3y + 2 - (15 + 2x + y) = 3x + 2y - 13 = 0.$$

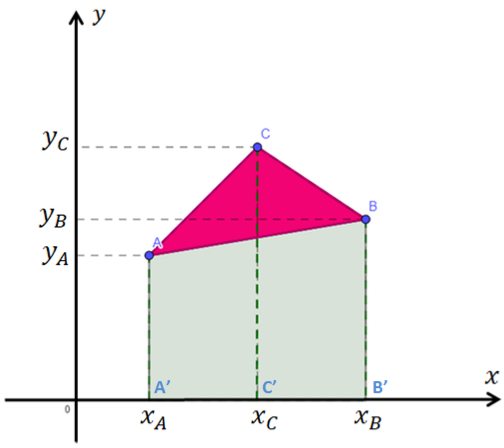
Logo, a equação procurada é

$$3x + 2y - 13 = 0.$$

8.3 Área de Triângulos

Sejam $T_1 : ACC'A'$, $T_2 : BCC'B'$ e $T_3 : ABB'A'$ trapézios. Com A', B' e C' correspondendo a projeção ortogonal no eixo x dos pontos A, B e C, respectivamente.

Figura 13 – Área de Triângulos



Fonte: Autores, 2024.

Note que à área do triângulo ABC pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= T_1 + T_2 - T_3 \\
&= \frac{(y_A + y_C)\cdot(x_C - x_A)}{2} + \frac{(y_B + y_C)\cdot(x_B - x_C)}{2} - \frac{(y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(y_A + y_C)\cdot(x_C - x_A) + (y_B + y_C)\cdot(x_B - x_C) - (y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A)\right] \\
&= \frac{1}{2}[y_A x_C - y_A x_A + y_C x_C - y_C x_A + y_B x_B - y_B x_C + y_C x_B - y_C x_C - y_A x_B \\
&+ y_A x_A - y_B x_B + y_B x_A] \\
&= \frac{1}{2}\left[y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A\right]
\end{aligned}$$

Logo,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A\right]. \tag{8.3}$$

Note que a expressão 8.3 será:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \tag{8.4}$$

Exemplo 26. *Dados os pontos* $A = (2,3)$*,* $B = (0,-1)$ *e* $C = (1,4)$*, vamos determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos* A*,* B *e* C*?*

Solução: Determinemos a área de ABC:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[(-2+3)-(-1+8)\right] \\ &= \frac{1}{2}(1-7) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(-6) \\ &= -3. \end{aligned}$$

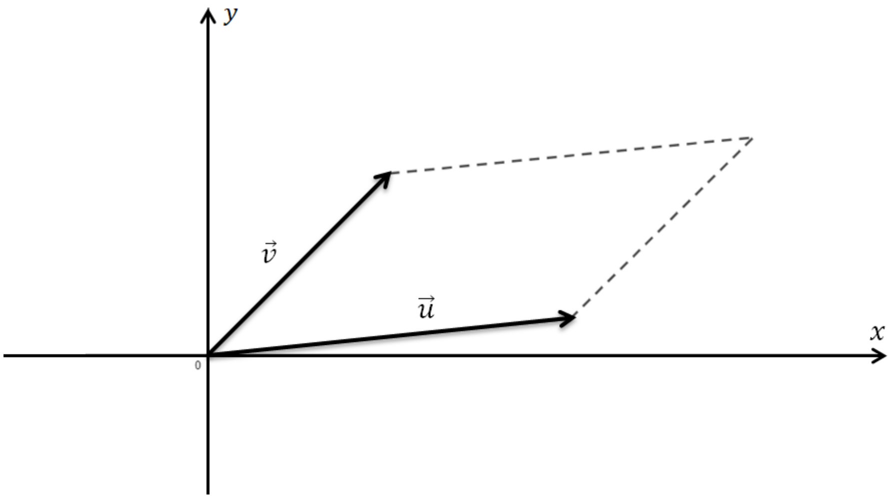
Portanto,

$$S_{ABC} = |-3| = 3.$$

8.4 Área do Paralelogramo

Considere os vetores $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$ representados a seguir:

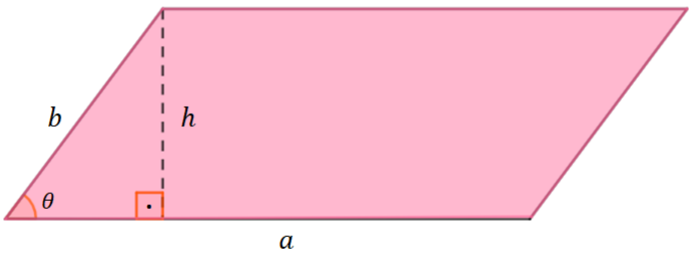
Figura 14 – Área do Paralelogramo I



Fonte: Autores, 2024.

Para determinar a área de um paralelogramo em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, consideraremos um paralelogramo qualquer:

Figura 15 – Área do Paralelogramo II



Fonte: Autores, 2024.

onde,
$h =$ altura
$a =$ base
$\theta =$ ângulo oposto à altura
$S =$área do paralelogramo
Assim,

$$S = a \cdot h \tag{8.5}$$

e ainda,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Substituindo h na equação 8.5:

$$S = a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Usando vetores, temos:

$$\begin{aligned}
||u-v||^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha \\
< u-v, u-v > &= < u,u > + < v,v > -2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha \\
< u,u > - < u,v > - < v,u > + < v,v > &= < u,u > + < v,v > -2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha \\
-2 < u,v > &= -2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha \\
< u,v > &= ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{< u,v >}{||u|| \cdot ||v||} \\
\cos\alpha &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||u|| \cdot ||v||.}
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
S &= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \operatorname{sen}\alpha = ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\
S^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot (\operatorname{sen}\alpha)^2 \\
S^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot (1 - \cos\alpha)^2 \\
S^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \left(1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2}\right) \\
S^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
S^2 &= (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) - (a \cdot c + b \cdot d)^2 \\
S^2 &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2acbd - b^2d^2 \\
S^2 &= a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd \\
S^2 &= (ad - bc)^2 \\
S &= |ad - bc|.
\end{aligned}$$

Note que S corresponde ao determinante: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemplo 27. *Determinemos a área do paralelogramo obtido pelos vetores* $\vec{u} = (7,2)$ *e* $\vec{v} = (3,5)$

Solução: Basta encontrarmos o determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 6 = 29.$$

Assim, a área S do paralelogramo obtidos a partir dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será $S = 29$.

8.5 Volume do Paralelepípedo

Apresentaremos uma breve abordagem sobre produto misto, isso para uma melhor compreensão do cálculo do volume de um paralelepípedo através do determinante.

8.5.1 Produto Misto

Definição 8.1. *Sejam os vetores* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, *e* $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ *pertencentes ao* $\mathbb{R}^3$, *O número* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ *é* ***produto misto*** *de* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$, *onde:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

De fato, aplicando a definição de produto vetorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

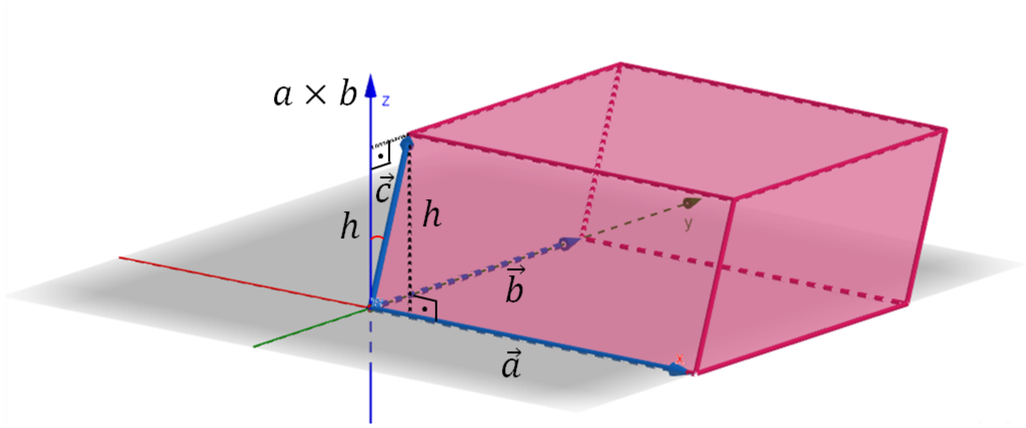
Logo,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) x_3 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3$$

8.5.2 Cálculo do Volume de um Paralelepípedo

Considere três vetores $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, e $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ não coplanares e A_b e h a área da base e a altura do paralelepípedo, respectivamente.

Figura 16 – Volume de um Paralelepípedo



Fonte: Autores, 2024.

Vamos calcular o volume V do paralelepípedo acima:

$$\begin{aligned} V &= A_b \cdot h \\ V &= ||\vec{a} \times \vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot |\cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| \\ V &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \\ V &= |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|. \end{aligned}$$

Exemplo 28. *Determinemos o volume V do paralelepípedo determinado pelo vetores $\vec{u} = (-1, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, -1)$.*

Solução: Para determinarmos o volume do paralelepípedo, será necessário calcular o determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - (-2 + 1) = -2 + 1 = -1.$$

Logo,

$$V = |\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = |-1| = 1.$$

8.6 Regra de Cramer e Aplicação

Apresentaremos a regra de Cramer que é usada na resolução de sistemas lineares, porém, quando consideramos um sistema com muitas equações e incógnitas, o procedimento de resolução acaba sendo muito longo, isso é o que afirma o professor Elon no vídeo (APLICADA, 2008), para ter uma noção, um exemplo apresentado por ele é considerar um sistema com 20 equações e 20 incógnitas, ao resolvê-lo por essa regra serão necessários o cálculo de 21 determinantes, cada um com 20! parcelas, onde cada parcela é o produto de 20 fatores o que daria um cálculo tremendo, que ao ser realizado por um computador que suportasse e fosse programado para resolver o sistema por essa regra, levaria aproximadamente 2700000 anos.

Apesar de ser uma regra interessante na resolução de sistemas lineares, no entanto, não é prática, computacionalmente.

Decidimos apresentar essa regra também por possuir uma importante e interessante aplicação de determinantes no estudo de circuito elétrico.

8.6.1 Regra de Cramer

Considere um sistema com o número de equações e o número de incógnitas são iguais a n:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
$$

Esse sistema pode ser escrito na forma de matrizes:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},
$$

isto é,

$$
A \cdot X = B, \tag{8.6}
$$

donde a matriz dos coeficientes é dada por

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},
$$

a matriz dos termos independentes

$$
B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},
$$

e a matriz dos coeficientes é dada por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Consideremos que $\det A \neq 0$ para a equação 8.6, desse modo, A admite inversa, denotaremos a sua inversa por A^{-1}. Então

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1}A \cdot X &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A) \cdot X &= A^{-1}B \\ I_n \cdot X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Escrevendo na foma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

Veremos no Capítulo 7 na relação de matriz inversa que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}',$$

onde $\bar{A}'$ é dita a matriz adjunta de A.

Assim, pela equação (A.17),

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{\det A}.$$

Perceba que o numerador de x_1 é igual ao determinante da matriz obtida de A, trocando a primeira coluna pela matriz dos termos independentes, o qual denotamos por B. De fato, usando o Teorema de Laplace pela primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1},$$

isto é,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

De modo análogo, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Percebamos que no denominador de x_i temos o determinante da matriz dos coeficientes do $\det A \neq 0$ (veremos no capítulo seguinte), já no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A, substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Esse método pode ser aplicado quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo e o número de equações do sistema for igual ao número de incógnitas.

Inicialmente analisemos se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é diferente de zero:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot(-4)\cdot(-3)+2\cdot(-2)\cdot 1+2\cdot(-2)\cdot(-5)-[(-5)\cdot(-4)\cdot 1+2\cdot 2\cdot(-3) \\
&\quad +(-2)\cdot(-2)\cdot 3] \\
&= 36-4+20-(20+12-12) \\
&= 52-20 \\
&= 32 \neq 0.
\end{aligned}$$

Determinemos o valor do numerador de x, o qual denotaremos por N_x:

$$\begin{aligned}
N_x &= \begin{vmatrix} 8 & 2 & -5 \\ -4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 8\cdot(-4)\cdot(-3)+2\cdot(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-2)\cdot(-5) \\
&\quad -[(-5)\cdot(-4)\cdot(-4)+2\cdot(-4)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-2)\cdot 8] \\
&= 96+16-40-(-80+32+24) \\
&= 72-(-24) \\
&= 72+24 \\
&= 96.
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para x:

$$x = \frac{N_x}{\det A} = \frac{96}{32} = 3.$$

Determinemos o valor do numerador de y, o qual denotaremos por N_y:

$$
\begin{aligned}
N_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} & \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-3) + 8 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) \cdot (-5) - [(-5) \cdot (-4) \cdot 1 \\
&\quad +(-2) \cdot (-4) \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot (-3)] \\
&= 36 - 16 + 40 - (20 + 24 - 48) \\
&= 60 - (-4) \\
&= 40 + 4 \\
&= 64
\end{aligned}
$$

Daí, temos como solução para y:

$$y = \frac{N_y}{\det A} = \frac{64}{32} = 2.$$

Determinemos o valor do numerador de z, o qual denotaremos por N_z:

$$
\begin{aligned}
N_z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 8 - [8 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) \cdot 3] \\
&= 48 - 8 - 32 - (-32 - 16 + 24) \\
&= 8 - (-24) \\
&= 8 + 24 \\
&= 32
\end{aligned}
$$

Daí, temos como solução para z:

$$z = \frac{N_z}{\det A} = \frac{32}{32} = 1$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$.

8.6.2 Aplicação: circuito elétrico

O Circuito elétrico é o conjunto de equipamentos (geradores, resistores, receptores, capacitores, etc.) que promovem a passagem da corrente elétrica ligados por um fio condutor.

O circuito elétrico está presente em grande parte dos equipamentos eletrônicos como celulares e computadores, no entanto, trata-se de circuitos complexos, pois cada peça possui mais de uma função. Algumas peças na placa mãe do computador possuem circuito elétricos:

- Fonte: Serve para levar energia para a placa mãe, processador placa de vídeo, disco rígido, unidades de CD e DVD.
- Processador: Também conhecida de CPU, essa peça é responsável por processar os dados e transformar em informação.
- Resistores: Componentes eletrônicos cuja função principal é limitar o fluxo de cargas elétricas por meio da conversão da energia elétrica em energia térmica.
- Capacitores: Sua principal função é armazenar cargas elétricas em seu interior durante cargas e descargas, essa peça pode fornecer grandes quantidades de energia elétrica.

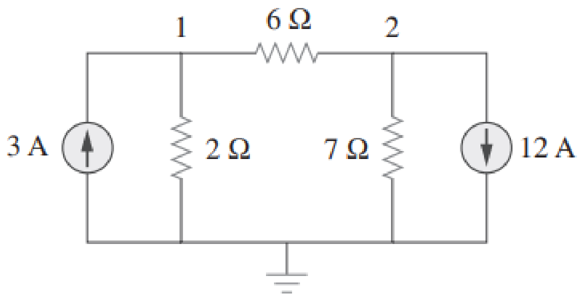
No Ensino Médio são estudados circuitos mais simples e inclusive tem sido um conteúdo bastante presente no Enem. O circuito elétrico possui algumas grandezas, encontramos as definições apresentadas abaixo podem ser encontradas no livro de física (ALEXANDER; SADIKU, 2013), são elas:

- Tensão: é a energia necessária para deslocar uma carga unitária através de um elemento, medida em volts (V).
- Corrente: é o fluxo de carga por unidade de tempo, medido em ampères (A).
- Resistência(R): representa a capacidade de um elemento de resistir ao fluxo de corrente elétrica; ela é medida em ohms (V).

Um dos livros consultados e do qual apresentaremos um exemplo foi (ALEXANDER; SADIKU, 2013) e ainda (BOLDRINI, 1986) e vídeos do youtube como (PROENEM, 2019).

Exemplo 29. *Obtenhamos as tensões nodais no circuito da Figura abaixo:*

Figura 17 – Aplicação Circuito Elétrico I



Sadiku, 2013

Para resolver esse problema será necessário conhecer algumas leis de Kirchhoff e de George OHM:

Leis de Kirchhoff

- A soma das correntes que entram em um nó de um circuito é igual a soma das correntes que saem deste nó.
- A partir de um ponto qualquer de uma malha se percorrermos em um sentido qualquer ao voltarmos ao mesmo ponto, a soma algébrica das quedas de potencial é nula.

Lei de George OHM

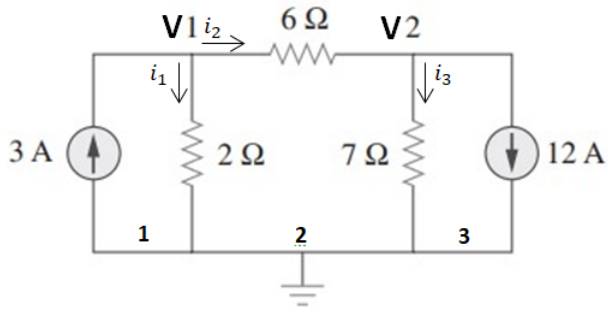
- A tenção é proporcional a corrente elétrica e a constante de proporcionalidade é a resistência, isto é:

$$\frac{v}{i} = R.$$

Essas leis são encontradas no exemplo 58 do livro (BOLDRINI, 1986), página 58.

Solução: Sejam V_1 e V_2 nós, i_1, i_2 e i_3 as correntes e 1, 2 e 3 as malhas do circuito. Adotaremos o sentido das correntes apresentados na imagem a seguir:

Figura 18 – Aplicação Circuito Elétrico II



Sadiku, 2013

De acordo com as leis apresentadas, temos para o nó 1:

$$\begin{aligned} 3 &= i_1 + i_2 \\ 3 &= \frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - V_2}{6} \\ 18 &= 3V_1 + V_1 - V_2 \\ 4v_1 - V_2 &= 18. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Já para o nó 2:

$$\begin{aligned} i_2 &= i_3 + 12 \\ \frac{V_1 - V_2}{6} &= \frac{V_2}{7} + 12 \\ \frac{V_1 - V_2}{6} - \frac{V_2}{7} &= 12 \\ \frac{7V_1 - 7V_2 - 6V_2}{42} &= 12 \\ 7V_1 - 13V_2 &= 504. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Escrevendo as equações A.7 e A.8 na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 504 \end{bmatrix}.$$

Determinaremos inicialmente os denominadores de V_1 e V_2:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -52 + 7 = -45.$$

Denotaremos o numerador de V_1 por N_{V_1}, assim:

$$N_{V_1} = \begin{vmatrix} 18 & -1 \\ 504 & -13 \end{vmatrix} = -234 + 504 = 270.$$

Denotaremos o numerador de V_2 por N_{V_2}, assim:

$$N_{V_2} = \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 7 & 504 \end{vmatrix} = 2016 - 126 = 1890.$$

Portanto, as soluções dos sistema são dadas por

$$V_1 = \frac{N_{V_1}}{-45} = \frac{270}{-45} = -6 \text{ volts}$$

e

$$V_2 = \frac{N_{V_2}}{-45} = \frac{1890}{-45} = -42 \text{ volts}.$$

9 Entrevista Realizada com Professores de Alguns Cursos da UFCG

Esse capítulo foi destinado a abordar sobre a pesquisa realizada com professores da UFCG de cursos como Estatística, Física, Matemática e na área de Engenharia Elétrica, realizamos a pesquisa com um professor do Instituto Federal do Rio Grande do Norte, que possui formação pela UFCG.

A pesquisa foi realizada através de um questionário com 7 questões e utilizamos o Google Forms como principal ferramenta e buscamos identificar se os conhecimentos básicos sobre determinantes serão necessários para os que irão ingressar no curso, qual a importância desse assunto na área e qual a opinião do professor em relação ao ENEM não cobrar esse conteúdo em suas provas.

Para uma melhor apresentação dos resultados obtidos em nossa pesquisa, faremos uma divisão em seções, de modo que em cada uma delas será abordado sobre os resultados obtidos referente a cada curso pesquisado.

9.1 Estatística

Foi destacado na pesquisa que a principal motivação para o estudo dos determinantes é resolução de sistemas lineares.

Segundo o professor pesquisado, os conhecimentos sobre determinantes possui bastante relevância para os ingressantes no curso a partir do segundo semestre, precisando dos conhecimentos básicos sobre esse tema nas disciplinas:

- Teoria das Matrizes e Aplicações;
- Análise de Regressão;
- Modelos Lineares;
- Planejamento de Experimentos.

O professor ressaltou ser contrário a não cobrança dos conhecimentos sobre os determinantes nas questões do ENEM, respondendo a esse questionamento:

Sou contrário.

9.2 Engenharia Elétrica

Realizamos a pesquisa com um professor que atua no Instituto Federal do Rio Grande do Norte e que possui formação em Engenharia Elétrica pela UFCG.

Sendo destacado que a principal motivação para o estudo desse tema é que se utiliza em vários conteúdos de matemática, com diversas aplicações na resolução de problemas práticos área de engenharia.

O professor destacou que o aluno irá precisar dos conhecimentos sobre determinantes a partir do segundo semestre e em 9 disciplinas do curso, no estágio e também na disciplina do TCC. As disciplinas destacadas pelo professor são:

- Máquinas Elétricas;
- Princípios de Comunicações;
- Controle Analógico;
- Controle Digital;
- Sistemas Elétricos de Potência;
- Análise de Sistemas Elétricos de Potência;
- Cálculo Numérico; Eletrônica Analógica;
- Circuitos Elétricos;
- Dentre outros.

Quando questionamos sobre a sua opinião em relação aos determinantes não estar sendo cobrado no ENEM, consideramos importante destacar tal qual foi respondido:

Acredito que o não ensino de determinantes no ensino médio, deve-se ao fato de ser um conteúdo 'mais avançado', no entanto isso não é justificativa suficiente para o não estudo deste conteúdo. As reformas recentes no ensino médio, muito provavelmente, suprimiram conteúdos matemáticos importantes em detrimento de outros sem tanta importância e aplicabilidade para os profissionais de engenharia. O estudo de determinantes no ensino médio não só enriquece o entendimento matemático dos alunos, mas também os prepara para uma ampla gama de aplicações práticas e estudos futuros. Certamente promove o desenvolvimento de habilidades analíticas e lógicas essenciais e estabelece uma base sólida para disciplinas científicas e tecnológicas avançadas, vistas majoritariamente nos cursos superiores de Engenharia, Física, Matemática e Estatística.

9.3 Física

Foi destacado como importante os conhecimentos sobre determinantes tanto para profissionais da área como para alunos do curso física.

A principal motivação ressaltada foi a importância nos conhecimentos apresentados na disciplina de Física Quântica 1 do sexto período, onde esse conhecimento será necessário para acompanhar o formalismo matemático, cujos objetos de estudo são operadores matriciais.

As disciplinas do curso em que o aluno irá precisar dos conhecimentos sobre determinantes são:

- Métodos Matemáticos;
- Mecânica Quântica.

Por fim,foi destacado que ausência dos determinantes nas provas do ENEM é considerado prejudicial na aprendizagem do estudante do curso superior de física, sendo respondido pelo professor:

Um prejudicial ao processo de aprendizagem do estudante para o curso superior de Física.

9.4 Matemática

De acordo com o professor pesquisado os conhecimentos sobre determinantes possuem grande importância e serão necessários aos alunos a partir do segundo semestre e também para os profissionais da área.

Foi ressaltada como principal motivação que os determinantes possuem diversas aplicações na Matemática, dentre elas:

- Álgebra Linear;
- Geometria Analítica;
- Equações Diferenciais;
- Teoria de Grupos;
- Teoria de Anéis.

Como também em outras áreas do conhecimento que precisam do estudo de matrizes.

Um informação importante é que para o curso de bacharelado em matemática os determinantes são usados em praticamente todas as disciplinas.

Destacamos a opinião do professor pesquisado em relação aos determinantes não estar sendo cobrado nas provas do ENEM e consequentemente não estar sendo abordado no ensino médio:

O fato do conceito de determinante, bem como outros conceitos básicos importantes, não estar sendo estudado no ensino médio é um absurdo! Devido à falta de estudo desses conceitos, a formação básica dos alunos está comprometida, e isso está prejudicando, cada vez mais, o desempenho deles nas disciplinas da área de ciências exatas que devem cursar no ensino superior.

9.5 Considerações

Baseados na pesquisa realizada, vimos que os conhecimentos sobre determinantes possuem importante influência em nos cursos com Estatística, Engenharia Elétrica, Física e Matemática. Isso é percebido nas diversas disciplinas que fazem parte da grade dos cursos em que serão necessários o estudo sobre os determinantes.

Todos os professores pesquisados foram contrários aos conhecimentos sobre os determinantes não estarem sendo cobrados nas provas do ENEM e consequentemente estarem saindo do ensino médio.

Tudo isso reforça quanto que nossa pesquisa tem muito a contribuir para os que pretendem ingressar nos cursos pesquisados e que talvez não possuam bagagem suficiente sobre os determinantes para dar prosseguimento aos estudos nas diversas disciplinas acima citadas através da nossa eletiva,como proposta de itinerário formativo.

10 Conclusões

Ao término desta pesquisa conseguimos importantes resultados que servirão de aprendizagem e reflexão sobre os impactos no currículo de Matemática com a substituição dos antigos vestibulares pelo ENEM, que inclusive se tornou a principal forma de ingresso as universidades de todo país durante o ano de 2009. Tentando reparar o desfalque de alguns conteúdos que deixaram de ser cobrados com o surgimento do ENEM, elaboramos uma proposta de itinerário formativo por meio de uma eletiva intitulada: Explorando Determinantes Através da Teoria e Aplicações.

A escolha do tema não foi aleatória, em verdade, o assunto de determinantes não consta na Matriz de Referência do ENEM e também não é encontrado na BNCC, mas de acordo com a pesquisa (através da ferramenta google forms) que realizamos com professores de alguns cursos da UFCG, constatamos que calouros de cursos como engenharia Elétrica, Estatística, Física, Computação e Matemática, irão precisar dos conhecimentos sobre determinantes durante o seu curso, desse modo, buscamos contribuir para a formação futura desses alunos, que por sua vez estudaram de forma superficial ou não viram o conteúdo de Determinantes no Ensino Médio. Infelizmente, devido à falta de tempo não conseguimos aplicar a eletiva proposta, no entanto, faremos o possível para uma aplicação futura.

Fizemos a comparação e percebemos que alguns dos conteúdos cobrados no programa do vestibular da UFCG de 2010 (acreditamos não diferir muito de anos anteriores) não contam na Matriz de Referência do ENEM e isso reflete diretamente no que tem sido ensinado nas salas de aula e também no que tem sido abordado em livros didáticos, até porque não faz sentido para o professor ensinar aquilo que não é cobrado no ENEM, pois acaba sendo desmotivador para o alunado que pretende ao final do Ensino Médio se submeter a esse exame. Analisando documentos oficiais que orientam o currículo antes e depois dessas transição do vestibular para o ENEM, apresentamos uma linha do tempo para situar o leitor dando ênfase aos anos da criação de importantes documentos que norteavam ou norteiam o currículo, fatos importantes como o surgimento do ENEM, criação da UFCG, seus vestibulares, ano de aderência ao ENEM e ao SISU.

A LDB, lei que rege a nossa educação, trata do Ensino Médio como a consolidação e o aprofundamento do Ensino Fundamental, creditamos esse ser um dos motivos que levam muitos conteúdos ensinados no Ensino Fundamental serem bastante frequentes no ENEM. Em virtude disso, realizamos uma pesquisa com as questões do ENEM durante os anos de 2020, 2021, 2022 e 2023, onde utilizamos alguns critérios que foram apresentados no trabalho para escolha do conteúdo/questão e constatamos que dentre os conteúdos que mais caem no ENEM temos Razão/Proporção, Geometria Espacial, Análise de Tabelas/Gráficos, Aritmética e Matemática Financeira. Outros conteúdos deixaram de ser cobrados, dentre esses temos Cônicas, Números Complexos, Geometria Analítica e Determinantes o qual daremos destaque em nosso trabalho, pois desde a criação do ENEM, não temos registros de questões que cobraram esse assunto, pois apesar de nossa pesquisa ter sido realizada durante os anos de 2020 a 2023, encontramos dissertações do PROFMAT que realizaram essa pesquisa em anos anteriores, apesar de são destacarem os critérios utilizados para essa escolha do conteúdo/questão.

Fizemos inicialmente uma abordagem direcionada para professores de Matemática sobre determinantes, que não é encontrada em livros didáticos, pois os livros atuais do Ensino Médio se limitam a determinantes de matrizes de ordens até três. Em nosso trabalho, destacamos a definição geral de determinantes por permutação, justificando inclusive as definições encontradas em livros didáticos, abordamos cuidadosamente a construção da definição de determinantes e a aparição dos determinantes em soluções de sistemas lineares, como também suas propriedades, regras e teoremas que facilitam a resolução de alguns determinantes, como também suas respectivas demonstrações necessárias para o aprofundamento sobre o estudo desse tema.

Apresentamos também aplicações importantes sobre determinantes, as quais consideramos acessíveis aos alunos do Ensino Médio como uma forma de motivá-los a estudar essa temática. Constatamos que não existe uma receita para a resolução de um determinante, existem na verdade ferramentas que podem facilitar os cálculos de alguns determinantes, no entanto, dependendo da ordem da matriz considerada para o cálculo do determinante, sua resolução pode ser muito trabalhosa e talvez só realizada por computadores.

Mais adiante, destacamos as etapas da eletiva destinada a alunos do Ensino Médio que pretendem ingressar em alguns cursos universitários em que os conhecimentos sobre determinantes são imprescindíveis. Tentamos trazer uma abordagem acessível aos alunos de modo que compreendam de forma clara e objetiva os conhecimentos sobre esse tema, buscando que o aluno obtenha a compreensão de conceitos, definições, exemplos e aplicações, tentando não focar nas demonstrações dos resultados.

Consideramos nossa pesquisa muito rica em informações, pois além estarmos baseados em documentos oficiais como Constituição Federal, LDB, PCN's, Matriz de Referência do ENEM e BNCC, realizamos pesquisas as quais consideramos bastante pertinentes ao tema. Esperamos contribuir para que as discussões sobre os conteúdos que tem saído do Ensino Médio, não fique apenas no senso comum e que passemos a refletir se as mudanças no currículo de Matemática ao longo do tempo têm contribuído de forma positiva para o ensino e aprendizagem da Matemática e a educação de modo geral.

Quando tratamos sobre o ensino dos determinantes, percebemos que aos poucos esse tema tem saído do Ensino Médio, isso é percebido nos próprios livros didáticos, podemos justificar esse fato por sua não cobrança em questões do ENEM, inclusive desde a sua criação, mas consideramos que essa mudança tem causado um desfalque no currículo, pois como faz um aluno do curso de engenharia elétrica que não possui conhecimentos sobre determinantes? Apesar de muitas vezes os conteúdos não possuírem uma aplicabilidade direta em nossas vidas, isso não significa que o conhecimento é inútil, podemos ressaltar a aplicação acima sobre os determinantes em circuito elétrico encontrados em equipamentos eletrônicos.

Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos [recurso eletrônico]*. [S.l.]: AMGH, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 128 e 152.

APLICADA, I. M. P. e. *PAPMEM - Julho de 2008 - Matrizes e Determinantes*. 2008. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=OUF2NqPXC_I>. Citado 2 vezes nas páginas 122 e 175.

BEZERRA, M. J. *Curso de Matemática*. [S.l.]: Companhia Nacional, 1977. Citado 4 vezes nas páginas 94, 112, 173 e 183.

BOLDRINI, J. L. e. a. *Álgebra Linear*. [S.l.]: Harbra, 1986. ISBN 9788529402024. Citado 7 vezes nas páginas 58, 94, 98, 128, 129, 152 e 173.

BRASIL. *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988*. República Federativa do Brasil, 1988. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm>. Citado na página 18.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.

BRASIL. *Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. [S.l.]: MEC, 1997. Citado na página 19.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN). Bases Legais*. MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. [S.l.]: MEC, 2000. Citado na página 21.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: MEC, 2017. Citado na página 28.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio*. [S.l.]: MEC, 2018. Citado na página 28.

COELHO, F. U. *Um Curso de Álgebra Linear*. [S.l.]: Edusp, 2013. ISBN 9788531405945. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 84.

COMPROV. *O que é o vestibular da UFCG*. 2005. Disponível em: <https://arquivo.comprov.ufcg.edu.br/index.php?option=com_content&view=article&id=1&Itemid=2>. Citado na página 22.

DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática em contextos: Trigonometria e sistemas lineares*. [S.l.]: Ática, 2020. Citado na página 58.

FILGUEIRAS, C. W. S. *A Importância dos Conteúdos de Matemática Pouco Cobrados no enem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Cariri, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 191.

IEZZI, G. *Fundamentos de matematica elementar, 4 sequencias, matrizes, determinantes, sistemas*: seque ncias, matrizes, determinantes, sistemas. [S.l.]: Atual, 2006. 232 p. ISBN 9788535704587. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 157.

IEZZI, G. e. a. *Matematica: volume unico*. [S.l.]: Atual, 1997. Citado na página 58.

IME, U. *Matrizes em Ação*. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~afisher/ps/MAT2116/Books/PoolePortuguesCap3.pdf>. Citado na página 84.

LANG, S. *Algebra Linear*. [S.l.]: Editôra Edgard Blücher LTDA, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 98, 99, 100 e 104.

LIPSCHUTZ, S. *Algebra Linear*. [S.l.]: Schaum Publishing Co., 1972. Citado na página 84.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. *Algebra Linear - Coleção Schaum [recurso eletrônico]*. [S.l.]: Bookman, 2011. Citado na página 70.

MADEIRA, R. *ITA 2022- Corridas de Bicicletas e o Teorema de Bézout*. 2017. Disponível em: <https://madematica.blogspot.com/2017/08/ita-2002-corrida-de-bicicletas-e-o.html#:~:text=UmapermutaÃğÃčomudadeclasse,doisquaisquerdeseuselementos>. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 158.

MEC. *Novo Ensino Médio - perguntas e repostas*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/publicacoes-para-professores/30000-uncategorised/40361-novo-ensino-medio-duvidas#:~:text=OsitinerÃąriosformativossÃčoo,poderÃčoescolhernoensinomÃľdio.> Citado na página 35.

MENEZES, S. B. de. *Uma Análise dos Conteúdos de Matemática em Desuso nas Provas do Exame Nacional do Ensino (ENEM)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 47, 48 e 191.

MORGADO, A. C. *Matemática Discreta*. [S.l.]: SBM, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 158.

PROENEM. *RESUMO DE FÍSICA: CIRCUITOS ELÉTRICOS | Prof. Bruno Rinaldi*. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tMGdMAtLWIY>. Citado 2 vezes nas páginas 128 e 152.

RONCHI, S. *Enciclopédia Ilustrativa para Educação básica*. [S.l.]: Tese. Citado 2 vezes nas páginas 112 e 183.

SOUZA, J. R. d.; GARCIA, J. d. S. R. *Contato Matemática*. [S.l.]: FTD, 2016. Citado na página 58.

STEINBRUCH, A. *Álgebra Linear e Geometria Analítica and Winterle, Paulo*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 158.

TEODISTA, M. com P. C. *157 - Enem 2021- Matemática - Matrizes*. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=OemhQ-l-Szs>. Citado na página 48.

Apêndices

APÊNDICE A – Sugestão de Eletiva para o Aprofundamento de Determinantes

A.1 Sugestão de Eletiva

Título: Explorando Determinantes Através da Teoria e Aplicações

Apresentação: Esse curso pretende proporcionar uma abordagem abrangente e prática para o estudo de Determinantes, não encontrados na abordagem de livros didáticos, permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida desse conceito matemático e suas diversas aplicações em diferentes áreas. Essa eletiva é um recorte da nossa dissertação de mestrado intitulada: Uma Análise Curricular do Ensino Médio Antes e Depois do ENEM e uma Contribuição com Itinerários Formativos sobre Determinantes (PROFMAT-UFCG), podendo ser consultada para mais informações e respaldo sobre o que será abordado na eletiva.

Apresentaremos à seguir as etapas do curso, as quais serão abordadas os conteúdo sobre determinantes:

- **Etapa 1**: Discussão

  Inicialmente será organizado um momento de discussão com a intensão de identificar se os alunos estudaram determinantes no Ensino Médio e falar sobre sua importância em diversas áreas e cursos universitários como física, matemática, estatística e engenharia elétrica, tentando convencê-los a estudar esse tema devido a sua cobrança em diversas disciplinas dos cursos:

  - Estatística
    - Teoria das Matrizes e Aplicações;
    - Análise de Regressão;
    - Modelos Lineares;
    - Planejamento de Experimentos.
  - Engenharia Elétrica
    - Máquinas Elétricas;
    - Princípios de Comunicações;
    - Controle Analógico;
    - Controle Digital;

    * Sistemas Elétricos de Potência;
    * Análise de Sistemas Elétricos de Potência;
    * Cálculo Numérico; Eletrônica Analógica;
    * Circuitos Elétricos;
    * Dentre outros.
  - Física
    * Métodos Matemáticos;
    * Mecânica Quântica.
  - Matemática
    * Álgebra Linear;
    * Geometria Analítica;
    * Equações Diferenciais;
    * Teoria de Grupos;
    * Teoria de Anéis.

  Tópicos que consideramos importante destacar nessa etapa:

  - Falar sobre a ausência dos determinantes nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ver apêndice);
  - Destacar sua importância em algumas disciplinas de cursos como física, matemática, estatística, computação, engenharia elétrica e dentre outros;
  - Destacar que esse tema possui importantes aplicações;
  - Deixar claro que o apresentado durante o curso será uma abordagem diferente da encontrada em livros didáticos e consequentemente no que tem sido ensinado no ensino médio.

- **Etapa 2**: Aplicações

  Apresentaremos nessa etapa algumas aplicações sobre determinantes como forma de motivar os alunos que pretendem ingressar em alguns cursos universitários a estudarem sobre esse tema. Buscamos abordar aplicações acessíveis a esse nível de ensino e que serão úteis para estudos posteriores. São elas:

  - **Aplicação 1**: Condição de Alinhamento de Três Pontos;
  - **Aplicação 2**: Equação Geral da Reta;
  - **Aplicação 3**: Área de Triângulos;
  - **Aplicação 4**: Área do Paralelogramo;

  - **Aplicação 5**:

    Circuito Elétrico (Sugerimos que essa aplicação seja abordada por um professor de física, como uma forma de relacionar as disciplinas através da transdisciplinaridade).

- **Etapa 3**: Definição de determinantes por permutação

  Desenvolvemos uma construção da definição de determinantes para matrizes de ordem qualquer e por meio dela justificaremos as definições de determinantes para matrizes de ordem 1, 2 e 3 apresentada em livros didáticos.

  - Definição de determinantes de ordem 1, 2 e 3;
  - Regras de Sarrus e diagrama;
  - Definição de permutação e número de inversões;
  - Construção da definição de determinantes por permutação;
  - Definição de determinante para uma matriz de ordem qualquer usando permutação que não é encontrada em livros didáticos por ser mais geral.

- **Etapa 4**: Propriedades de determinantes

  Apresentaremos algumas propriedades cruciais para o determinante de matrizes grandes, inclusive as estudadas no ensino superior, em que o desenvolvimento do cálculo é realizado por computadores e ao aplicar alguma das propriedades, reduziremos o trabalho operacional do cálculo do determinante. As demonstrações dessas propriedades são encontradas em nossa dissertação.

  - Propriedade 1: Linha nula;
  - Propriedade 2: Matriz transposta;
  - Propriedade 3: Multiplicação de uma linha por uma constante;
  - Propriedade 4: Trocas de linhas paralelas;
  - Propriedade 5: Linhas paralelas iguais;
  - Propriedade 6: Soma de linhas;
  - Propriedade 7: O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante (Teorema de JACOBI);
  - Propriedade 8: Filas paralelas proporcionais.

- **Etapa 5**: Resultados importantes

  Os resultados apresentados serão úteis na redução da ordem do determinante em uma unidade e consequentemente do seu cálculo. O Teorema de Laplace também é utilizado em alguns livros como a definição de determinantes, onde na verdade é uma consequência da definição.

- Teorema de Laplace;
- Regra de Chió.

- **Etapa 6**: Regra de Cramer e Matriz inversa

  Apresentaremos a regra de Cramer e uma forma diferente para calcular a inversa de uma matriz, baseados em um teorema que trata do cálculo da matriz inversa através da adjunta da matriz.

  - Regra de Cramer;
  - Cálculo de matriz inversa por determinantes.

- **Etapa 7**: GEOGEBRA E ALINHAMENTO DE PONTOS

  Elaborar um produto final desenvolvido com os alunos, podendo utilizar umas das aplicações apresentadas durante o curso, uma sugestão é a condição de alinhamento de três pontos.

Finalidade: Apresentar os conhecimentos sobre determinantes, realizando a construção dos resultados, ajudando-os a compreender os conceitos e aplicações apresentados ao longo do curso e contribuindo para a formação daqueles que pretendem ingressar em cursos que sejam necessários os conhecimentos básicos sobre determinantes.

A.2 Abordagem detalhada da Eletiva

- **ETAPA 1**: DISCUSSÃO

  Duração: 50 minutos

  Nessa etapa faremos um levantamento com os alunos para saber quais estudaram determinantes no ensino médio, se já ouviram falar em aplicações desse tema e quais os cursos superiores pretendem ingressar. Aproveitaremos a oportunidade para uma discussão sobre como tem sido trabalhado os determinantes nas salas de aula devido a sua não cobrança no Exame Nacional do Ensino Médio desde a sua criação. Destacaremos que muitos são os cursos universitários os quais são necessários o estudo sobre determinantes, por exemplo: física, matemática, estatística, computação, engenharia elétrica e dentre outros. Falar sobre qual o objetivo do curso e ressaltar que não é encontrado em livros didáticos o que será abordado na eletiva.

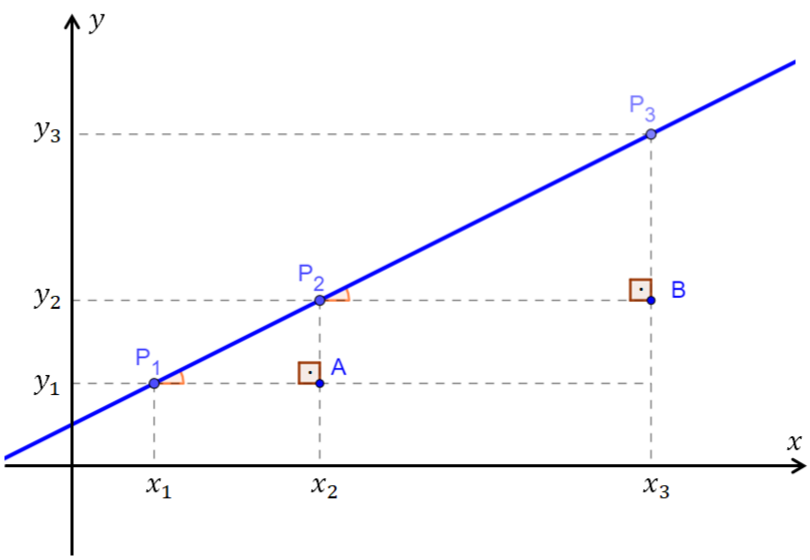
- **ETAPA 2**: APLICAÇÕES

  1. **Condição de Alinhamento de Três Pontos**

     Duração: 50 minutos

     Consideremos três pontos alinhados: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ representados acima. Consideremos também os pontos $A = (x_2, y_1)$ e $B = (x_3, y_2)$:

Figura 19 – Condição de Alinhamento de Três pontos



Fonte: Autores, 2024.

Percebamos que os triângulos AP_1P_2 e BP_2P_3 são retângulos em A e B, respectivamente.

Temos,

$$\angle A\hat{P}_1P_2 = \angle B\hat{P}_2P_3,$$

pois as retas suporte dos segmentos AP_1 e BP_2 são paralelas, desse modo, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos

$$\angle P_1\hat{P}_2A = \angle P_2\hat{P}_3B.$$

Assim os triângulos AP_1P_2 e BP_2P_3 são semelhantes:

$$\begin{aligned}
& \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\
\Longrightarrow \quad & (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_2) = (y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x_1) \\
\Longrightarrow \quad & y_2x_3 - y_2x_2 - y_1x_3 + y_1x_2 = y_3x_2 - y_3x_1 - y_2x_2 + y_2x_1 \\
\Longrightarrow \quad & y_2x_3 - y_2x_2 - y_1x_3 + y_1x_2 - y_3x_2 + y_3x_1 + y2x_2 - y2x_1 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & y_2x_3 - y_1x_3 + y_1x_2 - y_3x_2 + y_3x_1 - y_2x_1 = 0.
\end{aligned}$$

A expressão acima será o cálculo do determinante, que será visto posteriormente.

Observe:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \\ x3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = y_2x_1 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 - y_1x_2 = 0.$$

Exemplo 30. *Sejam os pontos* $A = (0, 5)$, $B = (1, 3)$ *e* $C = (2, 1)$. *Verifique se os pontos dados são colineares.*

Solução: Para que os pontos A, B e C estejam alinhados:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 10 + 1 - (6 + 0 + 5) = 11 - 11 = 0.$$

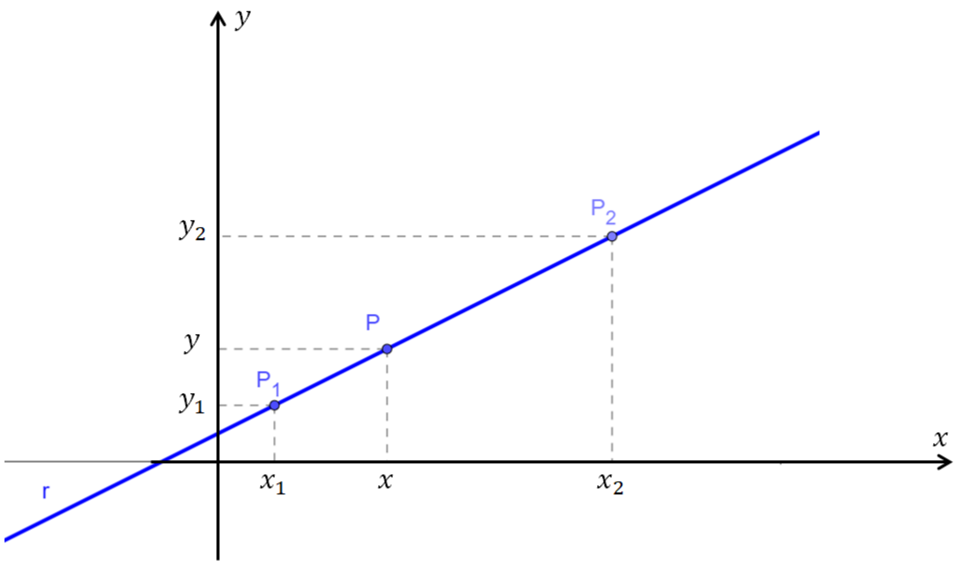
Portanto, podemos afirmar que os pontos A, B e C são colineares, pois $\det = 0$.

2. **Equação Geral da Reta**

Duração: 50 minutos

Sejam os pontos P_1, P e P_2 pertencentes a reta r, dessa forma, podemos afirmar que os mesmos estão alinhados e usando a condição de alinhamento de três pontos:

Figura 20 – Equação Geral da Reta



Fonte: Autores, 2024.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = xy_1 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0$$

$$\Longrightarrow (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 = 0. \tag{A.1}$$

Consideremos $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2$, temos pela equação A.1:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = ax + by + c = 0.$$

Exemplo 31. *Dados os pontos* $A = (1, 5)$ *e* $B = (2, -2)$*, determinemos a equação da reta que passe por esses pontos.*

Solução: Para que a reta passe pelo ponto A e pelo ponto B, devemos ter

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5x + 2y - 2 - (10 - 2x + y) = 7x + y - 12 = 0.$$

Logo, a equação procurada é

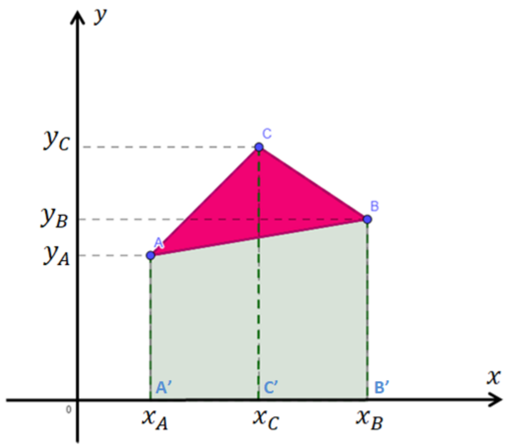
$$7x + y - 12 = 0.$$

3. **Área de Triângulos**

   Duração: 50 minutos

   Sejam $T_1 : ACC'A'$, $T_2 : BCC'B'$ e $T_3 : ABB'A'$ trapézios. Com A', B' e C' correspondendo a projeção ortogonal no eixo x dos pontos A, B e C, respectivamente.

Figura 21 – Área de Triângulos



Fonte: Autores, 2024.

Notemos que a área do triângulo ABC pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= T_1 + T_2 - T_3 \\
&= \frac{(y_A + y_C)\cdot(x_C - x_A)}{2} + \frac{(y_B + y_C)\cdot(x_B - x_C)}{2} - \frac{(y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(y_A + y_C)\cdot(x_C - x_A) + (y_B + y_C)\cdot(x_B - x_C) - (y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A)\right] \\
&= \frac{1}{2}[y_A x_C - y_A x_A + y_C x_C - y_C x_A + y_B x_B - y_B x_C + y_C x_B - y_C x_C - y_A x_B \\
&+ y_A x_A - y_B x_B + y_B x_A] \\
&= \frac{1}{2}\left|y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A\right|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A|. \tag{A.2}$$

Notemos que a expressão da equação A.2 equivale ao cálculo do determinante a seguir:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \tag{A.3}$$

Exemplo 32. *Dados os pontos $A = (2, 3)$, $B = (0, -1)$ e $C = (1, 4)$, qual a área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C?*

Solução: De acordo com a equação A.2, temos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(-2+3) - (-1+8)] = \frac{1}{2}(1-7) = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3.$$

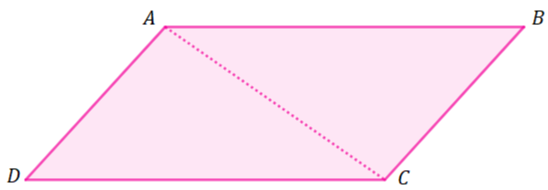
Portanto, $S_{ABC} = |-3| = 3$.

4. **Área do paralelogramo**

   Duração: 50 minutos

   Consideremos o paralelogramo $ABCD$ abaixo:

Figura 22 – Área do Paralelogramo



Fonte: Autores, 2024.

Percebamos que o paralelogramo é uma figura formada por 2 triângulos ACD e ABC, assim a área do paralelogramo será o dobro da área do triângulo. E de acordo com a equação A.2, a área do trapézio será:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}[y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A] \tag{A.4}$$

$$S_{ABCD} = |y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A|. \tag{A.5}$$

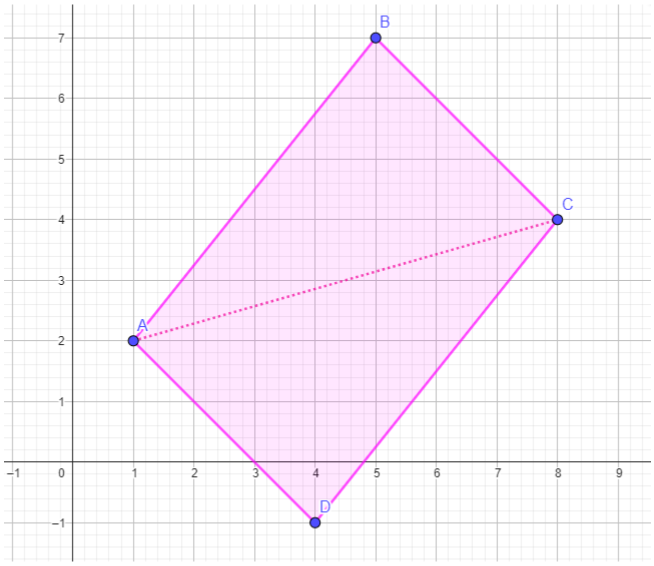
Exemplo 33. *Determine a área de do paralelogramo formado pelos vértices $A = (1, 2)$, $B = (5, 7)$, $C = (8, 4)$ e $D = (4, -1)$.*

Solução: Para determinar a área do paralelogramo, consideraremos inicialmente:

$$
\begin{aligned}
A &= (x_1, y_1) = (1, 2) \\
B &= (x_2, y_2) = (5, 7) \\
C &= (x_3, y_3) = (8, 4) \\
D &= (x_4, y_4) = (4, -1).
\end{aligned}
$$

Observe a imagem do paralelogramo representado abaixo:

Figura 23 – Área do Paralelogramo I



Fonte: Autores, 2024.

Consideremos a matriz formada pelos vértices do triângulo ABC:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.6}
$$

A área do triângulo formado pelos vértices A, B e C será metade do módulo do determinante da matriz A.6:

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\left|7+16+20-56-4-10\right| \\
&= \frac{1}{2}|43-70| \\
&= \frac{1}{2}|-27| \\
&= \frac{27}{2}.
\end{aligned}
$$

A área do paralelogramo será o dobro de S_{ABC}, isto é,

$$S_{ABCD} = 27.$$

5. **Aplicação: circuito elétrico**

   Duração: 1 hora e 40 minutos

   - Fonte: Serve para levar energia para a placa mãe, processador placa de vídeo, disco rígido, unidades de CD e DVD.
   - Processador: Também conhecida de CPU, essa peça é responsável por processar os dados e transformar em informação.
   - Resistores: Componentes eletrônicos cuja função principal é limitar o fluxo de cargas elétricas por meio da conversão da energia elétrica em energia térmica.
   - Capacitores: Sua principal função é armazenar cargas elétricas em seu interior durante cargas e descargas, essa peça pode fornecer grandes quantidades de energia elétrica.

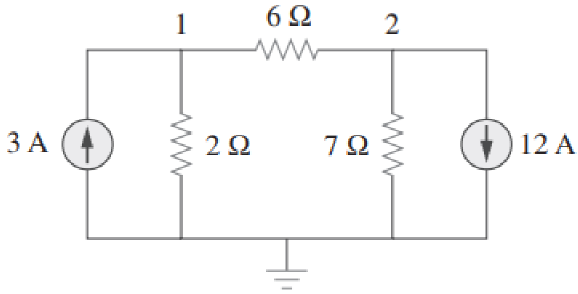
   No Ensino Médio são estudados circuitos mais simples e inclusive tem sido um conteúdo bastante presente no Enem. O circuito elétrico possui algumas grandezas, são elas:

   - Tensão: é a energia necessária para deslocar uma carga unitária através de um elemento, medida em volts (V).
   - Corrente: é o fluxo de carga por unidade de Duração, medido em ampères (A).
   - Resistência (R): representa a capacidade de um elemento resistir ao fluxo de corrente elétrica; ela é medida em ohms (V).

   Um dos livros consultados e do qual apresentaremos um exemplo foi (ALEXANDER; SADIKU, 2013) e ainda (BOLDRINI, 1986) e vídeos do youtube como (PROENEM, 2019).

Exemplo 34. *Obtenhamos as tensões nodais no circuito da Figura abaixo:*

Figura 24 – Circuito Elétrico: Exemplo I



Sadiku, 2013

Para resolver esse problema será necessário conhecer algumas leis de Kirchhoff e de George OHM:

Leis de Kirchhoff

- A soma das correntes que entram em um nó de um circuito é igual a soma das correntes que saem deste nó.
- A partir de um ponto qualquer de uma malha se percorrermos em um sentido qualquer ao voltarmos ao mesmo ponto, a soma algébrica das quedas de potencial é nula.

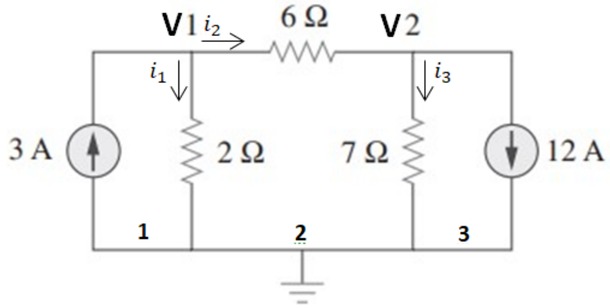
Lei de George OHM

- A tenção é proporcional a corrente elétrica e a constante de proporcionalidade é a resistência, isto é:

$$\frac{v}{i} = R.$$

Solução: Sejam V_1 e V_2 nós, i_1, i_2 e i_3 as correntes e 1, 2 e 3 as malhas do circuito. Adotaremos o sentido das correntes apresentados na imagem a seguir:

Figura 25 – Circuito Elétrico: Exemplo I



Sadiku, 2013

De acordo com as leis apresentadas, temos para o nó 1:

$$\begin{aligned} 3 &= i_1 + i_2 \\ 3 &= \frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - V_2}{6} \\ 18 &= 3V_1 + V_1 - V_2 \\ 4v_1 - V_2 &= 18. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Já para o nó 2:

$$\begin{aligned} i_2 &= i_3 + 12 \\ \frac{V_1 - V_2}{6} &= \frac{V_2}{7} + 12 \\ \frac{V_1 - V_2}{6} - \frac{V_2}{7} &= 12 \\ \frac{7V_1 - 7V_2 - 6V_2}{42} &= 12 \\ 7V_1 - 13V_2 &= 504. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Escrevendo as equações A.7 e A.8 na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 504 \end{bmatrix}.$$

Determinaremos inicialmente os denominadores de V_1 e V_2:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -52 + 7 = -45.$$

Denotaremos o numerador de V_1 por N_{V_1}, assim:

$$N_{V_1} = \begin{vmatrix} 18 & -1 \\ 504 & -13 \end{vmatrix} = -234 + 504 = 270.$$

Denotaremos o numerador de V_2 por N_{V_2}, assim:

$$N_{V_2} = \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 7 & 504 \end{vmatrix} = 2016 - 126 = 1890.$$

Portanto, as soluções dos sistema são dadas por

$$V_1 = \frac{N_{V_1}}{-45} = \frac{270}{-45} = -6 \text{ volts}$$

e

$$V_2 = \frac{N_{V_2}}{-45} = \frac{1890}{-45} = -42 \text{ volts}.$$

- **ETAPA 3**: DEFINIÇÃO DE DETERMINANTES POR PERMUTAÇÃO

Duração: 1 hora e 40 minutos

1. Determinante de uma matriz de ordem 1:

$$\det[a] = |a| = a.$$

2. Determinante de uma matriz de ordem 2:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Determinante de uma matriz de ordem 3:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{A.9}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{A.10}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{A.11}$$

a) Regra de Sarrus

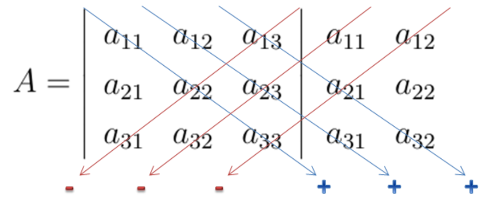
Consideramos importante apresentar essa regra por não ser fácil a memorização da definição de determinante para matrizes de ordem 3.

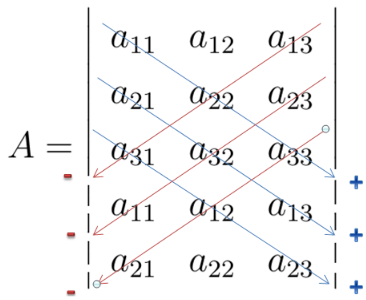
Consideremos uma matriz A de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Para aplicar a regra de Sarrus, desenvolveremos as etapas abaixo:

i. Repetiremos as duas primeiras colunas à direita da terceira coluna da matriz, ou as duas primeiras linhas abaixo da terceira linha da matriz.
Observemos as representações abaixo:





ii. Os termos precedidos com o sinal positivos serão obtidos multiplicando os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal (representadas em azul), isto é, $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$ e $a_{13}a_{21}a_{32}$.

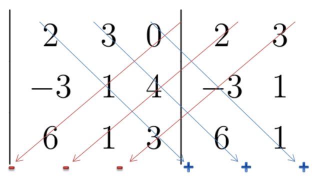
iii. Os termos precedidos com o sinal negativo serão obtidos multiplicando os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária (representadas em vermelho), isto é, $-a_{13}a_{22}a_{31}$; $-a_{11}a_{23}a_{32}$ e $-a_{12}a_{21}a_{33}$.

iv. Por fim, somam-se os 6 produtos encontrados nos itens 2 e 3 acima, dessa forma

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo 35. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, *determine o* $\det A$ *utilizando o método de Sarrus.*

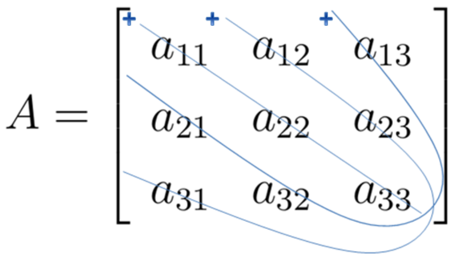
Solução: Consideremos a imagem a seguir:



Temos,

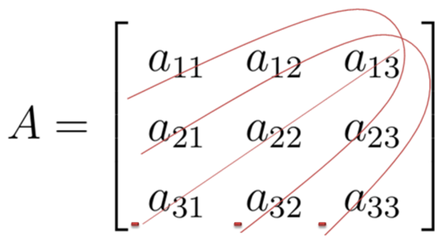
$\det A = 2{\cdot}1{\cdot}3{+}3{\cdot}4{\cdot}6{+}0{\cdot}(-3){\cdot}1{-}0{\cdot}1{\cdot}6{-}2{\cdot}4{\cdot}1{-}3{\cdot}(-3){\cdot}36{+}72{-}8{+}27 = 97.$

b) Regra Através de Diagrama
Uma outra forma de memorizar a definição de determinantes para matrizes de ordem 3 é com o uso dos diagramas, observemos a representação abaixo:



Para cada uma das três setas acima, teremos um produto e neste caso cada produto possui sinal positivo:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}; +a_{12}a_{23}a_{31} \text{ e } + a_{13}a_{21}a_{32}. \tag{A.12}$$



Para cada uma das três setas teremos um produto e, neste caso, cada produto possui sinal negativo:

$$-a_{13}a_{22}a_{31}; -a_{11}a_{23}a_{32} \text{ e } - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{A.13}$$

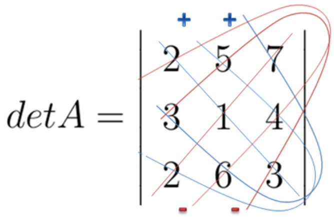
O $\det A$ será soma das expressões A.12 e A.13 acima representadas:

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$

Para mais detalhes sobre essa regra através de diagrama, consultar o livro do (IEZZI, 2006).

Exemplo 36. *Vamos calcular o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ *através do método do diagrama.*

Solução: Consideremos a imagem abaixo:



Neste caso,

$$\begin{aligned}
\det A &= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 2 \\
&= 6 + 40 + 126 - 14 - 45 - 48 \\
&= 65.
\end{aligned}$$

4. Definições Preliminares

   Duração: 50 minutos

   Apresentaremos inicialmente algumas definições que serão base para a compreensão da definição de determinantes por permutação. Utilizamos nesta temática, referências como (MORGADO, 2015), (STEINBRUCH, 1987) e (MADEIRA, 2017).

   a) Permutação

      Definição A.1. *Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \dots,\ a_n$, uma Permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem. A escolha do primeiro objeto pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segunda posição pode ser feita de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupará a terceira posição pode der feita de $n-2$ modos, etc $\dots$; a escolha do objeto que ocupará a última posição pode ser feita de 1 modo, isto é, $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$.*

      Exemplo 37. *Sejam os números $1, 2$ e 3. Determine suas possíveis Permutações.*

      Solução: Notemos que a quantidade de Permutações dos números $1, 2$ e 3 é dada por $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, são elas:

      $$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ e } (3, 2, 1).$$

   b) Inversão

      Definição A.2. *Dada uma permutação de números inteiros $1, 2, \dots, n$, dizemos que existe uma inversão quando um inteiros que não está em sua posição original precede outro menor que ele.*

*Quando a permutação possuir um **número par de inversões** o termo correspondente a essa permutação terá o **sinal positivo** e quando a permutação possuir um **número ímpar de inversões** o termo correspondente a essa permutação terá **sinal negativo**.*

Exemplo 38. *Consideremos as permutações dos números* $1, 2$ *e* 3*. Encontre o número de inversões de cada uma de suas permutações.*

Solução: observemos a tabela que criamos para facilitar o que abordamos anteriormente, constando as possíveis permutações e os respectivos números de inversões dos números $1, 2$ e 3:

Tabela 6 – Nome da tabela

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3)	0	$+$
(1,3,2)	1	$-$
(2,1,3)	1	$-$
(2,3,1)	2	$+$
(3,1,2)	2	$+$
(3,2,1)	1	$-$

Fonte: Autores, 2024.

5. Construção da definição de determinantes por permutação

   Duração: 50 minutos

   Nesta seção calcularemos o determinante de matrizes particulares (ordem 1, 2 e 3) através da definição de determinante que apresentaremos na sequência. Consideramos importante relembrar o conceito de diagonal principal de uma matriz.

   Definição A.3. *Dada uma matriz* A *de ordem* n*:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   *os **elementos da diagonal principal** da matriz* A *corresponde a sucessão dos elementos*

$$(a_{11},\, a_{22},\, a_{33},\, \cdots, a_{nn}),$$

cujos primeiros e segundos índices são todos iguais.

a) Determinantes para matrizes de Ordem 1

Consideremos a matriz $A = [a_{11}]$.

Notemos a diagonal principal é composta pelo único elemento que compõe a matriz, ou seja, o elemento a_{11} e ao realizar a permutação do segundo índice desse elemento, temos uma única forma de permutá-lo. Observe a tabela:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1)	0	$+$

Desse modo, o termo referente a essa permutação será o próprio a_{11} e pelo fato da permutação possuir zero inversões (par), o sinal desse termo será positivo, daí temos

$$\det A = |a_{11}| = +a_{11} = a_{11}.$$

Para matrizes de ordem superiores a 1, essa definição ficará mais clara. É o que veremos mais adiante,na seção 5.4.2.

b) Determinantes para matrizes de Ordem 2

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de A faremos a soma dos produtos dos elementos dessa matriz, obtidos permutando-se de todos os modos possíveis os segundos índices dos elementos da diagonal principal, estando fixados os primeiros índices.

No caso da matriz A a sua diagonal principal é dada por

$$a_{11}a_{22}.$$

Permutando-se de todas as formas possíveis os segundos índices do produto dos elementos da diagonal principal $(1, 2)$ apresentado acima, ficamos com:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
$(1, 2)$	0	$+$
$(2, 1)$	1	$-$

De acordo com o apresentado na tabela, os termos referentes ao produto dos elementos da diagonal principal da matriz permutando-se os segundos índices e fixando os primeiros são $a_{11}a_{22}$ e $-a_{12}a_{21}$. Fazendo soma algébrica para encontrar o determinante da matriz:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

c) Determinantes para matrizes de Ordem 3

Duração: 50 minutos.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Pelo que vimos na definição de determinantes de ordem 3,

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Reparemos que os produtos que aparecem no determinante podem ser reescritos, de modo geral, como

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

onde $(j_1 j_2 j_3)$ corresponde às permutações dos números 1, 2 e 3.

Além disso, temos três termos com o sinal negativo, isso ocorre pelo fato de existirem três permutações correspondentes a esses produtos com um número ímpar de inversões.

De acordo com a tabela apresentada no Exemplo 1 teremos 6 permutações para os números 1, 2 e 3:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3)	0	$+$
(1,3,2)	1	$-$
(2,1,3)	1	$-$
(2,3,1)	2	$+$
(3,1,2)	2	$+$
(3,2,1)	1	$-$

Notemos que ao realizar o produto dos elementos da diagonal principal da matriz A, fixando os primeiros índices e os segundos índices correspondendo a permutação dos elementos 1, 2 e 3 destacado na tabela, ficamos com os seguintes produtos referente às permutações:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Efetuando a soma algébrica desses 6 termos, obteremos o det A, isto é,

$$\det A = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (A.14)$$

Logo, a expressão **??** corresponde a definição de determinantes para matrizes de ordem 3, apresentada acima.

6. Determinantes para matrizes de Ordem n

Apresentaremos a generalização da definição de determinantes que foi apresentada nas seções anteriores para matrizes de ordem até 3.

É importante destacar que não é comum encontrar este tipo de definição em livros didáticos e há livros atuais em que a definição é apresentada apenas para determinantes de ordem até 3.

Definição A.4. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \,.$$

Dizemos que,

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{p} (-1)^{j} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

onde $j = j(j_1 j_2 \cdots j_n)$ *é o número de inversões da permutação* $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ *e* p *indica que a soma é feita considerando-se as parcelas referentes a cada uma das* $n!$ *permutações de* $(1, 2, 3, \cdots, n)$.

Essa definição é extremamente importante, pois abrange o determinante de matrizes com ordem qualquer, no entanto, acaba sendo trabalhosa para matrizes de ordem 4 ou superior.

- **ETAPA 4**: PROPRIEDADES DE DETERMINANTES

Apresentaremos à seguir as propriedades de determinantes que irão facilitar e na maioria das vezes reduzir o cálculo do determinante de uma matriz. Os resultados podem ser verificados usando exemplos particulares.

1. Linha nula

Duração: 50 minutos.

Se todos os elementos de uma linha de uma matriz A são nulos, $\det A = 0$.

Exemplo 39. *Calcular o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Calculemos o $\det A$:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 0 + 4\cdot 7\cdot 0 + 5\cdot 0\cdot 5 - [5\cdot(-3)\cdot 0 + 7\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 4\cdot 0] = 0.$

Exemplo 40. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 82 & 15 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -78 & 3 & 103 \\ 20 & 18 & 30 & 903 \end{bmatrix}$, *calcular* $\det A$.

Solução:

Pela propriedade 1, apresentada: $\det A = \begin{vmatrix} 82 & 15 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -78 & 3 & 103 \\ 20 & 18 & 30 & 903 \end{vmatrix} = 0.$

2. Matriz transposta

Se A é uma matriz de ordem n e A^t é sua transposta, então

$$\det A^t = \det A$$

.

Exemplo 41. *Seja* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução: Determinemos inicialmente o determinante da matriz A:

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 7\cdot 8 + 3\cdot 2\cdot 0 + 6\cdot(-9)\cdot 5 - [5\cdot 7\cdot 0 +$
$(-1)\cdot(-9)\cdot 2 + 6\cdot 3\cdot 8] = -56 + 0 - 270 - [0 + 18 + 144] = -326 - 162 = -488.$

Note que a matriz B corresponde a transposta de A e pela propriedade 2 de determinantes, temos:

$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \det A = -488$

3. Multiplicação de uma linha por uma constante

   Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por uma constante.

Exemplo 42. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 21 & 36 & -12. \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução: Perceba que de acordo com a propriedade 3:

Calculemos inicialmente o determinante da matriz A:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & 12 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot(-4) + 1\cdot(-5)\cdot 7 + 2\cdot 12\cdot 9 - [9\cdot 0\cdot 7 + 3\cdot$
$(-5)\cdot 12 + 2\cdot 1\cdot(-4)] = 0 - 35 + 216 - (0 - 180 - 8) = 181 + 188 = 369$

Notemos que a matriz B foi obtida a partir da matriz A, multiplicando a 3º linha de A por 3. Desse modo, pela 3ª propriedade de determinantes:

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 21 & 36 & -12. \end{vmatrix} = 3\cdot \det A = 3\cdot 369 = 1107.$$

Exemplo 43. *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 546 & -273 & 819 \\ 4 & 6 & 12 \\ -100 & 5 & 25 \end{bmatrix}$.

Solução: De acordo com a propriedade 3 de determinantes:

$$\det A = \begin{vmatrix} 546 & -273 & 819 \\ 4 & 6 & 12 \\ -100 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 273{\cdot}2{\cdot}5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -20 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2730{\cdot} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -20 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$2730 \cdot [30+120+6-(-18+12-10)] = 3730 \cdot (156+16) = 2730 \cdot 172 = 469560.$

4. Troca de linhas paralelas

   Duração: 50 minutos

   Uma vez trocada a posição de duas linhas o determinante troca de sinal.

   Exemplo 44. *Considere* $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, *determine* $\det A$ *e* $\det B$.

   Solução:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-3)\cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 - [7 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 2] \\ &= -6 - 15 + 56 - (35 + 36 + 4) = 35 - 75 = -40. \end{aligned}$$

   Percebamos que a matriz B é obtida da matriz A trocando de posição as linhas 1 e 3 . Daí, pela propriedade 4 apresentada:

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= -\det A \\ &= -(-40) \\ &= 40. \end{aligned}$$

5. Linhas paralelas iguais

   Duração: 50 minutos

   Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formada por elementos respectivamente iguais, estão

$$\det A = 0.$$

Exemplo 45. *Considere* $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, *Calcule* $\det A$.

Solução: Teremos que a matriz A possui as linhas 1 e 3 com elementos respectivamente iguais:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 9 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-7) \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 5 - [5 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot (-7) \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 5] \\ &= 180 - 126 + 10 - 180 + 126 - 10 \\ &= 0. \end{aligned}$$

6. Soma de linhas

Consideremos uma matriz A de ordem n, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

em que os elementos da j-ésima coluna são tais que:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= b_{1j} + c_{1j} \\ a_{2j} &= b_{2j} + c_{2j} \\ &\vdots \\ a_{nj} &= b_{nj} + c_{nj} \end{aligned}$$

isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sejam

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então teremos

$$\det A = \det B + \det C,$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 46. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & 9 \\ 15 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, *calcular* $\det A$.

Solução:

Podemos reescrever a matriz A da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & 9 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8+5 \\ 2 & 10 & 10-1 \\ 15 & 5 & 5+0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pela última expressão, como as colunas 2 e 3 da matriz à seguir são iguais, teremos pela propriedade 5 de determinantes:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} \det A &= 0 + \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot [0 - 24 + 10 - (150 - 6 + 0)] \\ &= 5 \cdot (-14 - 144) \\ &= 5 \cdot (-158) \\ &= -790. \end{aligned}$$

7. O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante (Teorema de JACOBI).

   Duração: 50 minutos

   Adicionando a uma fila de uma matriz A, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz B, tal que

$$\det B = \det A.$$

Exemplo 47. *Consideremos a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$*, calcule o seu determinante.*

Solução: Adicionando, à 2ª linha da matriz A, a 1° linha multiplicada por (-1), obteremos uma uma nova matriz:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4+(-1) & 2+(-3) & 7+(-5) & 10+(-6) \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$\det A$.

Como a matriz B possui as linhas 2 e 4 iguais, então pela propriedade 5:

$$\det B = 0 = \det A.$$

Essa propriedade será bastante útil para introduzir zeros nos elementos das linhas de uma matriz, o que facilitará o calculo do determinante dessa matriz.

8. Filas paralelas proporcionais

   Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det A = 0.$$

Exemplo 48. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{bmatrix}$*, calcule o* $\det A$.

Solução: Note que de acordo com a propriedade 8, termos:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 7\cdot 1 & -6 & 11 \\ 2 & 7\cdot 2 & 9 & 22 \\ 3 & 7\cdot 3 & 15 & 55 \\ 7 & 7\cdot 7 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\ &= 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & 11 \\ 2 & 2 & 9 & 22 \\ 3 & 3 & 15 & 55 \\ 7 & 7 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\ &= 7\cdot 0. \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **ETAPA 5**: RESULTADOS IMPORTANTES

1. Teorema de Laplace

   Duração: 1 hora e 50 minutos

   Ao realizar o cálculo do determinante para matrizes de ordem superior a 3 não existe um método específico como o apresentado para matrizes de ordem 1, 2 e 3. Assim, apresentaremos o Teorema de Laplace, sendo bastante útil para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz, reduzindo o seu desenvolvimento à determinantes de uma ordem inferior ao determinante da matriz original.

   Com o auxílio das propriedades de determinantes, os elementos das linhas ou colunas podem tornar-se zero ou um, daí teremos um cálculo ainda mais simplificado ao utilizar o teorema de Laplace.

   Baseados nos livros mais antigos do ensino médio, o Teorema de Laplace é usado para definir determinantes de ordem maior do que 3, já em nosso trabalho, apresentamos a definição geral determinantes.

   a) Definições Preliminares

      Definição A.5. *Consideremos uma matriz quadrada de ordem n. Representemos por M_{ij} a* ***submatriz*** *quadrada de ordem $(n-1)$ de A, obtida suprimindo sua i-ésima linha e j-ésima coluna. O determinante $|M_{ij}|$ é chamado* ***menor*** *do elemento a_{ij} de A.*

      Exemplo 49. *Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 9 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e determine o menor do elemento a_{12}.*

      Solução: Iremos determinar inicialmente a submatriz M_{12}:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

      O menor do elemento a_{ij} será $\det B$:

$$\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 - [(-3) \cdot 5] = 54 + 15 = 69$$

      Definição A.6. *Chamamos* ***Co-fator*** *do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, como o determinante da submatriz M_{ij} com sinal:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|.$$

      Observe que os "sinais" $(-1)^{i+j}$ que acompanham os menores formam uma disposição quadriculada com os + na diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdot \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Exemplo 50. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. *Determine o menor e o co-fator do elemento* a_{23}.

Solução: Para determinar o menor do elemento a_{23}, eliminaremos a linha 2 e a coluna 3 da matriz A, observemos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, a matriz obtida é

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e o menor do elemento a_{ij} será:

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6.$$

Já para determinar o co- fator do elemento referido, fazemos

$$A_{23} \;=\; (-1)^{2+3} \cdot |M_{23}|. \tag{A.15}$$

Teorema A.1. *O determinante da matriz* $A = [a_{ij}]$ *é igual a soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos de qualquer linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores.*

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eliminando a linha i e a coluna j da matriz A, ficamos com a submatriz:

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$$

e

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj},$$

Exemplo 51. *Calculemos o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *pelo Teorema de Laplace.*

Solução: Para resolver o determinante de A é necessário fazermos o cálculo pela linha ou coluna que possuir a maior quantidade de zeros, neste caso utilizaremos a linha 3 por possuir 2 zeros:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad +0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 - [-9 + 4 + 15 - (1 - 18 + 30)] + 0 - 2 \cdot [18 + 4 - (-4 + 60)] \\ &= -(10 - 13) - 2 \cdot (22 - 56) \\ &= 3 + 68 = 71. \end{aligned}$$

Portanto, $\det A = 71$.

Como já falamos acima, o Teorema de Laplace é muito útil, no entanto, ao considerar matrizes com ordem superior a 4, há um esforço computacional de cálculos muito grandes.

2. Regra de Chió

   Essa regra consiste em um modo de reduzir em uma unidade a ordem do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ com o objetivo de facilitar os cálculos. A regra também é importante, pois pode ser utilizada em um determinante de ordem qualquer, baixando a sua ordem em 1 unidade.

   Essa regra acaba sendo uma consequência da 7ª propriedade de determinantes 5.6, também é conhecida como Teorema de Jacobi.

   Para mais detalhes consultar (BOLDRINI, 1986) e (BEZERRA, 1977).

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

   De acordo com a regra de Chió:

   Duração: 50 minutos.

   - Desde que M tenha $a_{11} = 1$, eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna de M.
   - De cada elemento restante na matriz M subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares", traçada do elemento considerado à 1ª linha e à 1ª coluna.
   - Através das diferenças obtidas, construímos uma nova matriz de ordem $n - 1$ onde o determinante é igual ao $\det M$.

   Exemplo 52. *Consideremos a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *e calculemos o seu determinante pela Regra de Chió.*

   Solução: Visto que nessa matriz o elemento $a_{11} = 1$, efetuando as operações indicadas na regra de Chió:

Figura 26 – Regra de Chió: Exemplo I

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Fonte: Autores, 2024.

Pela Regra de Chió, o determinante acima é igual ao determinante que segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 3-3\cdot 1 & 2-2\cdot 1 \\ 4 & 5-2\cdot 4 & 7-3\cdot 4 & 3-2\cdot 4 \\ 3 & 10-2\cdot 3 & 12-3\cdot 3 & 9-2\cdot 3 \\ 3 & 8-2\cdot 3 & 2-3\cdot 3 & 6-2\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante de ordem 4 pelo Teorema de Laplace usando a primeira linha, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Percebamos que o determinante de ordem 3 acima, possui $a_{11} \neq 1$, daí utilizaremos a propriedade de determinante onde faremos o produto do número -1 pelos elementos da segunda linha e subtrairemos desse produto os respectivos elementos da 1ª linha do determinante da matriz A, sabendo que o determinante da A e o determinante da nova matriz será o mesmo, ficamos com:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -2-(-3) & -(-7)-(-5) & -0-(-5) \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Chió no determinante de ordem 3 encontrado, obteremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

O determinante de ordem 3 é igual a:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 12 - 12 \cdot 1 & 5 - 5 \cdot 1 \\ 4 & 3 - 12 \cdot 4 & 3 - 5 \cdot 4 \\ 2 & -7 - 12 \cdot 2 & 0 - 5 \cdot 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -45 & -17 \\ 2 & -31 & -10 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a Regra de Chió no determinante de ordem 3 e eliminando a sua 1ª linha e 1ª coluna, esse determinante será:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -45 & -17 \\ -31 & -10 \end{vmatrix} \\ &= (-45) \cdot (-10) - [(-17)\dot{(}-31)] \\ &= 450 - 527 \\ &= -77. \end{aligned}$$

- **ETAPA 6**: REGRA DE CRAMER E MATRIZ INVERSA

  1. Regra de Cramer

     Duração: 1 hora e 40 minutos.

     Apresentaremos a regra de Cramer que é usada na resolução de sistemas lineares, porém, quando consideramos um sistema com muitas equações e incógnitas, o procedimento de resolução acaba sendo muito longo, isso é o que afirma o professor Elon no vídeo (APLICADA, 2008).

     Considere um sistema com o número de equações e o número de incógnitas são iguais a n:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Esse sistema pode ser escrito na forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$A \cdot X = B, \tag{A.16}$$

donde a matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

a matriz dos termos independentes

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

e a matriz dos coeficientes é dada por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Consideremos que $\det A \neq 0$ para a equação A.16, desse modo, A admite inversa, denotaremos a sua inversa por A^{-1}. Então

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1}A \cdot X &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A) \cdot X &= A^{-1}B \\ I_n \cdot X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Escrevendo na foma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{A.17}$$

Por outro lado,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

De modo análogo, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Percebamos que no denominador de x_i temos o determinante da matriz dos coeficientes do $\det A \neq 0$, já no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A, substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Esse método pode ser aplicado quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo e o número de equações do sistema for igual ao número de incógnitas.

Exemplo 53. *Consideremos o sistema*

$$3x + 2y - 5z = 8$$

$$2x - 4y - 2z = -4$$

$$x - 2y - 3z = -4$$

Inicialmente analisemos se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é diferente de zero:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot (-5) - [(-5) \cdot (-4) \cdot 1 \\
&\quad +2 \cdot 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2) \cdot 3] \\
&= 36 - 4 + 20 - (20 + 12 - 12) \\
&= 52 - 20 \\
&= 32 \neq 0
\end{aligned}$$

Determinemos o valor do numerador de x, o qual denotaremos por N_x:

$$\begin{aligned}
N_x &= \begin{vmatrix} 8 & 2 & -5 \\ -4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 8 \cdot (-4) \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) \cdot (-5) \\
&\quad -[(-5) \cdot (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2) \cdot 8] \\
&= 96 + 16 - 40 - (-80 + 32 + 24) \\
&= 72 - (-24) \\
&= 72 + 24 \\
&= 96
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para x:

$$x = \frac{N_x}{\det A} = \frac{96}{32} = 3.$$

Determinemos o valor do numerador de y, o qual denotaremos por N_y:

$$\begin{aligned}
N_y &= \begin{vmatrix} 3 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-3) + 8 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) \cdot (-5) - [(-5) \cdot (-4) \cdot 1 \\
&\quad +(-2) \cdot (-4) \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot (-3)] \\
&= 36 - 16 + 40 - (20 + 24 - 48) \\
&= 60 - (-4) \\
&= 40 + 4 \\
&= 64
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para y:

$$y = \frac{N_y}{\det A} = \frac{64}{32} = 2.$$

Determinemos o valor do numerador de z, o qual denotaremos por N_z:

$$\begin{aligned}
N_z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 8 - [8 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) \\
&\quad +(-4) \cdot (-2) \cdot 3] \\
&= 48 - 8 - 32 - (-32 - 16 + 24) \\
&= 8 - (-24) \\
&= 8 + 24 \\
&= 32
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para z:

$$z = \frac{N_z}{\det A} = \frac{32}{32} = 1.$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$.

2. Cálculo da Matriz Inversa por Determinantes

   a) Definições e Resultados Preliminares
   Duração: 50 minutos

   Definição A.7. *Definimos a* ***Matriz Identidade*** *de ordem n como sendo a matriz na qual todos os elementos são nulos, exceto os elementos da diagonal principal, que são iguais a 1. Indicamos por I_n, ou I se não for especificar a ordem da matriz. Dessa forma,*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

   Definição A.8. *Uma* ***submatriz*** *de uma dada matriz A é uma matriz obtida de A eliminando alguma(s) das suas linhas e/ou colunas.*

   Exemplo 54. *Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 2 & 11 & 3 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, determine uma submatriz de A.*
   Solução: Um exemplo de submatriz é $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$

   Definição A.9. *Dada uma matriz A, dizemos que o* ***cofator*** *A_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|,$$

   onde M_{ij} é a submatriz de A, obtida extraindo-se a i´-ésima linha e a j-ésima coluna. Com esses fatores formamos uma matriz $\bar{A}$, a qual chamaremos de matriz dos cofatores:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

   Definição A.10. *Dada uma matriz A, chamaremos de* ***matriz adjunta*** *de A à transposta da matriz dos cofatores ($\bar{A}$), representada por*

$$\bar{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Teorema A.2. *Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Então*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Definição A.11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz inversível se existir uma matriz A^{-1}, tal que*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Vejamos agora uma condição necessária e também suficiente para que uma matriz A admita inversa.
Seja A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.
De acordo com a definição apresentada acima,

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

Aplicando o determinante em ambos os membros, temos:

$$\det(A \cdot A^{-1}) \quad = \quad \det I_n.$$

Pelo de demonstramos no Teorema 7.4

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Seja $\det A \neq 0$, daí

$$\frac{\det A}{\det A} \cdot \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Assim,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \ \textit{para} \det A \neq 0$$

Logo, para que a matriz A admita inversa, devemos ter $\det A \neq 0$.

b) Cálculo da Matriz Inversa

Duração: 50 minutos

Teorema A.3. *Seja A uma matriz de ordem n e $\bar{A}'$ a matriz adjunta de A, então*

$$A \cdot \bar{A}' = A \cdot (AdjA) = (\det A) \cdot I_n.$$

Resultando após alguns cálculos:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (AdjA)$$

Exemplo 55. *Encontre a inversa da matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ *através do cálculo do determinante.*

Solução: Inicialmente, calcularemos o determinante de A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 40 - (15 + 24) = 40 - 39 = 1.$$

Calculemos os cofatores de cada um dos elementos da matriz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 18 = -18$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Desse modo, a matriz dos cofatores é representada por

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$AdjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com A.18:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado nos fornece uma outra forma de calcular o determinante de uma matriz.

Para mais detalhes sobre o cálculo do determinante através da matriz adjunta, consultar (RONCHI,) e (BEZERRA, 1977).

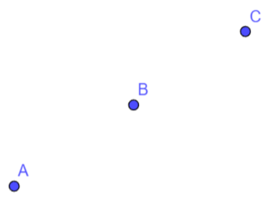
- **ETAPA 7**: GEOGEBRA E ALINHAMENTO DE PONTOS

  Duração: 1 hora e 50 minutos

  Buscamos por meio dessa etapa intensificar a importância do cálculo o determinante na condição de alinhamento de três pontos, onde sugerimos a utilização do software geogebra como uma importante ferramenta para agregar na parte analítica da identificação do alinhamento de três ponto.

  Observe os pontos A, B e C abaixo:

Figura 27 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo I



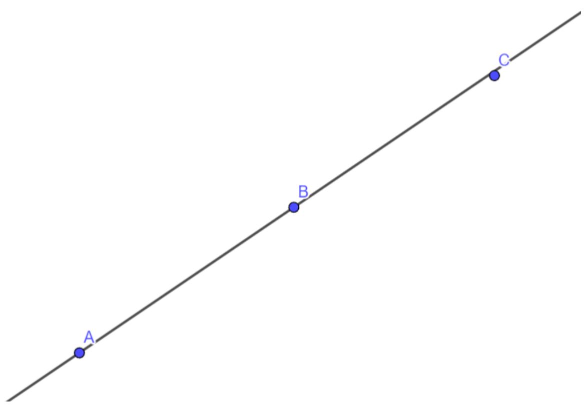
Fonte: Autores, 2024.

Podemos afirmar que esses pontos acima estão alinhados sabendo que suas coordenadas são $A = (1, 1)$, $B = (4.1, 3.1)$ e $C = (7, 5)$?

Não. Apesar dos pontos na imagem acima parecer que estão alinhados, eles não pertencem a uma mesma reta. Observe:

]

Figura 28 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

Isso também pode ser verificado calculando o determinante dos pontos dados:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4.1 & 3.1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3.1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 7 + 4.1 \cdot 5 \cdot 1 - (1 \cdot 3.1 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4.1 \cdot 1)$$

$$= 3.1 + 7 + 20,5 - 21,7 - 5 - 4.1$$

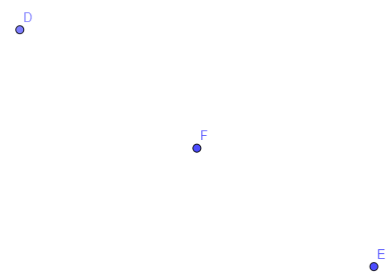
$$= -0.2$$

Logo, concluímos mais uma vez que os pontos A, B e C não estão alinhados, pois seu det $\neq 0$.

Portanto, a utilização do Geogebra também servirá para reiterar que o cálculo do determinante é uma ferramenta eficaz na verificação do alinhamento dos pontos, pois apesar de muitas vezes os pontos parecerem alinhados geometricamente, nem sempre isso se confirma.

Considere agora os pontos $F = (-1, 4)$, $E = (2, 2)$ e $D = (-4, 6)$ representados abaixo:

Figura 29 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo II



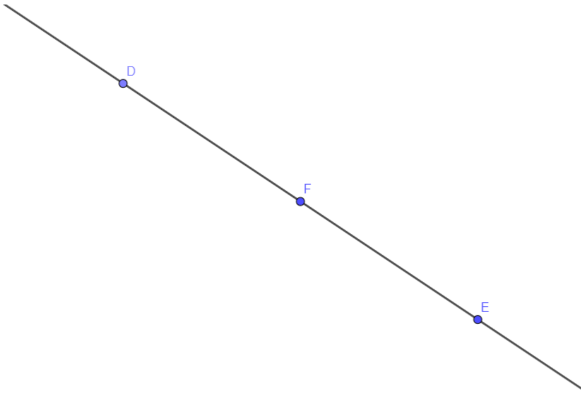
Fonte: Autores, 2024.

Solução: Para verificar se os pontos dados estão alinhados, calcularemos o seu determinante:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= -2 - 16 + 12 - (-8 - 6 + 8) \\ &= -6 + 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

Desse modo, teremos uma única reta passando pelos pontos D, F e E, observe a imagem a seguir:

Figura 30 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo II



Fonte: Autores, 2024.

EXERCÍCIOS

1. Utilizando os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $(5, 6)$, calcule a área do triângulo cujos vértices são formados por esses pontos.

2. Verifique através do determinante se os pontos $(1, 2)$, $(4, 4)$ e $(8, 6)$ são colineares.

3. Determine o valor de y pata que os pontos $(3, 5)$, $(-1, -3)$ e $(4, 7)$ sejam colineares.

4. Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (1, -2)$ e $C = (5, 2)$. Determine a equação da reta que passa pelo ponto A e pelo ponto médio do segmento BC.

5. Determine o número de inversões das permutações de $1, 2, 3, 4$:

   - 1 3 4 2
   - 4 1 2 3
   - No determinante de ordem 4, qual sinal precederia os termos $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ e $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$

6. Calcule o $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

   - Pela definição
   - Por Laplace, usando a terceira coluna.

7. Calcule os determinantes, utilizando as propriedades estudadas.

   - $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 9 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \end{vmatrix}$
   - $\begin{vmatrix} 6 & 33 & 15 & 0 & 25 \\ 16 & 19 & 9 & 0 & 18 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 12 \\ -20 & 6 & 20 & 0 & -3 \\ 15 & 10 & 37 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
   - $\begin{vmatrix} a^2 & ab^3 & a \\ ab & a^3 & b \\ a^2 & b^2 & a \end{vmatrix}$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log^2 3 & \log^2 30 & \log^2 300 & \log^2 3000 \\ \log^3 3 & \log^3 30 & \log^3 300 & \log^3 3000 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 & \log 3000 \end{vmatrix}$$

8. Mostre pela regra de Chió que:

$$B = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

9. Dado o sistema abaixo, resolva-o usando determinantes:

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ 4x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

10. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

- $Adj A$
- $\det A$
- A^{-1}

A.3 Referências da Eletiva

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. Fundamentos de circuitos elétricos [recurso eletrônico]. [S.l.]: AMGH, 2013.

BEZERRA, M. J. Curso de Matemática. [S.l.]: Companhia Nacional, 1977.

BOLDRINI, J. L. e. a. Álgebra Linear. [S.l.]: Harbra, 1986. ISBN 9788529402024.

FILGUEIRAS, C. W. S. A Importância dos Conteúdos de Matemática Pouco Cobrados no enem. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Cariri, 2019.

IEZZI, G. Fundamentos de matematica elementar, 4 sequencias, matrizes, determinantes, sistemas: seque ncias, matrizes, determinantes, sistemas. [S.l.]: Atual, 2006. 232 p. ISBN 9788535704587.

IEZZI, G. e. a. Matematica: volume unico. [S.l.]: Atual, 1997. Citado na página 57. DANTE, L. R.; VIANA, F. Matemática em contextos: Trigonometria e sistemas lineares. [S.l.]: Ática, 2020.

MENEZES, S. B. de. Uma Análise dos Conteúdos de Matemática em Desuso nas Provas do Exame Nacional do Ensino (ENEM). Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2021.

SOUZA, J. R. d.; GARCIA, J. d. S. R. Contato Matemática. [S.l.]: FTD, 2016.

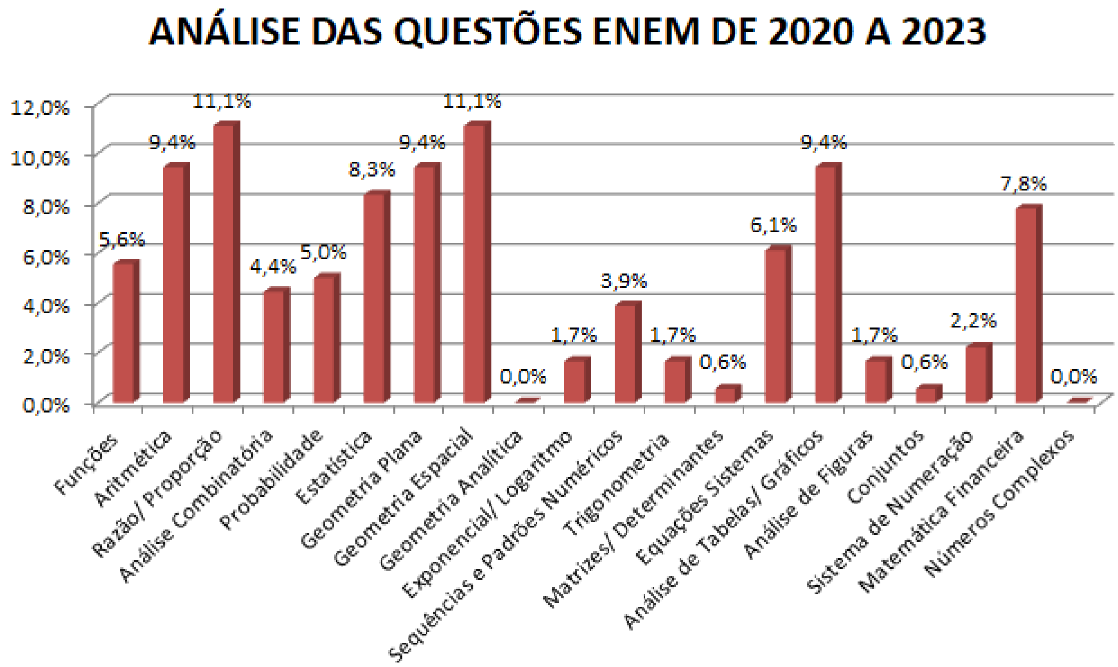
STEINBRUCH, A. Álgebra Linear e Geometria Analítica and Winterle, Paulo. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 1987.

A.4 Apêndice da Eletiva

ANÁLISE GERAL DAS QUESTÕES DURANTE OS ANOS DE 2020 A 2023

TEMAS	2020	2021	2022	2023	TOTAL
Funções	1	1	5	3	10
Aritmética	5	2	5	5	17
Razão / Proporção	7	6	5	2	20
Análise Combinatória	2	1	4	1	8
Probabilidade	3	1	2	3	9
Estatística	2	5	4	4	15
Geometria Plana	3	5	2	7	17
Geometria Espacial	6	4	7	3	20
Geometria Analítica	0	0	0	0	0
Exponencial / Logaritmo	2	0	0	1	3
Sequências / Padrões Numéricos	2	1	1	3	7
Trigonometria	1	1	0	1	3
Matrizes / Determinantes	0	1	0	0	1
Equações / Sistemas	1	5	2	3	11
Análise de Tabelas/ Gráficos	6	5	1	5	17
Análise de Figuras	1	0	2	0	3
Conjuntos	1	0	0	0	1
Sistema de Numeração	0	2	1	1	4
Matemática Financeira	2	5	4	3	14
Números Complexos	0	0	0	0	0

Figura 31 – GRÁFICO (ENEM DE 2020 A 2023)



Fonte: Autores, 2024.

Referente aos gráficos acima apresentados, desconsideramos os assuntos que não foram cobrados no respectivo ano. Durante nossa pesquisa bibliográfica, encontramos duas dissertações do Profmat (MENEZES, 2021) e (FILGUEIRAS, 2019) as quais realizaram uma pesquisa referente aos conteúdos que caíram no Exame Nacional do Ensino Médio nos anos de 2009 a 2019 e referente ao conteúdo de matrizes e determinantes foram apresentadas tabelas que mostraram que esse tema foi cobrado apenas nos anos de 2012, 2018 e 2019. Ao ir em busca dessa questões, vimos que no ano de 2012 foi cobrado o produto de matrizes, em 2018 soma do elementos das linhas de uma matriz e em 2019 a soma dos elementos das colunas de uma matriz.

A.4.1 Demonstração Regra de Chió

Para realizar essa prova, consideraremos 2 casos: quando o elemento $a_{11} = 1$ e $a_{11} \neq 1$.

Inicialmente, seja o elemento $a_{11} \neq 1$, aplicando a propriedades de determinantes na matriz M a qual substituímos uma linha por uma combinação linear de outra linha, obtemos uma matriz N, perceba que $\det M = \det N$.

Neste caso, para obtermos o elemento $a_{11} = 1$, escolhemos a j-ésima linha da matriz a qual multiplicaremos cada elemento dessa linha por uma constante K, por fim, adicionaremos a esse produto os respectivos elementos da linha 1, isto é,

$$a_{j1} \cdot A + a_{11} = 1 \Longrightarrow A = \frac{1 - a_{11}}{a_{j1}},$$

onde $a_{j1} \neq 0$.

Obtendo o elemento $a_{11} = 1$ ou para o caso em que a matriz já possuir o elemento $a_{11} = 1$, basta realizar as operações indicada nos itens abaixo.

- Adicionaremos, à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$.
- Adicionaremos, à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$.
- Adicionaremos, à 4ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{14}$.
  ....
- Adicionaremos, à j-ésima coluna , 1ª multiplicada por $-a_{1j}$.
  ....
- Adicionaremos, à n-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$.

Seja N a matriz obtida ao efetuar as operações acima e de acordo com a 7ª propriedade de determinantes, temos $\det N = \det M$.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Percebamos que os elementos da 1ª linha da matriz N são em sua maioria iguais a zero, aplicando o Teorema de Laplace, o mais recomendado em termos de cálculo, é encontrar o seu determinante pela 1ª linha, vejamos:

$$\begin{aligned} \det M &= \det N = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + \cdots + 0 \cdot A_{1n} \\ &= A_{11} \\ &= \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, o $\det N$ corresponde a um determinante de ordem $(n-1)$.

Anexos

ANEXO A – Programa de Vestibular 2010

Orientação Geral :

Este programa apresenta os conteúdos básicos da Física ensinados no Ensino Médio. Para a realização da prova, espera-se que o Candidato ou a Candidata seja capaz de compreender os princípios da Física, de mobilizá-los na solução de problemas (incluindo a linguagem gráfica), na análise e interpretação de dados e resultados obtidos em experimentos, em observações ou simulações realizadas por microcomputadores. Quanto aos conteúdos da Física Moderna, serão priorizados os aspectos qualitativos na sua abordagem, explorando-se os aspectos históricos e essenciais da Teoria da Relatividade, da Física Quântica e da Estrutura da Matéria. Vinte por cento (20%) das questões da prova serão abordadas considerando-se os conteúdos da Física no desenvolvimento dos temas Física, Ética e Meio Ambiente.

Programa para a 1ª ETAPA

Tema: Física, Ética e Meio Ambiente - Contribuições dos Princípios da Conservação da Quantidade de Movimento e da Energia, da Mecânica dos Fluidos e da Termodinâmica na análise de questões ambientais referentes: (i) à conversão e uso das diversas formas de energia em especial as questões referentes a usinas hidrelétricas e nucleares e fontes alternativas de energia; (ii) dinâmica da atmosfera no que se refere, especialmente, às mudanças climáticas e ao fenômeno El Niño e La Niña.

1. Mecânica: Cinemática

1.1. Introdução à Física (objetos de estudos da Física, características do trabalho científico em Física, medidas e grandezas fundamentais)

1.2. Cinemática (Conceitos Básicos)

1.3.Movimento em uma Dimensão: Movimento Retilíneo Uniforme, Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

1.4. Grandezas Vetoriais

1.5.Movimento em duas Dimensões: Movimento Circular e Composição de Movimentos

2. Mecânica: Dinâmica

2.1. Significado histórico do trabalho de Isaac Newton na construção do Conhecimento Físico

2.2. As Leis de Newton

2.3. Forças de Atrito

2.4. Dinâmica do Movimento de Partículas em Trajetórias Curvilíneas

3. Princípios de Conservação

3.1. Conceitos Trabalho, Potência e Rendimento

3.2. O Conceito Energia e o Princípio da Conservação da Energia

3.3. Os Conceitos Quantidade de Movimento e Impulso

3.4. O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

4. Gravitação Universal

4.1. O conceito Campo Gravitacional

4.2. As Leis de Kepler

4.3. A abordagem Newtoniana da Gravitação

4.4. Aplicações da Lei da Gravitação Universal de Newton

5. Mecânica dos Fluidos
5.1. Hidrostática:
5.1.1. Os conceitos Densidade e Pressão
5.1.2. Princípio de Pascal
5.1.3. Pressão num Fluido em Equilíbrio
5.1.4. Princípio de Arquimedes
5.2. Hidrodinâmica:
5.2.1. Conceito Fluido Ideal
5.2.2. Equação de Continuidade
5.2.3. Equação de Bernoulli
5.2.4. Viscosidade

6. Termodinâmica
6.1. O conceito Temperatura
6.2. Medida da Temperatura
6.3. Fenômenos Térmicos:
6.3.1. Dilatação Térmica dos sólidos e líquidos
6.3.2. Transferência de Calor
6.4. O conceito Calor
6.5. Calorimetria
6.6. Transições de Fase
6.7. Comportamento Térmico dos Gases
6.8. Primeiro Princípio da Termodinâmica
6.9. Segundo Princípio da Termodinâmica
6.9.1. Máquinas Térmicas
6.9.2. Entropia
6.9.3. Relação Entropia e Ordem

7. Óptica
7.1. Princípios da Óptica Geométrica
7.2. Reflexão da Luz e Espelhos (Planos e Esféricos de pequena abertura)
7.3. Refração da Luz e Lentes Esféricas Delgadas
7.4. Instrumentos Ópticos

8. Ondas
8.1. Movimento Harmônico Simples
8.2. Ondas
8.3.Reflexão, Refração, Difração, Interferência e Polarização
8.4. O Som

Programa para a 2ª ETAPA

Tema: Física Moderna, Cotidiano e Tecnologia - Presença dos conhecimentos em Física Moderna nas aplicações tecnológicas e fenômenos presentes no dia-a-dia, tais como o GPS (Sistema de Posicionamento Global), os semicondutores, as células fotoelétricas, a fotossíntese, as lâmpadas fluorescentes, a produção de imagens para subsidiar os diagnósticos médicos (raios X, ressonância magnética nuclear, tomografia por emissão de pósitrons) e os lasers.

1. Eletrostática
1.1. Carga Elétrica e Eletrização
1.2. Conservação da Carga Elétrica
1.3. Lei de Coulomb
1.4. Conceito Campo Elétrico
1.5.Energia Potencial Elétrica e Potencial Elétrico
1.6. Condutores em Equilíbrio Eletrostático
1.7. Capacitores

2. Corrente Elétrica e Circuitos Elétricos
2.1. Corrente Elétrica e Resistores Elétricos
2.2. Combinação de Resistores Elétricos
2.3. Receptores de Energia Elétrica
2.4. A conservação da Energia e a Conservação da Carga Elétrica em Circuitos Elétricos (Leis de Kirchhoff)

3. Eletromagnetismo
3.1. Campo Magnético e Força Magnética
3.2. Fontes de Campo Magnético
3.3. Indução Eletromagnética
3.4. Corrente Alternada
3.5. Ondas Eletromagnéticas

4. Física Moderna

4.1. Teoria da Relatividade:

4.1.1. O Princípio da Relatividade de Albert Einstein e os Problemas que originaram a Teoria da Relatividade

4.1.2. Relatividade do Tempo e do Espaço na Relatividade Restrita

4.1.3. A Relação Massa e Energia e o Significado de E=mc2 na Relatividade Restrita

4.2. Relatividade Geral:

4.2.1. Problemas que lhe deram origem,

4.2.2. Princípio Equivalência

4.3. Física Quântica e Estrutura da Matéria:

4.3.1. A Quantização da Energia e os Problemas que lhe deram origem

4.3.2. O Efeito Fotoelétrico

4.3.3. O Modelo de Bohr para o Átomo

4.3.4. Emissão e Absorção de Energia pelo Átomo no Modelo de Bohr

4.3.5. A Dualidade Onda-Partícula

4.3.6. O Princípio da Incerteza

4.3.7. A Estrutura Nuclear (característica e estabilidade), Radioatividade, Fissão e Fusão Nucleares

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Orientação Geral:

Aprender Matemática deve ser um ato muito maior do que memorizar resultados, pois o conhecimento matemático deve estar vinculado ao domínio de um saber fazer, de um saber pensar e de um saber aplicar a Matemática. Sendo assim, na prova de Matemática, será priorizada a avaliação da capacidade de raciocínio do candidato, sem dar-se ênfase, exclusivamente, à memorização de fórmulas, à mecanização de técnicas ou a cálculos excessivos, desvinculados de contexto significativo ou de aplicações relevantes, dentro ou fora da Matemática. Com isso o candidato deverá saber reconhecer representações equivalentes, relacionar procedimentos em diferentes áreas, analisar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando as ferramentas matemáticas para resolver problemas desta e das outras áreas do conhecimento.

A prova terá por objetivo avaliar o domínio dos conteúdos ministrados no ensino médio, a capacidade do candidato de usar a linguagem matemática para expressar o raciocínio, interpretar enunciados, analisar gráficos, obter soluções de problemas reais e compreensão dos conceitos fundamentais, de forma a saber aplicá-los em situações diversas e relacioná-los entre si e com outros conhecimentos.

Programa para a 1ª ETAPA

1 - Noções Básicas de Conjuntos

Conjunto (conceito–notação) – Relação de pertinência – Relação de inclusão – Igualdade de conjuntos – Operações entre conjuntos – Conjuntos numéricos: Naturais e Inteiros (múltiplos e divisores, divisibilidade, números primos, fatoração, mdc, mmc) – Racionais e Irracionais (frações, representação decimal, dízimas periódicas e não periódicas) – Reais (a reta numérica, operações, propriedades, módulo, desigualdades, Intervalos) – Aplicações.

2 - Relações e Funções

Par ordenado – Produto cartesiano – Sistema de coordenadas cartesianas no plano – Relações binárias (conceito – notação) – Função (definição – terminologia – domínio – contradomínio – imagem) – Operações com funções–Gráficos.

3 - Funções Reais de Variável Real

Estudo da função afim – Inequações do 1º grau (resolução algébrica – resolução gráfica) – Estudo da função quadrática – Inequações do 2ºgrau (resolução algébrica – resolução gráfica) – Valores extremos (aplicações) – Módulo de um número real – Função modular – Equações e inequações modulares – Composição de funções – Função injetiva – Função sobrejetiva – Função bijetiva – Função inversa – Aplicações.

4 - As Funções Exponencial e Logarítmica

Estudo da função exponencial – Equações e inequações exponenciais (resolução algébrica – resolução gráfica) – Estudo da função logarítmica – Equações e inequações logarítmicas (resolução algébrica – resolução gráfica).

5 - Sequências

Estudo de seqüências (conceito – notação) – Progressões aritméticas – Progressões geométricas.

6 - Trigonometria

Trigonometria no triângulo retângulo – O círculo trigonométrico – Arcos e ângulos – Radiano– Arcos côngruos – Relações fundamentais da trigonometria – Redução ao 1º quadrante – Resolução de triângulos quaisquer – A lei dos senos e a lei dos cossenos – Fórmulas de transformações trigonométricas – Identidades trigonométricas – Estudo das funções trigonométricas (domínio – imagem – período – gráfico) – Equações e inequações trigonométricas.

7 - Geometria Plana

Conceitos primitivos – Axiomas fundamentais da Geometria Euclidiana – Congruência de figuras geométricas – Congruência de triângulos – Teoremas sobre retas paralelas – Teorema de Tales – Semelhança de triângulos – Áreas de triângulos, quadriláteros e polígonos regulares – Áreas do círculo e do setor circular.

8 - Geometria Espacial

Ângulos poliédricos – Superfícies poliédricas – Poliedros – Relação de Euler-Poincaré – Prismas e Pirâmides (comprimentos - áreas - volumes) – Cilindros, Cones e Esferas (comprimentos - áreas -volumes).

9 - Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Matriz (conceito – notação) – Igualdade – Tipos de matrizes – Transposta – Operações – Propriedades - Determinante (conceito – notação) – Determinantes de matrizes 2x2 e 3x3 – Propriedades – Regra de Sarrus

Menor complementar e co-fator – Regra de Laplace – Matriz adjunta – Matriz inversa – Sistemas lineares (conceito – notação) – Notação matricial – Conjunto solução – Sistemas homogênios e sistemas equivalentes – Processo de escalonamento – Regra de Cramer – Discussão de um sistema quanto ao número de soluções – Classificação.

Programa para a 2ª ETAPA

1 - Geometria Analítica

Distância entre dois pontos – Divisão de um segmento conforme uma razão dada – Estudo da reta (definição – notação) – Equações de uma reta – Posições relativas entre retas – Distância de um ponto a uma reta – Condição de alinhamento entre três pontos – Ângulos entre retas –Interseção entre retas – Mediatriz de um segmento – Estudo da circun-ferência – Estudo das cônicas (Elipse – Hipérbole – Parábola) – Interseção entre curvas (resolução algébrica – resolução gráfica).

2 - Números Complexos

Definição – Representação nas formas algébrica e trigonométrica – Operações – Propriedades – Fórmulas de Moivre – Aplicações.

3 - Polinômios

Polinômio (definição – notação) – Operações – O teorema fundamental da álgebra – Raízes simples e múltiplas – Raízes racionais – Relações de Girard – Raízes complexas.

4 - Análise Combinatória e Probabilidade

O princípio fundamental da contagem (Fatorial – Permutação – Arranjo – Combinação) – Números binomiais – Binômio de Newton – Espaços amostrais – Eventos – Conceito de probabilidade – Probabilidade de união e interseção de eventos.

5 - Noções de Matemática Financeira

Porcentagem – Juros simples e compostos.

6 - Noções de Estatística

Medidas de posição (Média – Mediana – Moda) – Medidas de dispersão (Amplitude – Desvio médio – Variância – Desvio padrão) – Gráficos estatísticos (Histograma – Gráficos de setores).

ANEXO B – Nota sobre o Enem e Sisu - UFCG

UFCG

UFCG adotou o Enem!

Os interessados em fazer o exame do Enem tiveram até o dia 16 de julho para se inscrever!

No dia 04 de maio de 2010, o Reitor Thompson Mariz da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), em entrevista à imprensa, declarou que a universidade utilizará a partir deste ano, os resultados do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) no seu processo de seleção do vestibular.

Há uma particularidade nesta adesão, pois a UFCG não aderiu ao SISU (Sistema de Seleção Unificada). Isto significa que as vagas da UFCG não estarão disponíveis à competição nacional, ou seja, só concorrerá aos cursos da referida universidade, aquele que se inscrever também na Comprov (Comissão de Processos Vestibulares da UFCG).

O exame do Enem é composto por uma redação e 200 questões objetivas, bem diferente do tipo de prova que a UFCG vinha adotando, como é possível observar no site da em Comprov, o estilo de prova adotado. Porém, o reitor elogiou muito a avaliação do Enem, destacando que o exame é bem elaborado e muito melhor que o vestibular.

O desempenho dos candidatos no Enem já poderá ser aproveitado no PSS-2011, quando 10% das vagas serão direcionadas para quem participa do Sistema de Seleção Unificada (Sisu) do Ministério da Educação (MEC). Já no PSS 2012, esse percentual subirá para 20%, no PSS 2013 para 40%, no PSS 2014 para 50%, até que em 2014 todas as vagas da UFPB serão preenchidas a partir do Enem.

O Conselho Superior de Ensino, Pesquisa e Extensão (Consepe) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) também resolveu adotar a nota do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) como forma de ingresso nos cursos de graduação, substituindo gradativamente o Processo Seletivo Seriado (PSS).

O prazo para a inscrição terminou no dia 16. As inscrições puderam ser feitas na página do MEC, por uma taxa de R$ 35,00 para os não-isentos. Todos estão ansiosos para o ver o resultado desta adesão, que, certamente, vai beneficiar ainda mais a comunidade estudantil.

Por Maria Isabel Farias
(isabel@dsc.ufcg.edu.br)

ANEXO C – Questionário de Pesquisa com Professores

QUESTIONÁRIO ACERCA DA APRENDIZAGEM E DO CONHECIMENTO DE DETERMINANTES PARA A FORMAÇÃO UNIVERSITÁRIA

Formulário para Pesquisa de Dissertação de Mestrado (PROFMAT - UFCG)
MESTRANDA: Flávia Shirley Tavares Vieira
ORIENTADOR: Daniel Cordeiro de Morais Filho

* Indica uma pergunta obrigatória

1. 01. Qual curso superior você é professor? *

Marcar apenas uma oval.

- Matemática
- Física
- Engenharia Elétrica
- Computação
- Estatística

2. **02.** Para alunos do seu curso nas disciplinas do profissional é necessário o estudo de determinantes?

3. **03.** Em sua opinião qual a principal motivação e necessidade para o estudo de determinantes para um profissional formado em seu curso?

4. **04.** Em qual semestre o aluno do seu curso irá precisar dos conhecimentos de determinantes?

5. **05.** Poderia listar as disciplinas do profissional do curso nas quais o determinante será usado?

6. 06. Qual sua opinião sobre os determinantes não estarem sendo cobrados no Enem e consequentemente não estarem sendo estudados no ensino médio?