



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



Filipe José Barros da Silva

Frações Egípcias e suas Aplicações no Ensino de Frações para o Ensino Fundamental Anos Finais

Campina Grande - PB
Agosto/2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



Filipe José Barros da Silva

Frações Egípcias e suas Aplicações no Ensino de Frações para o Ensino Fundamental Anos Finais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho
Orientador: Dr. Renan Jackson Soares Isneri

Campina Grande - PB
Agosto/2025

S586f

Silva, Filipe José Barros da.

Frações egípcias e suas aplicações no ensino de frações para o ensino fundamental anos finais / Filipe José Barros da Silva. - Campina Grande, 2025.

150 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho, Prof. Dr. Renan Jackson Soares Isneri."

Referências.

1. Ensino de Matemática. 2. Frações Egípcias. 3. Ensino de Frações. 4. Metodologias Lúdicas. 5. Ensino e Aprendizagem. I. Moraes Filho, Daniel Cordeiro de. II. Isneri, Renan Jackson Soares. III. Título.

CDU 51(043.3)

Filipe José Barros da Silva

Frações Egípcias e suas Aplicações no Ensino de Frações para o Ensino Fundamental Anos Finais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 29 de agosto de 2025:

Documento assinado digitalmente
 **DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO**
Data: 08/09/2025 11:03:12-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho
Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
 **RENAN JACKSON SOARES ISNERI**
Data: 08/09/2025 18:24:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Renan Jackson Soares Isneri
Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
 **LEOMQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO**
Data: 09/09/2025 13:12:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
Examinador interno - UFCG

Documento assinado digitalmente
 **FLAVIO FRANCA CRUZ**
Data: 09/09/2025 16:11:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Flávio França Cruz
Examinador externo - UFCA

Campina Grande - PB
Agosto/2025

Dedico esse trabalho especialmente ao meu filho, Josué Levi, à minha querida esposa Camila e à minha família por todo carinho e apoio prestado no decorrer dessa caminhada.

Agradecimentos

O presente trabalho, que levou pouco mais de dois anos para ser realizado, contou com a contribuição de muitas pessoas, logo, vejo como essencial destacar algumas dessas que fizeram parte, direta ou indiretamente, para a obtenção dos resultados alcançados.

Meus sinceros agradecimentos a todos os alunos e profissionais da Escola Municipal Domingos Jacinto Ferreira, da qual faço parte da equipe docente e escolhi como local principal para a realização dessa pesquisa.

Agradeço a todos os colegas da turma e membros do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) pela troca de experiências e aprendizagens construídas durante o curso.

Ao meu orientador, Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho, e ao coorientador, Dr. Renan Jackson Soares Isneri, pelas orientações e toda a parceria prestada.

Aos meus familiares e amigos, especialmente esposa e filho, por toda a compreensão e apoio dado durante essa etapa tão importante da minha vida. Apesar de uma gestação difícil acompanhada da internação do nosso bebê por mais de dois meses na UTI, o qual lutou constantemente pela vida, a conclusão desse trabalho mostra como o nosso Deus é poderoso.

Portanto, agradeço sobretudo a Deus por ter me permitido todas essas realizações. Como dito por Josué 1:9, “Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar”.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

Esta dissertação de mestrado busca compreender como o uso das frações egípcias pode contribuir para o ensino de frações nos anos finais do Ensino Fundamental. Para esse propósito, foi inicialmente realizada a fundamentação teórica em torno da história da matemática egípcia com o foco na sua forma em representar frações, seguido a pesquisa de desenvolvimento, em abordagem qualitativa, com os alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Carnaíba-PE. A atividade de investigação teve sua culminância na criação, aplicação e avaliação de dois jogos educativos em torno da temática proposta. A escolha do tema se deu devido ao interesse de observar como a história da matemática pode ser utilizada como recurso educacional, para isso foi escolhido o conteúdo das frações que abrange todos os anos dessa modalidade de ensino e a civilização egípcia por ser uma das mais antigas a desenvolverem um sistema de numeração com aplicação em sua aritmética e geometria de forma prática. Diante disso, é possível explorar como os antigos egípcios empregavam a matemática, especialmente ao uso de frações, conhecidas na literatura como frações egípcias, influenciada na forma prática como eles dividiam seus recursos de forma equitativa. Os resultados obtidos indicam que o uso das frações egípcias pode ser feito por meio de metodologias lúdicas integrado com outras disciplinas como história e geografia na contextualização da matemática favorecendo a revisão desse conteúdo no Ensino Básico e contribuindo para o ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Frações Egípcias. Ensino de Frações. Metodologias Lúdicas. Ensino e Aprendizagem.

Abstract

This master's thesis seeks to understand how the use of Egyptian fractions can contribute to the teaching of fractions in the final years of elementary school. To this end, a theoretical foundation was initially developed around the history of Egyptian mathematics, focusing on its representation of fractions. This was followed by developmental research, using a qualitative approach, with students from a 9th-grade class at a municipal school in Carnaíba, Pernambuco. The research culminated in the creation, implementation, and evaluation of two educational games around the proposed theme. The theme was chosen due to the interest in observing how the history of mathematics can be used as an educational resource. To this end, the content of fractions, which spans all grades of this teaching modality, was chosen, and the Egyptian civilization was one of the oldest to develop a numbering system with practical applications in arithmetic and geometry. Therefore, it is possible to explore how the ancient Egyptians employed mathematics, especially the use of fractions, known in the literature as Egyptian fractions, which influenced the practical way they divided their resources equitably. The results indicate that the use of Egyptian fractions can be done through playful methodologies integrated with other subjects such as history and geography in the contextualization of mathematics, favoring the review of this content in Basic Education and contributing to teaching and learning.

Keywords: Egyptian Fractions. Teaching Fractions. Playful Methodologies. Teaching and Learning.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estela funerária da Princesa Nefertiabet (IV Dinastia, c. 2590–2565 a.C.), em calcário pintado. Fonte: (LOUVRE; E15591, 2004).	15
Figura 2 – Fragmento do Papiro Rhind, transcrito pelo escriba Ahmes. Fonte: (BRITISH; MUSEUM, 2018).	15
Figura 3 – Fonte: Autor.	17
Figura 4 – Fonte: Autor.	17
Figura 5 – Exemplos de números em hieróglifo, destacando o valor correspondente de cada símbolo em sua decomposição. Fonte: Autor.	17
Figura 6 – Versão editada da Cabeça de Maça de Narmer, originalmente fotografada por James Edward Quibell em 1900. Fonte: (BRITISH; MUSEUM, 2004, cesso em 11 jun. 2025)	19
Figura 7 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	20
Figura 8 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	20
Figura 9 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	21
Figura 10 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	21
Figura 11 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	21
Figura 12 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	22
Figura 13 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	22
Figura 14 – Representação em hieróglifos dos números 1895 e 587. Fonte: autor.	23
Figura 15 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	23
Figura 16 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	23
Figura 17 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	24
Figura 18 – Representação em hieróglifos dos números 2225 e 913. Fonte: Autor.	24
Figura 19 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	25
Figura 20 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	25
Figura 21 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	25
Figura 22 – Ideogramas egípcios representando a ausência de diferença entre quantidades numéricas. Fonte: adaptado de (BERLIM-BRANDEMBURGO, 1990-2000).	26
Figura 23 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	27
Figura 24 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	28
Figura 25 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	28
Figura 26 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	28
Figura 27 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	29
Figura 28 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	29
Figura 29 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	30
Figura 30 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.	30
Figura 31 – Representação das frações egípcias em hieróglifos. Fonte: autor.	31

Figura 32 – Divisão prática de 5 por 8. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos provenientes das plataformas (VECTEEZY, 2007, acesso em 11 jun. 2025) (ícone do saco) e (GUAVANABOY, 2000, acesso em 11 jun. 2025) (personagem egípcio).	32
Figura 33 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia. Ilustração elaborada pelo autor.	33
Figura 34 – Divisão prática de 58 por 87 pelo método egípcio. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).	33
Figura 35 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia. Ilustração elaborada pelo autor.	34
Figura 36 – Divisão prática de 2 por 5 pelo método egípcio. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).	35
Figura 37 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia. Ilustração elaborada pelo autor.	36
Figura 38 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia para frações. Ilustração elaborada pelo autor.	36
Figura 39 – Análise da coleta de dados. Fonte: Autor.	60
Figura 40 – Exemplo prático decomposição de fração em frações egípcias. Fonte: Autor	64
Figura 41 – Exemplo visuais das frações unitária. Fonte: Autor	65
Figura 42 – Decomposição de frações em frações egípcias. Fonte: Autor	66
Figura 43 – Exemplo de distribuição de 3 pães para 4 pessoas. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).	69
Figura 44 – Exemplo de distribuição de 3 pães para 4 pessoas. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).	69
Figura 45 – Exemplo de distribuição de 3 pães para 4 pessoas. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).	70
Figura 46 – Representação de $\frac{3}{4}$ na escrita moderna e em hieróglifos. Fonte: Autor.	70
Figura 47 – Pergaminho com os problemas de divisão que serão sorteados. Fonte: Autor.	71
Figura 48 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte autor.	75
Figura 49 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte: Autor.	76
Figura 50 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte: Autor.	76
Figura 51 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte: Autor.	78
Figura 52 – Evidências fotográficas do 2º jogo educacional. Fonte: Autor.	80
Figura 53 – Evidências fotográficas do 2º jogo educacional. Fonte: Autor.	82
Figura 54 – Evidências fotográficas do 2º jogo educacional. Fonte: autor.	82
Figura 55 – sequência dos números naturais. Fonte: Autor.	91

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Motivações para as escolhas dos símbolos para os numerais egípcios.	18
Tabela 2	–	Frações Egípcias no Papiro de Rhind: Decomposição de $\frac{2}{n}$ para n Ímpar.	40
Tabela 3	–	Comparação das decomposições de $\frac{2}{n}$: Rhind e Fibonacci-Sylvester.	45
Tabela 4	–	Decomposição da fração $\frac{3}{n}$ pelo método de Fibonacci-Sylvester	51
Tabela 5	–	Decomposições Esperadas das Frações em Frações Egípcias. Fonte: Autor.	67
Tabela 6	–	Pontuação do Jogo Pizza Egípcia: Juntando Fatias e Descobrimdo Frações. Fonte: Autor.	77
Tabela 7	–	Pontuação dos Grupos no Jogo As Encomendas do Faraó. Fonte: Autor.	81

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	13
1.1.1	Objetivo Geral	13
1.1.2	Objetivos Específicos	13
1.2	Organização	14
2	O SISTEMA NUMÉRICO EGÍPCIO	15
2.0.1	Sistema de numeração egípcia	16
2.1	Aritmética egípcia	19
2.1.1	Adição	19
2.1.2	Subtração	22
3	MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NO SISTEMA NUMÉRICO EGÍPCIO E AS FRAÇÕES EGÍPCIAS	27
3.0.1	Multiplicação	27
3.0.2	Divisão	29
3.1	Frações egípcia	30
4	JUSTIFICATIVAS MATEMÁTICAS DOS MÉTODOS DE MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO E FRAÇÕES EGÍPCIAS	38
4.1	Conversão de Frações para Representação Egípcia	38
4.2	Teorema Fibonacci-Sylvester (Fração Própria)	40
4.3	Teorema Erdős-Stein (Fração Imprópria)	46
4.3.1	Infinitas Decomposições e Conjecturas das Frações Egípcias	48
4.4	Todo número natural pode ser escrito como soma de potências de dois distintas	52
4.4.1	Representação Binária dos Inteiros	52
5	ANÁLISE DE RECURSOS DIDÁTICOS SOBRE MATEMÁTICA E FRAÇÕES EGÍPCIAS	54
5.1	Análise dos Livros Didáticos e Sites Educacionais	54
5.1.1	Análise do Livro Didático 1 (L.D.1)	55
5.1.2	Análise do Livro Didático 2 (L.D.2)	57
5.1.3	Análise do Livro Didático 3 (L.D.3)	58
5.1.4	Análise do Site Educacional 1 (S.E.1) e Site Educacional 2 (S.E.2)	59
5.2	Análise dos Dados Coletados dos Livros didáticos e Sites Educacionais	59
6	ENSINANDO FRAÇÕES COM FRAÇÕES EGÍPCIAS: DOIS JOGOS EDUCATIVOS PARA SALA DE AULA	61
6.1	Descrição dos Jogos	63
6.1.1	Pizzas Egípcias: Juntando Fatias e Descobrendo Frações	63

6.1.1.1	Instruções Do Jogo	64
6.1.2	As Comendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios	68
6.1.2.1	Instruções Do Jogo	69
6.2	Relatório da Aplicação dos Jogos	74
6.2.1	1º Jogo Educacional: Pizzas Egípcias	74
6.2.2	Desenvolvimento e Dificuldades Encontradas	77
6.2.3	2º Jogo Educacional: As Encomendas do Faraó	79
6.2.4	Desenvolvimento e Dificuldades Encontradas	81
6.3	Discussão dos Resultados	84
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS	86
	APÊNDICES	89
	APÊNDICE A – RESULTADOS AUXILIARES	90
A.1	Princípio de Indução	90
A.1.1	Conjunto dos Números Naturais	90
A.1.2	O Axioma da Indução	91
A.1.2.1	Segundo Princípio da Indução (Indução Forte)	92
A.2	Princípio da Boa Ordenação	92
A.3	Propriedade Arquimediana dos Números Naturais	93
A.4	Série	93
A.4.0.0.1	Exemplo (série convergente):	94
A.4.0.0.2	Exemplo (série divergente):	94
	ANEXOS	95
	ANEXO A – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E INSTRUÇÃO PARA OS JO- GOS EDUCACIONAIS	96
	ANEXO B – PIZZA EGÍPCIA: JUNTANDO FATIAS, DESCOBRINDO FRA- ÇÕES	122
	ANEXO C – AS ENCOMENDAS DO FARAÓ: DIVIDINDO PÃES COMO OS EGÍPCIOS	141

1 Introdução

Enquanto docente de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, no decorrer das aulas pude observar a dificuldade apresentada por alguns alunos na compreensão das frações. Junto a isso, foi observado que a parte histórica dessa temática pouco é mencionada em livros didáticos. Contudo, como proposto pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL., 2018), a história da matemática deve ser utilizada como recurso educacional tendo em vista que essa é capaz de promover o entendimento de que a matemática é uma ciência advinda da produção social contextualizada com a realidade e o contexto em que está inserida, logo deve ser abordada de forma crítica e sem se limitar a memorização de fórmulas e equações ou a aparecer em mera inclusão de textos explicativos.

De acordo com (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2009), o ensino de frações normalmente apresenta-se de forma mecânica, focado na manipulação simbólica e na aplicação de algoritmos, comumente acompanhado do uso repetitivo de diagramas. Em contraste, as frações egípcias, assim como toda a matemática praticada pelos antigos egípcios, emergiam da necessidade de resolver problemas da sociedade, como a distribuição de alimentos, terras ou outros recursos. Pensando assim, busca-se aqui responder à seguinte questão: de que maneira o uso das frações egípcias pode contribuir para o ensino-aprendizagem de frações no Ensino Fundamental?

Acreditamos que atualização das frações egípcias como ferramenta didática pode favorecer o processo de ensino e aprendizagem, logo, possuem um valor pedagógico que não pode ser negligenciado. Com esse conceito em mente, este estudo aborda a matemática do Egito antigo, baseando-se em seu sistema de numeração e práticas aritméticas, com especial ênfase nas frações utilizadas pelos egípcios. Porquanto, foi criado o recurso educacional que será apresentado ao final deste documento, que consiste em dois jogos educacionais. Além de incorporar as frações egípcias, esses jogos também oferecem um contexto histórico sobre essa civilização e promovem atividades práticas e divertidas, utilizando-se do método antigo desenvolvido pelos egípcios.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Investigar como as frações egípcias e suas aplicações podem contribuir para o ensino-aprendizagem de frações nos anos finais do Ensino Fundamental.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Empregar a matemática do Egito antigo e sua forma de expressar frações como uma ferramenta pedagógica;
- Entender o sistema de contagem e a matemática dos antigos egípcios;
- Compreender a conexão oposta entre a multiplicação e a divisão utilizando o método egípcio;

- Examinar de que maneira o método egípcio de divisão impactou a forma como as frações próprias são representadas;
- Conhecer e compreender propriedades matemáticas que fundamentam os métodos egípcios de multiplicação, divisão e decomposição de frações;
- Investigar a abordagem da matemática egípcia e das frações egípcias em livros didáticos e plataformas educacionais;
- Desenvolver estratégias para a utilização das frações egípcias no ensino-aprendizagem de frações, especialmente no Ensino Fundamental – anos finais.

1.2 Organização

Este trabalho é composto por sete capítulos, sendo o primeiro capítulo a presente introdução. O segundo capítulo aborda o sistema numérico do Egito, considerando o seu contexto histórico e cultural, juntamente com alguns aspectos de sua aritmética.

No terceiro capítulo, são examinadas as operações de multiplicação e sua operação inversa, a divisão. Posteriormente, discorre-se sobre as frações egípcias que derivam da abordagem prática de divisão de recursos utilizada pelos antigos egípcios.

O quarto capítulo se concentra em demonstrações matemáticas para representação dos números naturais na base dois que é a base do método da multiplicação egípcio assim como a representação de frações próprias e impróprias. Também é feita uma análise da decomposição das frações $\frac{2}{n}$, onde n é um número ímpar variando de 3 a 101, utilizando informações contidas no Papiro de Rhind, redigido pelo escriba Ahmes. No quinto capítulo é apresentado uma investigação de como a matemática e as frações egípcias são apresentadas em alguns materiais didáticos e sites educacionais.

No capítulo seis, é apresentado o produto educacional, composto por duas atividades lúdicas: a primeira concentra-se na decomposição de frações próprias em frações egípcias, enquanto a segunda explora o método de divisão utilizado pelos egípcios. Ambos foram aplicados a uma turma do 9º ano do ensino fundamental, acompanhados de relatórios sobre a implementação de cada jogo. Em seguida, são discutidas as considerações finais. Além disso, incluem-se elementos pós-textuais, como um apêndice com resultados preliminares e dados auxiliares que fundamentaram as demonstrações matemáticas apresentadas no quarto capítulo, e anexos que trazem toda a arte conceitual e a fundamentação teórica da matemática egípcia, juntamente com exemplos e regras relacionadas aos jogos educacionais.

2 O sistema numérico egípcio

A escrita egípcia surgiu da necessidade de comunicação e registro de informações de forma duradoura, tanto para uso imediato quanto para posteridade. Segundo (IMHAUSEN, 2016), a invenção dos hieróglifos, considerados a primeira forma de escrita no Antigo Egito, foi um processo que levou muitos anos para se desenvolver. Esses símbolos eram utilizados em suportes como placas de pedra, cerâmica, paredes de templos e pirâmides, bem como em tumbas. Podemos observar o uso dos hieróglifos na Figura 1, onde são retratadas oferendas à princesa Nefertiabet possivelmente membro da família real de Quéops¹, mencionada por (LEHNER, 1997, p. 45) em seu contexto funerário, sem confirmação de sua filiação a conforme (DODSON; HILTON, 2004, p. 58). Ela é representada em frente a uma mesa de oferendas com pães, e ao redor da mesa onde estão ilustradas outras ofertas.



Figura 1 – Estela funerária da Princesa Nefertiabet (IV Dinastia, c. 2590–2565 a.C.), em calcário pintado. Fonte: (LOUVRE; E15591, 2004).



Figura 2 – Fragmento do Papiro Rhind, transcrito pelo escriba Ahmes. Fonte: (BRITISH; MUSEUM, 2018).

Com a expansão do império que teve início no final do IV milênio Reinado Narmer ², os escribas

¹ Conforme (LEHNER, 1997, p.45) Quéops também conhecido Khufu: Faraó da Quarta Dinastia do Antigo Egito (c. 2589–2566 a.C.), conhecido principalmente por construir a Grande Pirâmide de Gizé, uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo.

² Conforme (MIDANT-REYNES, 2000) Narmer é possivelmente o primeiro faraó do Egito Antigo, unificando as regiões do Alto Egito e do Baixo Egito, marcando o início da Primeira Dinastia por volta de 3100 a.C.

necessitaram de um método mais ágil para registrar informações, o que levou ao desenvolvimento da escrita manuscrita conhecida como hierática. É possível identificar o uso da escrita hierática na Figura 2, onde se encontra um fragmento do Papiro Rhind, escrito pelo escriba Ahmes. Nele, é apresentado problemas e sua solução.

Ninguém é capaz de dizer exatamente quando a escrita, tal como a entendemos, realmente começou. Mas com os egípcios, como em outras civilizações antigas, o método usado para representar números deve ter sido pelo menos mais fácil do que escrever as palavras foneticamente equivalentes ³. (GILLINGS, 1972, p.4).

Assim, é possível que os numerais egípcios tenham surgido antes da escrita das palavras, levando à reflexão de que ambas as formas de escrita (hieróglifos e hierática), especialmente a hieroglífica, desenvolveram-se inicialmente com o objetivo de representar números para quantificar, medir e contar. O uso de numerais egípcios transcendia o âmbito administrativo, estendendo-se também a rituais religiosos, onde números de oferendas eram frequentemente ilustrados em templos e tumbas, além de representar o poder absoluto do faraó, registrados em pedra para perpetuar-se por séculos através dos hieróglifos. Conforme mencionado anteriormente, a escrita hierática, de caráter cursivo e abreviado, desenvolveu-se para atender necessidades administrativas, visando eficiência com o uso de pincel e tinta em papiro. Segundo (IMHAUSEN, 2016) em um nível mental bastante rudimentar, talvez se possa comparar a escrita hieroglífica à nossa escrita impressa e à escrita hierática para caligrafia. Deste modo, ambas coexistiram simultaneamente, cada uma com finalidades específicas, exigindo dos escribas domínio sobre ambas, conforme a necessidade.

As evidências da tumba de Uj⁴ sugerem que a invenção da escrita ocorreu durante o processo de estabelecimento de uma hierarquia social e de expansão da cultura Naqada⁵. Esta expansão pode ter criado a necessidade de uma administração organizada em que a escrita fosse uma ferramenta poderosa para denotar a propriedade e a proveniência dos bens. (BAINES, 1988, p. 196)

Desta forma, entende-se que a escrita numérica egípcia teve múltiplas finalidades: registro administrativo, religioso e demonstração de poder e influência da elite, especialmente do faraó, em suportes duradouros como pedras e paredes, cristalizando-se na escrita hieroglífica. Com a expansão imperial e necessidades administrativas crescentes, emergiu uma escrita cursiva e prática, adaptada ao papiro, dando origem à escrita hierática. Em ambas, os numerais desempenharam papel fundamental auxiliando a unificar o Estado e permitindo sua consolidação.

2.0.1 Sistema de numeração egípcia

O sistema de numeração egípcio em hieróglifos é um sistema decimal, semelhante ao sistema indo-arábico, pois sua base também é decimal. No entanto, ele se diferencia por ser aditivo e não posicional. Empregando símbolos específicos para representar potências de 10, desde 1 até 1000000, conforme ilustrado na Figura 3.

³ O termo “foneticamente equivalente” refere-se a palavras, sons ou expressões que possuem pronúncia idêntica ou muito semelhante, independentemente de diferenças na escrita ou no significado. Conforme (CRYSTAL, 2008, p.178) “a equivalência fonética ocorre quando dois elementos linguísticos compartilham a mesma realização sonora em um determinado contexto”.

⁴ Conforme (BREYER, 2002), Uj também conhecido como Escorpião Rei foi um governante do período pré-dinástico do Egito, por volta de 3200-3000 a.C. Ele é frequentemente associado aos esforços de unificação que antecederam o surgimento do Egito unificado sob o primeiro faraó, Narmer, da Primeira Dinastia.

⁵ Conforme (IMHAUSEN, 2016) cultura pré-dinástica egípcia (4000–3000 a.C.) baseava-se na agricultura, arte, arquitetura e no desenvolvimento inicial da escrita, estabelecendo as bases para o surgimento da civilização egípcia unificada.

Classe	Número decimal	Hieróglifo Egípcio	Significado
Unidade	1		Barra vertical
Dezena	10		Alça
Centena	100		Corda
Milhar	1 000		Flor de lótus
Dezena de milhar	10 000		Dedo
Centena de milhar	100 000		Sapo
Unidade de m milhão	1 000 000		Deus com as mãos levantadas

Figura 3 – Fonte: Autor.

Sistema de numeração indo-arábico	Sistema de numeração egípcio
5	
30	
54	
123	
1 240	
2 050	
1 567 217	
2 000 000	

Figura 4 – Fonte: Autor.

Por exemplo, na Figura 4 observa-se como alguns números do sistema decimal indo-arábico seriam representados no sistema de numeração egípcio. Os números 1240, 2050 e 1567217 são representados exclusivamente por meio de algarismos egípcios. A variação ocorre na quantidade de símbolos necessários para representar cada valor, uma vez que o sistema egípcio é aditivo. Na Figura 5, exemplifica-se a construção de cada um desses números, destacando o valor correspondente a cada hieróglifo.

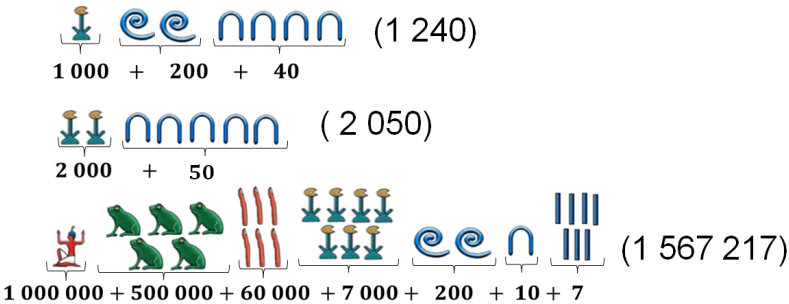


Figura 5 – Exemplos de números em hieróglifo, destacando o valor correspondente de cada símbolo em sua decomposição. Fonte: Autor.

Adotando essa forma de representação, observa-se que alguns números, mesmo sendo maiores, exigem menos símbolos. Por exemplo, 2000000 seria representado por apenas dois hieróglifos, o “deus com as mãos levantadas” ( ) , o que contrasta com a quantidade de símbolos utilizados nos demais números apresentados na Figura 4. Embora o motivo preciso da escolha de cada hieróglifo no sistema de numeração egípcio permaneça incerto na Tabela 1 apresentaremos as possíveis justificativas para a seleção de cada símbolo que evidência uma forte ligação entre a escolha de cada numeral com o cotidiano e cultura dessa civilização.

Na Figura 6, observa-se a representação das oferendas ao faraó Narmer, ilustrando o emprego de numerais para simbolizar seu poder e influência. Cabe destacar que os números apresentados podem não corresponder à realidade quantitativa, mas, sim, exercer uma função simbólica, enfatizando o poderio e influência do faraó. A imagem permite inferir a quantidade de oferendas: 400000 touros, 1422000 cabras e 120000 cativos. Tais números, embora sendo possível não refletir a reali-

Tabela 1 – Motivações para as escolhas dos símbolos para os numerais egípcios.

Numerais em hieróglifos egípcios	Motivações para as escolhas dos símbolos para os numerais egípcios
	O mais básico, o simples traço para representar uma unidade, é usado não apenas no Egito, mas também em uma variedade de outras culturas, possivelmente originado de marcas em uma régua de contagem. (MENNINGER, 1969, p. 223)
	Segundo (GARDINER, 1957), símbolo do número 10 representaria “algema para gado sem barra transversal”. Essa análise fundamenta-se no fato de que a variante deste signo com barra transversal funcionava como ideograma ou determinativo na palavra egípcia <i>mgt</i> (“estábulo”), enquanto a forma sem a barra atua como fonograma no plural <i>mut</i> (“estábulos”). A razão pela qual este símbolo específico foi escolhido para representar o numeral dez permanece incerta, podemos estabelecer uma possível conexão com a prática de agrupar dez animais sob uma mesma algema.
	O símbolo que representa 100, possivelmente aponta para uma corda de medição que foi usada para medir o comprimento de um campo, que pode ter tido um comprimento padrão de 100 côvados (unidade de medida côvados era utilizada no Antigo Egito para medir comprimento, equivalente a aproximadamente 52,5 centímetros. Para mais informações, consulte (LEHNER, 1997, p. 87)).
	A flor de lótus branco, é frequentemente retratada nas representações egípcias como elemento presente em paisagens, ornamento e, muitas vezes, com significado simbólico em rituais ou atos religiosos. Possivelmente, sua frequência (aparentemente ainda pode ser encontrada nos canais de irrigação no Egito atualmente) na paisagem pode ter resultado em seu uso como um símbolo para o número 1 000 (sobre lótus branco no antigo Egito, veja (MANNICHE, 1989, p. 126)).
	Conforme (IMHAUSEN, 2016, 19) hieróglifo de um dedo com valor de 10 000 só é plausível se a construção numérica egípcia, semelhante à moderna construção inglesa, utilizou um conceito de “pacote” de milhares, ou seja, “dez mil”. Assim, a ideia de 10 dedos, cada um valendo 1 000, torna o uso do dedo como representação bastante plausível.
	O símbolo para 100 000, um girino, provavelmente não precisa de muita explicação para quem já viu um lago de desova de sapos e a multidão de girinos se desenvolvendo a partir dele.
	O maior dos símbolos numéricos egípcios, representando 1 000 000, é o deus sentado Heh. Um dos deuses do tempo primitivo, usualmente retratado carregando o céu ou a terra. A sua representação é frequentemente encontrada nas paredes de templos, vasos e joias, onde supostamente concederia milhões de anos de vida ((REINEKE, 2014, p. 26) sugere uma conexão entre o uso de Heh para um milhão e o “céu infinito” ligado a esse deus).

dade, desempenham uma função simbólica evidenciando a influência e riqueza da elite dominante, especialmente para legitimar o poder do soberano. Além da escrita hieroglífica, se desenvolveu a escrita hierática, uma variante cursiva empregada pelos escribas para registrar textos em papiro, devido à sua praticidade e facilidade. No entanto, considerando que a maioria dos livros didáticos de ensino básico adota exclusivamente o sistema de numeração egípcio em hieróglifos, este trabalho dará continuidade utilizando apenas essa representação.

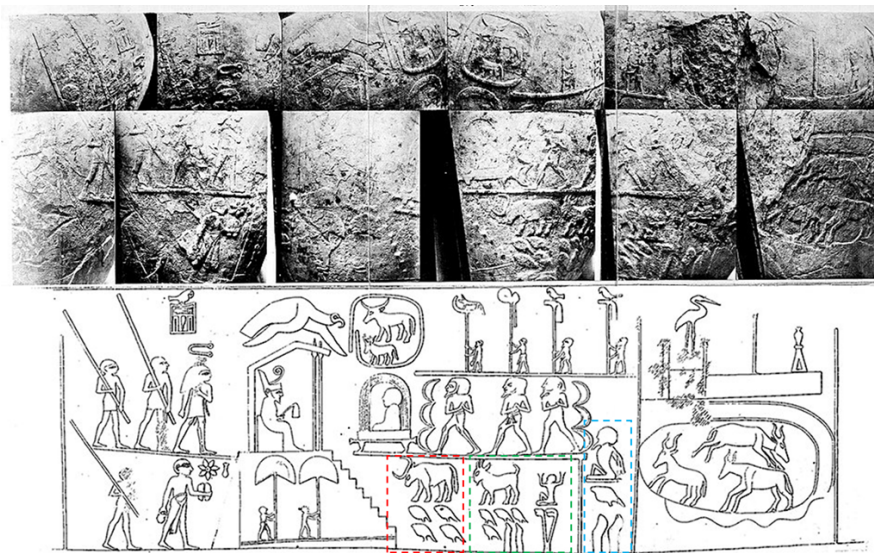


Figura 6 – Versão editada da Cabeça de Maça de Narmer, originalmente fotografada por James Edward Quibell em 1900. Fonte: (BRITISH; MUSEUM, 2004, cesso em 11 jun. 2025)

2.1 Aritmética egípcia

Segundo (KATZ, 2009), uma vez que uma civilização estabelece um sistema de escrita numérica, é natural que desenvolvam algoritmos para realizar cálculos com esses números. Conforme observa (EVES, 2011), a aritmética egípcia possui um forte caráter aditivo, o que seria uma consequência direta do seu sistema de numeração também ser aditivo. E, de acordo com (GILLINGS, 1972), nos papiros matemáticos disponíveis, muitos dos problemas propostos e resolvidos envolvem as quatro operações fundamentais. No entanto, métodos explícitos para adição e subtração são escassos, sugerindo que essas operações eram realizadas e verificadas separadamente pelos escribas, com as respostas sendo posteriormente registradas nos papiros.

A raridade de erros em adições e subtrações nos papiros sugere que tabelas dessas operações podem ter existido, embora nenhuma cópia tenha sobrevivido, como observado por (GILLINGS, 1972, p. 11). A seguir, veremos como os egípcios realizavam adições e subtrações.

2.1.1 Adição

A operação de adição no Antigo Egito segue um método direto, baseando-se no agrupamento de hieróglifos de mesmo valor, e substituindo-os por símbolos de valor imediatamente superior quando necessário. Cabe destacar que o sistema de numeração egípcio não permitia a repetição do mesmo símbolo mais de nove vezes. A seguir, nas Figura 7-(a), veremos como a operação de adição dos

números 1798 e 783 se dá conforme aritmética egípcia, onde esses estes números estão representados em hieróglifos, respectivamente, na primeira e na segunda parcela dessa soma.

Organizando os números reescritos em hieróglifos, utilizaremos um traço horizontal para separar a resposta que será encontrada. Adotaremos o símbolo “+” para indicar a operação de adição, ressaltando que nem o símbolo “+” nem o traço horizontal eram utilizados pelos antigos egípcios.

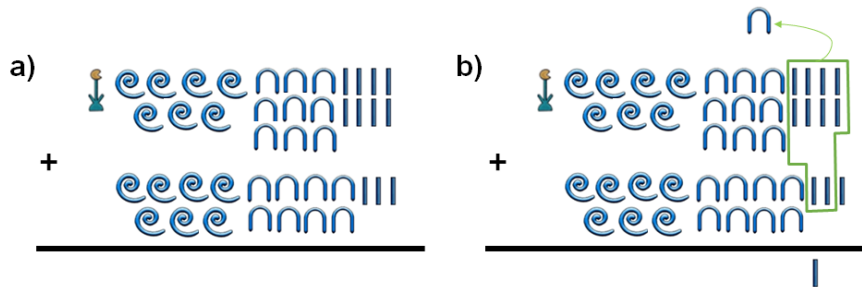


Figura 7 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Observando os agrupamentos ilustrados na figura abaixo, verifica-se que há um total de 11 barras verticais, equivalendo a $11 = 10 + 1$. Realizando a troca equivalente, onde 10 barras verticais são substituídas por 1 alça, conclui-se que o resultado da soma será composto por 1 barra vertical, representando 1 unidade como ilustrado na Figura 7-(b).

Considerando que as parcelas somadas possuem 9 e 8 alças, respectivamente, obtém-se um total de 17 alças, equivalendo a $10 + 7$ alças. Analogamente, as 10 alças são equivalentes a 1 corda. Portanto, restarão 7 alças, além de 1 alça proveniente da soma das 10 barras verticais anteriores. Logo o resultado da soma é composto por 8 alças e 1 barra vertical, correspondendo a 8 dezenas e 1 unidade como ilustrado na Figura 8.

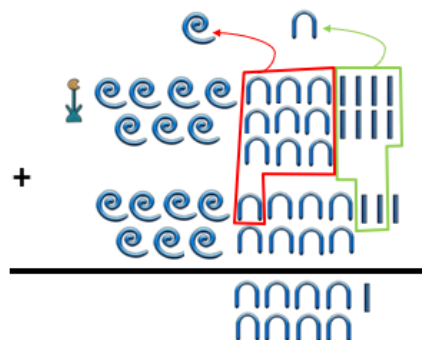


Figura 8 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Similarmente, observa-se que ambos os números possuem 7 cordas, totalizando 14 cordas ($10+4$). Considerando que 10 cordas equivalem a 1.000 barras verticais (unidades), realizaremos a substituição por uma flor de lótus. Restam, então, 4 cordas, que, somadas à corda resultante da adição das alças anteriores, totalizam 5 cordas. Então, o número resultante da soma será composto por 5 cordas, 8 alças e 1 barra vertical, correspondendo a 5 centenas, 8 dezenas e 1 unidade, conforme ilustrado na Figura 9-(a).

Portanto ao somar as duas parcelas resulta em duas flores de lótus, sendo uma delas proveniente da soma anterior. Por conseguinte, o número resultante da soma, representado em hieróglifos egípcios, é composto por 2 flores de lótus, 5 cordas, 8 alças e 1 barra vertical. Esses elementos corres-

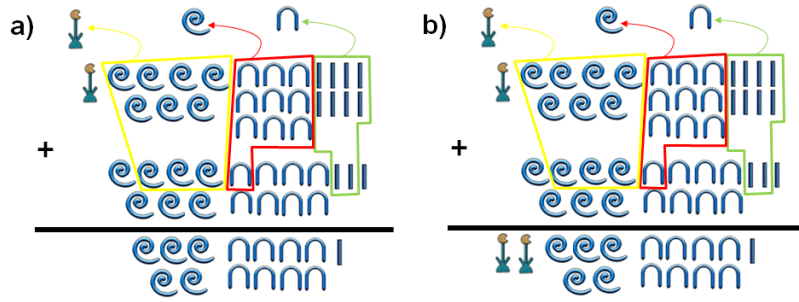


Figura 9 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

pondem, respectivamente, aos valores 2000, 500, 80 e 1 em nosso sistema de numeração, totalizando $2000 + 500 + 80 + 1 = 2581$ e em hieróglifos $\text{II} \text{e} \text{e} \text{nnnn} \text{I}$ como ilustra a Figura 9-(b).

Agora, apresentaremos mais um exemplo de como a operação de adição dos números 15653 e 5849 pode ser realizada utilizando a aritmética egípcia. Na Figura 10, esses números estão representados em hieróglifos, com o primeiro número na parcela superior e o segundo na parcela inferior, respectivamente.

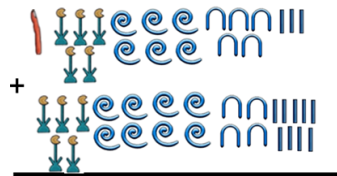


Figura 10 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Analisando os agrupamentos apresentados na figura acima, começamos pela soma das unidades. Há um total de 12 traços verticais (unidades), o que equivale a $10 + 2$. Realizando a conversão apropriada, em que 10 barras verticais são substituídas por 1 alça (10 unidades), concluímos que o resultado da soma incluirá 1 alça e 2 barras verticais, conforme ilustrado na Figura 11-(a).

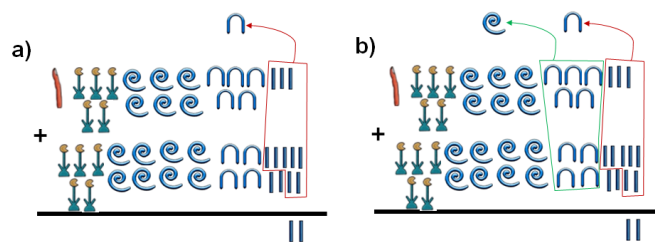


Figura 11 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Em seguida, somamos as dezenas. A primeira parcela possui 5 alças, e a segunda possui 4, totalizando 9 alças mais 1 alça resultante da soma anterior. Totalizando 10 alças equivalem a 1 corda (100 unidades) não possuindo valor para as dezenas, como mostra a Figura 11-(b).

Prosseguindo para as centenas, a primeira parcela possui 6 cordas, e a segunda possui 8, somando com mais 1 corda da soma anterior, totalizando 15 cordas. Como 10 cordas equivalem a 1 flor de lótus (1000 unidades), realizamos a substituição, resultando em 1 flor de lótus e 5 cordas, representando 1500 unidades, conforme ilustrado na Figura 12-(a).

Agora, somamos as unidades de milhar. A primeira parcela possui 5 flores de lótus, e a segunda também possui 5, totalizando 10 flores de lótus. Como 10 flores de lótus equivalem a 1 dedo (10000

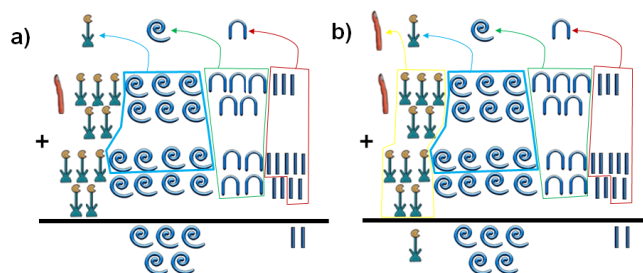


Figura 12 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

unidades), realizamos a substituição, resultando em 1 dedo. Além disso, adicionamos 1 flor de lótus proveniente da conversão das cordas, totalizando 1 dedo e 1 flor de lótus, que representam $10000 + 1000 = 11000$ unidades, conforme ilustrado na Figura 12-(b).

Por fim, consideramos as dezenas de milhar. A primeira parcela possui 1 dedo (10000 unidades), e a segunda não possui nenhum. Somando o dedo proveniente da conversão anterior, obtemos 2 dedos. Portanto, o total é 2 dedos, representando 20000 unidades. Logo, o número resultante da soma, representado em hieróglifos egípcios, é composto por 2 dedos (20000), 1 flor de lótus (1000), 5 cordas (500), e 2 barras verticais (2), totalizando $20000 + 1000 + 500 + 2 = 21502$ e em hieróglifos , como ilustra a Figura 13.

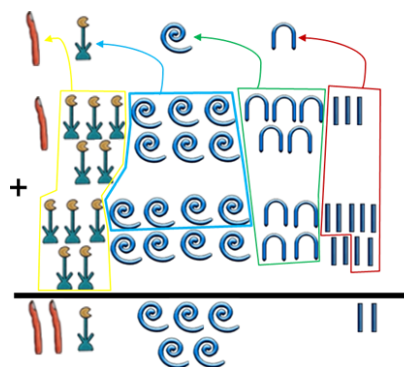


Figura 13 – Processo de adição no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

2.1.2 Subtração

Segundo (GILLINGS, 1972), os egípcios resolveriam subtrações de forma indireta. Por exemplo, os egípcios não diziam para si mesmos: “De 12 menos 7 resulta em 5”, mas sim: “7, quantos faltam para fazer 12?” Assim, convertia-se uma subtração em adição, onde o resultado da subtração representava a diferença entre dois valores através de uma abordagem complementar de quanto deve ser somado ao menor número para se obter o maior. É importante ressaltar que os egípcios operavam exclusivamente com valores inteiros positivos, não considerando números negativos em suas operações de subtração. O desenvolvimento dos números negativos ocorreu muitos séculos após o auge da civilização egípcia, surgindo da necessidade de resolver equações matemáticas e também de aplicações no comércio.

Em uma tentativa de dar sentido os números negativos, no século XVI, o italiano Bombelli chegou anunciar que: p15 com m20 dá m5 porque, se tivessem 15 unidades de moeda e devesse 20, pagando as 15 continuaria devendo 5. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p 214)

Tomemos, por exemplo, $1895 - 587$. Realizaremos essa operação pelo método egípcio descrito onde:

$$1895 - 587 = x \iff x + 587 = 1895.$$

Neste contexto, os números 1895 e 587 são, respectivamente, o minuendo e o subtraendo representado por hieróglifo respectivamente na Figura 14. O x representa o valor que diferencia os dois números, ou seja, a quantidade que falta para o menor valor para se igualar ao maior.

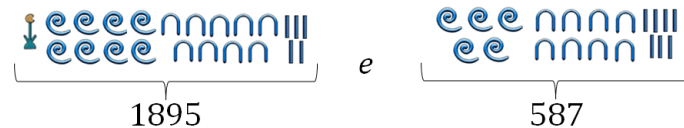


Figura 14 – Representação em hieróglifos dos números 1895 e 587. Fonte: autor.

Determinar o valor de x equivale a somá-lo ao subtraendo, resultando no minuendo, que é o valor da diferença. Agora, abordaremos esse processo utilizando hieróglifos egípcios. Iniciaremos montando a soma já conhecendo o seu resultado e uma de suas parcelas, como podemos observar na Figura 15.

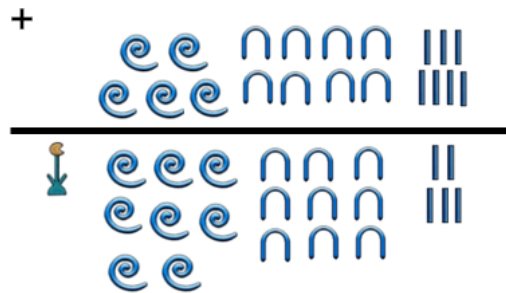


Figura 15 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

O valor x possui um total de unidades tal que, somadas 7 unidades do número 587, resultarão em 5 unidades da soma esperada. Logo, $7 + 3 = 10$, o que equivale a 0 unidades. Considerando $7 + 3 + 5 = 7 + 8 = 15$, obtemos 5 unidades procuradas, com 10 unidades excedentes. Representaremos essas 10 unidades excedentes com o símbolo da alça, conforme ilustrado na Figura 16.

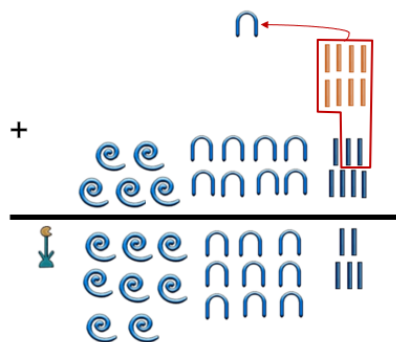


Figura 16 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Com uma alça adicional resultante da soma anterior, somada às 8 alças preexistentes, concluímos que o número x não apresenta o símbolo correspondente às dezenas. Para as centenas, observamos que o número 587 possui 5 cordas, representando 5 centenas. Para atingir 8 centenas, é necessário acrescentar 3 cordas adicionais, pois $8 = 5 + 3$. Portanto, o número x possui 3 cordas, correspondendo às centenas, conforme ilustrado na Figura 17-(a).

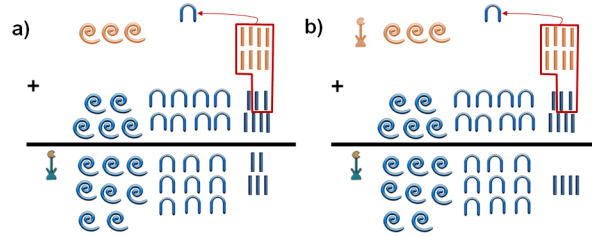


Figura 17 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

O resultado da soma esperada é 1895, indicando uma unidade de milhar. Considerando que o número 587 não possui essa unidade, concluímos que o número x apresenta uma unidade de milhar, que será representada em hieróglifos egípcios, 1 flor de lótus, ou seja,    como ilustrado na Figura 17-(b).

Portanto, o número x , representado no sistema de numeração egípcio, é composto por 1 (1000 unidades) flor de lótus, 3 alças (30 unidades) e 8 bastões (8 unidades) logo

$$x = 1000 + 30 + 8 = 1038,$$

pois

$$1895 - 587 = x \iff x + 587 = 1895 \iff 1308 + 587 = 1895 \iff x = 1038.$$

Agora, consideremos mais um exemplo: a subtração $2225 - 913$. Realizaremos essa operação novamente pelo método egípcio sendo que:

$$2225 - 913 = y \iff y + 913 = 2225.$$

Os números 2225 e 913 são, respectivamente, o minuendo e o subtraendo na Figura 18, onde podemos ver sua representação em hieróglifos. O y sendo a diferença entre os dois números, ou seja, o valor necessário para que a quantidade menor se iguale à maior.

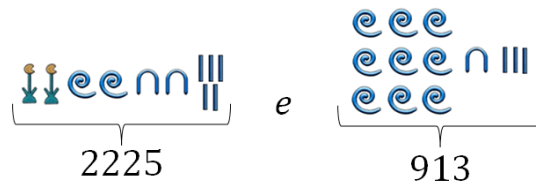


Figura 18 – Representação em hieróglifos dos números 2225 e 913. Fonte: Autor.

Pelo método egípcio, determinar o valor de y equivale a somá-lo ao subtraendo, resultando no minuendo. Novamente, iniciaremos montando a soma, já conhecendo o seu resultado e uma de suas parcelas, como podemos observar na Figura 19-(a).

O valor y possui um total de unidades tal que, somadas 3 unidades do número 913, resultarão em 5 unidades da soma esperada. Logo, $3 + 2 = 5$, o que equivale a 5 unidades. Como não há excedentes

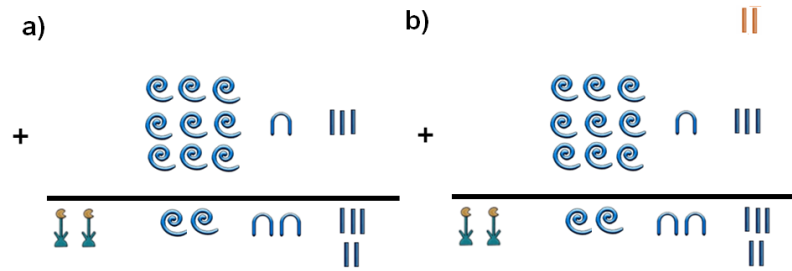


Figura 19 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

nessa soma, não será necessário utilizar o símbolo da alça para representar unidades excedentes, conforme ilustrado na Figura 19-(b). Para as dezenas, observamos que o número 913 possui 1 alça, representando 10 unidades. Para atingir 2 alças (ou 20 unidades), é necessário acrescentar 1 alça adicional, pois $20 = 10 + 10$. Portanto, o número y possui 1 alça correspondente às dezenas, conforme ilustrado na Figura 20.

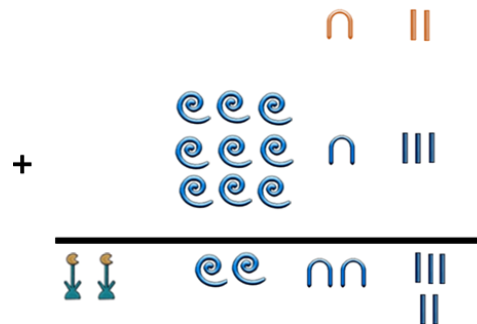


Figura 20 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Para as centenas, o número 913 é representado por 9 cordas, que equivalem a 900 unidades. Para atingir 200 unidades, que correspondem a duas cordas do número y , é necessário que $900 + 300 = 1200$. Portanto, o número y possui 3 cordas. No entanto, como o sistema egípcio não utiliza símbolos específicos para valores entre 1000 e 10000, devemos representar 1200 como 1 flor de lótus (1000) e 2 cordas (200). Dessa forma, os milhares excedentes serão adicionados na próxima etapa da soma, conforme ilustrado na Figura 21-(a).

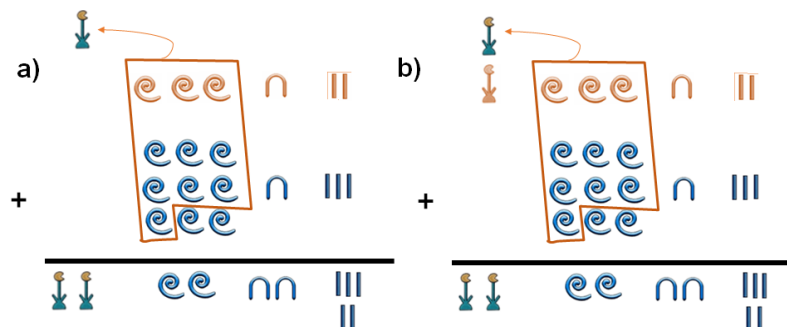


Figura 21 – Processo de subtração no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

O resultado da soma esperada é 2225, o que indica duas unidades de milhar. Considerando que o número 913 não possui unidades de milhar, concluímos que o número y apresenta uma unidade de milhar. Essa unidade será adicionada à unidade de milhar da soma anterior, totalizando 2000, representadas em hieróglifos egípcios por 2 flores de lótus, conforme ilustrado na Figura 21-(b).

Portanto, o número y , representado no sistema de numeração egípcio, é composto por 1 flor de lótus (1000 unidades), 3 cordas (300 unidades), 1 alça (10 unidades) e 2 bastões (2 unidades). Logo, $y = 1000 + 300 + 10 + 2 = 1312$, em hieróglifos egípcios representamos , pois temos que:

$$2225 - 913 = y \iff y + 913 = 2225 \iff 1312 + 913 = 2225 \iff y = 1312.$$

É importante destacar que os símbolos (+), o traço de separação das parcelas da soma, x e y , símbolos usados hoje em dia, foram recursos utilizados para facilitar a compreensão dessa operação no método egípcio, que provavelmente seria realizada por cálculos mentais.

A matemática egípcia antiga restringia-se a operações com números naturais, não contemplando números negativos. A subtração pressupunha que o subtraendo fosse menor ou igual ao minuendo.

No caso específico em que o subtraendo equivale ao minuendo (por exemplo $10 - 10$), os egípcios utilizavam símbolos distintos para o resultado dessa operação, o que podemos observar na Figura 22-(a). Esses símbolos segundo (ALLEN, 2000) indicavam que não havia diferença entre os números, significando que nada precisaria ser somado ou acrescentado para igualar os valores na Figura 22-(b), é descrito o significado de cada símbolo.

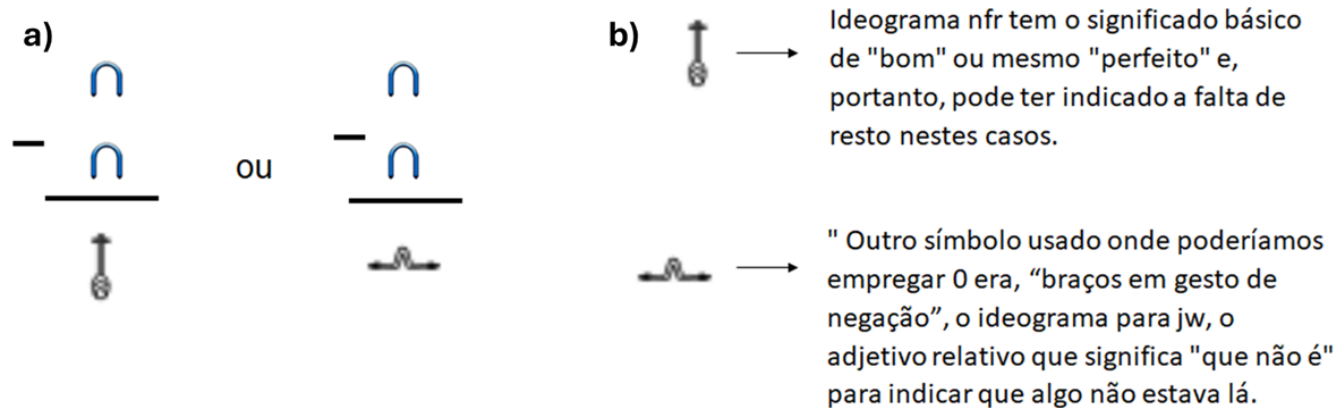


Figura 22 – Ideogramas egípcios representando a ausência de diferença entre quantidades numéricas. Fonte: adaptado de (BERLIM-BRANDEMBURGO, 1990-2000).

Esses símbolos por sua vez não integravam os algoritmos egípcios, servindo exclusivamente para representar situações em que nada precisaria ser adicionado ou acrescentado, sendo anacrônico dizer que os egípcios criaram o zero, pois não o utilizavam em operações, limitando-se a usá-lo apenas em contextos específicos.

3 Multiplicação e divisão no sistema numérico egípcio e as frações egípcias

A matemática egípcia se destaca por ser prática, era utilizada para resolução de problemas do cotidiano. Entre suas contribuições, temos o métodos de multiplicação e divisão, sustentando pelo fato matemático de que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de dois distintas. Mas a sua característica mais marcante são as frações egípcias, que para a matemática moderna se traduz como representação de frações como somas de frações unitárias (são frações da forma $\frac{1}{n}$ com n número natural) distintas, com exceção da fração $\frac{2}{3}$ única fração não unitária. Esse sistema de representação dos números fracionários, estava profundamente ligado com a forma que realizavam multiplicação e divisão, cuja finalidade básica era a realização de distribuição de recursos de forma equitativa. As frações egípcias evidenciam a habilidade matemática dos escribas e oferecem entendimentos profundos sobre a adaptação da matemática às necessidades sociais. Neste capítulo, exploraremos essas técnicas, com foco nas frações egípcias e sua relação com a multiplicação e divisão.

3.0.1 Multiplicação

A multiplicação egípcia fundamenta-se no processo de duplicações sucessivas, baseando-se em um princípio de proporcionalidade em seu algoritmo se utilizando de duplicações para calcular produtos de números inteiros positivos, conforme a interpretação apresentada por (RITTER, 2018). Ilustremos com o exemplo, 18×10 . Enquanto, para nós, 18 e 10 são fatores cujo produto é 180, os egípcios diferenciavam entre multiplicando (número a ser duplicado) e multiplicador (reescrito com soma de potências de dois). Essa estratégia de multiplicação pode ser interpretada, como relatamos, como uma relação diretamente proporcional entre grandezas, pois, ao duplicar a quantidade, suas correspondentes também serão duplicadas. Vamos analisar como os egípcios calculavam 18×10 .

1	18
2	36
4	72
8	144
16	288

Figura 23 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Inicialmente, associamos a unidade $2^0 = 1$ ao multiplicando 18, formando os primeiros pares de números relacionados. Em seguida, realizamos duplicações sucessivas em ambos os lados, construindo uma tabela com duas colunas. Essa tabela será concluída quando uma potência de 2 exceder o multiplicador 10 como podemos observar na Figura 23. Agora, selecionamos e somamos as potências de 2 necessárias para obter o multiplicador, que, neste caso, corresponde à combinação $2 + 8 = 10$ como é ilustrado na Figura 24-(a). Observe que as potências $2^1 = 2$ e $2^3 = 8$ estão associadas aos

valores 36 e 144, respectivamente como podemos observar na Figura 24-(b). Portanto, o resultado da multiplicação 10×18 é $144 + 36 = 180$.

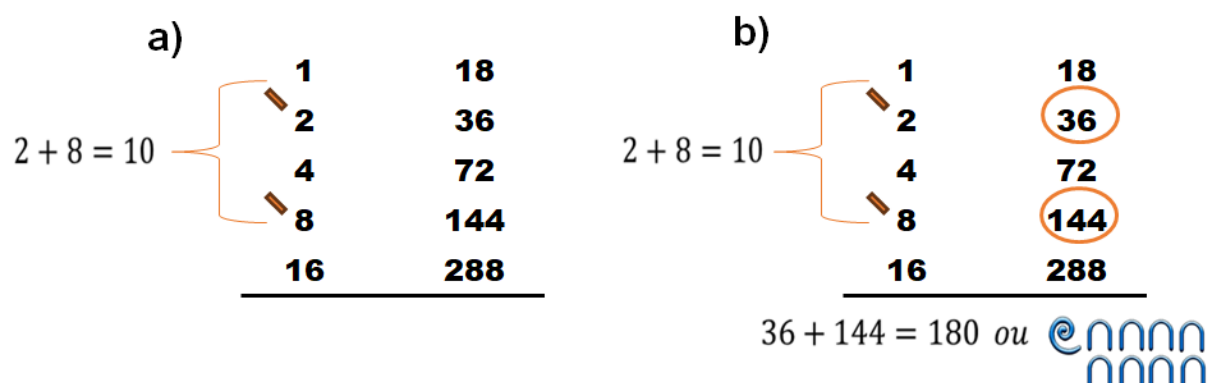


Figura 24 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Vejamos agora mais um exemplo, com o produto de 13×11 . A princípio, associamos a unidade $2^0 = 1$ ao multiplicando 13, formando novamente os primeiros pares de números relacionados. Em seguida, realizamos duplicações sucessivas em ambos os lados, construindo uma tabela com duas colunas. Essa tabela será concluída quando uma potência de 2 exceder o multiplicador 11, como podemos observar na Figura 25.

1	13
2	26
4	52
8	104
16	208

Figura 25 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Agora, selecionamos as potências de 2 necessárias para obter o multiplicador, que, neste caso, corresponde a soma de $1 + 2 + 8 = 11$, como é ilustrado na Figura 26-(a).

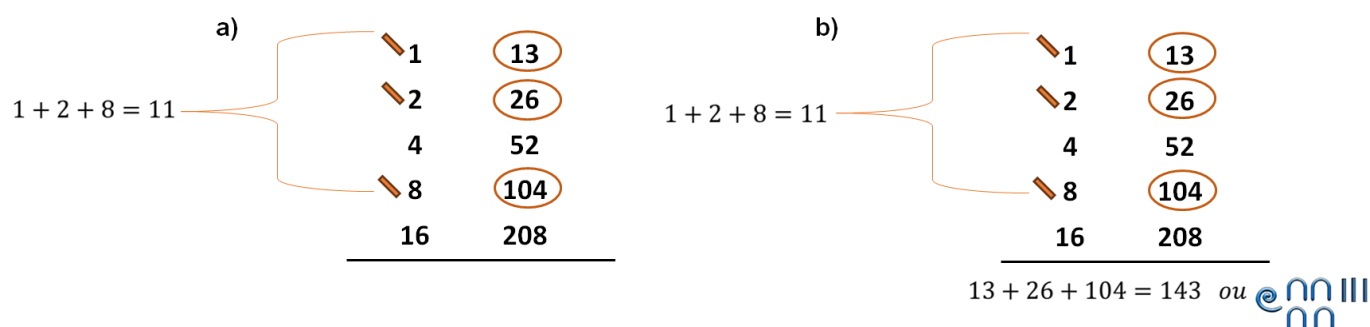


Figura 26 – Processo de multiplicação no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Observe que as potências $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ e $2^3 = 8$ estão associadas aos valores 13, 26 e 104, respectivamente, como podemos observar na Figura 26-(b). Portanto, o resultado da multiplicação 11×13 é $13 + 26 + 104 = 143$.

3.0.2 Divisão

Os egípcios realizavam divisões envolvendo números naturais de forma indireta. Enquanto para nós uma divisão $\frac{a}{b} = x$, onde a e b são números naturais, os egípcios abordavam o problema reescrevendo como uma multiplicação. Segundo (GILLINGS, 1972) sua estratégia consistia em responder à pergunta: “Por quanto devo multiplicar b para obter a ?” Em outras palavras, resolviam a equação:

$$bx = a,$$

onde x representa o resultado da divisão. Para exemplo, utilizaremos o método de divisão egípcio para determinar o quociente de 625 por 5.

1	5
2	10
4	20
8	40
16	80
32	160
64	320
128	640

Figura 27 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Inicialmente, transformaremos a divisão em uma multiplicação, conforme proposto pelos egípcios. Para isso, precisamos responder à seguinte pergunta: “Por quanto devo multiplicar 5 para obter 625?” Pelo método de multiplicação, tomando o 5 como multiplicando e realizando duplicações sucessivas até que ultrapasse 625, conforme apresentado na Figura 27.

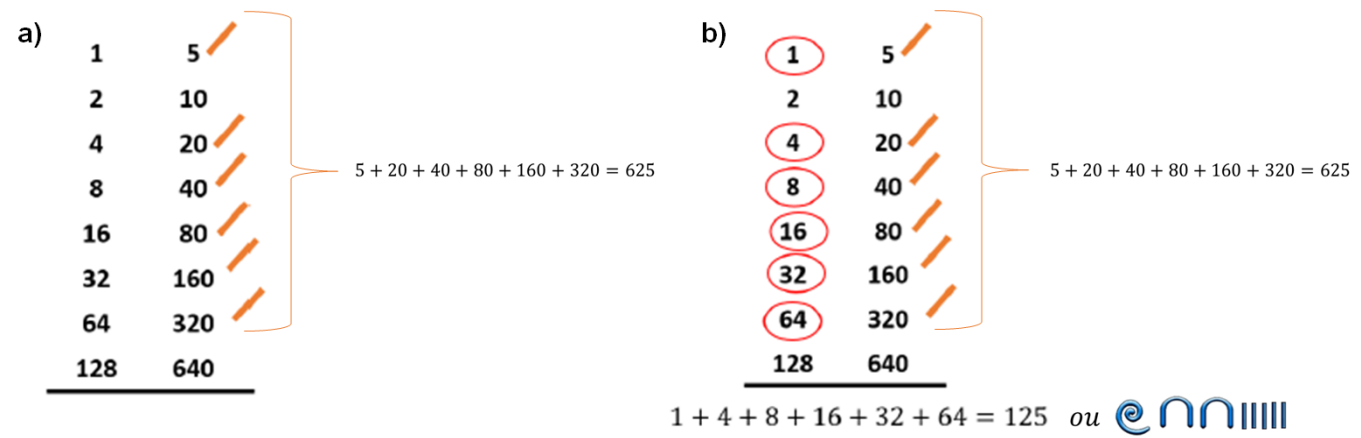


Figura 28 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Em seguida, marcamos traços ao lado onde ocorreram as duplicações do multiplicando. Após isso, realizamos a soma desses números para obter 625, como ilustrado na Figura 28-(a). Agora,

somaremos os números correspondentes aos traços que foram circulados, obtendo o resultado da divisão $625 \div 5 = 125$ apresentado na Figura 28-(b).

Agora, seguiremos para um novo exemplo envolvendo a divisão de 265 por 5. Para resolvê-lo, adotaremos, mais uma vez, o método egípcio, transformando a divisão em uma multiplicação: “Qual número, quando multiplicado por 5, resulta em 265?” Tomando o multiplicando 5, realizamos duplicações sucessivas até que o valor supere 265, conforme demonstrado na Figura 29.

1	5
2	10
4	20
8	40
16	80
32	160
64	320

Figura 29 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Em seguida, identificamos os múltiplos de 5 que, somados, atingem o valor desejado. Esses múltiplos são marcados com traços, e a seleção dos valores apropriados é ilustrada na Figura 30-(a). Essa etapa é crucial, pois permite isolar os componentes que compõem o resultado final.

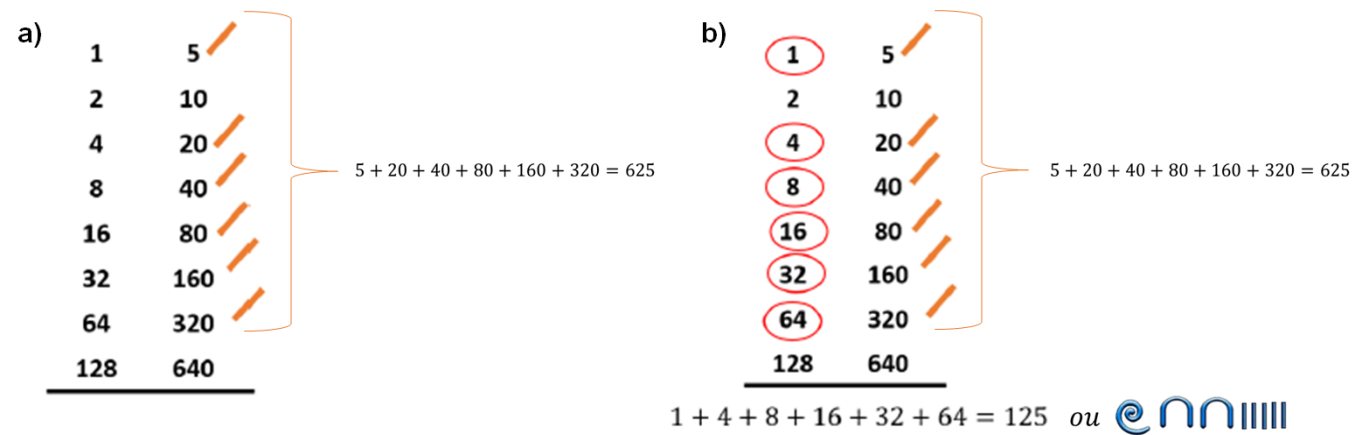


Figura 30 – Processo de divisão no sistema numérico egípcio. Fonte: Autor.

Ao somar os valores correspondentes aos traços selecionados, obtemos o quociente 125 como podemos observar na Figura 30-(b). Em hieróglifos egípcios, esse valor seria representado por uma cordas, duas alças e cinco barras verticais. A principal vantagem dessa abordagem é evidenciar, de forma clara, ao aluno que a divisão é a operação inversa da multiplicação, uma vez que ela é resolvida de maneira inversa, seguindo uma lógica análoga à multiplicação egípcia.

3.1 Frações egípcia

Ao analisar os métodos egípcios para operações com inteiros positivos, revela-se uma abordagem sistemática através de algoritmos recorrentes: adição por agrupamento hieroglífico, multiplicação

por duplicação sucessiva, com subtração e divisão resolvidas indiretamente via processos inversos de adição e multiplicação, respectivamente conforme demonstrado ao longo deste trabalho. As frações egípcias, semelhantemente a essas operações, podem ser representadas através da soma de frações unitárias. No entanto, surge uma questão fundamental: até que ponto eles desenvolveram e aplicaram conceitos de números fracionários? A análise da representação desses números nos textos egípcios revela uma abordagem prática, orientada para resolver problemas de divisão e proporção.

Definimos frações egípcias como todas as frações da forma $\frac{1}{n}$, em que n é um número natural, ou seja, as frações unitárias positivas, sendo $\frac{2}{3}$ a única exceção não unitária que utilizada da matemática praticada pelo os antigos egípcios utilizavam. As demais frações positivas e não unitárias seriam escritas como a soma de frações unitárias distintas. Por exemplo, a fração $\frac{4}{5}$ pode ser expressa em frações egípcias como

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Com as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{20}$ frações unitárias com denominadores diferentes. A matemática egípcia revela uma regra geral para escrita das frações, com exceção para $\frac{2}{3}$ e para a $\frac{1}{2}$, que recebiam símbolo especial para o representar como ilustrado na Figura 31. Conforme (ROQUE; CARVALHO, 2012), os hieróglifos egípcios representavam frações mediante um símbolo de formato elíptico sobreposto aos numerais, ao qual estava associado o significado de “parte”, exceto nos casos particulares de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, que possuíam representações distintas.

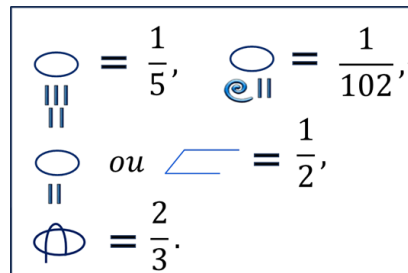


Figura 31 – Representação das frações egípcias em hieróglifos. Fonte: autor.

Para representar as frações egípcias de alinhada a escrita escrita egípcia, mas com clareza moderna, adotamos a seguinte notação: a fração unitária $\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ será denotada por $\overset{\circ}{n}$, onde o círculo ($\circ$) simboliza o hieróglifo egípcio para “parte”. Por exemplo, $\overset{\circ}{8}$ representa $\frac{1}{8}$. A fração $\frac{2}{3}$ única exceção não unitária no sistema egípcio será representada por $\overset{\circ\circ}{3}$. Por exemplo, a decomposição de $\frac{4}{5}$ em frações egípcias seria expressa como:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{20} = \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{4} \overset{\circ}{20}.$$

A forma de representação das frações egípcias, em sua maioria, utilizando o símbolo de formato elíptico em cima do numeral, difere da nossa notação convencional. Enquanto nossa representação explicita o numerador e o denominador, indicando quantas partes iguais uma quantidade foi dividida e quantas partes serão tomadas desta divisão, as frações egípcias adotam uma abordagem ordinal. Por exemplo, $\overset{\circ}{12}$, a fração $\frac{1}{12}$ representava, para os antigos egípcios, uma quantidade (símbolo de “parte” representado em formato elíptico) que seria dividida em 12 partes iguais, distribuídas de forma equitativa entre o 1° , 2° , ..., até o 12° . Isso significa que, em uma distribuição em “ n ” partes

iguais, cada parte receberá a n -ésima fração da totalidade. Essa representação está intrinsecamente ligada à ideia de divisão prática, onde a ênfase recai na igualdade das partes, e não na quantificação explícita. O objetivo deste capítulo é investigar como os egípcios antigos compreendiam e utilizavam os números fracionários, bem como analisar de que modo os seus métodos de divisão deram origem às frações egípcias? Segundo (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 27):

Por que os egípcios podem ter se restringido a frações deste tipo? Será que esta representação é mesmo uma limitação da Matemática egípcia? Será que o sistema egípcio possui alguma razão de ser? A resposta é sim e um dos sentidos desta representação está ligado justamente ao procedimento de divisão.

Exemplificaremos essa representação e o modo de raciocínio utilizado pelos egípcios por meio do seguinte exemplo, apresentado por (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 27) em “Tópicos de História da Matemática”: como repartir a quantidade de grãos contida em cinco sacos de feijão entre oito pessoas. Considerando que o número de sacos de feijão superava o de trabalhadores, não era viável distribuir um saco integral para cada um, pois alguns ficariam sem receber. Dessa forma, era necessário dividir o conteúdo presente nos sacos. Essa abordagem prática nos permite observar como os egípcios resolviam suas divisões.

O primeiro passo consistia em dividir os sacos ao meio, limitando-se aos quatro primeiros sacos, o que resultava em oito partes equivalentes à metade de um saco inteiro, conforme ilustrado na Figura 32. A etapa subsequente envolve a divisão do quinto saco entre os oito trabalhadores. Nesse

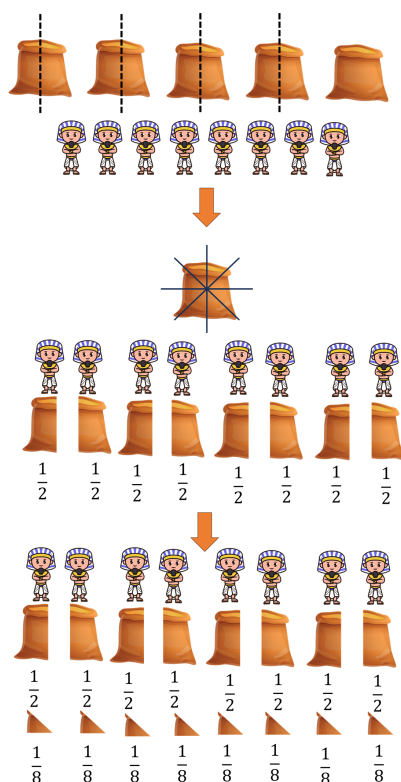


Figura 32 – Divisão prática de 5 por 8. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos provenientes das plataformas (VECTEEZY, 2007, acesso em 11 jun. 2025) (ícone do saco) e (GUAVANABOY, 2000, acesso em 11 jun. 2025) (personagem egípcio).

caso, a estratégia quase que imediata é fragmentar o saco em oito partes iguais, assegurando que cada trabalhador receba $\frac{1}{8}$ do saco. Portanto, ao dividir cinco sacos de feijão entre oito trabalhadores, cada um receberá metade ($\frac{1}{2}$) de um saco mais um oitavo ($\frac{1}{8}$). Isso pode ser representado matematicamente

como $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ em hieróglifos . Esse modo de dividir está fortemente ligado à forma prática da divisão, que consiste em distribuir quantidades em partes iguais. Na Figura 33, observamos que o método de divisão dos antigos egípcios produz o mesmo resultado.

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 8 \\
 \circ \qquad \circled{4} \\
 \circ \qquad 2 \\
 \circ \qquad \circled{1} \\
 \hline
 5 \div 8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}
 \end{array}$$

Figura 33 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia. Ilustração elaborada pelo autor.

Consideremos mais um exemplo, onde temos que realizar a divisão de 58 pães para 87 trabalhadores egípcios. Analogamente ao exemplo anterior, enfrentamos um cenário onde o número de trabalhadores (87) supera o de pães disponíveis (58). Para equilibrar essa desproporção, inicialmente dividimos cada pão ao meio, obtendo 116 pedaços (cada um equivalendo a $\frac{1}{2}$ de pão). Deste modo, cada um dos 87 trabalhadores receberia um pedaço, restando 29 pedaços.

Ao dividir cada pedaço ao meio novamente (resultando em $\frac{1}{4}$ de pão), obtemos 58 pedaços sendo insuficientes para atender aos 87 trabalhadores. Diante disso, é conveniente dividir cada pedaço obtido na primeira divisão em três novos pedaços totalizando 87 (equivalente a um pedaço de $\frac{1}{6}$). Logo cada trabalhador receberia $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ (em hieróglifos ), conforme ilustrado na Figura 34.

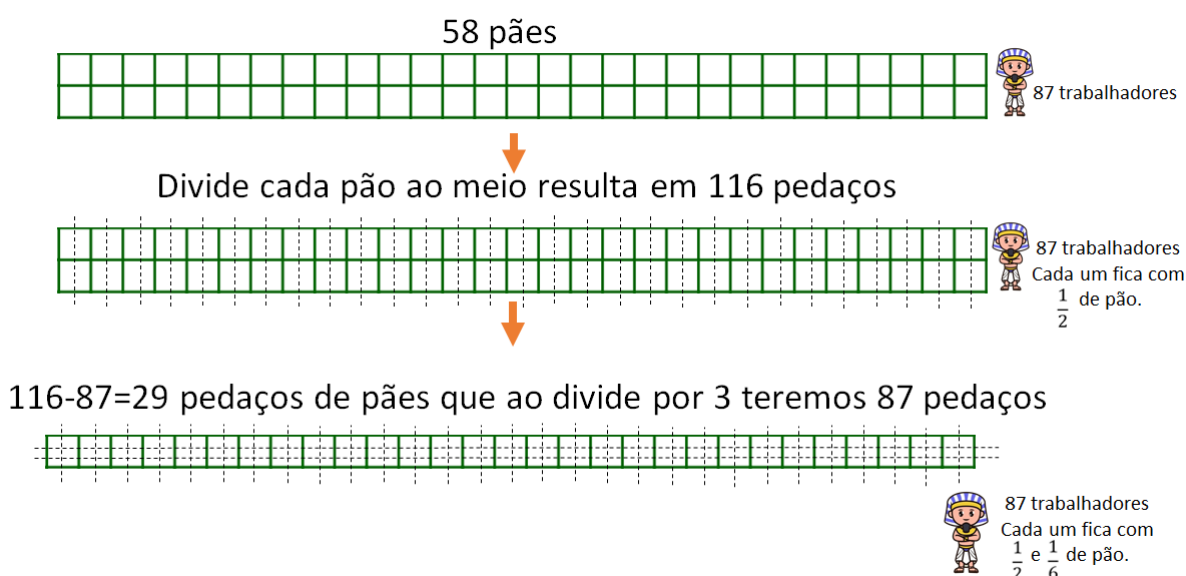


Figura 34 – Divisão prática de 58 por 87 pelo método egípcio. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).

Na Figura 35, ilustra-se a divisão utilizando o método egípcio. Semelhante aos exemplos anteriores, divide-se 58 por 87, equivalente a determinar números que, multiplicados por 87, resultem em 58.

Tomando 58 como multiplicando, busca-se o multiplicador e, conseqüentemente, o quociente. Não é viável utilizar duplicações para evitar ultrapassar o resultado conhecido (58). Aplicando o princípio da proporcionalidade, dividimos 87 por 2, obtendo $43 + \frac{1}{2}$. Reduzir à metade não é eficaz, pois os resultados serão muito menores.

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 87 \\
 \circ \\
 2 \qquad 43 + \frac{1}{2} \\
 \circ \circ \\
 3 \qquad 58 \\
 \circ \\
 3 \qquad 29 \\
 \circ \\
 6 \qquad 14 + \frac{1}{2} \\
 \hline
 43 + \frac{1}{2} + 14 + \frac{1}{2} = 57 + 1 = 58
 \end{array}$$

Figura 35 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia. Ilustração elaborada pelo autor.

Dividir por 3 é mais plausível, pois 87 é divisível por 3. Segundo (GILLINGS, 1972), os egípcios realizavam divisões por 3 de maneira indireta, utilizando a fração $\frac{2}{3}$. Por exemplo, para dividir um número inteiro n por 3, eles calculavam $\frac{2}{3}$ desse valor, ou seja, $\frac{2n}{3}$, e, em seguida, dividiam a quantidade obtida pela metade, resultando em $\frac{n}{3}$. Esse procedimento sempre seguia o próprio algoritmo de divisão egípcia, mencionado anteriormente. Dessa forma, para dividir 87 por 3, seguiremos a mesma estratégia utilizada pelos antigos egípcios:

$$87 \times \frac{2}{3} = 58,$$

Ou seja, $\frac{2}{3}$ de 87 equivale a 58. Dividindo ambos os números por 2, temos que $\frac{1}{3}$ de 87 equivale a 29. Aplicando a proporcionalidade, ao dividir $\frac{1}{3}$ e 29 pela metade, obtemos que $\frac{1}{6}$ de 87 corresponde a $14 + \frac{1}{2}$. Observa-se que

$$43 + \frac{1}{2} + 14 + \frac{1}{2} = 58.$$

Isso implica que $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ é o multiplicador e, conseqüentemente, o resultado da divisão $\frac{58}{87}$, representado em frações egípcias.

Consideremos mais um exemplo: como dividir 2 pães para 5 trabalhadores. Se iniciarmos tentando dividir os pães ao meio, teremos 4 pedaços, cada um correspondendo a $\frac{1}{2}$ de pão. Como há mais trabalhadores do que pedaços de pão, essa divisão não é conveniente. Passaremos, então, a dividir cada pão em 3 partes iguais, totalizando 6 pedaços, cada um correspondendo a $\frac{1}{3}$ de pão. Dessa forma, cada trabalhador receberá $\frac{1}{3}$ de pão, mas sobrá 1 pedaço, que corresponde a $\frac{1}{3}$ de pão. Esse pedaço será dividido em 5 partes iguais, obtendo-se pedaços menores, cada um correspondendo a:

$$\frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \text{ de pão.}$$

Portanto, ao dividir 2 pães para 5 trabalhadores, cada um receberá dois pedaços de pão, correspondendo a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{15}$ de pão, ou seja:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

O método descrito pode ser verificado na Figura 36. Verificaremos a repartição de 2 pães para

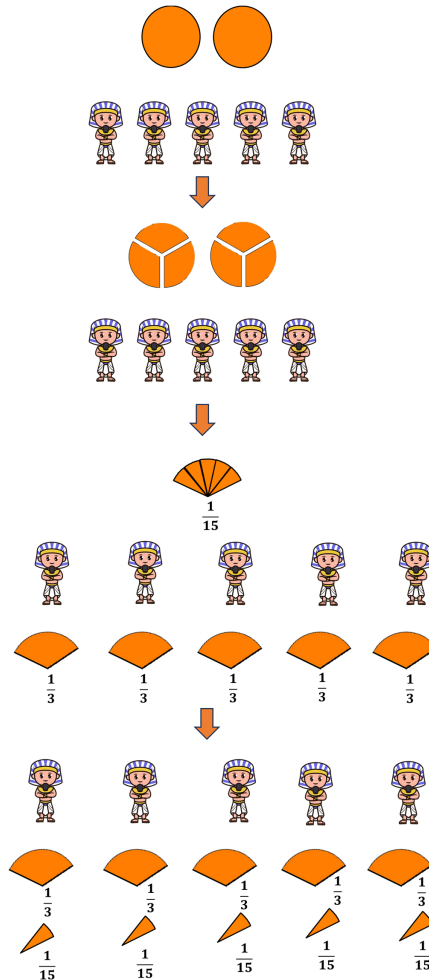


Figura 36 – Divisão prática de 2 por 5 pelo método egípcio. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).

5 trabalhadores utilizando o algoritmo de divisão egípcia. Ou seja, $2 \div 5$ pelo método egípcio equivale a encontrar um número que, ao ser multiplicado por 5, resulte em 2. Dessa forma, 5 será o multiplicando, e o número procurado será o multiplicador. Primeiramente, relacionamos a unidade $2^0 = 1$ a 5. A estratégia será dividir tanto a unidade quanto 5 por 3, mas, seguindo o método egípcio descrito por (GILLINGS, 1972), devemos primeiro encontrar $\frac{2}{3}$ desses valores. Assim, para a unidade, temos:

$$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \left(\overset{\circ}{\underset{\circ}{3}}\right),$$

e para 5, temos:

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} \quad \left(3 + \overset{\circ}{\underset{\circ}{3}}\right).$$

Agora, para determinar os valores da divisão por 3, basta dividir os valores relacionados pela metade. Dessa forma, obtemos:

$$\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad (\overset{\circ}{3}),$$

e

$$\frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad (1 + \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{3}).$$

Analogamente, dividiremos os valores encontrados por 5, obtendo: $\frac{1}{15}$ ($\overset{\circ}{15}$), onde teremos,

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \quad (\overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{10} + \overset{\circ}{30}).$$

Na Figura 37, podemos observar os procedimentos descritos. Agora, escolheremos valores pertencen-

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{15} \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 3 + \overset{\circ}{3} \\ 1 + \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{6} \\ \underline{\overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{10} + \overset{\circ}{30}} \end{array}$$

Figura 37 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia. Ilustração elaborada pelo autor.

tes à coluna do multiplicando cuja soma resulte em 2. Observe que:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right) = \frac{6 + 3 + 1}{6} + \frac{6 + 3 + 1}{30} = \frac{10}{6} + \frac{10}{30} = \frac{50 + 10}{30} = \frac{60}{30} = 2.$$

Como $(1 + \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{6})$ e $(\overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{10} + \overset{\circ}{30})$ estão relacionados, respectivamente, a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{15}$, concluímos que:

$$2 \div 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Os métodos descritos podem ser observados na Figura 38.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{15} \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 3 + \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{1} + \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{6} \\ \underline{\overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{10} + \overset{\circ}{30}} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \overset{\circ}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \\ \frac{30}{30} + \frac{15}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} + \frac{1}{30} = \\ \frac{60}{30} = 2 \end{array} \right\}$$

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ou 

Figura 38 – Aplicação do algoritmo de divisão egípcia para frações. Ilustração elaborada pelo autor.

As frações egípcias (somas de frações unitárias distintas), evidencia a praticidade da matemática desenvolvida no Antigo Egito. Ao empregar esse método, os egípcios conseguiam resolver problemas cotidianos, como a divisão de recursos, de maneira clara e precisa. A conexão entre a divisão e

a multiplicação, por meio da decomposição em frações unitárias distintas, permitia não apenas a resolução de problemas, mas também melhor verificação dos resultados. As frações egípcias são um exemplo claro de como a matemática estava integrada aos problemas do cotidiano, servindo como uma ferramenta essencial para a organização da sociedade egípcia.

4 Justificativas Matemáticas dos Métodos de Multiplicação, Divisão e Frações Egípcias

Neste capítulo, estudaremos métodos matemáticos que justificam a decomposição de frações em frações egípcias, bem como os métodos de divisão e multiplicação de números naturais. Tais métodos são consequências do fato de que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2 distintas. Ao explorar o Teorema de Fibonacci-Sylvester, que garante a decomposição de frações próprias em frações egípcias, e a generalização de Erdős e Stein, que estende essa decomposição para frações impróprias em soma de frações unitárias distintas, concluímos que toda fração positiva pode ser representada em frações egípcias.

4.1 Conversão de Frações para Representação Egípcia

Como abordado em capítulos anteriores o sistema numérico egípcio é de base dez, porém é aditivo, assim como o seu método de divisão, também, possui essa característica aditiva que também pode ser observado no resultado do seu método prático de distribuição de recursos, que influenciaram na forma de representar as frações como soma de frações unitárias distintas. Por exemplo, temos as seguintes decomposições de frações em frações egípcias de

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}.$$

A forma de representar as frações tornaram-se comum na sociedade egípcia antiga, levando os escribas a desenvolverem uma tabela com decomposições da fração $\frac{2}{n}$, onde n é ímpar, variando de 3 a 101 (ARCHIBALD, 1927, p.21), uma tradução do Papiro de Rhind onde podemos observar na Tabela 2.

<i>Fração</i>	Papiro de Rhind
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$
$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$
$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{276}$

$\frac{2}{n}$	Decomposição em Frações Unitárias
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15} + \frac{1}{75}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18} + \frac{1}{54}$
$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$
$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22} + \frac{1}{66}$
$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$
$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26} + \frac{1}{78}$
$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$
$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{90}$
$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$
$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28} + \frac{1}{196}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34} + \frac{1}{102}$
$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$
$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{330}$
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38} + \frac{1}{114}$
$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$
$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{126}$
$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39} + \frac{1}{195}$
$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46} + \frac{1}{138}$
$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$
$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50} + \frac{1}{150}$
$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44} + \frac{1}{308}$
$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54} + \frac{1}{162}$
$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$
$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51} + \frac{1}{255}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58} + \frac{1}{174}$

$\frac{2}{n}$	Decomposição em Frações Unitárias
$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$
$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70} + \frac{1}{130}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62} + \frac{1}{186}$
$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$
$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66} + \frac{1}{198}$
$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Tabela 2 – Frações Egípcias no Papiro de Rhind: Decomposição de $\frac{2}{n}$ para n Ímpar.

No entanto, o método utilizado pelos egípcios para realizar essas decomposições em frações unitárias distintas permanece um mistério. O fascínio pelas frações egípcias encantou matemáticos, como Leonardi de Pisa (Fibonacci), que elaborou um método talvez o mais conhecido para decompor frações em frações egípcias. Entretanto, existem outros métodos que também trabalham com abordagens alternativas para decompor frações em frações egípcias. Para o leitor interessado, recomendamos a leitura do trabalho de (ANTONIAZZI, 2018).

4.2 Teorema Fibonacci-Sylvester (Fração Própria)

Segundo (SIGLER, 2002), o método de decomposição de frações em frações egípcias, desenvolvido por Leonardo de Pisa (c. 1175-c. 1250), conhecido como Fibonacci, foi apresentado em seu livro “Liber Abaci”. Seu método limitava-se à decomposição das frações próprias, porém sem apresentar demonstração do seu método. Posteriormente, em 1880, James Joseph Sylvester desenvolveu o mesmo resultado, sem conhecimento prévio do trabalho de Fibonacci, conforme (DUNTON; GRIMM, 1966), onde se apresentou a demonstração matemática do método, tornando-o conhecido na literatura como Teorema Fibonacci-Sylvester. Para melhor esclarecimento do método, iremos trabalhar com alguns exemplos, onde usaremos a definição de função teto, denotada por $\lceil x \rceil$, que é definida como o menor inteiro maior ou igual a x , para todo $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, vejamos as seguintes situações:

1. $\lceil 4 \rceil = 4$.
2. $\lceil 3.2 \rceil = 4$.
3. $\lceil 0.001 \rceil = 1$.
4. $\lceil e \rceil = 3$ (pois $e \approx 2.718$).
5. $\lceil 0 \rceil = 0$.
6. $\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = \lceil 3.5 \rceil = 4$.
7. $\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = \lceil 3.\overline{3} \rceil = 4$.

$$8. \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = \lceil 2.5 \rceil = 3.$$

$$9. \left\lceil \frac{1}{4} \right\rceil = \lceil 0.25 \rceil = 1.$$

Apresentaremos dois exemplos ilustrativos de como o método de Fibonacci-Sylvester funciona em casos particulares.

Exemplo 1:

Decompomos $\frac{3}{14}$ em soma frações unitárias distintas utilizando para isso, $\left\lceil \frac{14}{3} \right\rceil = 5$. Então:

$$\frac{3}{14} = \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{70}.$$

Exemplo 2:

Decompomos $\frac{5}{7}$ em soma frações unitárias distintas utilizando para isso, $\left\lceil \frac{7}{5} \right\rceil = 2$. Então:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{14}.$$

Aplicando, a decomposição $\frac{3}{14}$ no Exemplo 1, temos

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}.$$

De modo geral, o método de Fibonacci-Sylvester consiste em representar uma fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $a > 1$ e $b \neq 1$, como soma de frações egípcias. Para isso, calcula-se $n = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$. Em seguida, escrevemos,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{n} \right).$$

Se

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n}$$

for uma fração unitária, o método termina. Caso contrário,

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{an - b}{bn} \quad \text{e} \quad (an - b) > 1,$$

repita-se o processo finito até obter uma representação como soma de frações unitárias. A demonstração que será apresentada a seguir foi elaborada com base na abordagem proposta no trabalho de (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2022).

Teorema Fibonacci-Sylvester

Teorema 4.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $0 < a < b$. Então,*

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s},$$

em que $n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ todos distintos entre si.

Demonstração. Será feita por indução forte (para mais detalhes veja o Apêndice A.1.2.1). Mais precisamente, considere a sentença:

$P(a)$: a fração $\frac{a}{b}$ pode ser escrita como soma de frações unitárias distintas, $\forall a < b$.

Para o caso base de $P(1)$ é verdadeira, pois $\frac{1}{b}$ é uma fração unitária, para todo b maior que 1. Suponhamos por hipótese de indução que $P(k)$ seja verdadeira para todo $1 \leq k \leq a-1$ com $a \geq 2$. Vamos provar que $P(a)$ também é verdadeira, isto é, que a fração própria $\frac{a}{b}$ pode ser escrita como uma soma de frações unitárias distintas, para todo a menor que b . Para isso, seja

$$X = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > \frac{b}{a} \right\} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < \frac{a}{b} \right\}.$$

Pela propriedades dos números naturais (para mais detalhes veja o Apêndice A.3) segue que, para quaisquer $u, v \in \mathbb{N}$, existe $w \in \mathbb{N}$ tal que $wu > v$. Logo, por essa propriedade, o conjunto X não é vazio ($X \neq \emptyset$). Pelo Princípio da Boa Ordenação (para mais detalhes veja o Apêndice A.2), X possui um menor elemento q . Assim,

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b}. \quad (4.1)$$

Daí, $q-1 \notin X$. Então,

$$\frac{1}{q-1} \geq \frac{a}{b}. \quad (4.2)$$

Agora, note que de (4.1),

$$q > \frac{b}{a} > 1.$$

Consequentemente, $q \geq 2$. Vamos estudar em (4.2) dois casos.

1º caso: $\frac{a}{b} = \frac{1}{q-1}$. Neste caso $q > 2$, então $\frac{a}{b}$ é uma fração unitária. Pois se $q = 2$, então $\frac{a}{b} = 1$, um absurdo.

2º caso: $\frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$. Se $q = 2$ então

$$\frac{a}{b} < 1 = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{q-1},$$

pois $a < b$. Para $q > 2$ junto com (4.1) podemos escrever

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}.$$

Agora afirmamos que

$$0 < aq - b < a.$$

De fato, por um lado da desigualdade temos que

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b} \iff 0 < \frac{a}{b} - \frac{1}{q} \iff 0 < \frac{aq - b}{bq} \iff 0 < aq - b.$$

Por outro lado temos

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{q-1} \iff aq - a < b \iff aq - b < a.$$

Agora,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{a}{b} - \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{aq - b}{bq},$$

com $bq > b > a$ e $0 < aq - b < a$. Note que $(aq - b) \in \mathbb{N}$ implica que

$$1 \leq aq - b \leq a - 1.$$

Podemos então usar a hipótese de indução para a fração $\frac{aq-b}{bq}$ e escrevê-la como soma de frações unitárias distintas

$$\frac{aq - b}{bq} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s},$$

de modo que

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s}. \quad (4.3)$$

Cada fração unitária $\frac{1}{n_i}$, com $1 \leq i \leq s$, é diferente de $\frac{1}{q}$, uma vez que

$$\frac{1}{n_i} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_s} = \frac{aq - b}{bq} < \frac{a}{bq} < \frac{1}{q}.$$

Como as frações $\frac{1}{n_i}$ são distintas entre si, a decomposição para $\frac{a}{b}$ em (4.3) é feita somente com frações unitárias distintas, o que encerra a demonstração. ■

Observação: Dado,

$$X = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > \frac{b}{a} \right\} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < \frac{a}{b} \right\}$$

com $q \in X$ o menor elemento do conjunto. Pela minimalidade de q temos

$$\frac{1}{q} \leq \frac{a}{b} \iff \frac{b}{a} \leq q.$$

Logo não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} \leq p < q$. De fato, se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} \leq p < q$, então $\frac{1}{p} \leq \frac{a}{b}$. Daí, $p \in X$ mas, $p \geq \min X = q$, um absurdo. Portanto, $\left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil = q$.

Note que o método de Fibonacci e Sylvester se baseia em um algoritmo greedy (guloso), que seleciona, de forma recursiva, a maior fração unitária possível, inferior à fração em análise. Segundo, (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2022) ao se aplicar o procedimento de Fibonacci e Sylvester às frações $\frac{2}{n}$ do Papiro de Rhind, observa-se que apenas as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$ e $\frac{2}{23}$ produzem o mesmo resultado como podemos observa na Tabela 3.

$\frac{2}{n}$	Papiro de Rhind	Método de Fibonacci
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{45}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$
$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{91}$

$\frac{2}{n}$	Papiro de Rhind	Método de Fibonacci
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{120}$
$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$\frac{1}{10} + \frac{1}{190}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{11} + \frac{1}{231}$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{276}$
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$\frac{1}{13} + \frac{1}{325}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18} + \frac{1}{54}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{378}$
$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$\frac{1}{15} + \frac{1}{435}$
$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$\frac{1}{16} + \frac{1}{496}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22} + \frac{1}{66}$	$\frac{1}{17} + \frac{1}{561}$
$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{18} + \frac{1}{630}$
$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$	$\frac{1}{19} + \frac{1}{703}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26} + \frac{1}{78}$	$\frac{1}{20} + \frac{1}{780}$
$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$	$\frac{1}{21} + \frac{1}{861}$
$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$	$\frac{1}{22} + \frac{1}{946}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{90}$	$\frac{1}{23} + \frac{1}{1035}$
$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$	$\frac{1}{24} + \frac{1}{1128}$
$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28} + \frac{1}{196}$	$\frac{1}{25} + \frac{1}{1225}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34} + \frac{1}{102}$	$\frac{1}{26} + \frac{1}{1326}$
$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$	$\frac{1}{27} + \frac{1}{1431}$
$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{330}$	$\frac{1}{28} + \frac{1}{1540}$
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38} + \frac{1}{114}$	$\frac{1}{29} + \frac{1}{1653}$
$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$	$\frac{1}{30} + \frac{1}{1770}$
$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$	$\frac{1}{31} + \frac{1}{1891}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{126}$	$\frac{1}{32} + \frac{1}{2016}$
$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39} + \frac{1}{195}$	$\frac{1}{33} + \frac{1}{2145}$
$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$	$\frac{1}{34} + \frac{1}{2278}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46} + \frac{1}{138}$	$\frac{1}{35} + \frac{1}{2415}$
$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$	$\frac{1}{36} + \frac{1}{2556}$
$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$	$\frac{1}{37} + \frac{1}{2701}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50} + \frac{1}{150}$	$\frac{1}{38} + \frac{1}{2850}$
$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44} + \frac{1}{308}$	$\frac{1}{39} + \frac{1}{3003}$

$\frac{2}{n}$	Papiro de Rhind	Método de Fibonacci
$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$	$\frac{1}{40} + \frac{1}{3160}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54} + \frac{1}{162}$	$\frac{1}{41} + \frac{1}{3321}$
$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$	$\frac{1}{42} + \frac{1}{3486}$
$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51} + \frac{1}{255}$	$\frac{1}{43} + \frac{1}{3655}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58} + \frac{1}{174}$	$\frac{1}{44} + \frac{1}{3828}$
$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$	$\frac{1}{45} + \frac{1}{4005}$
$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70} + \frac{1}{130}$	$\frac{1}{46} + \frac{1}{4186}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62} + \frac{1}{186}$	$\frac{1}{47} + \frac{1}{4371}$
$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$	$\frac{1}{48} + \frac{1}{4560}$
$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$	$\frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66} + \frac{1}{198}$	$\frac{1}{50} + \frac{1}{4950}$
$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$	$\frac{1}{51} + \frac{1}{5151}$

Tabela 3 – Comparação das decomposições de $\frac{2}{n}$: Rhind e Fibonacci-Sylvester.

É notório que o método empregado pelos egípcios para representar frações unitárias constitui, em sua maioria, soluções mais elegantes do que as obtidas pelos métodos de Fibonacci-Sylvester, uma vez que os denominadores presentes no papiro são significativamente menores do que aqueles gerados pelo método empregado. No entanto, é importante considerar que essa representação milenar foi aprimorada e refinada ao longo dos séculos, até ser documentada pelo escriba Ahmes, chegando-nos atualmente.

Segundo (ANTONIAZZI, 2018), o método de Fibonacci-Sylvester é simples de entender e implementar, pois segue uma abordagem passo a passo em que cada etapa, seleciona-se a maior fração unitária possível que não ultrapasse a fração original. Além disso, a abordagem converge para uma solução, então, independentemente da fração inicial, o processo encontrará uma representação válida como soma de frações unitárias em um número finito de etapas. Esta técnica está associada ao estudo das frações egípcias, que têm um papel importante na história da matemática. No entanto, o método também apresenta limitações. Nem sempre gerando a decomposição mais curta possível. Por exemplo:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363},$$

que ao aplicar algoritmo de Fibonacci/Sylvester, resultaria em

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},$$

assim o método se torna menos eficiente quando nos baseamos na quantidade de termos.

4.3 Teorema Erdős-Stein (Fração Imprópria)

Buscando contemplar também as frações impróprias (números racionais maiores que 1), Paul Erdős e Emil Stein (1963) desenvolveram um método para representar esses números em frações egípcias conforme detalhado em (ERDÖS; STEIN, 1963). Inicialmente, apresentamos um exemplo ilustrativo do método Erdős-Stein, realizando a decomposição de $\frac{17}{10}$ como soma de frações unitárias distintas. Como a fração $\frac{17}{10}$ é imprópria, precisamos, inicialmente, determinar o menor valor de q tal que

$$\sum_{k=2}^q \frac{1}{k} > \frac{17}{10}.$$

Por inspeção, obtemos que o menor valor ocorre para $q = 8$, pois

$$\sum_{k=2}^8 \frac{1}{k} = \frac{481}{280} > \frac{17}{10} = \frac{476}{280}.$$

Assim,

$$\frac{17}{10} = \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} + \left(\frac{17}{10} - \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^7 \frac{1}{k} + \left(\frac{17}{10} - \sum_{k=2}^7 \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{3}{28}.$$

Vamos agora aplicar o método de Fibonacci-Sylvester $\frac{3}{28}$. Como $\lceil \frac{28}{3} \rceil = 10$, escrevemos:

$$\frac{3}{28} = \frac{1}{10} + \left(\frac{3}{28} - \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{140}.$$

Dado que $\frac{1}{140}$ é uma fração unitária, o procedimento encerra-se fornecendo-nos a seguinte decomposição:

$$\frac{17}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{140}.$$

A demonstração a seguir foi desenvolvida com base na abordagem proposta novamente no trabalho de (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2022), cuja metodologia e resultados serviram como referência.

Teorema Erdős-Stein

Teorema 4.2. *Toda fração $\frac{a}{b} = r$ ($a, b \in \mathbb{N}$ e $a \geq b$), maior ou igual a 1, pode ser expressa como soma de frações unitárias distintas. Ou seja,*

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k},$$

$n_1, n_2, \dots, n_k$ todos distintos entre si.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} \geq 1$ com $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \geq b$. Considere o conjunto

$$X = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid r < \sum_{k=2}^m \frac{1}{k} \right\}.$$

Conjunto X não é vazio ($X \neq \emptyset$), pois a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente (para mais detalhes veja o Apêndice A.4) e, sendo assim, pelo Princípio da Boa Ordenação (para mais detalhes veja o Apêndice A.2), X possui um menor elemento q e afirmamos que $q > 3$. Com efeito, notemos que

$$\frac{1}{2} < 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$$

de modo que $q - 1 \geq 2$. Pela minimalidade de q , segue-se que $q - 1 \notin X$ então

$$\sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} \leq r.$$

Agora, se $\sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} = r$, o teorema está provado, pois escrevemos $r = \frac{a}{b}$ como a soma de frações unitárias distintas. Suponha então que $\sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} < r$. Assim, temos que

$$\sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} < r < \sum_{k=2}^q \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{q}.$$

Portanto,

$$0 < r - \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{q} < 1.$$

Dado que $r - \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k}$ é uma fração entre 0 e 1, podemos usar o Teorema Fibonacci-Sylvester, que nos garante que $r - \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k}$ pode ser escrito como uma soma de frações unitárias distintas

$$r - \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s},$$

ou ainda,

$$r = \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}.$$

Agora, para cada $1 \leq i \leq s$, vale que

$$\frac{1}{n_i} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s} = r - \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{q} < \frac{1}{q-1} < \cdots < \frac{1}{2}.$$

Portanto, a decomposição

$$r = \frac{a}{b} = \sum_{k=2}^{q-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s}$$

é tal que todas as frações unitárias são distintas entre si, o que encerra a prova desse teorema. ■

Podemos utilizar esse método para números naturais pois basta considerar $b = 1$ ao aplicar o teorema na fração $r = \frac{a}{b}$. Por exemplo:

- $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;
- $2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{230} + \frac{1}{57960}$;

$$\bullet \quad 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + \frac{1}{200} + \frac{1}{77706} + \frac{1}{16532869712} + \frac{1}{3230579689970657935732} + \frac{1}{36802906522516375115639735990520502954652700}.$$

No entanto, é importante destacar que, para números maiores que três, a decomposição pode não ser viável manualmente, pois segundo (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2016) se deve ao uso de somas parciais da série harmônica.

Vale ressaltar que tal método de decompor frações impróprias não seria utilizado pelos egípcios, pois sua matemática se baseia em métodos práticos. Tomando, por exemplo, o caso de $\frac{17}{10}$ anteriormente mencionado. Para os egípcios, seria mais natural dividir essa situação em dois casos, pois $17 = 10 + 7$. Se contextualizarmos que há 17 pães para dividir entre 10 trabalhadores, a divisão pode ser realizada da seguinte forma:

1. Inicialmente, cada trabalhador recebe 1 pão inteiro, totalizando 10 pães distribuídos e restando 7 pães.
2. Em seguida, 5 pães são repartidos ao meio, de modo que cada trabalhador receba $\frac{1}{2}$ pão. Agora, restam 2 pães.
3. Por fim, os 2 pães restantes são divididos em 5 partes iguais cada, resultando em 10 pedaços de $\frac{1}{5}$ pão, que são distribuídos igualmente entre os trabalhadores.

Portanto, a divisão de 17 pães para 10 trabalhadores resulta em cada um recebendo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ pães, sendo esse o modo prático como os antigos egípcios realizavam essa divisão.

4.3.1 Infinitas Decomposições e Conjecturas das Frações Egípcias

Pelos teoremas de Fibonacci-Sylvester 4.1 (frações próprias) e Erdős-Stein 4.2 (frações impróprias) temos que toda fração pode ser expressa como soma de frações unitárias distintas. Surge então a questão: quantas decomposições em frações egípcias existem para uma fração? Como veremos, a resposta a essa questão é que são infinitas. Para verificação dessa afirmação, consideremos as seguintes identidades apresentadas por (BOTTS, 1967),

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

De fato para primeira identidade temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

e segunda identidade teremos que,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

Com essas identidades, podemos decompor uma fração unitária, possibilitando determinar outras decomposições para a mesma fração. Por exemplo, considere as frações $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. A seguir, aplicaremos as duas identidades em cada uma das decomposições.

1º) Aplicando a primeira identidade $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$:

- Para primeira fração $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ temos,

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18}.$$

- Para segunda fração $\frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{6} + \frac{1}{8} + \frac{3}{12} + \frac{1}{9} + \frac{2}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Para os exemplos acima, utilizamos o produto da identidade nas decomposições das frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{5}$, mas poderia também ter realizado o produto em cada fração unitária.

2º) Aplicando a segunda identidade $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$:

- Para primeira fração $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ e aplicando a identidade em $\frac{1}{3}$ temos,

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3(3+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}.$$

- Para segunda fração $\frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ e aplicando a identidade em $\frac{1}{4}$ temos,

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4(4+1)}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20}.$$

A identidade foi aplicada em uma fração unitária em cada uma das decomposições, mas sua aplicação também poderia ter sido feita em mais frações ou em todas as frações na decomposição, obtendo novas representações em frações egípcias.

Podemos, a partir das identidades apresentadas, escrever uma terceira identidade que também decomponha uma fração unitária em soma de frações egípcias. Tal identidade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{6n+6} + \frac{1}{n(2n+2)} + \frac{1}{n(3n+3)} + \frac{1}{n(6n+6)}.$$

De fato visto que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{6n+6} + \frac{1}{n(2n+2)} + \frac{1}{n(3n+3)} + \frac{1}{n(6n+6)}. \end{aligned}$$

A seguir iremos aplicar essa nova identidade em alguns casos particulares:

- Para $n = 2$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1}{2 \cdot 2 + 2} + \frac{1}{3 \cdot 2 + 3} + \frac{1}{6 \cdot 2 + 6} + \frac{1}{2(2 \cdot 2 + 2)} + \frac{1}{2(3 \cdot 2 + 3)} + \frac{1}{2(6 \cdot 2 + 6)} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{2}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{9}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

- Para $n = 3$ temos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{1}{2 \cdot 3 + 2} + \frac{1}{3 \cdot 3 + 3} + \frac{1}{6 \cdot 3 + 6} + \frac{1}{3(2 \cdot 3 + 2)} + \frac{1}{3(3 \cdot 3 + 3)} + \frac{1}{3(6 \cdot 3 + 6)} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \frac{1}{8} + \frac{4}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}.\end{aligned}$$

- Para $n = 4$ temos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \frac{1}{2 \cdot 4 + 2} + \frac{1}{3 \cdot 4 + 3} + \frac{1}{6 \cdot 4 + 6} + \frac{1}{4(2 \cdot 4 + 2)} + \frac{1}{4(3 \cdot 4 + 3)} + \frac{1}{4(6 \cdot 4 + 6)} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120}.\end{aligned}$$

Ao reescrever a fração unitária fazendo uso da nova identidade, nos limitamos a um número máximo de 6 parcelas, e podemos observar que os denominadores da decomposição de $\frac{1}{n}$ tendem a ser múltiplos de $n + 1$, fato observado uma vez que podemos reescrever a nova identidade como,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= \frac{1}{2n + 2} + \frac{1}{3n + 3} + \frac{1}{6n + 6} + \frac{1}{n(2n + 2)} + \frac{1}{n(3n + 3)} + \frac{1}{n(6n + 6)} \\ &= \frac{1}{2(n + 1)} + \frac{1}{3(n + 1)} + \frac{1}{6(n + 1)} + \frac{1}{2n(n + 1)} + \frac{1}{3n(n + 1)} + \frac{1}{6n(n + 1)}.\end{aligned}$$

Logo, diante das identidades aqui apresentadas, a decomposição de frações em frações egípcias pode ser reescrita de várias maneiras diferentes, fazendo uso ou combinações dessas identidades ou de outras que garantam a soma de frações unitárias distintas. Apesar de milenar e utilizar matemática elementar, há questões que permanecem em aberto sobre as frações egípcias. Por exemplo, a fração $\frac{2}{n}$ com n ímpar e maior que 2, podem ser escrita como soma de três frações unitárias distintas. Vejamos,

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Para a fração $\frac{3}{n}$, com $n > 3$ e tal que n e 3 sejam primos entre si, é possível escrevê-la como soma de três frações unitárias distintas. Conforme (MAYS, 1987), o método de Fibonacci-Sylvester (ver Teorema 4.1) impõe um limite ao número de parcelas na decomposição, que não excede o numerador. Ou seja, dada uma fração $\frac{a}{b}$ com $a < b$, o número de parcelas ao aplicar o método será, no mínimo, 2 e, no máximo, a . Assim, para a fração $\frac{3}{n}$, aplicando o Teorema 4.1, teremos de 2 a 3 parcelas, como podemos observar na Tabela 4. Nos casos em que ocorre a soma de duas frações unitárias, basta fazer uso da identidade

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n(n + 1)}$$

para obter mais uma fração unitária, por exemplo:

$$\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44} = \frac{1}{4 + 1} + \frac{1}{4(4 + 1)} + \frac{1}{44} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{44}$$

e

$$\frac{3}{23} = \frac{1}{8} + \frac{1}{184} = \frac{1}{8+1} + \frac{1}{8(8+1)} + \frac{1}{184} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{184}.$$

Portanto a fração $\frac{3}{n}$ pode ser escrito como soma de três frações unitárias distintas.

Tabela 4 – Decomposição da fração $\frac{3}{n}$ pelo método de Fibonacci-Sylvester

n	Decomposição de $\frac{3}{n}$	Nº de parcelas
4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$	3
5	$\frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{110}$	3
7	$\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$	3
8	$\frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{168}$	3
11	$\frac{1}{4} + \frac{1}{44}$	2
13	$\frac{1}{5} + \frac{1}{33} + \frac{1}{2145}$	3
14	$\frac{1}{5} + \frac{1}{31} + \frac{1}{2170}$	3
17	$\frac{1}{6} + \frac{1}{123} + \frac{1}{4182}$	3
19	$\frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{7581}$	3
23	$\frac{1}{8} + \frac{1}{184}$	2

Uma questão natural que podemos colocar é se a fração $\frac{4}{n}$ pode ser escrita também com soma de três frações unitárias distintas? Conhecida como Conjectura de Erdős-Straus afirma que fração $\frac{4}{n}$, com $n > 4$, pode ser escrita como soma de três frações unitárias distintas:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Acredita-se que a conjectura é verdadeira embora nenhuma demonstração formal tenha sido apresentada até o momento da redação desta dissertação. Segundo (SALEZ, 2014), testes computacionais atestaram que $\frac{4}{n}$ pode ser escrito como a soma de três frações unitárias distintas com valores até $n = 10^{17}$.

Motivados pela Conjectura de Erdős-Straus, Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969) e Bobola Maria Schinzel (1937–2021) propuseram conjecturas análogas, que permanecem em aberto, conforme relatado por (CAMPBELL, 1992):

- **Conjectura de Wacław Franciszek Sierpiński:** Para todo número inteiro $n > 5$, a fração $\frac{5}{n}$ pode ser expressa como soma de três frações unitárias distintas, isto é, existem inteiros positivos distintos a , b e c tais que

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

- **Conjectura de Bobola Maria Schinzel:** Para todo inteiro $k \geq 2$ e para todo inteiro $n > k$, a fração $\frac{k}{n}$ pode ser expressa como soma de três frações unitárias distintas. Ou seja, existem inteiros positivos distintos r , s e t tais que

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}.$$

Ao utilizar as frações egípcias, além de permitir reescrever as frações como uma soma finita de frações unitárias distintas, (IMHAUSEN, 2016) destaca a possibilidade de comparar valores de forma mais simples. A decomposição de uma fração em somas de frações unitárias distintas, organizadas em ordem decrescente, facilita a comparação entre diferentes frações. Por exemplo: Qual fração é maior, $\frac{5}{8}$ ou $\frac{4}{7}$? À primeira vista, pode ser difícil responder corretamente. No entanto, ao decompor cada fração, temos:

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}.$$

Como $\frac{1}{8} > \frac{1}{14}$, conclui-se que $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

As frações egípcias também apresentam utilidade no campo da computação. De acordo com Kosheleva e Kreinovich (2009), nos computadores modernos, a divisão $\frac{x}{y}$ é geralmente implementada como o produto $x \cdot (\frac{1}{y})$. Para valores básicos de y , os recíprocos $\frac{1}{y}$ são previamente calculados e armazenados, enquanto para outros valores, esses recíprocos são obtidos a partir dos valores já armazenados. Dessa forma, os sistemas atuais fazem uso de frações unitárias em seus processos computacionais. Portanto, o uso das frações egípcias apresenta grande potencial prático, não se restringindo apenas à história da matemática e aos problemas do campo da teoria dos números.

4.4 Todo número natural pode ser escrito como soma de potências de dois distintas

Os métodos de multiplicação e divisão adotados pelos egípcios sustentam-se no fato matemático de que qualquer número natural tem sua decomposição em somas de potências de dois distintas. Logo, a representação binária dos inteiros torna-se uma das ideias centrais para entender a eficiência e a engenhosidade por trás dessas operações matemáticas utilizadas pelos egípcios. A demonstração será apresentada a seguir, presente no trabalho de (STEFFENON, 2017, p. 12).

4.4.1 Representação Binária dos Inteiros

Teorema 4.3. *Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos.*

Demonstração. 1ª Parte (existência): Iniciamos mostrando a existência da representação usando indução sobre n . Primeiramente, temos que

$$1 = 2^0; \quad 2 = 2^1; \quad 3 = 2^0 + 2^1; \quad 4 = 2^2; \quad 5 = 2^2 + 2^0,$$

e, com isso, o resultado vale para todo $n \leq 5$. Suponhamos que o resultado vale até um certo $k \geq 5$. Se $k + 1$ é uma potência de 2, então está provado. Caso contrário, existe t tal que:

$$2^t < k + 1 < 2^{t+1} = 2^t + 2^t.$$

Logo, $k + 1 - 2^t \leq k$, e como qualquer número menor ou igual a k é soma de potências de 2, segue que existem inteiros não negativos $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_i$, tais que

$$k + 1 - 2^t = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i}.$$

Como $2^t \geq 1 \iff 0 \geq 1 - 2^t \iff k \geq k + 1 - 2^t$, segue que

$$2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i} < 2^t$$

e, assim, $m_i < t$. Logo,

$$k + 1 = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i} + 2^t,$$

com

$$0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_i < t.$$

Portanto, está provada a existência da representação.

2ª Parte (unicidade): Agora provaremos a unicidade da representação. Suponhamos que a representação é única até um certo k e que $k + 1 = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_s}$, com

$$0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_r \quad e \quad 0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_s.$$

Então,

$$2^{a_r} \leq 2^{b_0} + 2^{b_1} + \dots + 2^{b_s} \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{b_s} = 2^{b_s+1} - 1.$$

Logo, $2^{a_r} < 2^{b_s+1}$, e assim, $a_r < b_s + 1$, ou seja, $a_r \leq b_s$. De maneira análoga, podemos mostrar que $b_s \leq a_r$ e, portanto, $a_r = b_s$. Usando a hipótese de indução, concluimos que $r - 1 = s - 1$ e que $a_i = b_j$ para $i, j \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$. Portanto, está provada a unicidade. ■

A representação dos números naturais como soma de potências de dois distintas torna-se um resultado matemático fundamental que é a base dos métodos egípcios de multiplicação e sua inversa divisão. Esses métodos, embora desenvolvidos em seu contexto histórico, demonstra eficiência e precisão matemática. No entanto, é importante evitar interpretações anacrônicas, como atribuir aos egípcios conceitos avançados de matemática que só foram formalizados muitos anos depois. Em vez disso, devemos reconhecer que suas técnicas eram práticas e adaptadas às necessidades da época, refletindo uma compreensão intuitiva e aplicada de princípios matemáticos. Essa perspectiva nos permite apreciar a sofisticação dos métodos egípcios sem projetar ideias modernas sobre o passado.

5 Análise de Recursos Didáticos sobre Matemática e Frações Egípcias

Neste capítulo, será analisado como alguns recursos didáticos abordam a matemática egípcia, com foco nas frações egípcias, e quais são os objetivos pedagógicos considerando que,

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. (BRASIL., 2018, p.: 298)

É importante destacar que os livros didáticos e sites educacionais analisados não têm a pretensão de trabalhar especificamente a matemática egípcia, mas, sim, conhecimentos matemáticos básicos alinhados com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Considerando a história da Matemática como recurso educacional, conforme destaca a BNCC, onde afirma que,

Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. (BRASIL., 2018, 299)

Pretendemos investigar como a matemática egípcia é abordada por esses recursos educacionais e quais contextos são explorados. Ao analisar tais recursos, especialmente em relação às frações egípcias, buscamos avaliar seu impacto na compreensão e interesse dos alunos.

5.1 Análise dos Livros Didáticos e Sites Educacionais

Para realizar essa análise, usamos um questionário com a motivação de investigar como a matemática egípcia é abordada. Sendo aplicado cinco recursos educacionais sendo três livros didáticos de séries diferentes do ensino fundamental dos anos finais e dois sites educacionais. A escolha dos livros didáticos analisados foi motivada pelo fato de que, enquanto docente, tive a oportunidade de trabalhar com esses livros em anos anteriores no ensino fundamental. Conforme mencionado em (BRASIL, 2020), existem 50 livros de matemática do ensino fundamental II disponíveis para todas as escolas em nível nacional, e os 3 livros analisados correspondem a 6% do total de livros didáticos disponibilizados para escolas do ensino fundamental anos finais. Quanto aos sites educacionais, a escolha foi justificada pela sua relevância e frequência de acesso por professores e colegas durante os seus planejamentos. Considerando a dinâmica da internet e, conseqüentemente, a dos sites educacionais, que estão em constante criação e desativação, torna-se inviável estimar o percentual dos dois sites analisados em relação ao universo de sites educacionais ativos no Brasil atualmente. A seguir, apresentamos o questionário serviu como critério de análise para os recursos educacionais:

Questionário: Análise de Livros Didáticos/Sites Educacionais sobre o Sistema Numérico Egípcio

1. O livro/site menciona outros sistemas numéricos além do sistema arábico?
2. Em que contexto os sistemas numéricos são abordados?
3. O sistema numérico egípcio é especificamente mencionado?
4. O sistema numérico egípcio é ilustrado com exemplos ou imagens?
5. É fornecida uma explicação detalhada sobre como o sistema numérico egípcio funciona?
6. Há alguma conexão entre o sistema numérico egípcio e a história ou civilização egípcia?
7. São abordadas operações matemáticas utilizando o sistema numérico egípcio?
8. O livro/site menciona frações egípcias?
9. Há atividades ou exercícios que envolvam o sistema numérico egípcio ou frações egípcias?
10. É feita alguma comparação entre o sistema numérico egípcio e outros sistemas numéricos?
11. Qual é a razão aparente para incluir o sistema numérico egípcio nos livros didáticos?

A utilização dos questionários em 3 livros didáticos e 2 sites educacionais deveu-se à sua ampla utilização desses (materiais) pedagógicos nas escolas e no planejamento dos professores. Esses recursos didáticos, serão denominados por:

- Livro Didático 1 (L.D.1) do 6º Ano do Ensino Fundamental Anos Finais;
- Livro Didático 2 (L.D.2) do 7º Ano do Ensino Fundamental Anos Finais;
- Livro Didático 3 (L.D.3) do 8º Ano do Ensino Fundamental Anos Finais;
- Site Educacional 1 (S.E.1);
- Site Educacional 2 (S.E.2).

A seguir, apresentaremos os resultados da aplicação do questionário nos livros didáticos e sites educacionais selecionados.

5.1.1 Análise do Livro Didático 1 (L.D.1)

1. O livro/site menciona outros sistemas numéricos além do sistema arábico?

Resultado: Sim, o livro apresenta outros sistemas de numeração, como o egípcio, o babilônico, e menciona também os sistemas chinês e maia (guarani).

2. 2. Em que contexto os sistemas numéricos são abordados?

Resultado: Os sistemas de numeração são apresentados de forma a introduzir o sistema de numeração indo-arábico, bem como uma abordagem para trabalhar com a composição e decomposição de números naturais.

3. O sistema numérico egípcio é especificamente mencionado?

Resultado: Sim, é mencionado na parte que aborda o sistema de numeração e, de forma introdutória, no Capítulo 3, que apresenta figuras geométricas, onde é feita uma breve explanação histórica sobre o Egito e suas pirâmides.

4. O sistema numérico egípcio é ilustrado com exemplos ou imagens?

Resultado: Sim, estão ilustrados os símbolos em hieróglifo, juntamente com seus valores e nomenclatura.

5. É fornecida uma explicação detalhada sobre como o sistema numérico egípcio funciona?

Resultado: É explicado, com exemplos, a conversão de números do sistema indo-arábico para o sistema egípcio e vice-versa. Além disso, são apresentadas os numerais egípcios e suas respectivas potências de dez, bem como a restrição de que apenas nove símbolos podem ser repetidos por vez.

6. Há alguma conexão entre o sistema numérico egípcio e a história ou civilização egípcia?

Resultado: O livro aborda apenas a localização geográfica do Antigo Egito e uma estimativa do tempo de duração da dominação egípcia.

7. São abordadas operações matemáticas utilizando o sistema numérico egípcio?

Resultado: Não é abordada a forma como os antigos egípcios manipulavam e operavam com as operações matemáticas.

8. O livro/site menciona frações egípcias?

Resultado: Não é mencionado as frações egípcias.

9. Há atividades ou exercícios que envolvam o sistema numérico egípcio ou frações egípcias?

Resultado: Não há no livro analisado.

10. É feita alguma comparação entre o sistema numérico egípcio e outros sistemas numéricos?

Resultado: Sim com os sistemas índio-arábicos e babilônios como forma de relacionar o mesmo valor, mas apresentado por símbolos diferentes.

11. Qual é a razão aparente para incluir o sistema numérico egípcio nos livros didáticos?

Resposta: Foi utilizado de forma preparatória para introduzir o nosso sistema decimal, destacando, de certa maneira, a existência de outros sistemas de numeração além do nosso. Isso permitiu evidenciar que o nosso sistema não é único e o mesmo passou por um processo gradual de modificação e evolução para alcançar o nível atual.

Em resumo, a abordagem do sistema de numeração egípcio e das frações egípcias foi concisa e focada em conceitos específicos. A apresentação temática foi breve e não explorou contextos mais amplos. Essa abordagem pode ser útil para introduzir os alunos aos conceitos básicos, mas não aprofunda a exploração da matemática e frações egípcias.

5.1.2 Análise do Livro Didático 2 (L.D.2)

1. O livro/site menciona outros sistemas numéricos além do sistema arábico?

Resultado: O livro aborda principalmente o sistema de numeração indo-arábico e não explora outros sistemas de numeração decimal.

2. Em que contexto os sistemas numéricos são abordados?

Resultado: Neste livro, o foco está no sistema de numeração indo-arábico, e outros sistemas de numeração decimal não são abordados.

3. O sistema numérico egípcio é especificamente mencionado?

Resultado: A matemática egípcia é mencionada brevemente no livro, no tópico sobre a história da matemática, onde é destacado o Papiro de Rhind como um importante documento matemático.

4. O sistema numérico egípcio é ilustrado com exemplos ou imagens?

Resultado: O sistema numérico egípcio não é trabalhado no livro.

5. É fornecida uma explicação detalhada sobre como o sistema numérico egípcio funciona?

Resultado: Não, pois o sistema de numeração egípcio não é abordado no livro.

6. Há alguma conexão entre o sistema numérico egípcio e a história ou civilização egípcia?

Resultado: O sistema de numeração egípcio não é tratado, sendo citado brevemente um texto informativo que relata sobre o Papiro de Rhind, sem aprofundamento.

7. São abordadas operações matemáticas utilizando o sistema numérico egípcio?

Resultado: Não.

8. O livro/site menciona frações egípcias?

Resultado: Não.

9. Há atividades ou exercícios que envolvam o sistema numérico egípcio ou frações egípcias?

Resultado: Não.

10. É feita alguma comparação entre o sistema numérico egípcio e outros sistemas numéricos?

Resultado: Não.

11. Qual é a razão aparente para incluir o sistema numérico egípcio nos livros didáticos?

Resultado: O livro se concentra no sistema de numeração indo-arábico não explorando outros sistemas de numeração.

Diante disso, o sistema numérico egípcio é apresentado de forma breve e sem aprofundamento de suas características, operações e exemplos. A apresentação resume-se a uma menção no contexto da história da matemática, sem oferecer uma visão mais detalhada sobre o tema.

5.1.3 Análise do Livro Didático 3 (L.D.3)

1. O livro/site menciona outros sistemas numéricos além do sistema arábico?

Resultado: Na parte introdutória sobre conjunto numérico, são mencionados outros sistemas de numeração. O sistema babilônico é abordado com mais detalhes, enquanto os sistemas egípcio e romano são brevemente citados.

2. Em que contexto os sistemas numéricos são abordados?

Resultado: Na introdução dos números naturais, pois ambos os conjuntos foram desenvolvidos para representar quantidades de números inteiros positivos.

3. O sistema numérico egípcio é especificamente mencionado?

Resultado: O livro menciona os papiros em quatro momentos: primeiro, documentos antigos de matemática são citados brevemente, destacando um dos mais antigos documentos matemáticos. Segundo, o conjunto numérico é introduzido com menção a sistemas de numeração antigos. Terceiro, um texto didático sobre história da matemática aborda as pirâmides do Antigo Egito e a geometria dedutiva. Quarto, um problema matemático do Papiro de Rhind é apresentado, resolvido com abordagem algébrica moderna, sem explorar a resolução egípcia original (“falsa posição”).

4. O sistema numérico egípcio é ilustrado com exemplos ou imagens?

Resultado: Não é trabalhado o sistema de numeração egípcio.

5. É fornecida uma explicação detalhada sobre como o sistema numérico egípcio funciona?

Resultado: Não é trabalhado o sistema de numeração egípcio.

6. Há alguma conexão entre o sistema numérico egípcio e a história ou civilização egípcia?

Resultado: Sim, o sistema de numeração egípcio é mencionado superficialmente em alguns contextos, como introdução a capítulos e num texto sobre história da matemática, mas sem aprofundamento.

7. São abordadas operações matemáticas utilizando o sistema numérico egípcio?

Resultado: Não.

8. O livro/site menciona frações egípcias?

Resultado: Não.

9. Há atividades ou exercícios que envolvam o sistema numérico egípcio ou frações egípcias?

Resultado: Um problema do Papiro de Rhind é apresentado e resolvido utilizando álgebra moderna. A solução original egípcia, que envolve o método da falsa posição, não é explorada.

10. É feita alguma comparação entre o sistema numérico egípcio e outros sistemas numéricos?

Resultado: Não.

11. Qual é a razão aparente para incluir o sistema numérico egípcio nos livros didáticos?

Resultado: De modo a introduzir o conjunto dos números naturais.

O livro apresenta uma abordagem limitada do sistema numérico egípcio, mencionando-o brevemente em textos informativos, dedicado à história da matemática. A ausência de ilustrações e exemplos, e sua contextualização histórica, bem como atividades e comparações com outros sistemas, contribuem para essa limitação. Além disso, quando no livro há oportunidade em apresentar a resolução de um problema de equação do primeiro grau presente no Papiro de Rhind pelo método egípcio essa oportunidade é desperdiçada fazendo uso de procedimentos algébricos, sem explorar a solução original egípcia conhecido como “falsa posição” onde se admite um valor para solução e com ajustes do valor inicial para obter a solução. Dessa forma, o livro oferece uma visão restrita do sistema numérico egípcio.

5.1.4 Análise do Site Educacional 1 (S.E.1) e Site Educacional 2 (S.E.2)

1. O livro/site menciona outros sistemas numéricos além do sistema arábico?

Resultado: Analisando o S.E.1 não foi localizado outros sistemas de numeração além do arábico. Analisando o S.E.2 apresenta conteúdos sobre o sistema de numeração romana.

Diante da análise realizada, verificou-se que as respostas para ambos os sites são negativas em relação à abordagem de outros sistemas de numeração e sistema egípcio. Por isso, optou-se por ocultar as respostas. A única diferença encontrada foi que o S.E.1 não apresenta outros sistemas de numeração além do arábico, enquanto o S.E.2 aborda o sistema de numeração romana.

5.2 Análise dos Dados Coletados dos Livros didáticos e Sites Educacionais

A pesquisa teve como objetivo investigar como os livros didáticos e sites educacionais abordam a matemática e frações egípcias. É importante frisar que a finalidade desses recursos educacionais é trabalhar conteúdos essenciais para o ensino básico, e não especificamente a matemática egípcia. Como destaca o resultado da análise do L.D.1, o sistema numérico egípcio foi utilizado de forma preparatória para introduzir o nosso sistema decimal, destacando a existência de outros sistemas de numeração.

A análise dos livros didáticos e sites educacionais revelou que o L.D.1 apresenta uma abordagem mais detalhada do sistema numérico egípcio, com exemplos e explicações, enquanto o L.D.2 menciona-o brevemente no contexto da história da matemática. Já o L.D.3 apresenta limitação do sistema numérico egípcio, mencionando-o de modo superficialmente em alguns contextos. Os sites educacionais S.E.1 e S.E.2, por sua vez, não apresentam conteúdos sobre o sistema numérico egípcio.

Os resultados mostram que os livros didáticos abordam o sistema numérico egípcio de forma limitada, com alguns textos informativos citados brevemente em contextos específicos. Como exemplo, o L.D.2 apresenta uma menção breve ao Papiro de Rhind, sem aprofundamento. Nenhum dos

recursos educacionais analisados aborda as frações egípcias. A Figura 39 abaixo resume os principais resultados da análise:

Questionários	L.D.1	L.D.2	L.D.3	S.E.1/S.E.2
1. Outros sistemas numéricos são mencionados?	Sim (egípcio, babilônico, chinês e maia)	Não	Sim (egípcio, babilônico, e romano)	Não (S.E.1) / Sim romano (S.E.2)
2. Qual é o contexto de abordagem dos sistemas numéricos?	Introdução ao sistema indo-arábico	Não	Introdução aos números naturais	Não
3. O sistema numérico egípcio é mencionado?	Sim	Sim	Sim	Não
4. Há exemplos ou imagens do sistema egípcio?	Sim	Não	Não	Não
5. Explica como o sistema egípcio funciona?	Sim	Não	Não	Não
6. Há conexão com a história egípcia?	Sim	Não	Sim	Não
7. Operações matemáticas egípcias são abordadas?	Não	Não	Não	Não
8. Frações egípcias são mencionadas?	Não	Não	Não	Não
9. Há atividades ou exercícios sobre o sistema egípcio?	Não	Não	Não	Não
10. Comparações com outros sistemas são feitas?	Sim (indo-arábico e babilônico)	Não	Não	Não
11. Por que incluir o sistema egípcio nos livros?	Introdução ao sistema decimal	Não	Não	Não

Figura 39 – Análise da coleta de dados. Fonte: Autor.

Estes resultados evidenciam que os livros didáticos e sites educacionais priorizam os conteúdos essenciais para o ensino básico, explorando de forma superficial a matemática egípcia como recurso educacional. Inclusão de tópicos sobre a história da matemática pode promover a contextualização dos conteúdos matemáticos e enriquecer o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Conforme (BIANCHI, 2006) a HM (História da Matemática) precisa contribuir para o entendimento do conteúdo em questão e não apenas servir como leitura adicional, que pouco se relaciona com o conteúdo abordado. A história da Matemática se torna um recurso para o ensino de matemática quando utilizada de forma contextualizada aos conteúdos se aproveitando desse conhecimento para revisar e auxiliar na compreensão e abstração. Quando é apresentada apenas como leitura adicional, sem conexão clara com o conteúdo abordado, ela pode perder sua eficácia em motivar e engajar os alunos.

6 Ensinando Frações com Frações Egípcias: Dois Jogos Educativos para Sala de Aula

Ao pesquisar sobre a abordagem da matemática egípcia em alguns livros didáticos e sites educacionais, percebemos que ela não é alcançada de maneira significativa, limitando-se ao seu sistema de numeração e a textos informativos ou introdutórios em capítulos. No entanto, entendemos que tais recursos educacionais não têm a pretensão de ensinar e aprofundar sobre a matemática egípcia, mas sim instruir e reforçar conteúdos importantes presentes no currículo, alinhados com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL., 2018).

Porém, ao estudar e introduzir a história da matemática como recurso educacional, tal como orientado pela BNCC (BRASIL., 2018), proporciona-se aos alunos um ganho cultural e promove-se a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, como história e geografia, contribuindo para a compreensão da matemática não somente como uma ciência, mas como uma prática social que, ao longo do tempo e com a contribuição de cada civilização, atingiu níveis de abstração e elegância presentes atualmente.

Segundo (BIANCHI, 2006), a história da matemática precisa enriquecer a compreensão do tema, não se limitando a uma leitura adicional. Nessa linha de compreensão, entendemos que a matemática egípcia tem potencial educacional para o ensino básico, podendo contribuir em vários conteúdos previstos no currículo, especialmente em frações, uma vez que:

Em linhas gerais, o ensino de frações tem se caracterizado por uma ênfase no simbolismo e na linguagem matemática, na aplicação mecânica de algoritmos (sobretudo na aritmética de frações) e no uso de representações diagramáticas. (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2009, p. 414)

Por conseguinte, o uso das frações egípcias pode muito contribuir para o ensino de frações no ensino básico, uma vez que os egípcios utilizavam matemática de forma concreta, como meio de resolver problemas do seu cotidiano.

Portanto, na perspectiva de alinhamento da matemática egípcia como meio de ensinar frações de maneira prática e contextualizada, foi então produzido o produto educacional “Desvendando a Matemática no Tempo dos Faraós: Aprendendo com as Frações Egípcias”, onde são apresentados dois jogos educacionais: “Pizza Egípcia: Juntando Fatias e Descobrimo Frações” e “As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios”. A escolha de utilizar jogos para ensinar frações por meio da matemática egípcia pode ser justificada, uma vez que a aprendizagem através de jogos é um recurso didático que auxilia na compreensão e abstração de certos conteúdos matemáticos na sala de aula.

Aprendizagem Baseada em Jogos envolve o uso de jogos específicos projetados com o propósito educacional. Esses jogos são desenvolvidos para proporcionar uma experiência de aprendizagem imersiva, integrando conceitos educacionais de forma integrada à narrativa do jogo. A ênfase está na criação de ambientes envolventes que permitam aos aprendizes aplicar habilidades e conhecimentos de maneira prática, promovendo a retenção e a aplicação do que foi aprendido. (SANTOS, 2024, p. 29)

Aprendizagem Baseada em Jogos apresenta potencialidades para promover a aprendizagem de forma interativa e envolvente. Quando combinada a contexto histórico, como é o caso das frações egípcias, pode tornar o aprendizado ainda mais contextualizado e imersivo, permitindo aos alunos uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e motivando-os a participar ativamente durante a condução dos jogos. Espera-se que os alunos sejam habilitados aos conteúdos trabalhados no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, sobre frações, alinhados com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL., 2018):

1. **(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
2. **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
3. **(EF07MA08)** Ler, compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
4. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar situações problema que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
5. **(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
6. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
7. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Objetivos

Objetivo Geral

Desenvolver competências matemáticas e habilidades críticas nos alunos, promovendo a compreensão das frações por meio de uma abordagem lúdica e histórica, utilizando frações egípcias para desenvolver habilidades como raciocínio lógico e resolução de problemas, enquanto os alunos aprendem a decompor frações próprias em frações egípcias e revisam conceitos sobre frações de forma prática e interativa, alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL., 2018).

Objetivos Específicos

- Compreender e diferenciar as frações próprias e frações unitárias.

- Comparar frações com base em suas representações visuais e numéricas.
- Reconhecer de frações equivalentes utilizando a decomposição em frações egípcias.
- Usar o pensamento crítico para justificar escolhas e estratégias.
- Compreender e aplicar o sistema egípcio de frações unitárias, explorando sua utilidade na divisão equitativa de recursos e comparando a notação moderna com a notação egípcia (hieróglifos).
- Relacionar a matemática ao contexto histórico do Egito Antigo, reconhecendo como as frações eram aplicadas no cotidiano.
- Trabalhar em equipe para chegar a soluções coletivas, discutindo e validando diferentes estratégias.

6.1 Descrição dos Jogos

Os jogos “Pizza Egípcia: Juntando fatias e descobrindo frações” e “As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios” são duas propostas educacionais que visam revisar conteúdos sobre frações de forma lúdica e prática, utilizando frações egípcias ao mesmo tempo com abordagem histórica da matemática egípcia. Ambos os jogos se limitam à representação de frações próprias, pois a decomposição de frações impróprias em frações egípcias envolve somas parciais de séries harmônicas, o que é inviável para o nível de escolaridade ao qual pretendemos aplicá-los.

A aplicação dos jogos educacionais “Pizza Egípcia” e “As Encomendas do Faraó” pode contribuir para a compreensão e revisão de conceitos de frações, além de proporcionar uma visão histórica e eficaz da matemática, desta forma proporcionando aos alunos o uso de métodos milenares dos antigos egípcios de forma prática e lúdica, aprofundando conceitos atuais sobre frações e estimulando o pensamento lógico e dedutivo. Recomenda-se a aplicação em turmas onde os conceitos de frações já tenham sido previamente abordados para melhor engajamento dos alunos.

6.1.1 Pizzas Egípcias: Juntando Fatias e Descobrindo Frações

O jogo educativo “Pizza Egípcia: Juntando Fatias, Descobrindo Frações” foi desenvolvido como recurso educacional interativo para auxiliar no ensino e na revisão de conteúdos sobre frações. A dinâmica do jogo consiste em decompor frações próprias em somas de frações unitárias distintas (frações egípcias) por meio da sobreposição de frações em forma de pizza pelas fatias das frações unitárias (peças intituladas como “fatias egípcias”). Para elaboração do material e verificação das frações em frações egípcias, tanto de decomposição quanto visualmente, utilizamos os sites (BORTOLLOSI; FERNANDES, 2016), onde é analisada a decomposição de frações em frações egípcias pelo método desenvolvido por Fibonacci e Sylvester, e (THEATER, 2023), para visualização gráfica da decomposição. Por meio desse material, os alunos podem aprender sobre frações de forma concreta e engajadora, valorizando a eficiência e utilização de conhecimentos, desenvolvendo habilidades matemáticas e raciocínio. Além disso, o jogo promove o trabalho em equipe e a comunicação, habilidades essenciais para o sucesso em qualquer área.

6.1.1.1 Instruções Do Jogo

Ao iniciar o jogo, é recomendável realizar a contextualização histórica sobre as frações egípcias, sendo fundamental deixar claro aos alunos que a nossa representação moderna de frações não era utilizada pelos antigos egípcios. Eles representavam as frações como soma de frações unitárias distintas, que, na matemática moderna, são conhecidas como frações unitárias, ou seja, frações cujo numerador é 1 e o denominador é um número inteiro positivo ($\frac{1}{n}$). Disponibilizamos em anexo o material teórico para o professor aplicar em suas turmas antes da aplicação dos jogos, além de fornecer exemplos, dinâmicas e regras de ambos os jogos.

Sugerimos ao professor, nessa etapa de exemplificação e orientação para o jogo, que sejam expostas imagens de pizzas representando frações em nossa notação moderna e das “fatias egípcias”, que são as frações unitárias em formato de fatias de pizza, como podemos observar na Figura 41. É importante enfatizar que cada “fatia egípcia” e frações em pizzas representam frações unitárias ou somatório dessas frações. Com um exemplo prático, utilizando os materiais que compõem o jogo que facilitará o processo de compreensão do processo de decomposição de frações em frações egípcias. Exemplo de decomposição de fração em frações egípcias:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

É essencial que se realize o procedimento de soma e simplificação de frações, pois esses procedimentos de cálculo farão parte do jogo intitulado “Verificação”, onde os alunos irão pôr à prova se a decomposição encontrada realmente está correta ou não. Esse será um momento em que os alunos revisarão esses assuntos matemáticos que são pouco enfatizados após o 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. Em seguida, verificarão graficamente com as peças do jogo, mostrando como a peça de $\frac{1}{3}$ cobre parte do todo, a peça de $\frac{1}{4}$ complementa e a peça de $\frac{1}{12}$ completa a fração $\frac{2}{3}$, como ilustrado na Figura 40.

Verificação Gráfica:

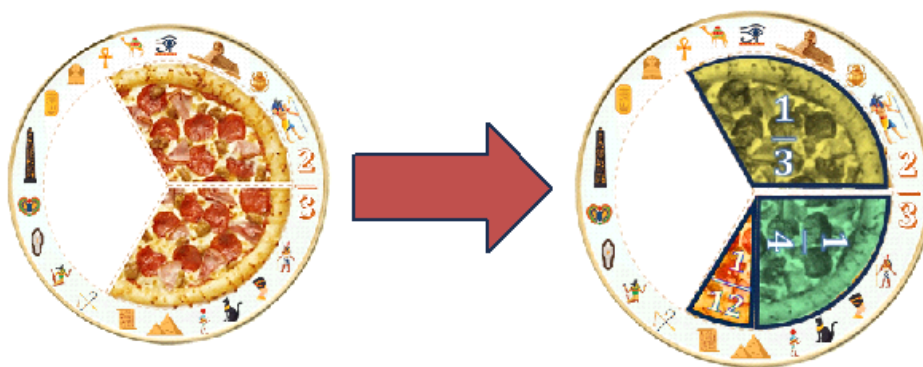


Figura 40 – Exemplo prático decomposição de fração em frações egípcias. Fonte: Autor

Observação: Ficará a critério do professor fornecer mais exemplos. Porém, recomendamos que as decomposições apresentadas para fins didáticos não sejam utilizadas pelos alunos durante o jogo, incentivando-os a buscar soluções alternativas, o que fortalecerá seu pensamento lógico e criatividade.

Fatias Egípcias	Pizzas
	
Cada fatia representando respectivamente as frações unitárias: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11 e 1/12.	Cada pizza representa as frações 2/3, 3/4 e 4/5 e são compostas por soma de frações unitárias iguais: $2/3 = 1/3 + 1/3$, $3/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4$ e $4/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5$

Figura 41 – Exemplo visuais das frações unitária. Fonte: Autor

Dinâmica do Jogo

Para garantir uma melhor participatividade, sugerimos dividir a sala em grupos de no máximo três alunos, o que permitirá maior interação e envolvimento de todos durante o jogo. Em seguida, realize a distribuição das “fatias egípcias” para cada grupo e peça aos alunos que comparem as fatias, sobrepondo uma fatia à outra. Questione-os sobre a relação entre o denominador e o tamanho das fatias. Com esse experimento e questionamento, espera-se que os alunos concluam que, quanto maior o denominador, menor será a fração unitária. Essa percepção do tamanho de cada fatia será útil durante as atividades, facilitando as escolhas que cada grupo precisará fazer ao preencher as pizzas (frações) com as “fatias egípcias” (frações unitárias distintas).

Ao todo, o jogo disponibiliza 14 pizzas que representam frações próprias, as quais serão distribuídas no birô do professor ou em mesas específicas, caso seja necessário. Cada grupo escolherá uma pizza para iniciar a atividade e uma folha para registrar suas soluções (titulada como “Papiro do Grupo”). Os alunos deverão cobrir a pizza que representa a fração escolhida por eles com as “fatias egípcias” disponíveis. Em seguida, realizarão a “Verificação”, por meio da soma e simplificação das frações, para comprovar se a decomposição encontrada corresponde à fração ilustrada na pizza. Em caso afirmativo, o grupo conseguiu representar a fração escolhida em frações egípcias; nesse momento, os alunos registrarão a resposta em seu “Papiro”, como ilustrado na Figura 42.

O jogo foi planejado com duração de duas aulas de 50 minutos, podendo ser ajustado de acordo com a necessidade da turma. A dinâmica do jogo se caracteriza por meio de rodadas e troca das pizzas: quando todos os grupos terminarem a decomposição e registro de sua solução, o grupo 1 passará sua pizza para o grupo 2, o grupo 2 para o grupo 3, e assim sucessivamente, até que todos os grupos tenham trocado as pizzas entre si. Após a realização da troca de pizzas entre os grupos, considera-se concluída uma rodada. Recomendamos que o jogo seja realizado em 4 rodadas.

Competição: Pontuação e Desempenho

Os grupos pontuarão com base na exatidão da decomposição e na justificativa das escolhas em cada rodada.



Verificação:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4 + 3 + 1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

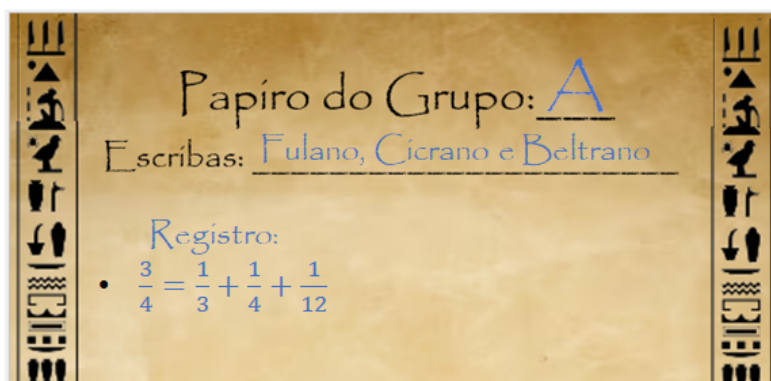


Figura 42 – Decomposição de frações em frações egípcias. Fonte: Autor

Critério Faraônico

1. Se o grupo acerta na primeira tentativa: 5,0 pontos.
 2. Se o grupo acerta na segunda tentativa: 3,0 pontos.
 3. Se o grupo levar três ou mais tentativas: 2,0 pontos
- Pontos extras serão dados para grupos que encontrarem mais de uma decomposição válida. A sugestão é que a cada decomposição extra válida some 1,0 ponto a mais na atual rodada.
 - Ao final do jogo, o grupo com mais pontos ganhará um brinde (o brinde fica a critério do professor).

A Tabela 5 apresenta as soluções esperadas que os alunos podem encontrar durante a realização do jogo. Embora outras soluções possam ser encontradas, a “Verificação” é um passo importante e indispensável para a validação da solução apresentada pelos alunos.

Finalização

Ao final das rodadas, espera-se que cada grupo tenha realizado a decomposição de 4 frações diferentes. O professor pode encerrar a atividade com uma discussão sobre as estratégias usadas e

Nº	Frações Equivalentes	Decomposição em frações unitárias
1	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
2	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$
4	$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$
6	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
7	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$
8	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
9	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$
10	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
11	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

Tabela 5 – Decomposições Esperadas das Frações em Frações Egípcias. Fonte: Autor.

as dificuldades encontradas na decomposição das frações em frações egípcias. Em seguida, pedirá que cada grupo cole seu “papiro” com as suas respectivas soluções em uma cartolina no formato de pergaminho. Esse pergaminho será fixado na lousa intuindo socializar as soluções e estratégias de cada grupo.

Sugestão para o Professor

Sugerimos que, durante ou após o jogo, o professor faça os seguintes questionamentos:

1. Foram encontradas mais de uma representação para uma mesma fração em frações egípcias? Se sim, quais foram?
2. Como o tamanho das fatias influenciou sua escolha das frações unitárias? Você acredita que há uma relação com o valor do denominador de cada fatia?
3. Houveram algumas frações diferentes mas com a mesma decomposição em frações unitárias distintas? O que isso nos diz sobre frações equivalentes?
4. Como você pode usar frações egípcias para comparar frações e determinar qual é maior ou menor?
5. Qual foi a parte mais desafiadora da atividade? Como você superou esse desafio?

A importância dessas perguntas é estimular a autorreflexão sobre os conhecimentos matemáticos necessários para a realização dos procedimentos e a dinâmica do jogo, identificar quais conhecimentos matemáticos foram mais relevantes para os alunos e avaliar coletivamente quais conceitos sobre frações os alunos melhor compreenderam ao longo do jogo.

Materiais para execução e elaboração do jogo

Toda a parte de arte conceitual, incluindo “Pergaminhos dos grupos”, “Pizzas” (representação das frações) e “Fatias Egípcias” (frações unitárias), está disponível em anexo. Segue a lista de materiais necessários para a aplicação do jogo:

1. Impressão e confecção das 11 “Fatias Egípcias” (frações unitárias com denominadores de 2 a 12) distintas entre si para cada grupo.
2. Lápis, caneta e cartolina.
3. Impressão dos “Papiro do Grupo” em papel A4 para anotações das soluções encontradas.
4. Lousa e lápis de quadro.
5. Opcional: Data-show e slide com fundamentação teórica (disponível em anexo com link para download em formato editável).
6. Ferramentas digitais opcionais para verificação das soluções encontradas pelo professor ou alunos: celulares, tablets ou computadores com links e aplicativos interativos de frações. Sugestões incluem “Fraction Circles” (link para aplicativo online disponível em (THEATER, 2023)) e/ou página virtual com links disponíveis em (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2016)).

6.1.2 As Comendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios

O jogo educacional “As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios” é uma atividade lúdica e interativa que combina matemática com contexto histórico, sendo uma complementação do jogo educacional anterior, “Pizza Egípcia: Juntando Fatias, Descobrimos Frações”. Ambos os jogos compartilham o objetivo de desenvolver habilidades matemáticas e raciocínio lógico nos alunos, mas com estratégias diferentes e complementares. Enquanto o jogo “Pizza Egípcia” se concentra em decompor frações próprias em somas de frações unitárias distintas (frações egípcias), o jogo “As Encomendas do Faraó” permite o conceito de divisão de frações de maneira prática e engajadora, com desafios que os alunos devem resolver para dividir alimentos (pães) entre os “trabalhadores do faraó”. Isso é feito de maneira inspirada no método egípcio de divisão e representação das frações em frações egípcias (soma de frações unitárias distintas) por meio dos recortes de “pães” em formatos circular.

Para verificação das frações em frações egípcias, tanto na decomposição em soma de frações unitárias distintas quanto na verificação gráfica, utilizamos os sites (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2016) e (THEATER, 2023), Respectivamente, auxiliando na confecção e produção dos materiais necessários para o desenvolvimento e aplicação do jogo educacional. Com a abordagem prática e interativa, esperamos que o jogo “As Encomendas do Faraó” seja um recurso pedagógico útil para os professores que desejam revisar e aprofundar o ensino de frações para seus alunos, especialmente na educação básica.

6.1.2.1 Instruções Do Jogo

No início do jogo, é recomendável realizar uma breve contextualização histórica sobre as frações egípcias, destacando que os egípcios representavam frações como soma de frações unitárias distintas ($\frac{1}{n}$, com n sendo um número inteiro positivo). Sugerimos que o professor inicie com um exemplo do método de divisão egípcia, que servirá de modelo para os alunos resolverem as atividades no decorrer do jogo, onde em anexo está disponível a fundamentação teórica e exemplos para serem aplicados antes do jogo. Sugestão para o professor expor antes do jogo: dividir 3 “pães” para 4 “trabalhadores egípcios”, ou seja, realizar a decomposição de $\frac{3}{4}$ em frações egípcias, como ilustrado na Figura 43.

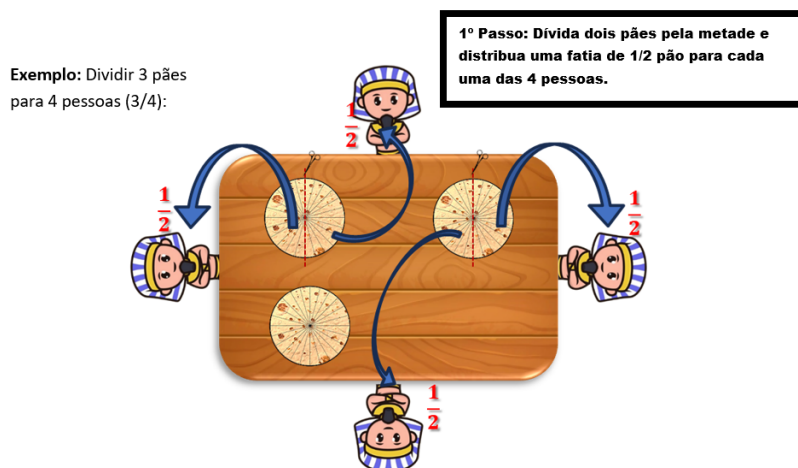


Figura 43 – Exemplo de distribuição de 3 pães para 4 pessoas. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).

O processo de divisão do egípcio é feito por etapas, onde são priorizadas a distribuição das maiores partes, ou seja, as maiores frações unitárias no processo, mas todas distintas entre si. Voltando ao exemplo, os dois primeiros “pães” serão repartidos ao meio e distribuídos entre os 4 “trabalhadores”, cada um recebendo $\frac{1}{2}$ de “pão”, restando assim um “pão” para ser dividido. O próximo passo se baseia em dividir o “pão” que restou para 4 e distribuir como observamos na Figura 44.

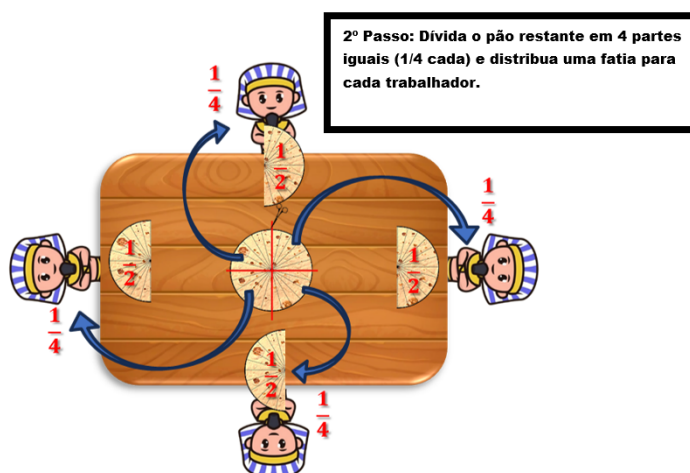


Figura 44 – Exemplo de distribuição de 3 pães para 4 pessoas. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).

O professor irá expor o resultado final, que $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, como ilustrado na Figura 45. Neste instante, será feito o momento de “Verificação”, onde o professor irá, através da decomposição encontrada, expor para os alunos que se trata da mesma fração que estava representada no problema ($\frac{3}{4}$), ou seja,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Esse processo de verificar a decomposição terá que ser feito pelos grupos durante a resolução das atividades do jogo.



Figura 45 – Exemplo de distribuição de 3 pães para 4 pessoas. Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos proveniente da plataforma (GUAVANABOY, 2000) (personagem egípcio).

Algumas divisões exigirão múltiplas etapas, pois o método egípcio prioriza obter as maiores frações unitárias possíveis em cada passo. A verificação final é fundamental para confirmar o sucesso da distribuição. Após realizar as divisões e verificar a distribuição com êxito, mostre aos alunos como transcrever a solução na escrita convencional e em hieróglifos egípcios, como ilustrado na Figura 46.

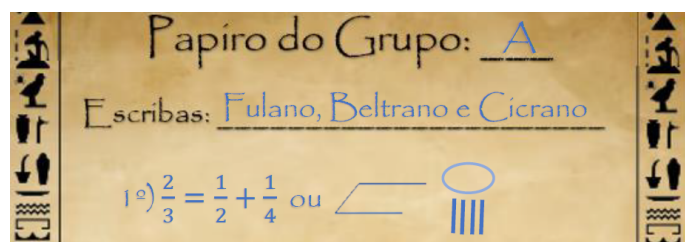


Figura 46 – Representação de $\frac{2}{3}$ na escrita moderna e em hieróglifos. Fonte: Autor.

Dinâmica do Jogo

Com o objetivo de garantir uma experiência mais dinâmica e participativa, recomendamos dividir a sala em grupos compostos por até três alunos. Dessa forma, haverá maior interação e envolvimento de todos durante o jogo, que terá uma duração de duas aulas de 50 minutos, podendo ser ajustado de acordo com a necessidade da turma. Cada grupo receberá imagens de 12 “trabalhadores egípcios” e 1 “mesa egípcia” que servirá como tabuleiro, onde serão postos os “trabalhadores” e os “pães”. A

quantidade de “pães” será ajustada de acordo com o problema sorteado. As imagens dos “pães” em papel ficarão na mesa do professor ou em locais designados; durante o jogo, um integrante de cada grupo poderá se levantar e pegar o número de pães necessários para realizar a divisão proposta.

Todos os grupos resolverão o mesmo problema de divisão, que será sorteado por meio de um “pergaminho”, onde estarão escritos quantos pães deverão ser divididos entre os trabalhadores do “faraó”, contendo as soluções esperadas. Assim, o professor poderá utilizar essas soluções para corrigir as respostas dadas pelos alunos e terá uma orientação para recortar os “pães” conforme ilustrado na Figura 47. Com o “pergaminho” sorteado, todos os grupos deverão realizar as divisões dos pães

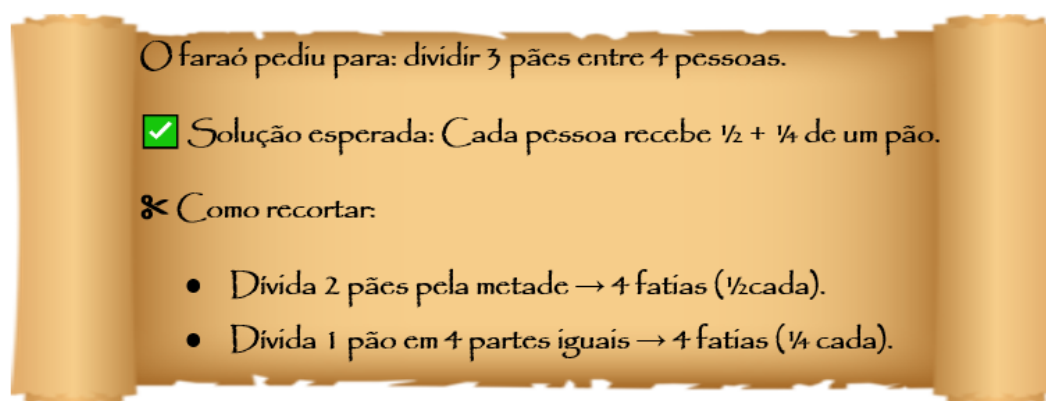


Figura 47 – Pergaminho com os problemas de divisão que serão sorteados. Fonte: Autor.

seguindo o método egípcio, recortando os “pães” com o auxílio de régua ou tesoura sem ponta. Assim, dividirão a quantidade de pães em frações egípcias (soma de frações unitárias distintas) e verificarão se alcançaram o êxito ou não por meio da checagem do resultado. Em seguida, registrarão a solução no “Papiro do Grupo”, preferencialmente tanto na notação moderna quanto na egípcia (hieróglifos). Para melhor esclarecimento, considere a seguinte situação hipotética do jogo:

1º) Sorteio do Pergaminho:

O professor sorteia um pergaminho, ex.: Dividir 3 “pães” entre 4 “trabalhadores”.

2º) Divisão do Pães:

- Um integrante do grupo se dirige ao birô do professor e recolhe 3 “pães” para seu grupo fazer a divisão.
- Em seguida são posicionados 4 “trabalhadores egípcios” sobre a “mesa egípcia” (tabuleiro) para auxiliar visualmente a distribuição dos “pães”.
- Solução esperada é que cada “trabalhador” receberá $\frac{3}{4}$ de pão (notação moderna) e sua representação equivalente em fração egípcia: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

3º) Recortando os Pães

- Os pães de papel serão círculos que podem ser divididos em fatias usando tesouras sem ponta ou régua

- Ao dividir, por exemplo, 1 pão em 4 fatias, os alunos desenham linhas no círculo criando 4 partes iguais. Em seguida fazem o recorte dessas fatias.
- Os alunos podem escrever as frações correspondentes em cada fatia (ex.: $\frac{1}{4}$).

4º) Verificação Matemática

Antes de registrar no papiro, o grupo deve:

1. Somar as frações egípcias encontradas (ex.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).
2. Conferir se o total corresponde com a notação moderna e se necessário realizar simplificação da fração ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$).

Concluídas todas as etapas, o grupo poderá anotar a solução em seu papiro, como ilustrado na Figura 46. O sorteio do próximo “Pergaminho” com a situação problema de divisão só acontecerá após todos os grupos validarem suas respostas; então, o professor sorteará um novo desafio.

Critérios de Pontuação

Os grupos pontuarão com base na exatidão da decomposição e na justificativa das escolhas em cada rodada.

Rigor Faraônico:

- 1 ponto por resposta correta na notação moderna.
- 1 ponto por decomposição egípcia correta.
- 1 ponto extra se a soma verificadora estiver certa.
- Ao errar na verificação perde se o ponto extra, mas pode corrigir.

Sugestão para o Professor

Sugerimos que, durante ou após o jogo, o professor faça os seguintes questionamentos:

1. É possível obter diferentes formas de decompor a mesma fração em frações egípcias (Ex.: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$)? Qual versão foi mais útil para distribuir os pães?
2. Iniciar cortando os pães pela metade ($\frac{1}{2}$) facilita ou não no processo de divisão?
3. Houve dificuldade ao dividir pães com denominadores ímpares (Ex.: 2 pães para 5 pessoas)? Qual foi a estratégia que seu grupo resolveu utilizar?
4. Como seu grupo decidiu qual fração unitária usar primeiro em cada situação problema? Todos concordavam com estratégia que deveriam seguir?
5. Qual foi a parte mais desafiadora da atividade? Como você superou esse desafio?

A importância dessas perguntas é estimular a reflexão crítica sobre os conhecimentos matemáticos necessários para a realização e a dinâmica do jogo, destacando, assim, os conceitos matemáticos mais relevantes para os alunos e discutir em grupo quais dos conceitos sobre frações foram melhor compreendidos ao longo da atividade.

Materiais para execução e elaboração do jogo

Todo o material de arte conceitual, incluindo “Pergaminhos dos Grupos”, “Trabalhadores Egípcios”, “Problemas Em Pergaminhos”, “Mesa Egípcia” e “Pães”, está disponível em anexo. Logo, serão necessários:

1. Impressão e confecção de 10 “Problemas em Pergaminhos”.
2. Uma “Mesa” e doze “Trabalhadores Egípcios” para cada grupo.
3. Impressão e confecção em quantidade “pães” circulares (impressão em quantidade).
4. Tesouras sem ponta pelo menos um por grupo.
5. Lápis, caneta e cartolina.
6. Impressão dos “Papiro do Grupo” em papel A4 para anotações das soluções encontradas.
7. Lousa e lápis de quadro.
8. Recipiente para o sorteio dos “pergaminhos”.
9. Opcional: Data-show e slide com fundamentação teórica (disponível em anexo com link para download em formato editável).
10. Ferramentas digitais opcionais para verificação das soluções encontradas pelo professor ou alunos: celulares, tablets ou computadores com links e aplicativos interativos de frações. Sugestões incluem “Fraction Circles” (link para aplicativo online disponível em (THEATER, 2023))) e/ou página virtual com links disponíveis em (BORTOLOSSI; FERNANDES, 2016).

Pós-jogo: O Banquete do Faraó

Após a resolução dos problemas de divisão, é hora de celebrar o sucesso com um banquete digno do Faraó! Nesta etapa, os grupos trabalharão juntos para criar uma exposição visual das resoluções dos problemas resolvidos.

1. **Montagem do Banquete:** Cada grupo cola seus pães recortados em um cartaz, mostrando como dividiram os alimentos. Ao lado da representação visual, os grupos expõem suas soluções em frações egípcias.
2. **Exposição no Mural:** Os cartazes são então colados na parede, criando um grande mural intitulado “O Grande Banquete do Faraó”. Os grupos transitam pela sala para analisar as soluções dos outros, comparando abordagens e resultados, aproveitando a oportunidade para aprender com os colegas e apreciar a diversidade de soluções.

Materiais Necessários:

- Cartolina.
- Caneta, lápis, borracha, régua tesoura sem ponta, cola e fita adesiva.
- Canetas coloridas, fitas decorativas, lápis de pintura (opcional para ornamentar).

6.2 Relatório da Aplicação dos Jogos

O presente relatório refere-se à aplicação do produto educacional intitulado “Matemática no Tempo dos Faraós: Aprendendo Frações com Frações Egípcias”, parte integrante da dissertação de mestrado vinculada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Este produto educacional foi desenvolvido com o objetivo de explorar as frações egípcias como recurso didático para o ensino de frações, proporcionando contextualização histórica sobre a matemática egípcia. O relatório apresenta os resultados da aplicação de dois jogos educacionais em uma turma de 25 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, na rede municipal de ensino de Carnaíba - PE. Os jogos foram aplicados nos dias 25 de abril a 16 de maio do ano de 2025, com o objetivo de avaliar a eficácia do produto educacional em promover a compreensão das frações egípcias e sua aplicação prática.

6.2.1 1º Jogo Educacional: Pizzas Egípcias

No dia da aplicação, a turma foi dividida em seis grupos de três alunos, totalizando 18 participantes. Sete alunos estiveram ausentes: cinco devido à participação em jogos escolares e dois por questões de saúde. Cada grupo recebeu o “Papiro do Grupo” para registrar suas respostas. Para auxiliar na explanação, foram utilizados data show, peças do jogo, lousa e lápis de quadro. Após a revisão teórica e a explanação das regras e critérios de pontuação como ilustrado na Figura 48, deu-se início à prática do jogo.

Ao distribuir para cada grupo as “fatias egípcias” (frações unitárias), os alunos foram orientados a comparar as fatias sobrepondo uma à outra. Houve questionamento sobre a relação entre o denominador e o tamanho das fatias, no qual os alunos perceberam que quanto menor o denominador da fração unitária, maior seria o tamanho da fatia. Essa percepção do tamanho de cada fatia foi útil durante as atividades, facilitando as escolhas que cada grupo precisou fazer ao preencher as pizzas (frações) com as “fatias egípcias”.

Ao distribuir para cada grupo as “fatias egípcias” (frações unitárias), os alunos foram orientados a comparar as fatias sobrepondo uma à outra. Houve questionamento sobre a relação entre o denominador e o tamanho das fatias, no qual os alunos perceberam que quanto menor o denominador da fração unitária, maior seria o tamanho da fatia. Essa percepção em relação ao tamanho de cada fatia foi útil durante as atividades, facilitando as escolhas que cada grupo precisou fazer ao preencher as pizzas (frações) com as “fatias egípcias”.

O jogo disponibilizou 14 pizzas que representavam frações próprias, as quais foram distribuídas na mesa do professor. Cada grupo escolheu uma pizza para iniciar a atividade e um “Papiro do Grupo” para registrar sua solução. Os alunos, em grupo, fizeram a sobreposição da pizza que



Figura 48 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte autor.

representava a fração escolhida por eles com as “fatias egípcias” disponíveis (cada fatia representava uma fração unitária com denominadores de 2 a 12) como ilustrado na Figura 49. Após o sucesso na sobreposição, realizaram a “Verificação” por meio da soma e simplificação das frações, para comprovar se a decomposição encontrada correspondia à fração ilustrada na pizza. Em caso afirmativo, o grupo conseguiu representar a fração escolhida em frações egípcias e, nesse momento, foi feito o registro no “Papiro do Grupo”.

O jogo teve duração de 2 aulas de 50 minutos e decorreu por meio de rodadas e troca das pizzas. À medida que todos os grupos terminavam a decomposição, o grupo 1 passava sua pizza para o grupo 2, o grupo 2 para o grupo 3, e assim sucessivamente, até que todos os grupos tivessem trocado as pizzas entre si. Cada troca de pizzas entre todos os grupos caracterizava uma rodada, e ao todo foram realizadas 4 rodadas. Foi apresentado e colocado em prática o critério de pontuação do jogo para cada rodada, estabelecido como “Critério Faraônico”:

1. Se o grupo acertasse na primeira tentativa: 5,0 pontos.
2. Se o grupo acertasse na segunda tentativa: 3,0 pontos.
3. Se o grupo levasse três ou mais tentativas: 2,0 pontos.

Os pontos extras seriam dados para grupos que encontrassem mais de uma decomposição válida. A sugestão era que, a cada decomposição extra válida, somaria 1,0 ponto a mais na atual rodada. Ao final das 4 rodadas, o grupo com mais pontos ganharia um brinde (caixa de bombons a ser dividida pelo grupo). A pontuação se deu por meio da análise da decomposição descrita na folha de solução do grupo, como ilustrado na Figura 50.



Figura 49 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte: Autor.

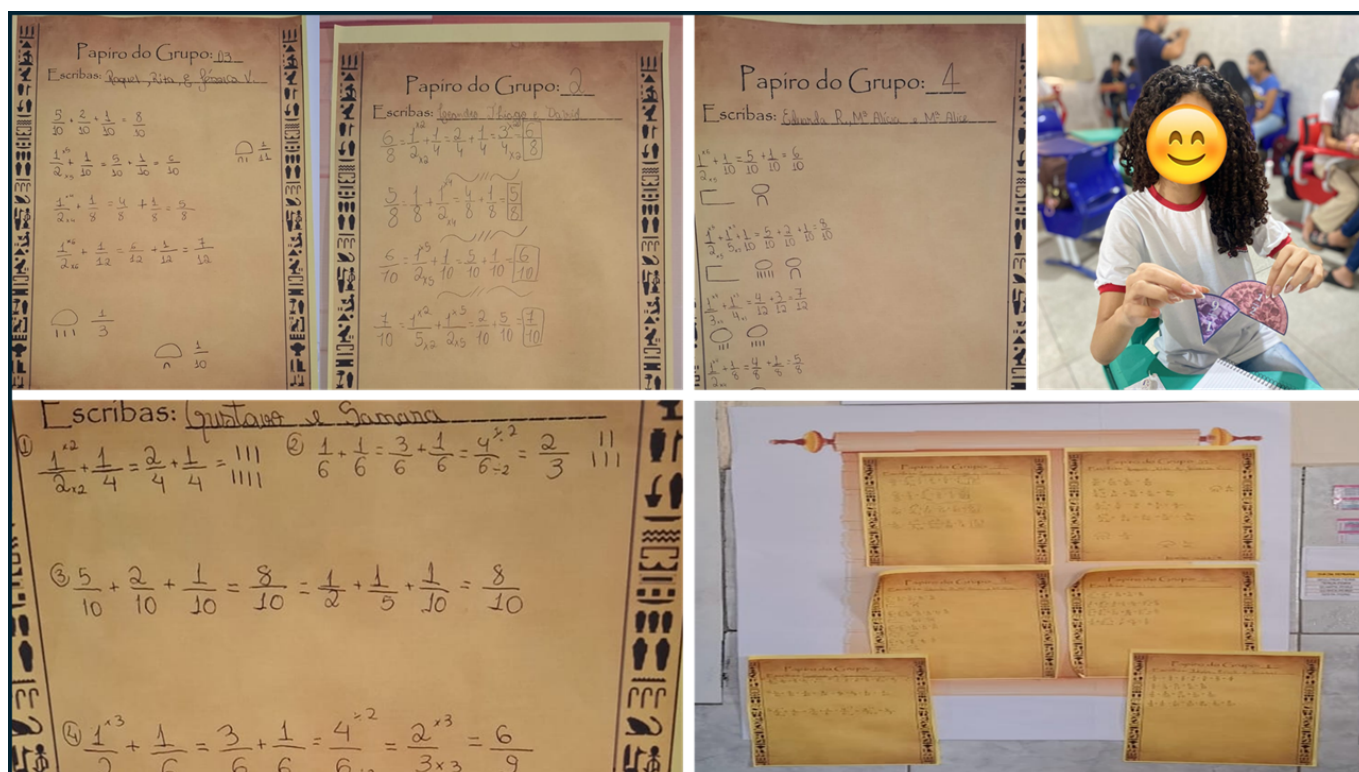


Figura 50 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte: Autor.

Na Tabela 6, apresentamos os pontos obtidos pelos grupos por rodada. Nenhum dos grupos obteve pontos extras, pois não apresentaram mais de uma decomposição válida. O Grupo 1 se destacou ao obter a pontuação máxima de 20 pontos, acertando todas as decomposições na primeira tentativa em todas as rodadas. Já os Grupos 2 e 3 obtiveram a pontuação mínima de 13 pontos, enfrentando mais dificuldades nas primeiras rodadas. No entanto, é possível observar que a maioria dos grupos melhorou ao longo das rodadas, obtendo pontuação mais alta nas últimas rodadas. A primeira rodada foi a mais desafiadora, pois fora a oportunidade na qual tiveram o primeiro contato com o jogo, o que contribuiu para que a maioria dos grupos alcançassem uma pontuação mais baixa. Enquanto as últimas rodadas foram mais fáceis, pois os alunos já estavam adaptados às regras e dinâmica do jogo.

Tabela 6 – Pontuação do Jogo Pizza Egípcia: Juntando Fatias e Descobrimdo Frações. Fonte: Autor.

Grupo	1ª Rodada	2ª Rodada	3ª Rodada	4ª Rodada	Total
1	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	20
2	2 (3 tentativas)	3 (2ª tentativa)	3 (2ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	13
3	2 (3 tentativas)	3 (2ª tentativa)	3 (2ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	13
4	3 (2ª tentativa)	3 (2ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	16
5	2 (3 tentativas)	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	17
6	5 (1ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	3 (2ª tentativa)	5 (1ª tentativa)	18

6.2.2 Desenvolvimento e Dificuldades Encontradas

O jogo foi dividido em quatro rodadas. Inicialmente, os alunos demonstraram facilidade na sobreposição das frações com as peças do jogo, mas encontraram dificuldades na verificação matemática das decomposições, especialmente na soma e simplificação de frações. Com o passar das rodadas, observou-se melhora significativa na autonomia e estratégia dos grupos. As dificuldades recorrentes nos grupos observadas foram:

- Alguns grupos não atentaram para a necessidade de manter uma estratégia de decomposição das frações, focando apenas na sobreposição visual sem considerar a verificação matemática da resposta.
- Houve dificuldade na soma de frações e na simplificação, uma vez que muitos alunos não identificavam corretamente se deveriam multiplicar ou dividir numeradores e denominadores para encontrar frações equivalentes. Em caso de erro, foi necessária a intervenção do professor para orientar se o próximo passo seria, dividir ou multiplicar as frações.

Observações feitas por rodadas:

- **Primeira Rodada:** A maioria dos grupos precisou de mais de uma tentativa para acertar tanto a sobreposição das peças quanto a verificação matemática. Dois grupos apresentaram dificuldades na sobreposição; três, na verificação; e apenas um grupo não enfrentou obstáculos.

- **Segunda Rodada:** Todos os grupos, exceto um, acertaram a decomposição e a verificação já na primeira tentativa. O Grupo 3, que apresentou maiores dificuldades, recebeu apoio do professor para a correta sobreposição e verificação. Durante esse momento, os demais grupos, espontaneamente, utilizaram as peças do jogo para verificar a equação $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, como ilustrado na Figura 51, onde o professor demonstrou e comprovou suas conjecturas através de cálculos feitos coletivamente no quadro, o que gerou entusiasmo coletivo ao confirmarem que o número 1 também pode ser escrito como soma de frações unitárias.



Figura 51 – Evidências fotográficas do 1º jogo educacional. Fonte: Autor.

- **Terceira e Quarta Rodadas:** Houve uma melhora significativa. Os alunos demonstraram maior autonomia e desenvoltura, inclusive o Grupo 3, que elaborou uma estratégia própria para decompor frações. Eles testavam combinações de peças por tentativa e erro; por exemplo, se a fração era $\frac{5}{8}$, a primeira peça que usavam para sobrepor a fração na pizza seria $\frac{1}{8}$, e as demais eram testadas até sobrepor a fração, e depois confirmavam através da soma e simplificação da fração. A associação visual das peças com a representação matemática mostrou-se cada vez mais evidente.

Após a conclusão das rodadas, foi realizada a premiação do Grupo 1 que obteve a maior pontuação. A premiação teve um efeito positivo em incentivar maior envolvimento dos participantes durante a aplicação do jogo. Os papiros foram fixados em um mural no formato de um grande pergaminho, permitindo a socialização das estratégias e soluções encontradas. Durante e ao final do jogo, foram feitos questionamentos orais aos alunos em momentos oportunos, onde eles relataram as dificuldades enfrentadas e os métodos utilizados para superar os desafios e alcançar as respostas corretas.

Questionamentos e Reflexões

Para estimular a reflexão sobre o conteúdo, foram realizados os seguintes questionamentos:

1. Foram encontradas mais de uma representação para uma mesma fração em frações egípcias?

Resposta: Não, pois os grupos buscaram sempre a representação com o menor número de peças possíveis. Outras decomposições exigiriam o uso de mais peças.

2. Como o tamanho das fatias influenciou na escolha das frações unitárias? Há relação com o valor do denominador?

Resposta: Sim, pois frações com denominador muito grande às vezes necessitam de fatias com mesmo denominador, e quanto menor o denominador, maior será a fração unitária.

3. Houve frações diferentes com a mesma decomposição em frações unitárias distintas? O que isso diz sobre frações equivalentes?

Resposta: Os alunos citaram os exemplos de $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$, conjecturando que seriam “a mesma fração escrita de forma diferente”, dado que as representações visuais ocupavam espaços proporcionais equivalentes.

4. Como usar frações egípcias para comparar frações e determinar qual é maior ou menor?

Resposta: Visualmente, as fatias maiores representam frações unitárias com denominadores menores. Numericamente, a comparação tornou-se mais intuitiva ao entender que denominadores menores correspondem a frações maiores.

5. Qual foi a parte mais desafiadora da atividade? Como superaram o desafio?

Resposta: A maior dificuldade foi a verificação e a escolha da primeira peça na decomposição, pois ela impactava as escolhas subsequentes. Observou-se que iniciar com frações unitárias de denominadores pares ajudava na decomposição em frações cujo denominadores também são pares.

Com base no questionário e na observação do desenvolvimento dos alunos, o jogo mostrou-se eficaz para a revisão dos conteúdos referentes a frações. As “Fatias Egípcias” auxiliaram na percepção da relação entre o numerador e o denominador de uma fração, que influencia diretamente no tamanho da peça: quanto maior o denominador, menor será a peça da fração unitária. Com a dinâmica de sobrepor as “fatias egípcias” na fração representada na pizza, além de ser um recurso visual, permitindo que os alunos escrevam uma possível decomposição de fração em frações egípcias, é feita a “Verificação”, por meio da soma e simplificação, onde é determinada a fração presente na pizza.

Os alunos argumentaram coletivamente que houve frações que identificaram como equivalentes, como é o caso das frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$, ambas apresentando a mesma decomposição em frações egípcias. O jogo se tornou desafiador, segundo o relato dos alunos, na parte da “Verificação” que envolvia procedimentos de cálculo e a escolha da primeira peça na decomposição, pois influenciariam na escolha das demais peças. No entanto, foram encontradas estratégias para superar esse desafio, como iniciar com frações unitárias de denominadores pares em frações que têm denominadores pares, o que se justifica pela utilização da fração $\frac{1}{2}$ na decomposição, e as demais peças seriam colocadas por meio de tentativa e erro.

6.2.3 2º Jogo Educacional: As Encomendas do Faraó

No início da aula, foi dada a boas-vindas aos alunos, lembrando o primeiro jogo educacional trabalhado, “Pizza Egípcia”, que explorou a representação de frações como soma de frações unitárias distintas, utilizada pelos egípcios, como podemos observar na Figura 52. Em seguida, houve um

questionamento aos alunos sobre quais seriam, na opinião deles, as razões que motivaram os antigos egípcios a utilizarem esse método de representação. Alguns estudantes acreditavam que esse modo de representar seria mais fácil para eles, enquanto outros argumentaram que seria necessário sempre escrever as frações de forma a torná-las maiores, utilizando vários símbolos ao invés de somente um. Foi então estabelecido um paralelo entre a representação moderna de frações, que distingue numerador e denominador, e a representação egípcia, que se fundamenta em um método prático de divisão focado na distribuição equitativa de recursos.



Figura 52 – Evidências fotográficas do 2º jogo educacional. Fonte: Autor.

Para contextualizar o método prático de divisão dos egípcios, foi apresentada uma situação-problema com os alunos, envolvendo a distribuição de cinco sacos para oito pessoas. Utilizando a representação moderna, a situação poderia ser escrita como $\frac{5}{8} = 0,625$. Em seguida, a turma foi desafiada a fornecer um método para realizar essa distribuição que garantisse que cada um recebesse exatamente 0,625. Naturalmente, os alunos encontraram dificuldade em descrever um método que garantisse o valor exato que cada um receberia. Após discussão, e desprendendo-se da necessidade de chegar ao decimal 0,625, mas focando em realizar a divisão de forma justa, os alunos chegaram à conclusão de que seria possível dividir os quatro primeiros sacos ao meio, resultando em 8 partes que correspondem à metade de um saco, e o último saco em oito partes iguais, permitindo que cada pessoa recebesse metade de um saco e uma oitava parte do último saco, ou seja, teremos $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, recaindo na representação da fração em frações egípcias.

O jogo teve duração de 2 aulas de 50 minutos e decorreu por meio de sorteio conduzido pelo professor de cartões no formato de pergaminhos, onde se encontrava um problema de divisão de “pães” entre os “trabalhadores do faraó”. Ao ouvir o problema, os grupos se dirigiam ao birô do professor, selecionavam a quantidade de “pães” necessária e posicionava o número de “trabalhadores” na “mesa egípcia”. Com o uso de tesoura sem ponta, realizavam a divisão dos pães de forma que

todos recebessem a mesma quantidade, mas em cada etapa da divisão era representada por frações diferentes. O jogo inicialmente seria composto por 4 rodadas, porém foram feitas somente 3 rodadas. Pois os grupos precisaram de mais tentativas na divisão dos pães. Foi apresentado e colocado em prática o critério de pontuação do jogo para cada rodada, estabelecido como “Rigor Faraônico”:

- 1 ponto por resposta correta na notação moderna.
- 1 ponto por decomposição egípcia correta.
- 1 ponto extra se a soma verificadora estiver certa.
- Ao errar na verificação perde-se o ponto extra, mas pode corrigir.

Na Tabela 7 podemos observar a pontuação de cada grupo:

Tabela 7 – Pontuação dos Grupos no Jogo As Encomendas do Faraó. Fonte: Autor.

Grupo	Primeira Rodada	Segunda Rodada	Terceira Rodada	Total
1	3	3	3	9,0
2	3	2	1	6,0
3	3	3	2	8,0
4	3	3	3	9,0
5	2	1	3	6,0
6	2	1	3	6,0
7	2	3	2	7,0

Os grupos 1 e 4 obtiveram as maiores notas, pois pontuaram em todos os critérios, como escrita em notação moderna, egípcia e verificação da decomposição, onde era registrado no “Papiro do Grupo”. Os outros grupos não obtiveram a mesma pontuação, seja porque não representaram a fração na escrita egípcia ou porque não realizaram a verificação. No entanto, todos os grupos conseguiram converter a fração em uma soma de frações unitárias distintas ao dividirem os “pães”.

No pós-jogo, foi criado um mural intitulado “O Banquete do Faraó”, onde os alunos trabalharam juntos para montar cartazes com as soluções encontradas. Essa atividade permitiu-lhes que compartilhassem suas ideias e soluções com a turma, promovendo a socialização e o aprendizado coletivo, como ilustrado na Figura 53.

6.2.4 Desenvolvimento e Dificuldades Encontradas

O jogo apresentou desafios na parte matemática denominada “Verificação”, onde os alunos expressaram dificuldades em soma e simplificação de frações, mas ao comparar com o primeiro jogo, percebeu-se que houve um ganho significativo na compreensão dessa operação, permitindo realizar uma nova revisão desses assuntos. Após essa revisão, os grupos apresentaram erros pontuais, principalmente no que se refere a encontrar o denominador comum das frações para poder realizar a soma, onde foi feito uso do MMC (Mínimo Múltiplo Comum). Outra operação que o jogo possibilitou revisar de modo prático foi a divisão de fração por número natural, por exemplo, $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$. O uso dos “pães” foi essencial para que os alunos compreendessem melhor, pois ao dividir um pão em 3



Figura 53 – Evidências fotográficas do 2º jogo educacional. Fonte: Autor.

partes (ou seja, $\frac{1}{3}$) e em cada parte dividir em 3, obtendo 9 partes, facilitou para eles visualizarem por que se obtém $\frac{1}{9}$, não se limitando somente à decoração de “regras” para divisão de fração, recitadas por eles, “mantém a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda”. Com essa atividade, compreenderam de forma clara e objetiva a divisão de fração por um número natural. Na Figura 54 podemos observar os alunos realizando a divisão dos “pães” aos “trabalhadores” de acordo com os problemas que foram sendo sorteados.



Figura 54 – Evidências fotográficas do 2º jogo educacional. Fonte: autor.

Outra dificuldade apresentada foi verificar a solução da divisão, por exemplo, ao dividir 3 “pães” para 4 “trabalhadores”. Ao realizar toda a divisão dos pães, os grupos chegaram ao resultado de que cada um recebeu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de pão, mas ao somar a decomposição para determinar a fração $\frac{3}{4}$, os alunos

estavam somando,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 3$$

Erro esperado, pois os alunos compreenderam que o resultado da divisão era a soma de todas as partes distribuídas. No entanto, ao fazerem isso, eles observaram que obtiveram o número de pães, que era 3. Esse momento foi importante para explicar que o resultado da divisão foi o que cada um recebeu, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, que resulta na fração $\frac{3}{4}$.

Como a dinâmica do jogo, é a divisão de pães que foram entregues em formato circular, cada um já subdividido em 24 partes, para auxiliar os alunos no recorte dos mesmos, que utilizaram tesoura sem ponta, assim como outros materiais, como régua, lápis e borracha. Naturalmente, os alunos erraram na forma de cortar ou danificaram os pães antes de recortar, fazendo com que fosse usado um número maior de pães do que o previsto, sendo que o jogo foi encerrado em 3 rodadas, em vez de 4, como foi planejado. Durante e ao final do jogo, foram feitos questionamentos orais aos alunos em momentos oportunos, onde eles relataram as dificuldades enfrentadas e os métodos utilizados para superar os desafios e alcançar as respostas corretas.

Questionamentos e Reflexões

Para estimular a reflexão sobre o conteúdo, foram realizados os seguintes questionamentos:

1. É possível obter diferentes formas de decompor a mesma fração em frações egípcias (Ex.: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$)? Qual versão foi mais útil para distribuir os pães?

Resposta: Os alunos relataram que sim, é possível ter diferentes formas de decompor a mesma fração em frações egípcias. Eles mencionaram que, no caso da fração $\frac{3}{4}$, a decomposição em $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ foi a mais útil para distribuir os pães, pois era mais fácil de dividir e utilizaria menos frações na decomposição.

2. Iniciar cortando os pães pela metade ($1/2$) facilita ou não no processo de divisão?

Resposta: O aluno afirmou que iniciar cortando os pães pela metade facilita o processo de divisão, pois é mais fácil de recortar e gerar fatias maiores para distribuição dos pães, facilitando entender e trabalhar na decomposição.

3. Houve dificuldade ao dividir pães com denominadores ímpares (Ex.: 2 pães para 5 pessoas)? Qual foi a estratégia que seu grupo utilizou para resolver?

Resposta: Os alunos relataram que houve dificuldade inicial ao dividir os pães com denominador ímpar. Três grupos conseguiram encontrar estratégias diferentes para resolver o problema: primeiro, desenharam em folha antes de recortar os pães propriamente ditos; outros tentaram fazer os cálculos antes de fazer a recortarem; e um terceiro grupo tentou fazer decomposição por meio de tentativa e erro, utilizando a fração unitária desse denominador. Todos encontraram o mesmo resultado esperado. Os demais grupos precisaram da intervenção do professor para conseguir realizar tal decomposição.

4. Como seu grupo decidiu qual fração unitária usar primeiro em cada situação-problema? Todos concordavam com a estratégia que deveriam seguir?

Resposta: Os alunos relataram em grupo decidiram qual fração unitária primeiro em cada situação contudo sempre priorizando iniciar pela fração $\frac{1}{2}$.

5. Qual foi a parte mais desafiadora da atividade? Como você superou esse desafio?

Resposta: Os alunos identificaram que as divisões dos pães, a escolha das frações unitárias e o recorte dos pães foram as partes mais desafiadoras da atividade. Eles destacaram que, com a ajuda do professor e o trabalho em grupo, conseguiram superar essa dificuldade e aprender sobre o método das frações egípcias.

Após a aplicação do 2º jogo educacional e análise do questionário, o jogo se mostrou eficaz, assim como o primeiro, em revisar conteúdos referentes a frações, mas também com uso em divisão de fração por número natural. Nesse contexto, os alunos compreenderam melhor essa operação de forma prática, superando a abordagem tradicional que muitos deles conheciam apenas por meio da regra “mantenha a primeira e multiplique pelo inverso da segunda”.

6.3 Discussão dos Resultados

Os jogos “Pizzas Egípcias: Juntando Fatias e Descobrimos Frações” e “As Encomendas do Faraó” mostraram-se eficazes no ensino de frações, permitindo que os alunos revisassem e aprofundassem seus conhecimentos sobre representação, soma, cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC), simplificação e comparação de frações. A utilização de estratégias visuais nos jogos contribuiu significativamente para o entendimento dos alunos, tornando a aprendizagem mais dinâmica e colaborativa.

No jogo “Pizzas Egípcias”, os alunos se sentiram motivados a realizar cálculos necessários para validar seus resultados, demonstrando interesses nos conteúdos matemáticos. Além disso, o jogo despertou nos alunos interesse pela matemática egípcia. Já o jogo “As Encomendas do Faraó” realiza uma abordagem prática de como os egípcios realizavam suas divisões, permitindo aos estudantes uma compreensão melhor da representação das frações egípcias e a operação de divisão de fração por número natural.

Ambos os jogos permitiram que os alunos conhecessem aspectos da cultura egípcia e desenvolvessem habilidades ao resolver problemas e realizar operações com frações. No entanto, verificou-se que seria necessário que os alunos obtivessem conhecimento prévio dos conceitos de frações para que a aplicação dos jogos fossem mais eficazes e os resultados potencializados.

7 Considerações Finais

Pretende-se que este estudo motive outras iniciativas a empregarem a história da matemática como ferramenta de ensino, superando os conteúdos apresentados de forma resumida como frequentemente é encontrado em materiais didáticos. Ao incorporar um enfoque histórico e cultural nas aulas de matemática, podemos retratar a disciplina como um produto da criação humana voltado a resolução de desafios do dia a dia.

Um exemplo claro dessa perspectiva são as frações egípcias que devido a sua importância na matemática atraíram a atenção de pesquisadores relevantes como Fibonacci. A forma como essas frações são postas — como a soma de frações unitárias distintas — está interligada a abordagem prática que os antigos egípcios utilizavam para repartir seus recursos, sempre buscando a equidade na distribuição.

Diante dessa conjuntura, foi criado o material educacional intitulado “Desvendando a Matemática no Tempo dos Faraós: Aprendendo com as Frações Egípcias”, que inclui dois jogos pedagógicos: “Pizza Egípcia: Juntando Fatias, Descobrimos Frações”, que se concentra na decomposição de frações próprias em frações egípcias, e “As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios”, que propõe uma divisão equitativa de bens segundo as práticas egípcias. Os dois jogos educativos facilitam a revisão de conceitos essenciais ligados às frações. O primeiro método utiliza as chamadas “fatias egípcias”, que são frações unitárias distintas, com a intenção de ofertar uma representação visual das frações. O segundo complementa essa abordagem ao mostrar, de maneira lúdica, a lógica de divisão que os egípcios empregavam ao repartir os “pães” entre os “trabalhadores do faraó”.

A utilização do material educacional evidenciou que a integração das frações egípcias como ferramenta pedagógica representa uma estratégia eficiente no ensino da matemática. Isso possibilitou que os alunos revissem operações e características das frações de forma prática, contextualizada e com relevância histórica. A iniciativa incentivou a participação dos alunos, favoreceu sua compreensão teórica e ajudou a formar uma perspectiva mais sistemática da matemática.

É fundamental destacar que a implementação do material se deu com um número restrito de turmas, o que pode até certo ponto limitar a abrangência dos resultados alcançados. Diante do que foi dito, recomenda-se que novos estudos repliquem e adequem esta proposta em outros níveis de ensino e em diferentes contextos educacionais, a fim de verificar sua eficácia em outros cenários. Adicionalmente, sugere-se também a ampliação dessa abordagem, que enfatiza a importância da historicidade dos conhecimentos matemáticos, para outros tópicos do currículo, como geometria, medidas e álgebra.

Portanto, compreende-se que investigar a história da matemática como um recurso pedagógico não apenas melhora o processo de ensino, mas também possibilita a construção de saberes de maneira crítica e contextualizada. Espera-se, assim, que outros educadores e/ou pesquisadores busquem adotar práticas pedagógicas que integrem cultura, compreensão histórica e ensino de matemática de forma lúdica para que os saberes não se limitem as quatro paredes da escola.

Referências

- ALLEN, J. P. *Middle Egyptian. An Introduction to the Language and Culture of Hieroglyphs*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 26.
- ANTONIAZZI, M. e. a. Egyptian fractions. *Trabalho escolar apresentado no I.S.I.S.S. "M. Casagrande", Itália*, 2018. Orientadores: Fabio Breda, Francesco Maria Cardano e Francesco Zampieri. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 45.
- ARCHIBALD, R. C. *The Rhind Mathematical Papyrus*. USA: Brown University, 1927. Citado na página 38.
- BAINES, J. Literacy, social organization, and the archaeological record: The case of early egypt. In: GLEDHILL, J.; BENDER, B.; LARSEN, M. T. (Ed.). *State and Society. The Emergence and Development of Social Hierarchy and Political Centralization*. London and New York: Routledge, 1988. p. 192–214. Citado na página 16.
- BERLIM-BRANDEMBURGO, A. de Ciências e Letras de. *Base de Dados da AAEW: Lema nº 550123*. 1990–2000. Disponível em: <<https://aaew.bbaw.de/tla/servlet/BwlBrowser?lcd=&tcd=&scd=&pn0=1&etr=0&db=0&f=0&l=0&off=588&bc.x=68&bc.y=8&csz=15>>. Acesso em: 11 jun 2025. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 26.
- BIANCHI, M. I. Z. *Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos*. Dissertação (Dissertação (Mestrado)), Rio Claro, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- BORTOLOSSI, H. J.; FERNANDES, C. d. O. L. M. *Frações Egípcias*. 2016. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2016.2/esp/fses/index.html>>. Citado 4 vezes nas páginas 48, 63, 68 e 73.
- BORTOLOSSI, H. J.; FERNANDES, C. d. O. L. M. A decomposição de números racionais positivos em frações egípcias: Os teoremas de fibonacci/sylvester e erdos/stein e um correspondente applet javascript. *Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática*, v. 10, n. 4, p. 530–540, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 41, 43 e 46.
- BOTTS, T. A chain reaction process in number theory. *Mathematics Magazine*, v. 40, n. 2, p. 55–65, 1967. Citado na página 48.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20 jun 2020. Citado 4 vezes nas páginas 13, 54, 61 e 62.
- BRASIL. *Programa Nacional do Livro e do Material Didático: Pnld 2020 - reposição ensino fundamental - anos finais para 2022*. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), 2020. Dados extraídos do arquivo "PNLD2020AnosFinais_porttulo.xlsx", planilha "Por título". Disponível em: <<https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro>>. Acesso em: 23 jul. 2025. Citado na página 54.
- BREYER, F. A. K. Die schriftzeugnisse des prädynastischen königsgrabes uj in umm el-qaab. versuch einer neuinterpretation. *Journal of Egyptian Archaeology*, v. 88, p. 53–65, 2002. Citado na página 16.
- BRITISH; MUSEUM. *Cabeça de Maça de Narmer*. 2004. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Narmer_Macehead_Quibell_1900.jpg>. Acesso em: 11 jun 2025. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 19.

- BRITISH; MUSEUM. *Papiro Matemático Rhind*. 2018. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg>. Acesso em: 11 jun 2025. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 15.
- CAMPBELL, P. J. *Egyptian Fractions*. 1992. Manuscrito disponível online. Disponível em: <<https://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/>>. Acesso em: 23 jul. 2025. Citado na página 51.
- CRYSTAL, D. *A Dictionary of Linguistics and Phonetics*. 6. ed. Oxford: Blackwell Publishing, 2008. Citado na página 16.
- DODSON, A.; HILTON, D. *The Complete Royal Families of Ancient Egypt*. 1. ed. London: Thames & Hudson, 2004. Citado na página 15.
- DUNTON, M.; GRIMM, R. E. Fibonacci on egyptian fractions. *The Fibonacci Quarterly*, v. 4, p. 339–354, 1966. Citado na página 40.
- ERDÖS, P.; STEIN, S. Sums of distinct unit fractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 14, n. 1, p. 126–131, 1963. Citado na página 46.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: UNICAMP, 2011. Citado na página 19.
- GARDINER, A. H. *Egyptian Grammar. Being an Introduction to the Study of Hieroglyphs*. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 1957. Citado na página 18.
- GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover, 1972. Citado 6 vezes nas páginas 16, 19, 22, 29, 34 e 35.
- GUAVANABOY. *Mascote fofo com design egípcio, faraó antigo (ID 196571787)*. 2000. Disponível em: <<https://pt.dreamstime.com/mascote-fofo-com-design-eg%C3%ADpcio-fara%C3%B3-antigo-agudo-modelo-de-ilustra%C3%A7%C3%A3o-desenho-image196571787>>. Acesso em: 11 jun 2025. Citado 7 vezes nas páginas 9, 32, 33, 35, 69, 70 e 141.
- IMHAUSEN, A. *Mathematics In Ancient Egypt*. [S.l.]: Princeton University Press, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 18 e 52.
- KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Pearson, 2009. Citado na página 19.
- KOSHELEVA, O.; KREINOVICH, V. Egyptian fractions revisited. *Informatics in Education*, v. 8, n. 1, p. 35–48, 2009. Citado na página 52.
- LEHNER, M. *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Londres: Thames & Hudson, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.
- LIMA, E. L. O princípio da indução. *Eureka!*, n. 3, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 90, 91 e 92.
- LOUVRE, M. do; E15591. *Estela funerária da princesa Nefertibet*. 2004. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P1060243_Louvre_repas_fun%C3%A9raire_de_la_princesse_Nefertibet_E15591_rwk.JPG>. Acesso em: 11 jun 2025. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 15.
- MACIEL, A. B.; LIMA, O. A. *Introdução à Análise Real*. 1. ed. João Pessoa, PB: EDUEPB, 2008. ISBN 0008587108271. Citado na página 93.
- MAGINA, S.; BEZERRA, F. B.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? uma experiência de ensino. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, Brasília, v. 90, n. 225, p. 411–432, maio/ago 2009. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 61.

- MANNICHE, L. *An Ancient Egyptian Herbal*. London: British Museum Press, 1989. Citado na página 18.
- MAYS, M. A worst case of the fibonacci-sylvester expansion. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, v. 1, p. 141–148, 1987. Citado na página 50.
- MENNINGER, K. *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. New York: Dover Publications, 1969. Citado na página 18.
- MIDANT-REYNES, B. *The Prehistory of Egypt. From the First Egyptians to the First Pharaohs*. Oxford: Blackwell, 2000. Citado na página 15.
- REINEKE, W.-F. *Gedanken und Materialien zur Frühgeschichte der Mathematik in Ägypten*. London: Golden House Publications, 2014. Citado na página 18.
- RITTER, J. *The Cambridge History of Science: Volume 1, Ancient Science*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2018. Citado na página 27.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. de P. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012. Citado 3 vezes nas páginas 22, 31 e 32.
- SALEZ, S. E. The erdős-strauss conjecture: New modular equations and checking up to $n = 10^{17}$. *arXiv preprint*, 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1406.6307v1>>. Acesso em: [23 jul. 2025]. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1406.6307v1>>. Citado na página 51.
- SANTOS, S. O. S. *Explorando a Eficácia da Gamificação no Ensino de Matemática: Uma Análise de Estratégias e Resultados*. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, junho 2024. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG. Citado na página 61.
- SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2002. Citado na página 40.
- STEFFENON, R. R. *Belos Problemas: Indução e Princípio das Gavetas de Dirichlet*. Rio de Janeiro: SBM/IMPA/UFRJ, 2017. Citado na página 52.
- THEATER, T. *Fraction Circles*. 2023. Disponível em: <<https://toytheater.com/fraction-circles/>>. Acesso em: 19 abr 2025. Citado 3 vezes nas páginas 63, 68 e 73.
- TOMSON, P. *Modelo Matemático*. 2018. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/wydnr2v3>>. Acesso em: 11 nov 2024. Citado na página 122.
- VECTEEZY. *Ícone de saco aberto, estilo cartoon*. 2007. Disponível em: <<https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/14384855-icone-de-saco-aberto-estilo-cartoon>>. Acesso em: 11 jun 2025. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 32.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Auxiliares

A.1 Princípio de Indução

Segundo (LIMA, 1998), o Princípio da Indução é uma técnica de demonstração eficiente para conjuntos de números naturais. Compreender o Princípio da Indução é praticamente equivalente a entender os números naturais. Apresentamos a seguir uma breve exposição sobre os números naturais.

A.1.1 Conjunto dos Números Naturais

Os números naturais constituem um modelo matemático que nos permite realizar operações computacionais e de contagem. Sabemos que os números naturais são $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. A totalidade desses números constitui um conjunto, que denotamos pelo símbolo $\mathbb{N}$ e denominamos conjunto dos números naturais, ou seja, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Segundo (LIMA, 1998), atribui-se a Giuseppe Peano (1858-1932) a constatação de que é possível elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro postulados básicos, conhecidos atualmente como axiomas de Peano. Em linguagem matemática, podemos enunciar os axiomas da seguinte forma:

- **A.** Existe uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n .
- **B.** A função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.
- **C.** Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **D.** Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Reformulando os axiomas de Peano em linguagem corrente, sem o uso de notação matemática podemos reescrever da seguinte forma:

- **A'.** Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
- **B'.** Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. Equivalentemente, números que têm o mesmo sucessor são iguais.
- **C'.** Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de “número um”.
- **D'.** Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com o conjunto dos números naturais, isto é, contém todos os números naturais.

Ao usar a notação $s(n)$ para o sucessor do número natural n , teremos então $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, etc. Assim, por exemplo, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1. A sequência dos números naturais pode ser representada como uma cadeia infinita: $1, s(1), s(s(1)), s(s(s(1))), \dots$, onde cada termo é o sucessor do anterior como ilustrado na Figura 55.

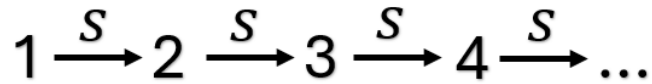


Figura 55 – sequência dos números naturais. Fonte: Autor.

As flechas ligam cada número ao seu sucessor. Observe que nenhuma flecha aponta para 1, visto que este número não é sucessor de nenhum outro. A união de todos os sucessores com o número 1 constitui o conjunto dos números naturais.

A.1.2 O Axioma da Indução

O último axioma de Peano, que fundamenta todo o princípio da demonstração por indução, é conhecido como o axioma da indução. Esse axioma estabelece que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. Assim, por exemplo, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor de 2, etc.

Podemos reformular o axioma da indução do seguinte modo: um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é chamado indutivo quando $s(X) \subset X$, ou seja, quando $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X . Dito isso, o axioma da indução afirma que o único subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ que contém o número 1 é o próprio $\mathbb{N}$. Por exemplo, os números ímpares $1, 3, 5, \dots$ formam um conjunto indutivo, que contém o elemento 1 mas não contém o sucessor de todos os seus elementos, logo não é igual a $\mathbb{N}$.

Podemos estabelecer uma propriedade que nos permite formar a sequência dos números ímpares a partir do conjunto dos números naturais. Essa propriedade pode ser definida como:

$$P(n) = 2n + 1, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

Então $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estabelece uma relação entre os números naturais e os números ímpares. Segundo (LIMA, 1998), “propriedade” e “conjunto” são noções equivalentes deste modo podemos afirmar que o conjunto $X = P(n)$ e por sua vez X é tal que $X \subset \mathbb{N}$.

O axioma da indução, na teoria dos números naturais e, mais geralmente, em toda a Matemática, é fundamental devido ao fato de poder ser visto como um método de demonstração conhecido como Método de Indução Matemática, Princípio da Indução Finita ou Princípio da Indução, que estabelece o seguinte:

Teorema A.1 (Princípio da Indução). *Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfaz P e se, além disso, o fato de o número natural n satisfazer P implica que seu sucessor $s(n) = n + 1$ também satisfaz, então todos os números naturais satisfazem a propriedade P .*

A validade do Princípio da Indução pode ser verificada da seguinte forma: suponha que uma propriedade P satisfaça as condições do Princípio da Indução. Isso significa que P é verdadeira

para 1 e que, se P é verdadeira para um número natural n , então também é verdadeira para $n + 1$. Considere o conjunto X dos números naturais que satisfazem P . Então, X contém 1 e é um conjunto indutivo, pois se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Pelo axioma de Peano, o único conjunto indutivo que contém 1 é $\mathbb{N}$, portanto $X = \mathbb{N}$. Isso implica que todos os números naturais satisfazem a propriedade P , o que prova a validade do Princípio da Indução.

A.1.2.1 Segundo Princípio da Indução (Indução Forte)

Segundo (LIMA, 1998), em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n , mas para todos os números naturais menores ou iguais a n . Desta forma teremos que:

Teorema A.2 (Indução Forte). *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

(I) *Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X , então $n \in X$.*

Portanto, ao afirmar BV que um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ com a propriedade (I) então $X = \mathbb{N}$.

Demonstração. Com efeito, supondo, por absurdo, $X \neq \mathbb{N}$. Isso significa que existem números naturais que não pertencem a X . Pelo Princípio da Boa Ordenação existe menor número natural n que não pertence ao conjunto X , ou seja, o menor elemento do conjunto $\mathbb{N} \setminus X$. Como n é o menor número natural que não pertence a X , todos os números naturais menores que n pertencem a X , isto é, para todo k menor que n com $k \in X$. Pela propriedade (I) do conjunto X , se todos os números naturais menores que n pertencem a X , então n também pertence a X , o que é uma contradição, pois n foi definido como o menor número natural que não pertence a X . Portanto, $\mathbb{N} \setminus X = \emptyset$ e, conseqüentemente, $X = \mathbb{N}$. ■

Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ goza da propriedade (I), para que um número natural n não pertencesse a X seria necessário que existisse algum número natural $k < n$ tal que $k \notin X$. No entanto, se considerarmos o caso de $n = 1$, temos que $\{k \in \mathbb{N} \mid k < 1\} = \emptyset$, e portanto a hipótese de que $1 \notin X$ não pode ser cumprida, pois não há nenhum número natural menor que 1 que possa não pertencer a X . Portanto, ao utilizar o Segundo Princípio da Indução, não é necessário estipular explicitamente que X contém o número 1, pois essa condição já está implícita na propriedade (I).

A.2 Princípio da Boa Ordenação

Segundo (LIMA, 1998) dado o subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, diz-se que o número natural q é o menor elemento de A quando $q \in A$ e, além disso, $q \leq x$, para todos os elementos $x \in A$. Por exemplo, 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$. Essa propriedade é fundamental para a ordem dos números naturais e não tem equivalente nos conjuntos de números inteiros, racionais ou reais.

Teorema A.3 (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração. Para provar que todo conjunto não vazio A de números naturais tem um menor elemento, podemos supor, sem perda de generalidade, que $1 \notin A$, pois se $1 \in A$, então 1 seria

evidentemente o menor elemento de A . Nesse caso, o menor elemento de A deve ser da forma $n + 1$, onde n é um número natural. Precisamos encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in A$ e todos os elementos de A sejam maiores do que n , ou seja, $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - A$. Definimos então o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}$, que contém todos os números naturais n tais que todos os elementos de A são maiores que n . Como $1 \notin A$, temos $1 \in X$, e como A não é vazio, $X \neq \mathbb{N}$. Pelo último axioma de Peano, X não é indutivo, então existe um $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Isso implica que todos os elementos de A são maiores que n , mas nem todos são maiores que $n + 1$, e portanto $n + 1 \in A$ e é o menor elemento de A . ■

A.3 Propriedade Arquimediana dos Números Naturais

A Propriedade Arquimediana, quando aplicada especificamente ao conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), estabelece que: Dados quaisquer números naturais n e m , existe um número natural k tal que $km > n$. Em termos intuitivos, essa propriedade garante que, por maior que seja um número natural n , sempre é possível encontrar um múltiplo de outro natural m que o supere. Isso implica que os números naturais não contêm elementos “infinitamente grandes”, qualquer número pode ser ultrapassado por um múltiplo adequado de outro. A seguir, apresentamos a demonstração baseada no trabalho de (MACIEL; LIMA, 2008).

Teorema A.4. *Para quaisquer números naturais $n, m \in \mathbb{N}$, existe um número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$k \cdot n > m.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$ tenhamos $k \cdot n \leq m$. Isto implicaria que o conjunto:

$$S = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}\}$$

é limitado superiormente por m . Pelo Princípio da Boa Ordenação, S teria um maior elemento, digamos $k_0 \cdot n$. Mas então $(k_0 + 1) \cdot n$ também pertence a S e:

$$(k_0 + 1) \cdot n = k_0 \cdot n + n > k_0 \cdot n$$

o que contradiz a maximalidade de $k_0 \cdot n$. Portanto, deve existir algum k tal que $k \cdot n > m$. ■

A.4 Série

Segundo (MACIEL; LIMA, 2008), dada uma sequência de números reais (a_n) , podemos formar uma nova sequência (s_n) da seguinte forma:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

O termo geral da sequência (s_n) é chamado de n -ésima soma parcial, ou de reduzida de ordem n de (a_n) . A sequência (s_n) assim obtida é chamada de *série infinita*, ou simplesmente de *série* e é denotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Série Convergente

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita convergente se a sequência de somas parciais (s_n) possui um limite finito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S \in \mathbb{R}$$

Ou seja, à medida que mais termos são somados, o valor de s_n se aproxima de um número fixo S .

A.4.0.0.1 Exemplo (série convergente):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Essa série converge para 1:

Série Divergente

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente quando a sequência (s_n) não possui limite finito, ou tende ao infinito, ou ainda oscila sem se estabilizar.

A.4.0.0.2 Exemplo (série divergente):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Essa é a chamada *série harmônica*, e ela diverge:

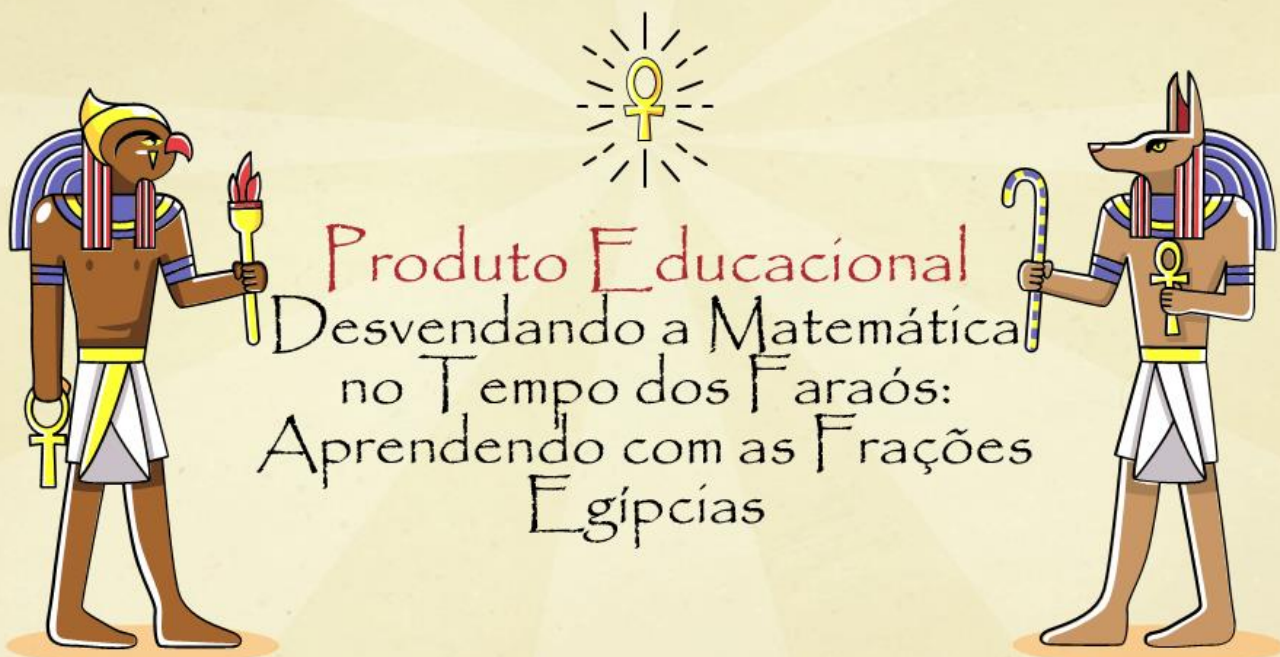
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

Mesmo que os termos individuais $\frac{1}{n}$ se tornem menores, a soma total cresce indefinidamente.

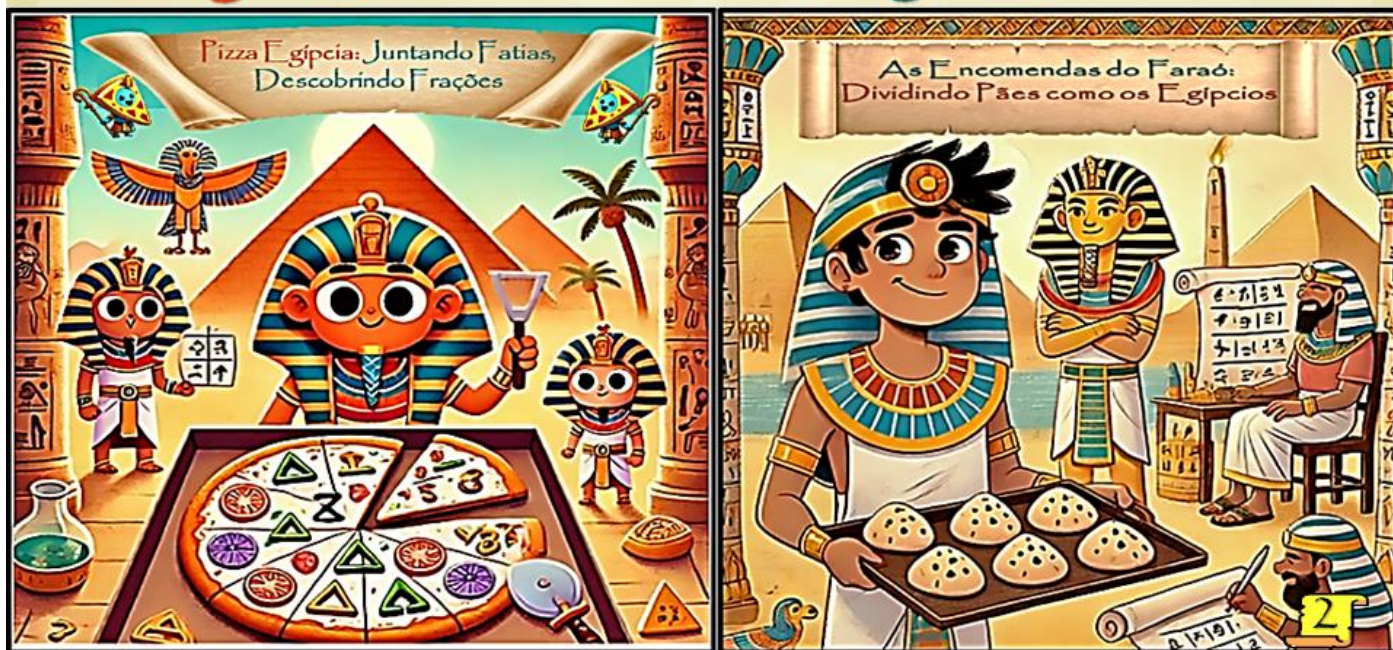
Anexos

ANEXO A – Fundamentação teórica e instrução para os jogos educacionais

Este anexo apresenta material em formato de slide para auxiliar professores na aplicação de jogos educacionais, apresentando regras e dinâmicas do produto educacional. Além disso, oferece fundamentação teórica sobre o sistema de numeração e frações egípcias, enfatizando seu método prático de divisão de recursos e introduzindo de forma lúdica as frações egípcias. No próprio anexo, está disponível o link para download do arquivo em formato PDF e PowerPoint. Nosso objetivo é fornecer subsídios para professores e alunos melhorarem a compreensão das regras e dinâmicas dos jogos, com fundamentação teórica e histórica.



1º Jogo Educacional 2º Jogo Educacional



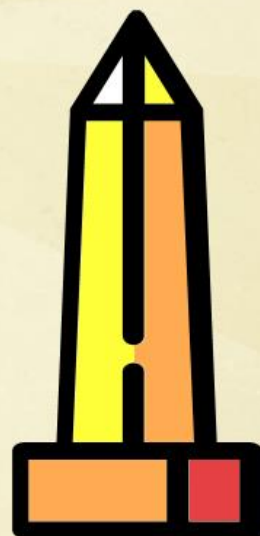


 (1 240)
 $1\,000 + 200 + 40$

 (2 050)
 $2\,000 + 50$

 (1 567 217)
 $1\,000\,000 + 500\,000 + 60\,000 + 7\,000 + 200 + 10 + 7$

Classe	Número decimal	Hieróglifo Egípcio	Significado
Unidade	1		Barra vertical
Dezena	10		Alça
Centena	100		Corda
Milhar	1 000		Flor de lótus
Dezena de milhar	10 000		Dedo
Centena de milhar	100 000		Sapo
Unidade de m milhão	1 000 000		Deus com as mãos levantadas



Embora o motivo preciso da escolha de cada hieróglifo no sistema de numeração egípcio permaneça incerto, estudiosos como Imhausen apresentam possíveis justificativas para a seleção de cada símbolo, ilustradas na Figura ao lado.



Numerais em hieróglifos egípcios	Motivações para as escolhas de numerais segundo Imhausen (1927) p.19
	É o mais básico, o simples traço para representar uma unidade, é usado não apenas no Egito, mas também em uma variedade de outras culturas, possivelmente originado de marcas em uma régua de contagem.
	O renomado egiptólogo britânico Alan H. Gardiner (1879-1963), interpretou o símbolo do número 10 como uma "algema para gado sem barra transversal". Essa análise fundamenta-se no fato de que a variante deste signo com barra transversal funciona como ideograma ou determinativo na palavra egípcia mḡt ("estábulo"), enquanto a forma sem a barra atua como fonograma no plural mḡwt ("estábulos"). A razão pela qual este símbolo específico foi escolhido para representar o numeral dez permanece incerta, embora Gardiner sugira uma possível conexão com a prática de agrupar dez animais sob uma mesma algema.
	O símbolo que representa 100, uma corda de medição, possivelmente aponta para uma corda de medição que foi usada para medir o comprimento de um campo, que pode ter tido um comprimento padrão de 100 côvados.
	A planta de lótus branco, o fonograma de XA, é frequentemente retratada nas representações egípcias como um elemento presente em paisagens, como ornamento e, muitas vezes, com significado simbólico em rituais ou atos religiosos. Possivelmente, sua frequência (aparentemente ainda pode ser encontrada nos canais de irrigação egípcios atualmente) na paisagem pode ter resultado em seu uso como um símbolo para o número 1 000.
	O hieróglifo de um dedo com valor de 10 000 só é plausível se a construção numérica egípcia, semelhante à moderna construção inglesa, utilizou um conceito de 'pacote' de milhares, ou seja, 'dez mil'. Assim, a ideia de 10 dedos, cada um valendo 1 000, torna o uso do dedo como representação bastante plausível.
	O símbolo e para 100.000, um girino, provavelmente não precisa de muita explicação para quem já viu um lago de desova de sapos e a multidão de girinos se desenvolvendo a partir dele.
	Finalmente, o maior dos símbolos numéricos egípcios, representando 1 000 000, é o deus sentado Heh. Heh era um dos oito deuses primitivos, supostamente carregando o céu sob a terra. A sua representação é frequentemente encontrada nas paredes do templo, vasos e joias, onde supostamente concederia milhões de anos de vida.



Frações Egípcias

As frações egípcias constituem um sistema de representação de quantidades fracionárias positivas por meio da soma de frações unitárias distintas, ou seja, frações da forma $\frac{1}{n}$, em que n é um número natural, sendo $\frac{2}{3}$ a única exceção não unitária que os egípcios utilizavam. Cada fração unitária possui um denominador distinto, garantindo que nenhum termo se repita. Por exemplo, a quantidade $\frac{4}{5}$ pode ser expressa em fração egípcia como:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$



A matemática egípcia revela uma regra geral para escrita das frações, com exceção para $\frac{2}{3}$ e para $\frac{1}{2}$, que recebiam símbolo especial para o representar como ilustrado na Figura abaixo.

$$\begin{array}{l} \text{○} \overline{\text{|||}} = \frac{1}{5}, \quad \text{○} \overline{\text{e||}} = \frac{1}{102}, \\ \text{○} \overline{\text{||}} \text{ ou } \text{◁} = \frac{1}{2}, \\ \text{○} \overline{\text{⊕}} = \frac{2}{3}. \end{array}$$

As frações egípcias eram representadas de uma forma diferente da que usamos hoje. Em vez de escrever o numerador e o denominador, os egípcios usavam um símbolo especial sobre o número. Por exemplo, a fração $\frac{1}{12}$ era representada como uma “parte” dividida em 12 partes iguais.

$\text{○} \longrightarrow$ Parte
 $\text{|||} \longrightarrow$ Doze em hieróglifo egípcios

1º Jogo Educacional

Pizza Egípcia: Juntando Fatias, Descobrimos Frações

Hoje, vamos explorar o jogo chamado “Pizza Egípcia”. Nele, vocês vão aprender sobre frações de uma forma prática e divertida. O objetivo é decompor frações em somas de frações unitárias, como os antigos egípcios faziam. Vamos trabalhar em equipe, desenvolver habilidades matemáticas e lógicas, e descobrir juntos como as frações podem ser usadas de forma criativa.



Frações unitárias

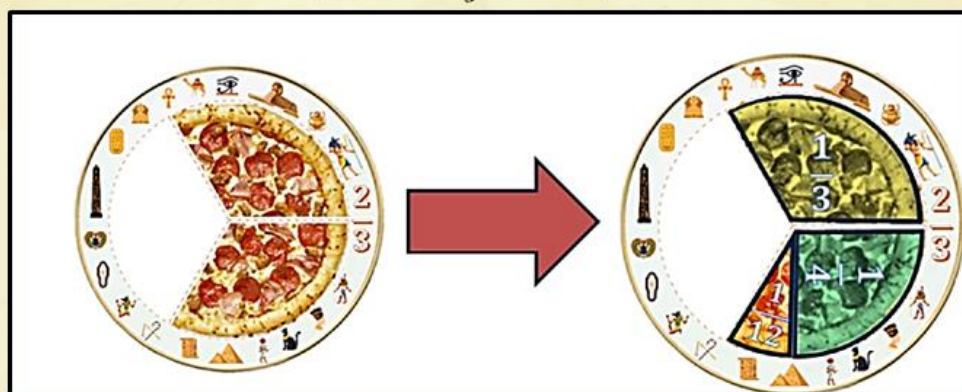


Fatias Egípcias	Pizzas
Cada fatia representando respectivamente as frações unitárias: $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11$ e $1/12$.	Cada pizza representa as frações $2/3, 3/4$ e $4/5$ e são compostas por soma de frações unitárias iguais: $2/3 = 1/3 + 1/3,$ $3/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4$ e $4/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5$



Decompondo a Fração Em Frações Egípcias

Vamos utilizar as “Fatias Egípcias” para decompor as frações que cada pizza está representando em frações egípcias. Veja o exemplo abaixo:

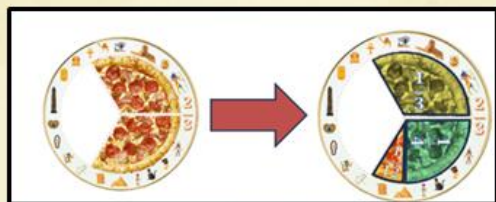




Verificação



Depois de sobrepor as “Fatias Egípcias” na pizza e verificar se tudo está correto, vamos realizar a parte mais importante: a “Verificação”! Nela, faremos a soma dessas frações e verificaremos se corresponde à fração que está representada na pizza. Se tiver sucesso, parabéns! Você acabou de escrever a fração em frações egípcias. Veja o exemplo abaixo:



VERIFICAÇÃO:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} =$$

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

CORRETO!



Registando no Papiro



Papiro do Grupo: A

Escribas: Fulano, Cíciano e Beltrano

Registro:

• $\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$





Material para os grupos:



Papiro do Grupo



Fatias Egípcias



13



Agora cada grupo
Escolhe uma Pizza



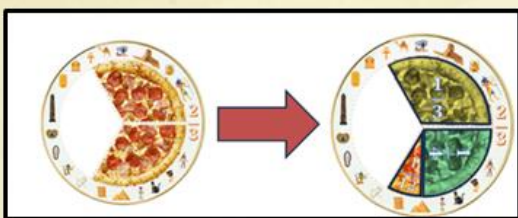
14



Agora faça decomposição depois a verificação



1º)



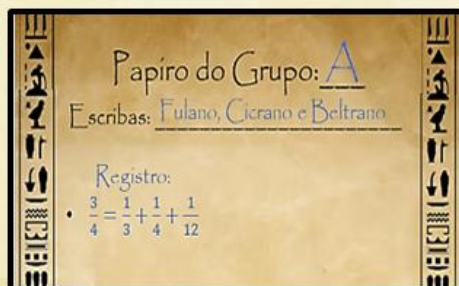
2º)

VERIFICAÇÃO:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} =$$

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

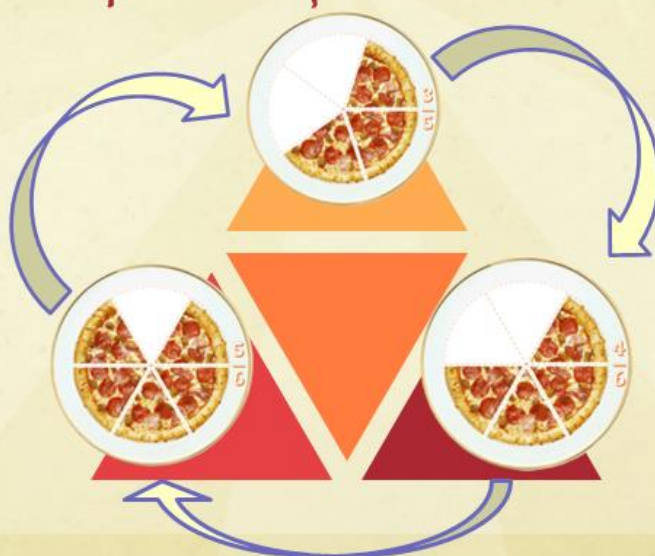
3º)



Quando todos os grupos responderem,
troquem as pizzas entre si.



Cada troca de
pizzas
representará
uma rodada, e o
jogo terá 4
rodadas no
total.





Crítério Faraônico



1. Se o grupo acerta na primeira tentativa: 5,0 pontos.
2. Se o grupo acerta na segunda tentativa: 3,0 pontos.
3. Se o grupo levar três ou mais tentativas: 2,0 pontos

- Pontos extras serão dados para grupos que encontrarem mais de uma decomposição válida. Sugestão a cada decomposição extra válida somará 1,0 a mais na atual rodada.

- Ao final do, o grupo com mais pontos ganhará um brinde.



Vamos colocar em prática!



Você deve estar se perguntando...



Por que os antigos egípcios representava as frações dessa forma tão diferente utilizando soma de frações unitárias distintas (frações egípcias)?



19

Os antigos egípcios tinham uma forma diferente de representar frações! Enquanto nós usamos números para representar o denominador (número de partes em que o “todo” foi dividido) e o numerador (número de partes tomadas do “todo”), os egípcios usavam uma abordagem baseada na ordem (ordinal). Por exemplo, a fração $1/12$ significava que algo (“todo”) foi dividido em 12 partes iguais, ou seja, 1ª, 2ª, ..., 11ª e 12ª todas iguais entre si. Isso ajudava a garantir que a distribuição dessas partes fosse feita de forma justa. Quer saber como eles faziam isso? Vamos ver alguns exemplos!





Exemplo 1

Dividir 5 sacos de feijão
entre 8 pessoas



21



Passo 1:

Dividir os 4
sacos ao
meio e
distribuir
para 8
pessoas.



22

Passo 2:

Ao distribuir
meio saco
cada um
restará 1
saco que
será dividido
em 8 partes



23

Passo 3:

Logo, após
as divisões
cada um
receberá
meio ($\frac{1}{2}$)
mais um
oitavo ($\frac{1}{8}$).



24

Verificação:

Ao dividir os 5 sacos para 8 que se refere a fração $\frac{5}{8}$ cada um recebeu meio e oitava do saco de feijão.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

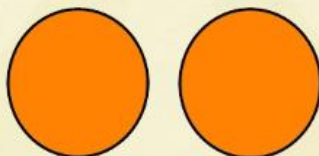


Correto!

25

Exemplo 2

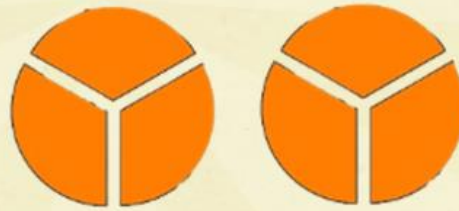
Dividir 2 pães entre 5 pessoas



26

Passo 1:

Dividir 2
pães em 3
partes iguais
obtendo 6
pedaço.



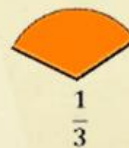
27

Passo 2:

Ao distribuir os
6 pedaços
($\frac{1}{3}$) para 5
restará 1 e esse
por sua vez será
dividido para 5
ou seja cada
receberá $\frac{1}{15}$.



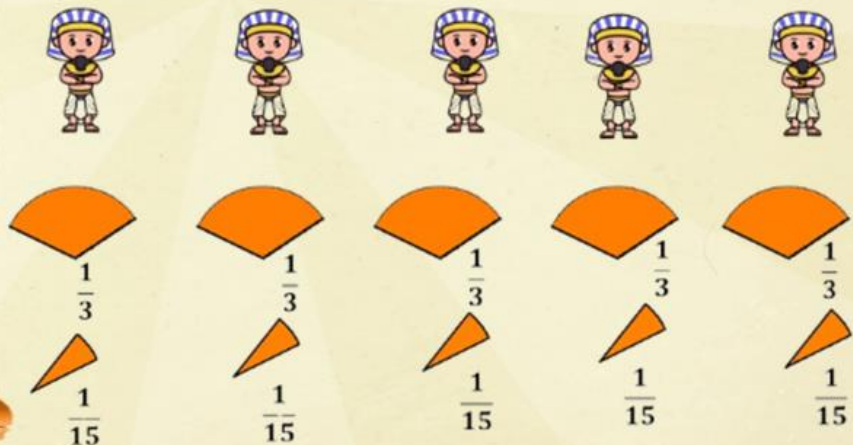
$$\frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$



28

Passo 3:

Ao distribuir os 5 pedaços da etapa anterior, no final todos terão recebido $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{15}$ de pão.



29

Verificação:

Portanto ao dividir 2 pães para 5 que se refere a fração $\frac{2}{5}$ cada um recebeu um terço e um quinze avos de pão.



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} + \frac{1}{15} =$$

$$\frac{5 + 1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Correto!

30



Observação Faraônica



O método de divisão prática dos egípcios prioriza que, em cada etapa da distribuição, seja feita de modo que as pessoas obtenham as maiores frações unitárias possíveis e que cada uma seja diferente entre si.



31

2º Jogo Educacional

As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios



32



O jogo “As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios” é uma atividade divertida que combina matemática com história. Nele, você aprenderá sobre como os egípcios antigos faziam divisões e representavam frações de uma maneira diferente da que usamos hoje. Você receberá desafios para resolver problemas práticos de divisão de pães entre os trabalhadores do faraó, o que ajudará a desenvolver suas habilidades matemáticas e a entender melhor como os egípcios antigos pensavam sobre as frações. Esperamos que você se divirta e aprenda muito com ele.



33



Dinâmica do Jogo



Inicialmente, a turma será dividida em grupos de 3 escribas (alunos).

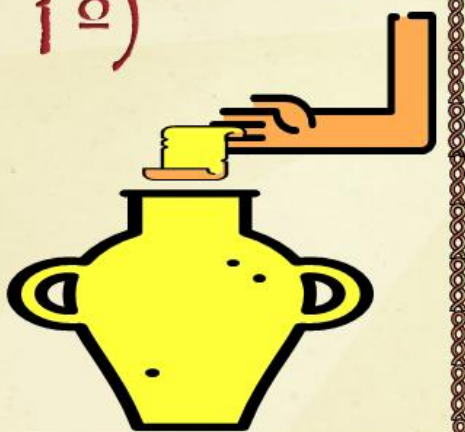


34



Dinâmica do Jogo

1º)



Professor sorteia um pergaminho.



2º)



O professor(a) ler para todos os escribas que estão na sala.

3º)



Vocês jovens escribas terão resolver o problema digno do faraó!

35

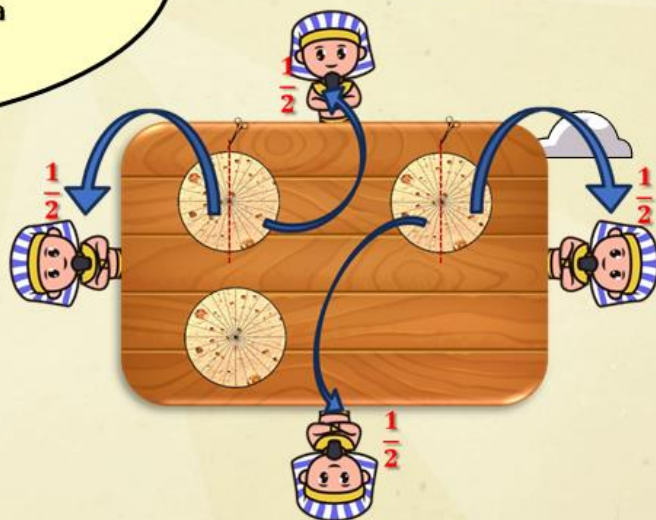
Exemplo o professor(a) ler o seguinte problema:

O faraó ordenou para que seja dividido 3 pães entre 4 trabalhadores!



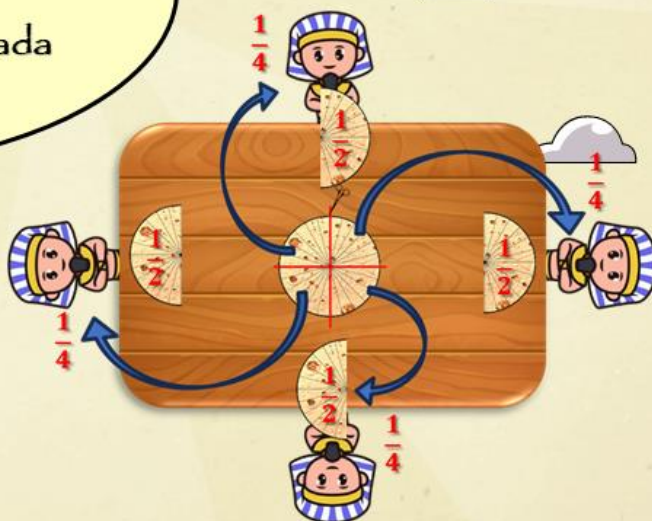
36

Primeiramente devemos
Dividir dois pães pela
metade e distribuir meia fatia
de ($\frac{1}{2}$) pão para cada
trabalhador.



37

Logo em seguida com o pão
que sobrou repartimos em 4
partes iguais ($\frac{1}{4}$) e
distribua uma fatia para cada
trabalhador.



38

Ao final, cada um
receberá meio ($1/2$)
e quarta parte ($1/4$)
de pão.



39

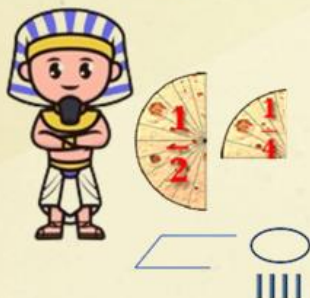
Todo bom escriba
deve fazer a
verificação de sua
resposta!



40

Verificação:

Portanto ao dividir 3 pães para 4 ou seja $\frac{3}{4}$ cada um recebeu um meio e um quarto de pão.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$



Correto!

41



Material para os grupos:



Papiro do Grupo



Trabalhadores
Egípcios



Mesa
Egípcia



42



Rigor Faraônico



- 1) Resposta correta na notação moderna: 1,0 ponto.
- 2) Decomposição egípcia correta: 1,0 ponto.
- 3) Ponto extra (1,0) se verificação estiver certa.

Observação: Ao errar na verificação perde-se o ponto extra, mas pode corrigir!



Vamos colocar em prática!





Obrigado!!!



45

Referências

BORTOLOSSI, Humberto José; FERNANDES, Celso de Oliveira Lemos Marques. Frações egípcias. 2016. Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2016.2/esp/fses/index.html>. Acesso em: 19 abr. 2025.

GUAVANABOY. Mascote fofo com design egípcio, faraó antigo (ID 196571787). 2000. Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/mascote-fofo-com-design-eg%C3%ADpcio-fara%C3%B3-antigo-agudo-modelo-de-ilustra%C3%A7%C3%A3o-desenho-image196571787> . Acesso em: 11jun 2025.

GARDINER, A. H. Egyptian Grammar. Being an Introduction to the Study of Hieroglyphs. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 1957.

LEHNER, M. The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries. Londres: Thames & Hudson, 1997.

MENNINGER, K. Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers. New York: Dover Publications, 1969.

IMHAUSEN, Annette. Mathematics in ancient Egypt. Princeton: Princeton University Press, 2016.

46

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Tópicos de história da matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

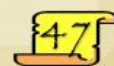
SLIDESGO. Mini tema do Egito. Disponível em: <https://slidesgo.com/pt/tema/minitema-do-egito>. Acesso em: 3 mai. 2025.

TOMSON, P. Modelo Matemático. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/wydnr2v3> . Acesso em: 11 nov 2024.

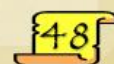
TOY THEATER. Fraction circles. 2023. Disponível em: <https://toytheater.com/fraction-circles/>. Acesso em: 19 abr. 2025.

SLIDESGO. Mini tema do Egito. Disponível em: <https://slidesgo.com/pt/tema/minitema-do-egito>. Acesso em: 3 mai. 2025.

VECTEEZY. Ícone de saco aberto, estilo cartoon. 2007. Disponível em: <https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/14384855-icone-de-saco-aberto-estilo-cartoon> . Acesso em: 11 jun 2025.



REINEKE, W.-F. Gedanken und Materialien zur Frühgeschichte der Mathematik in Ägypten. London: Golden House Publications, 2014.



Obtenha esse material pelo:



QR-Code

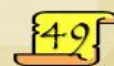


ou

<https://drive.google.com/drive/folders/1KWvyUN8GoE1qmQeGoX9V5Ls3Kw2DjZ7v?usp=sharing>



Link



ANEXO B – Pizza Egípcia: Juntando Fatias, Descobrimos Frações

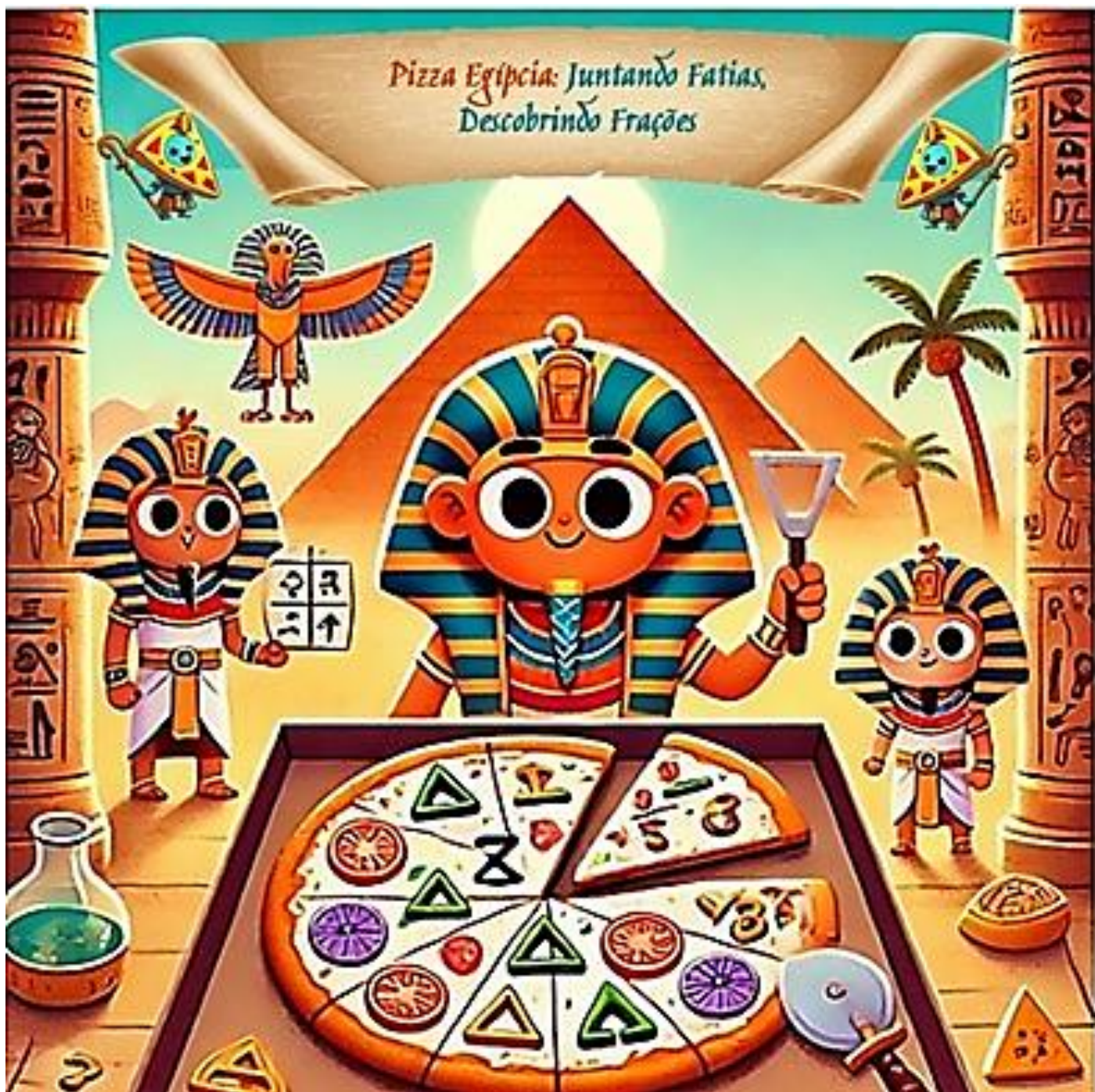
Este anexo apresenta os elementos gráficos desenvolvidos para a elaboração e aplicação do jogo educacional “Pizzas Egípcias: Juntando Fatias e Descobrimos Frações”. Esses elementos são: Capa do 1º Jogo Educacional¹, destinada à ilustração e divulgação do material; Frações em Pizzas, representadas em formato circular, com a notação moderna de frações próprias; Fatias Egípcias², peças que representam frações unitárias utilizadas para sobrepor as frações dispostas no formato de pizza; e, por fim, o Papiro do Grupo³, que serve como registro das respostas durante a atividade.

¹ Capa do 1º Jogo Educacional. Imagens geradas pelo ChatGPT com base em instruções do autor.

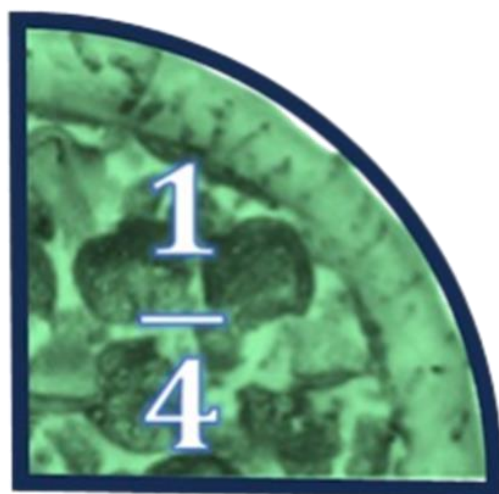
² Imagens criadas utilizando PowerPoint e Paint, com base no modelo gráfico disponível em (TOMSON, 2018).

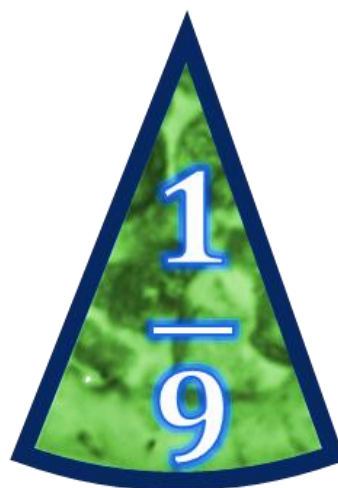
³ Folha de respostas destinada aos alunos. Fonte: autor.

CAPA DO 1º JOGO EDUCACIONAL



Fatias Egípcias (Frações Unitárias)



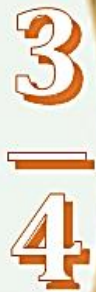


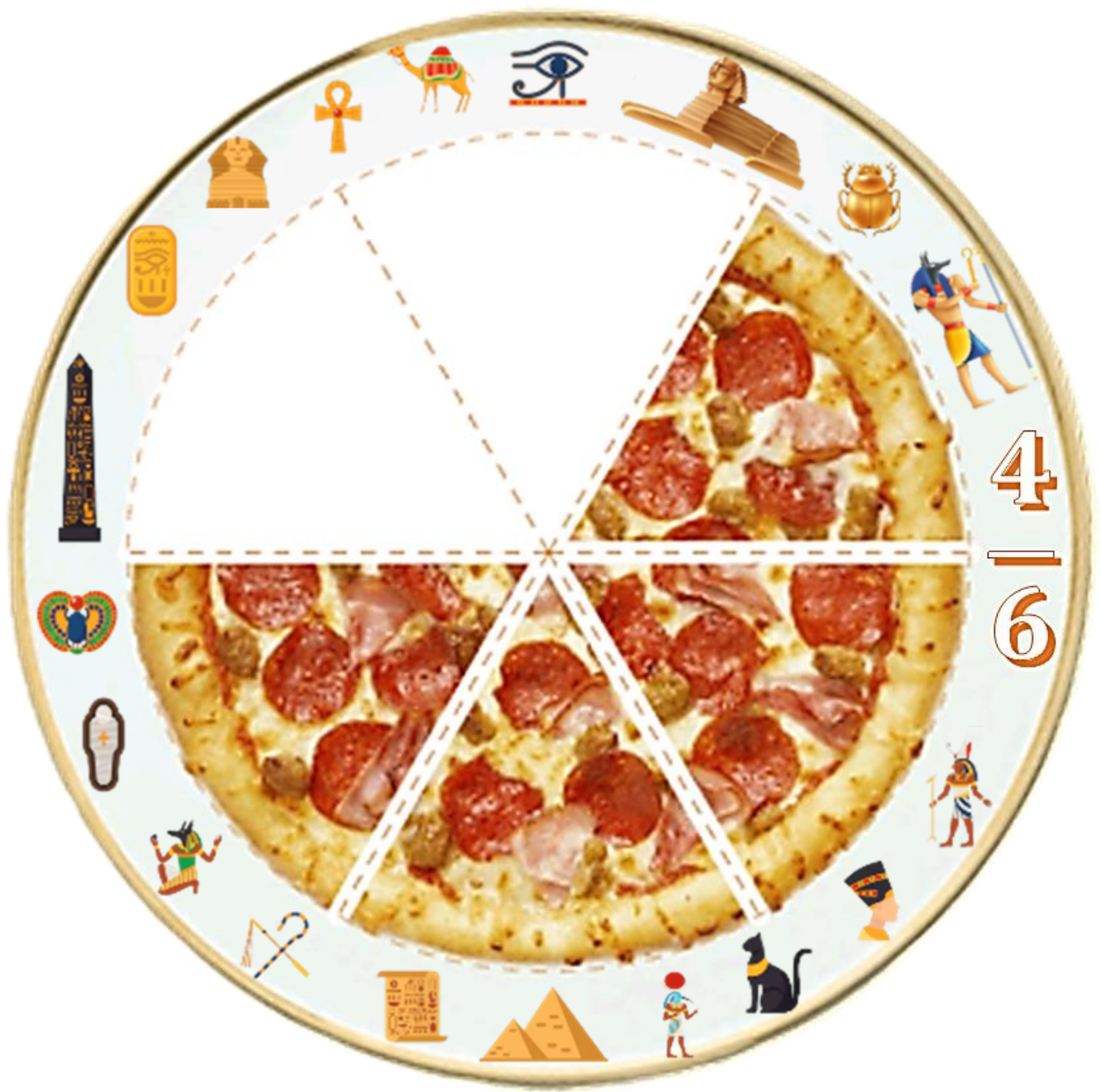
Papíro do Grupo: _____

Escribas: _____

Frações em Pizzas



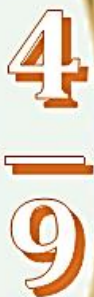
























ANEXO C – As Encomendas do Faraó: Dividindo Pães como os Egípcios

Este anexo apresenta os elementos gráficos desenvolvidos para a elaboração e aplicação do segundo jogo educacional “Encomenda do Faraó: Distribuindo Pães e Descobrimo Frações”. Os elementos são: Capa do 2º Jogo Educacional¹, utilizada para ilustrar e divulgação do material; Pães², representações que compõem as peças centrais do jogo; Mesa Egípcia³, que funciona como superfície de disposição dos elementos durante a atividade; e Trabalhadores Egípcios⁴, figuras que simbolizam os participantes que são empregadas para dinamizar a interação no jogo durante a repartição dos pães.

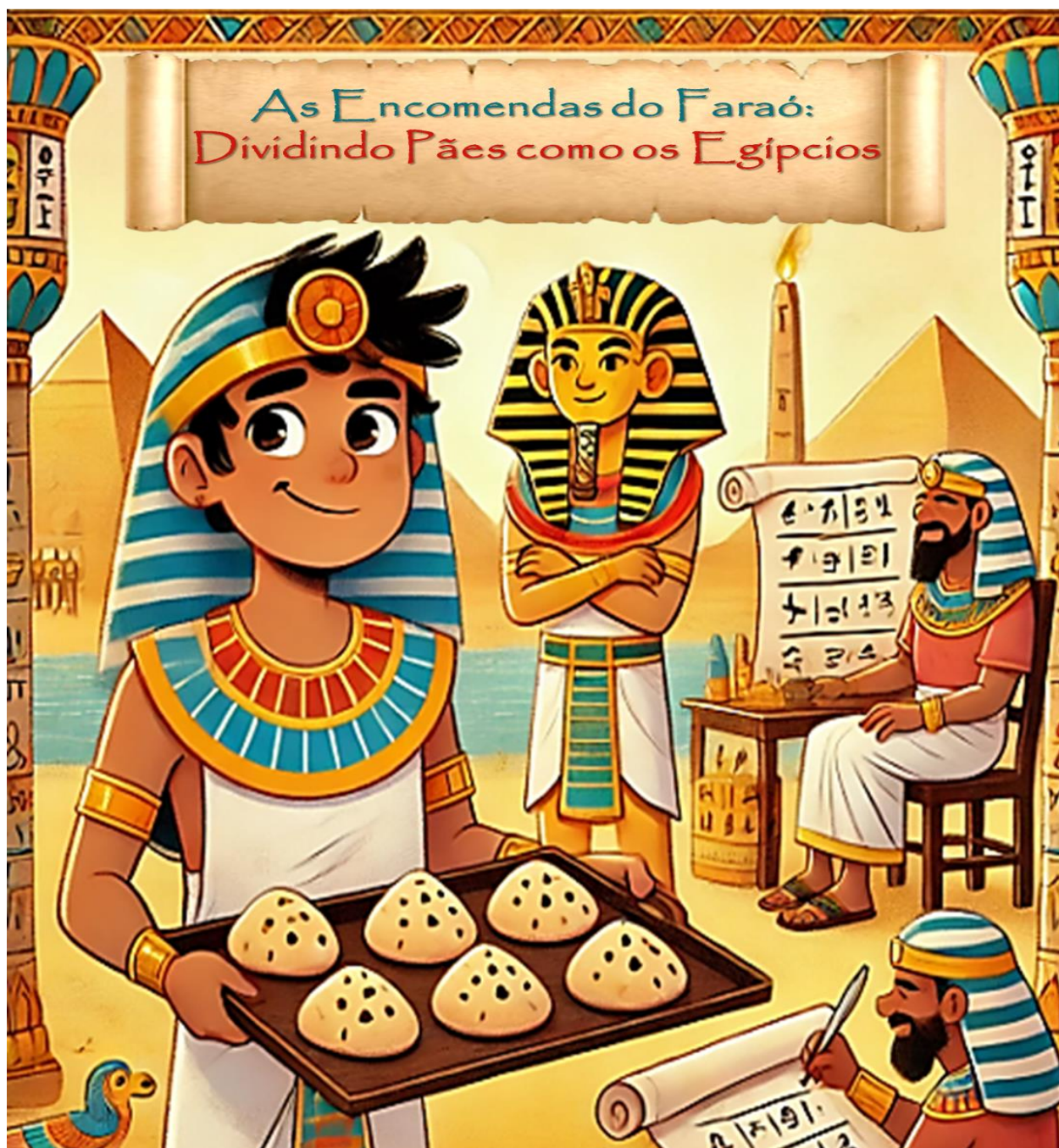
¹ Capa do 2º Jogo Educacional. Imagens geradas pelo ChatGPT com base em instruções do autor.

² Imagens criadas utilizando PowerPoint e Paint. Fonte: autor.

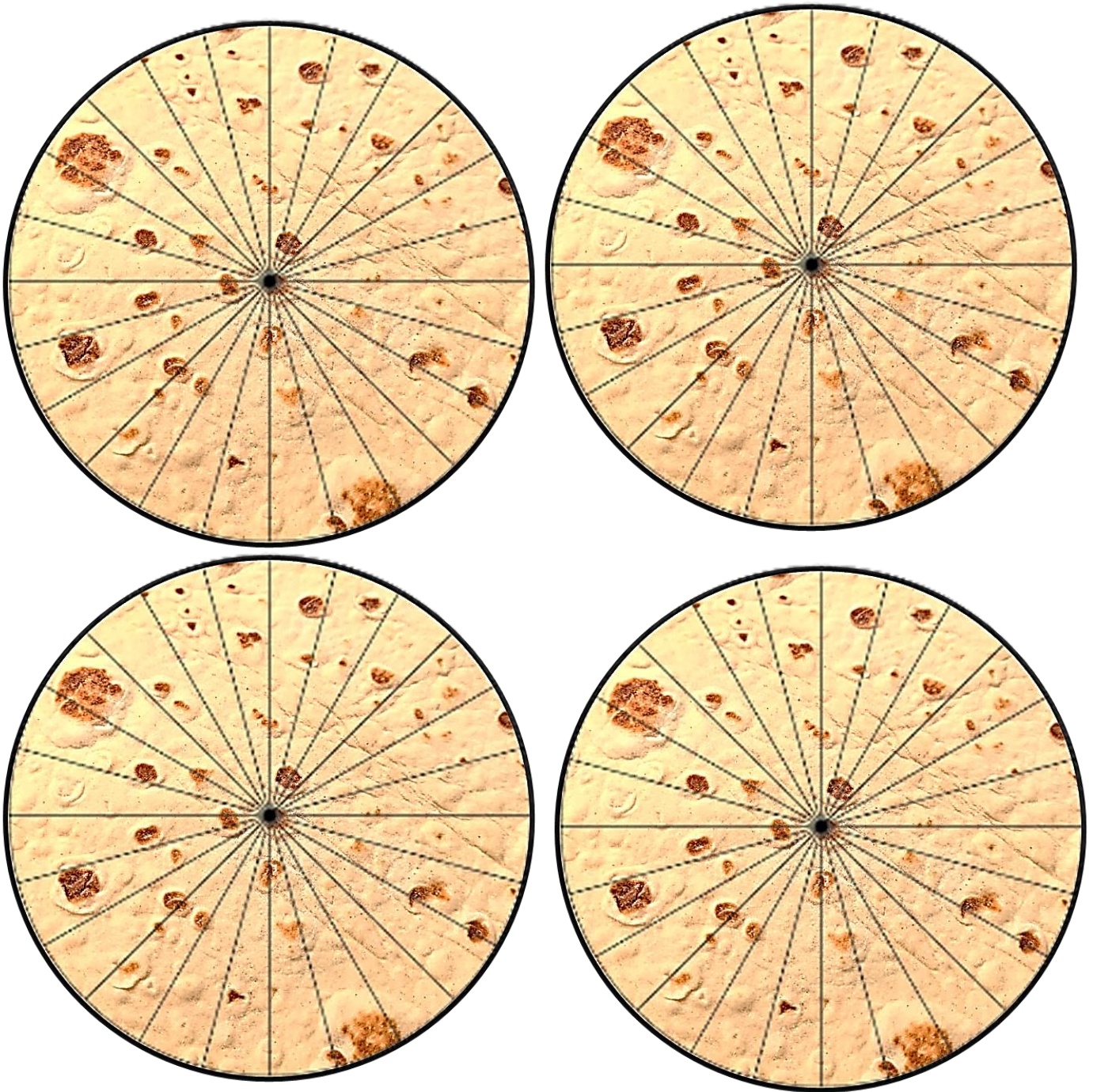
³ Tabuleiro do jogo. Fonte: autor.

⁴ Ilustração elaborada pelo autor, utilizando elementos gráficos provenientes da plataforma (GUAVANABOY, 2000).

CAPA DO 2º JOGO EDUCACIONAL



Pães



Mesa Egípcia



Trabalhadores Egípcios



Papíro do Grupo: _____

Escribas: _____

Encomendas do Faraó

O faraó pediu para: dividir 3 pães entre 4 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida 2 pães pela metade $\rightarrow$ 4 fatias ($\frac{1}{2}$ cada).
- Dívida 1 pão em 4 partes iguais $\rightarrow$ 4 fatias ($\frac{1}{4}$ cada).

O faraó pediu para: dividir 5 pães entre 6 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida 3 pães pela metade $\rightarrow$ 6 fatias ($\frac{1}{2}$ cada).
- Dívida 2 pães em 3 partes iguais $\rightarrow$ 6 fatias ($\frac{1}{3}$ cada).

O faraó pediu para: dividir 2 pães entre 3 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida 1 pão inteiro pela metade $\rightarrow$ 2 fatias ($\frac{1}{2}$ cada).
- Distribua as 2 fatias e sobrarão 2 fatias ($\frac{1}{2}$)
- Dívida o segundo pão em 3 partes iguais $\rightarrow$ 3 fatias ($\frac{1}{3}$ cada).
- Corte fatia que sobrou ($\frac{1}{2}$) em 3 pedaços menores $\rightarrow$ 6 fatias ($\frac{1}{6}$ cada).

O faraó pediu para: dividir 4 pães entre 5 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida 3 pães pela metade $\rightarrow$ 6 fatias ($\frac{1}{2}$ cada) $\rightarrow$ 5 pessoas recebem $\frac{1}{2}$.
- Sobra 1 fatia ($\frac{1}{2}$), que será dividida em 5 partes $\rightarrow$ 5 fatias ($\frac{1}{10}$ cada).
- Dívida o último pão em 5 partes iguais $\rightarrow$ 5 fatias ($\frac{1}{5}$ cada).

O faraó pediu para: dividir 5 pães entre 8 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida 4 pães pela metade $\rightarrow$ 8 fatias ($\frac{1}{2}$ cada).
- Dívida o último pão em 8 partes iguais $\rightarrow$ 8 fatias ($\frac{1}{8}$ cada).

O faraó pediu para: dividir 3 pães entre 8 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida cada pão em 3 partes iguais $\rightarrow$ 9 fatias ($\frac{1}{3}$ cada).
- Distribua 8 fatias ($\frac{1}{3}$ cada) $\rightarrow$ sobra 1 fatia ($\frac{1}{3}$).
- Dívida a fatia restante ($\frac{1}{3}$) em 8 partes iguais $\rightarrow$ 8 fatias ($\frac{1}{24}$ cada).

O faraó pediu para: dividir 7 pães entre 12 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Dívida 6 pães pela metade $\rightarrow$ 12 fatias ($\frac{1}{2}$ cada).
- Dívida o último pão em 12 partes iguais $\rightarrow$ 12 fatias ($\frac{1}{12}$ cada).

O faraó pediu para dividir 4 pães entre 9 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Divida 3 pães em 3 partes iguais $\rightarrow$ 9 fatias ($\frac{1}{3}$ cada).
- Divida o último pão em 9 partes iguais $\rightarrow$ 9 fatias ($\frac{1}{9}$ cada).

O faraó pediu para dividir 5 pães entre 12 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Divida 4 pães em 3 partes iguais $\rightarrow$ 12 fatias ($\frac{1}{3}$ cada).
- Divida o último pão em 12 partes iguais $\rightarrow$ 12 fatias ($\frac{1}{12}$ cada).

O faraó pediu para dividir 2 pães entre 5 pessoas.

✓ Solução esperada: Cada pessoa recebe $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ de um pão.

✂ Como recortar:

- Divida cada pão em 3 partes iguais $\rightarrow$ 6 fatias ($\frac{1}{3}$ cada).
- Distribua 5 fatias ($\frac{1}{3}$ cada) $\rightarrow$ sobra 1 fatia ($\frac{1}{3}$).
- Divida a fatia restante ($\frac{1}{3}$) em 5 partes iguais $\rightarrow$ 5 fatias ($\frac{1}{15}$ cada).