



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Leandro Vieira dos Santos

Do Enumerável ao Não Enumerável: Uma Abordagem Formativa sobre o Infinito

Campina Grande - PB

Agosto/2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Leandro Vieira dos Santos

Do Enumerável ao Não Enumerável: Uma Abordagem Formativa sobre o Infinito

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Romildo Nascimento de Lima

Coorientador: Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Campina Grande - PB

Agosto/2025

S237d

Santos, Leandro Vieira dos.

Do enumerável ao não enumerável : uma abordagem formativa sobre o infinito / Leandro Vieira dos Santos. – Campina Grande, 2025.
181 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima, Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".

Referências.

1. Infinito - Matemática. 2. História da Matemática. 3. Formação de Professores. 4. Conjuntos Numéricos. 5. Números Reais. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Nóbrega, Alânnio Barbosa. III. Título.

CDU 51(043.3)

Leandro Vieira dos Santos

Do Enumerável ao Não Enumerável: Uma Abordagem Formativa sobre o Infinito

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 29 de agosto de 2025:

Dr. Romildo Nascimento de Lima
Orientador

Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega
Coorientador

Dr. Renan Jackson Soares Isneri
Membro Interno

Dr. Cladio Odair Pereira da Silva
Membro Externo

Campina Grande - PB
Agosto/2025

*Dedico esta dissertação à minha esposa, Adriana,
companheira incansável em todos os momentos deste percurso.
A você, que me apoiou com paciência, compreensão e amor
ao longo de cada etapa do mestrado,
mesmo nos dias em que o tempo foi curto e a jornada foi longa.
Esta conquista também é sua.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica durante o PROFMAT, pela dedicação com que compartilharam seus conhecimentos e pelo compromisso com a formação dos seus estudantes.

Em especial, registro minha profunda gratidão aos professores Alânnio e Romildo, meus orientadores, por não desistirem de mim, mesmo diante das dificuldades. Agradeço pela paciência, pela confiança e pelo acompanhamento atento e cuidadoso ao longo do processo de construção desta dissertação.

Agradeço à minha família, base de tudo o que sou. Em particular, à minha mãe, cujo incentivo constante ao longo de toda a minha vida foi essencial para que eu acreditasse que esse caminho seria possível. Seu apoio silencioso, mas firme, sustentou muitos dos meus passos.

A minha esposa, Adriana, agradeço pelo carinho, cuidado e compreensão em todos os momentos dessa caminhada. Sua presença foi fundamental, especialmente nos períodos mais exigentes, quando o tempo era curto e o cansaço parecia maior. Obrigado por seguir ao meu lado com amor e paciência.

E, por fim, agradeço a Deus, pela força, inspiração e oportunidade de ter vivido esta experiência. Sem Ele, nada disso teria sentido.

“O homem é confinado nos limites estreitos do corpo, como numa prisão, mas a matemática o liberta e o faz maior do que todo o universo...”
(P. Hamo citado por Barelli e PENNACCHIETTI (2001, p. 340))

Resumo

Esta dissertação propõe uma abordagem conceitual e formativa sobre o infinito, voltada para professores da educação básica. A partir de uma perspectiva integrada, que contempla aspectos históricos, filosóficos e matemáticos, são discutidos os caminhos que conduziram à construção e à formalização da noção de infinito em diferentes contextos. O estudo contempla os infinitos enumeráveis e não enumeráveis, com ênfase em conjuntos como os números naturais, as sequências binárias e o conjunto de Cantor, bem como nos números transcendentais π e e . Além disso, analisa paradoxos e aparentes contradições que envolvem o uso do infinito, a fim de ampliar a compreensão conceitual do tema. Trata-se de uma pesquisa de caráter bibliográfico, cujo objetivo é contribuir para a formação docente por meio da articulação entre História da Matemática, fundamentos teóricos e da reflexão crítica sobre conceitos e demonstrações.

Palavras-chave: Infinito; História da Matemática; Formação de professores; Conjuntos numéricos; Números reais.

Abstract

This dissertation proposes a conceptual and formative approach to infinity, aimed at Mathematics teachers in basic education. From a historical, philosophical, and mathematical perspective, it discusses the paths that led to the construction and formalization of the notion of infinity in different contexts. The study explores countable and uncountable infinities, with emphasis on sets such as the natural numbers, binary sequences, and the Cantor set, as well as transcendental numbers like π and e . It also analyzes paradoxes and apparent contradictions involving infinity in order to enrich the conceptual understanding of the topic. This is a bibliographical study intended to contribute to teacher education by articulating the History of Mathematics, theoretical foundations, and critical reflection on concepts and proofs.

Keywords: Infinity; History of Mathematics; Teacher education; Number sets; Real numbers.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Quadrilátero $ABCD$ no plano cartesiano	40
Figura 2 – Rotação de um ponto P em torno da origem	40
Figura 3 – Coordenadas do ponto P	41
Figura 4 – Rotação do quadrilátero $ABCD$	42
Figura 5 – Segmentos AB e CD	48
Figura 6 – Bijeção entre AB e CD	48
Figura 7 – Intervalo fechado $[0, 1]$	69
Figura 8 – Primeira etapa da construção do conjunto de Cantor.	69
Figura 9 – Segunda etapa da construção do conjunto de Cantor.	69
Figura 10 – Sexta etapa da construção do conjunto de Cantor.	70
Figura 11 – Segmentos AB e CD	72
Figura 12 – Segmentos AB e CD medidos com a mesma unidade de medida . .	72
Figura 13 – Ponto B_1 , sobre a diagonal do quadrado $ABCD$	74
Figura 14 – Reta r perpendicular a AC por B_1	74
Figura 15 – Retas s e t , respectivamente perpendiculares à AC e r	75
Figura 16 – Quadrado $AB_1C_1D_1$	75
Figura 17 – Triângulo isósceles BC_1B_1	76
Figura 18 – Ponto B_2 sobre AC_1	77
Figura 19 – Quadrado $ABCD$ de lado $\frac{1}{2}$	78
Figura 20 – Ponto Δ marcando um número irracional em $(0, 1)$	79
Figura 21 – Pontos Δ_1 e Δ_2 marcando números irracionais em $(0, 1)$	80
Figura 22 – Gráfico da função definida por $f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$	82
Figura 23 – Segmento AB fora de $\mathbb{R}$	86
Figura 24 – Circunferência Γ tangenciando AB em M	87
Figura 25 – Ponto $Q \in \mathbb{R}$ corresponde a $P \in AB$	87
Figura 26 – Ponto corresponde a $P \in AB$ em $\mathbb{R}$	88
Figura 27 – Gráfico da função definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$	97
Figura 28 – Pontos sobre a curva $f(x) = \sqrt{1-x^2}$	98
Figura 29 – Aproximação da curva $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ com 9 segmentos	99
Figura 30 – Área sob o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$	102
Figura 31 – Trapézios sob a curva da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$	105
Figura 32 – Construção com régua e compasso do número $\sqrt{n}$	108
Figura 33 – Espiral de Teodoro	109
Figura 34 – Interseção de triângulos na espiral de Teodoro.	110

Figura 35 – Ponto médio do segmento AB	112
Figura 36 – Pontos médios dos segmento AP e PB	113
Figura 37 – Pontos médios dos segmento AP_1 , P_1P , PP_2 e P_2B	113
Figura 38 – Elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$ e vértice $B = (2, 0)$	127
Figura 39 – Estimativa da área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2}}$	128
Figura 40 – Polígonos de 6 lados inscritos em círculos de diâmetros 1 e $2r$. . .	132
Figura 41 – Polígonos com 12 e 18 lados inscritos em círculos e diâmetros 1 e $2r$.	133
Figura 42 – Polígonos regulares $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ inscritos em Γ e Δ .	134
Figura 43 – Polígono regular de 12 lados incrito em um círculo	136
Figura 44 – Círculo e quadrado centrados na origem do plano cartesiano.	138
Figura 45 – Estimativa de π com 100 pontos aleatórios.	139
Figura 46 – Estimativa de π com 1.000 pontos aleatórios.	139
Figura 47 – Estimativa de π com 10.000 pontos aleatórios.	139
Figura 48 – Estimativa de π com 100.000 pontos aleatórios.	139
Figura 49 – Círculo inscrito em um quadrado de lado 1.	140
Figura 50 – Círculo inscrito em um polígono de 12 lados.	141
Figura 51 – Círculo inscrito em um polígono de 28 lados.	141
Figura 52 – Polígonos circunscritos ao círculo	142
Figura 53 – Quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo ABC	144
Figura 54 – Reta passando por A , perpendicular ao segmento BC	145
Figura 55 – Triângulos BCF e ABD	146
Figura 56 – Prolongamento dos segmentos DB e FB	146
Figura 57 – Segmentos BK e AE	147
Figura 58 – Triângulo ABC retângulo em A	148
Figura 59 – Quadrado $ABCD$	148
Figura 60 – M_1 , P_1 , Q_1 pontos médios de AC , AB e BC	149
Figura 61 – Poligonal $AP_2M_2P_3M_1Q_2M_3Q_3C$	149
Figura 62 – Poligonal de extremidades A e C se aproximando do segmento AC . .	150
Figura 63 – Poligonal com 32 segmentos.	150
Figura 64 – Distância entre pontos no plano	151
Figura 65 – Ponto $C = (x_2, y_1)$	152
Figura 66 – Janela Jupyter	156
Figura 67 – Janela Jupyter com dois algoritmos	157
Figura 68 – Janela Google Colab	158
Figura 69 – Coparação de tempo dos dois códigos	171

Lista de tabelas

Tabela 1	– Sobrejeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$	45
Tabela 2	– Exemplo de uma bijeção	46
Tabela 3	– Alguns valores de $a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	53
Tabela 4	– Alguns valores de $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$	54
Tabela 5	– Tabela ilustrando uma bijeção entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$	55
Tabela 6	– Conjunto das partes de alguns subconjuntos de $\mathbb{N}$	66
Tabela 7	– Comprimento da poligonal $P_0 \dots P_n$ para alguns valores de n	100
Tabela 8	– Termos da sequência de aproximações para π	101
Tabela 9	– Aproximações para e usando $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	104
Tabela 10	– Aproximações para e usando áreas de trapézios	105
Tabela 11	– Somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$	118
Tabela 12	– Potências de $\frac{1}{2}$	122
Tabela 13	– Primeiras somas parciais das sequências $((-1)^{n+1})$ e $((-1)^n)$	124
Tabela 14	– Primeiros 10 termos da sequência de soma parciais de $\left(\frac{1}{n}\right)$	125
Tabela 15	– Somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$, para valores grandes de n	125
Tabela 16	– Aproximações para área da elipse.	129
Tabela 17	– Aproximações para π .	138

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	16
1.2	Metodologia	16
1.3	Organização do Trabalho	18
2	ELEMENTOS HISTÓRICOS	20
2.1	Introdução: A Infinitude dos Primos	20
2.2	Fundamentos da Matemática	22
2.3	O Infinito na Filosofia	24
2.3.1	O Infinito na Filosofia Antiga	24
2.3.2	O Infinito na Filosofia Moderna	27
2.3.3	Cantor e o Infinito Matemático	32
2.4	O Infinito na Matemática	33
2.4.1	Infinito em Potência e em Ato	33
2.4.2	Tamanhos do Infinito	36
2.4.3	Limites da Intuição e o Papel da Formalização	37
2.5	Considerações Finais do Capítulo	37
3	INFINITOS ENUMERÁVEIS	38
3.1	Introdução: Os Números Racionais	38
3.2	Funções e Infinitos Enumeráveis	39
3.2.1	O Conceito de Função	39
3.2.2	Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas	43
3.2.3	Noções de Cardinalidade	46
3.3	Números Naturais	49
3.3.1	Axiomas de Peano	50
3.3.2	Sequências Numéricas	52
3.4	Conjuntos Enumeráveis	57
3.4.1	Exemplos básicos de conjuntos enumeráveis	57
3.4.2	Os Números Racionais	58
3.4.3	Produto Cartesiano de dois Conjuntos Enumeráveis	60
3.5	Considerações Finais do Capítulo	61
4	INFINITOS NÃO ENUMERÁVEIS	62
4.1	Introdução: Números Irracionais	62

4.2	Exemplos de conjuntos não enumeráveis	63
4.2.1	Sequências de termos 1 ou 0	64
4.2.2	Conjunto das Partes de $\mathbb{N}$	65
4.2.3	Conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	67
4.3	O Conjunto de Cantor	68
4.3.1	Definição	68
4.3.2	Representação ternária e a cardinalidade de $\mathcal{K}$	70
4.4	O Conjunto dos Números Reais	71
4.4.1	Segmentos Icomensuráveis	72
4.4.2	O intervalo real $(0, 1)$	78
4.5	Cardinalidade de $\mathbb{I}$	84
4.6	Considerações Finais do Capítulo	85
5	EXPLORANDO O CONJUNTO $\mathbb{R}$	86
5.1	Introdução: Criando uma Correspondência Biunívoca entre um Segmento e uma Reta	86
5.2	Os Conjuntos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	88
5.2.1	Sequências de 0's e 1's	89
5.2.2	O conjunto da partes de $\mathbb{N}$	90
5.2.3	O conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$	91
5.2.4	A Cardinalidade do Contínuo	92
5.3	Números Algébricos e Transcendentes	93
5.3.1	Os Inteiros Algébricos	93
5.3.2	Números Algébricos	95
5.3.3	Números Transcendentes	95
5.4	Os números π e e	97
5.4.1	Calculando aproximações para π	97
5.4.2	O Número e	101
5.5	Conjunto das partes $\mathbb{R}$	106
5.6	Considerações Finais do Capítulo	107
6	EXPLORANDO O INFINITO: PARADOXOS, SÉRIES E CONFLITOS CONCEITUAIS	108
6.1	Introdução: Séries e a Espiral de Teodoro	108
6.2	Paradoxos de Zenão	111
6.2.1	Paradoxo da Pluralidade	112
6.2.2	Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga	114
6.2.3	A soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$	116
6.2.4	Paradoxo da Flexa em Voo	118

6.3	Somas Infinitas: Intuições Que Podem Enganar	119
6.3.1	Sobre $0,999\dots = 1$ e séries geométricas	120
6.3.2	A série alternada $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$	123
6.3.3	A soma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$	124
6.4	Considerações Finais do Capítulo	126
7	APARENTES ABSURDOS MATEMÁTICOS: O INFINITO EM	
	π E $\sqrt{2}$	127
7.1	Introdução: Estimando a Área de uma Elipse	127
7.2	Quando π Parece Ser 4: Aproximações, Definições e Armadilhas	
	do Infinito	129
7.2.1	Definições do Número π	130
7.2.2	Como aproximar π usando probabilidade	137
7.2.3	Aproximando π a partir de polígonos	140
7.3	Quando $\sqrt{2}$ Parece Ser 2: Uma Reflexão Sobre Erros e Aproxi-	
	mações	143
7.3.1	A Diagonal do Quadrado e a Proposição 47 de Euclides	143
7.3.2	Aproximando a Diagonal de um Quadrado com Polígonos	147
7.4	Uma métrica não usual	151
7.5	Considerações Finais do Capítulo	153
8	VISUALIZANDO O INFINITO: CÓDIGOS E EXPERIMENTOS	154
8.1	Introdução: Computação e Ensino de Matemática	154
8.2	Linguagem de programação e <i>softwares</i> usados no texto	155
8.2.1	Linguagem de programação Python	155
8.2.2	O software matemático SageMath	158
8.3	Códigos do Capítulo 5	161
8.4	Códigos do Capítulo 6	166
8.5	Códigos do Capítulo 7	167
8.6	Considerações Finais do Capítulo	169
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	172
	REFERÊNCIAS	175

1 Introdução

Alfred Tarski foi um lógico e matemático polonês, amplamente reconhecido como um dos maiores lógicos de todos os tempos (SUGUITANI; VIANA; D'OTTAVIANO, 2016, p. 7). Em seu artigo intitulado *Verdade e Demonstração*, dedicado à concepção semântica da verdade¹, ele abre com uma reflexão que expressa, com clareza e honestidade, o sentimento de muitos autores que se debruçam sobre temas clássicos e recorrentes na História da Ciência:

O assunto deste artigo é bastante antigo. Ele tem sido frequentemente discutido na literatura lógica e filosófica recente e não seria fácil contribuir para essa discussão com algo de original. Receio que, para muitos leitores, nenhuma das ideias colocadas aqui parecerá essencialmente nova; ainda assim, espero que possam encontrar algum interesse na maneira em que o material foi arranjado e no modo como os assuntos foram articulados. (TARSKI, 2007, p. 203)

O mesmo pode ser dito a respeito da temática do infinito, cuja presença atravessa séculos de História da Matemática e da Filosofia (LORIN; BATISTA, 2023, p. 3). Ainda que não se proponha a apresentar ideias essencialmente novas, este trabalho tem como objetivo reorganizar e explorar aspectos históricos, filosóficos, matemáticos e computacionais do conceito de infinito, oferecendo uma abordagem acessível e significativa para professores da Educação Básica. Ressalta-se que, apesar da relevância do tema para a formação docente, ele tem sido pouco abordado nas dissertações do PROFMAT, o que evidencia uma lacuna e, simultaneamente, uma oportunidade para contribuições originais no campo da Educação Matemática, sobretudo no que concerne aos aspectos computacionais da abordagem. Tal perspectiva está alinhada com a valorização das experimentações na aprendizagem matemática, como destaca a Base Nacional Comum Curricular:

Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma Ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 2018a, p. 265)

¹ A concepção semântica da verdade, proposta por Tarski, afirma que uma sentença é verdadeira se, e somente se, aquilo que ela afirma corresponde aos fatos. Tarski desenvolveu essa ideia no contexto das linguagens formais, definindo rigorosamente o conceito de verdade a partir da noção de satisfação em um modelo (BRANQUINHO; MURCHO; GOMES, 2020, p. 797).

Ao nosso ver, a escolha do infinito como objeto de estudo, embora antiga e amplamente debatida, permanece fértil em possibilidades de abordagem, especialmente no campo do ensino, pois permite a investigação de processos que podem ajudar os estudantes a aprimorarem sua compreensão das práticas matemáticas e, inclusive, suas capacidades cognitivas. Segundo Nunes et al. (2009), existem objetos que, embora não sejam concretos, funcionam como instrumentos culturais que ampliam as capacidades cognitivas humanas, como é o caso dos números. Nesse sentido, o infinito pode ser compreendido como um desses instrumentos simbólicos, seja por sua estreita associação com os conjuntos numéricos, seja como entidade matemática em si.

[...] a educação desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da inteligência porque é através da educação que aprendemos a utilizar os instrumentos culturalmente desenvolvidos que amplificam nossas capacidades. Nem todos os instrumentos ampliadores de nossas capacidades são objetos concretos. Muitos são objetos simbólicos, isto é, são sistemas de sinais com significados culturalmente determinados, como a linguagem e os sistemas de numeração. (NUNES et al., 2009, p. 19)

No contexto da formação e da atuação docente, uma compreensão mais profunda das ideias que envolvem o infinito (visto que esse conceito perpassa toda a matemática), seja em seu caráter matemático, seja em uma perspectiva interdisciplinar, como a filosófica ou a computacional, pode servir como uma valiosa ferramenta de aprimoramento teórico e pedagógico.

[...] o professor, no jogo do processo educativo, é o elemento que detém o conhecimento mais elaborado sobre a prática social e, por *isso, possui autoridade pedagógica*. Deve, portanto, servir de elemento mediador da cultura elaborada em relação aos alunos, de tal forma que estes deem um salto, da interpretação cotidiana para a compreensão elaborada da realidade. (LUC-KESI, 1990, p. 206)

Assim, a compreensão aprofundada de conceitos matemáticos por parte do professor assume um papel ainda mais central, considerando sua função como mediador entre o conhecimento sistematizado da Ciência e a interpretação de mundo que os alunos trazem consigo. Como a apontam as base curriculares nacionais, a Matemática tem um papel central na formação dos estudantes:

Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos

de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. (BRASIL, 2018b, p. 518)

Dessa forma, a reflexão sobre o infinito adquire não apenas valor na construção do saber matemático, mas também um potencial formativo significativo no exercício da docência dessa ciência. É com esse propósito que se apresentam, a seguir, os objetivos que orientaram a elaboração deste trabalho.

1.1 Objetivos

Objetivo Geral

Apresentar uma proposta de abordagem do conceito de infinito, fundamentada em aspectos históricos, filosóficos, matemáticos e computacionais, com vistas a contribuir para a formação teórica e didática de professores da Educação Básica, oferecendo subsídios que favoreçam uma compreensão mais profunda e crítica desse conceito e de sua presença na construção dos conjuntos numéricos e de outros elementos fundamentais da Matemática.

Objetivos Específicos

- Investigar o desenvolvimento histórico do conceito de infinito, destacando suas principais interpretações filosóficas e matemáticas ao longo do tempo;
- Analisar a construção dos conjuntos numéricos à luz da noção de infinito, com ênfase nas ideias de contagem, cardinalidade e nos diferentes tipos de infinitos propostos por Cantor;
- Explorar paradoxos e aparentes contradições relacionados ao infinito, evidenciando como esses fenômenos contribuem para uma compreensão mais ampla e crítica da Matemática;
- Apresentar recursos computacionais e estratégias didáticas que possam ser utilizados por professores da Educação Básica para abordar o infinito e seus desdobramentos no ensino da Matemática.

1.2 Metodologia

Este trabalho configura-se como uma pesquisa de natureza exploratória, ao “levar informações sobre um determinado objeto” (SEVERINO, 2016, p. 132), com

abordagem predominantemente teórica e de caráter bibliográfico. Como fontes da pesquisa, foram utilizados livros, teses e artigos científicos:

A pesquisa bibliográfica é fundamental, pois, além de ser autônoma, isto é, independente das outras, serve de base, de alicerce para o fundamento e alcance dos objetivos dos outros tipos de pesquisa. (LEITE, 2008, p. 47)

O foco principal recai sobre a investigação e reorganização de ideias relacionadas ao conceito de infinito, por meio do levantamento, análise e articulação de fontes históricas, filosóficas, matemáticas e computacionais.

O estudo parte da premissa de que a compreensão mais aprofundada de conceitos clássicos da Matemática pode contribuir significativamente para a formação docente. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma a importância dessa ciência para todos os estudantes da Educação Básica, tanto por suas aplicações quanto por sua contribuição à formação de cidadãos críticos:

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos — contagem, medição de objetos, grandezas — e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2018a, p. 265)

Nesse sentido, a metodologia adotada envolve, sobretudo, a sistematização de conteúdos relevantes, selecionados a partir de sua pertinência para a formação de professores de Matemática da Educação Básica, com o intuito de que tais conteúdos contribuam para uma abordagem mais acertada da disciplina em sala de aula.

Ao longo do trabalho, buscou-se integrar discussões conceituais e demonstrações formais com reflexões sobre possíveis desdobramentos didáticos, especialmente no que se refere ao ensino dos conjuntos numéricos e à compreensão de noções como contagem, cardinalidade, continuidade e infinito. Em Moraes Filho (2014), encontramos a seguinte recomendação:

Ao escrever, você organiza suas ideias em um texto e espera ser entendido por quem o leia. Há, nessa atividade, no mínimo, duas pessoas: você e um leitor. Por isso, nunca se esqueça de seus leitores, do que, na medida do

possível, você pode fazer para tornar as coisas mais simples e inteligíveis para eles. (MORAIS FILHO, 2014, p. 3)

A citação anterior orientou a forma como o texto foi construído, ao menos na intenção de que o que fosse escrito atendesse a critérios mínimos de inteligibilidade para o leitor. Mais à frente no texto, Moraes Filho (2014) afirma: “as ações para construção de um texto são: *planejar, escrever, revisar, reescrever, planejar, escrever, revisar, reescrever*, etc”. Expressando bem a dinâmica que buscamos adotar neste trabalho. Espera-se que o objetivo de produzir um texto ao mesmo tempo inteligível, de leitura agradável e com elementos que ampliem os recursos matemáticos do leitor tenha sido cumprido. Essa perspectiva sobre o processo de escrita encontra eco nas palavras de Stephen King, autor do livro *Sobre a Escrita*, em que ele afirma:

Estou chegando ao coração deste livro com duas teses, ambas simples. A primeira é que a boa escrita consiste em dominar os fundamentos (vocabulário, gramática, elementos de estilo) [...] A segunda é que, embora seja impossível transformar um escritor ruim em competente, e embora seja igualmente impossível transformar um escritor bom em um incrível, é sim possível, com muito trabalho duro, dedicação e conselhos oportunos, transformar um escritor meramente competente em um bom escritor. (KING, 2015, p. 124)

Diante da natureza exploratória e teórica deste estudo, a metodologia adotada visa não apenas à análise conceitual do infinito, mas também à construção de uma narrativa acessível, rigorosa e significativa para a prática docente. A escrita da dissertação, nesse contexto, foi tratada como um processo contínuo de reflexão, revisão e aprimoramento, conforme sugerem autores como Moraes Filho (2014) e King (2015). Este último, ainda que fora do campo acadêmico tradicional, reconhece a escrita como um ofício que pode ser aperfeiçoado com trabalho árduo, dedicação e atenção aos fundamentos, uma ideia que também norteou a elaboração deste texto. Na seção a seguir, apresentamos a organização dos capítulos que compõem este trabalho, detalhando como os conteúdos foram estruturados ao longo da dissertação.

1.3 Organização do Trabalho

O texto está estruturado em sete capítulos, além deste capítulo de introdução e do capítulo com as considerações finais.

- **Capítulo 1 – Introdução**

- **Capítulo 2 – História do Infinito:** apresenta um panorama histórico das ideias sobre o infinito, desde os primeiros registros na Grécia Antiga até os avanços promovidos por Georg Cantor. Este capítulo busca mostrar como o infinito sempre esteve entrelaçado com a evolução da própria Matemática e da Filosofia.
- **Capítulo 3 – Infinitos Enumeráveis:** trata da construção formal dos conjuntos infinitos enumeráveis, explorando as estratégias de bijeção entre conjuntos e o conceito de cardinalidade. O objetivo é oferecer uma base sólida para que professores compreendam como conjuntos infinitos podem ser contados, organizados e comparados.
- **Capítulo 4 – Infinitos Não Enumeráveis:** aprofunda a distinção entre os diferentes tamanhos de infinito, abordando a não-enumerabilidade de certos conjuntos, como o intervalo $(0, 1)$, e a não enumerabilidade dos conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Apresenta a prova da diagonal de Cantor e discute como essas ideias ampliam o entendimento sobre o contínuo.
- **Capítulo 5 – O Conjunto dos Números Reais:** analisa a estrutura e a construção do conjunto $\mathbb{R}$, explorando sua densidade, sua relação com os racionais e irracionais, e o papel das representações decimais. Discute também como a incompletude dos racionais demanda a construção dos reais, reforçando a importância dos infinitos não enumeráveis.
- **Capítulo 6 – Explorando o Infinito: Paradoxos e Somas Infinitas:** discute paradoxos clássicos associados ao uso do infinito, como os de Zenão, e introduz a noção de soma de infinitas parcelas. A intenção é mostrar como esses problemas históricos e conceituais contribuem para o desenvolvimento do pensamento crítico e podem ser explorados pedagogicamente para provocar reflexões matemáticas profundas.
- **Capítulo 7 – Aparentes Absurdos Matemáticos: O Infinito em π e $\sqrt{2}$:** analisa construções e interpretações equivocadas que envolvem o uso do infinito em contextos geométricos e numéricos. O capítulo tem como propósito revelar como o raciocínio matemático pode ser levado ao limite, e como isso pode ser explorado didaticamente para abordar questões sobre rigor e demonstração.
- **Capítulo 8 – Códigos e Representações Computacionais:** Apresenta códigos em Python e SageMath voltados à simulação e visualização de conceitos ligados ao infinito, com o objetivo de fomentar o uso de tecnologias no contexto do ensino.

Ao final, são apresentadas as considerações finais.

2 Elementos Históricos

2.1 Introdução: A Infinitude dos Primos

Um inteiro $p > 1$ é um número primo ou simplesmente primo se seus únicos divisores inteiros positivos forem 1 e p . No livro IX dos Elementos é apresentada a seguinte proposição:

Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos. (EUCLIDES, 2009, p. 342)

Em termos gerais, nessa proposição Euclides afirma que não importa quão grande seja a quantidade pensada para os primos, existirá mais primos que essa quantidade inicial. Assim a proposição anterior, mesmo sem enunciar diretamente, sugere a existência de uma infinidade de números primos. Grosso modo, ao afirmarmos que uma certa coleção $\mathcal{C}$ é infinita, na verdade estamos dizendo que por maior que seja o número de elementos contados de $\mathcal{C}$, haverá outros elementos ainda não contados.

Além de enunciar a infinidade dos primos, Euclides também apresenta uma demonstração desse resultado. Para Courant e Robbins (2000, p. 26) “a prova da infinidade da classe dos primos conforme fornecida por Euclides permanece como um modelo de raciocínio matemático”. Nela é utilizado um caminho indireto, que atualmente é conhecido como demonstração por contradição ou redução ao absurdo. As demonstrações por contradição consistem em uma técnica que segue o seguinte caminho: visando provar uma implicação $P \Rightarrow Q$ supomos que P e $\sim Q$ ¹ ocorrem, com essa suposição obtemos uma sentença que é contraditória, logo a suposição é falsa².

A proposição a seguir pode ser entendida como uma reformulação da proposição euclidiana apresentada anteriormente. Embora Euclides não tenha utilizado explicitamente a noção de infinito, sua afirmação, de que os números primos são mais numerosos do que qualquer quantidade previamente considerada, expressa, em essência, a mesma ideia.

Proposição 2.1. *Existe uma quantidade infinita de números primos.*³

¹ A notação $\sim Q$ representa a negação da proposição Q .

² Morais Filho (2013) apresenta algumas técnicas de demonstração, dentre elas a demonstração por absurdo no Capítulo 16, com uma linguagem adequada para professores da Educação básica.

³ Essa proposição pode ser reescrita como: “Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos; então $\mathcal{P}$ é infinito”, forma que se adapta bem à estrutura lógica que apresentamos para demonstrações por absurdo.

Demonstração. Inicialmente vamos supor que a proposição seja falsa, assim existem finitos primos, e como estamos lidando com um número que não conhecemos, digamos que haja n números primos, que podem ser listados: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n = \alpha$, note que não sabemos qual o maior número primo, o que não é essencial para a prova em si. Agora vamos analisar o número

$$X = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Note que X é maior que qualquer número primo da lista $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, pois inclui o produto de todos os primos conhecidos acrescido de uma unidade. Logo X não pode ser um primo, pois supomos que o maior número primo é p_n , então somos levados a acreditar que X é um número composto, e portanto um produto de números primos⁴. Mas ao dividirmos X por qualquer um dos números $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, obteremos sempre resto 1. Logo existe algum primo que é divisor de X mas que não faz parte da lista $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, contradizendo a afirmação de que existem finitos primos, logo existem infinitos números primos. ■

O argumento anterior ilustra que, independentemente do tamanho da coleção inicial de primos, sempre podemos encontrar mais um que não esteja na coleção. Esse raciocínio exemplifica a noção de infinito potencial, na qual o infinito não é tratado como um todo completo, mas como algo que pode ser continuamente expandido sem nunca ser alcançado. Em contraste a concepção de infinito atual que considera o infinito como uma entidade existente, como no caso dos números reais. O debate entre essas duas visões remonta à antiguidade e influenciou profundamente a Filosofia e a Matemática. Um exemplo desse embate pode ser encontrado nas obras de Poincaré, que rejeitava a noção de infinito atual. Para ele, a existência de conjuntos infinitos, como o dos números reais, dependia da atividade matemática e não de uma realidade independente (SHAPIRO, 2015, p. 28).

A demonstração da infinitude dos números primos, apresentada por Euclides e valorizada por sua clareza e rigor lógico, evidencia como a Matemática, desde a antiguidade, recorre a métodos dedutivos sofisticados para tratar de conceitos que ultrapassam a experiência sensível, como o próprio infinito. Esse uso do raciocínio abstrato e de estruturas argumentativas formais revela um lado da Matemática que vai além da mera manipulação numérica, trazendo à tona questões mais profundas sobre a natureza dos objetos matemáticos e a legitimidade de seus métodos. É nesse ponto que se abre um espaço fértil para a reflexão filosófica. A seguir, discutiremos os fundamentos da Matemática, abordando algumas das principais correntes filosóficas que buscaram

⁴ O resultado que garante a possibilidade de podermos escrever qualquer número composto como um produto de números primos é conhecido como *Teorema Fundamental da Aritmética*, uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em Hefez (2013, p. 141) ou Santos (2009, p. 9).

compreender a natureza do conhecimento matemático, bem como da Ciência em si, e especialmente, o papel do infinito em sua estrutura conceitual.

2.2 Fundamentos da Matemática

Ao longo da história, é possível perceber um fascínio dos filósofos em relação à Matemática (SHAPIRO, 2015, p. 19). Já na Grécia Antiga, essa relação era evidente, como mostra a atuação de Tales de Mileto, que é considerado o primeiro filósofo e também um dos primeiros matemáticos. Antes da especialização acadêmica moderna, muitos pensadores transitaram com naturalidade entre essas áreas. Platão, por exemplo, via na Matemática um modelo do pensamento racional; Descartes e Leibniz propuseram sistemas filosóficos baseados em princípios matemáticos; ou mesmo com estudiosos que tiveram uma formação em Matemática como Frege e Russell que elaboraram críticas e reconstruções da Matemática sob enfoque lógico (BATISTA; LUCAS, 2011, p. 102). Esses exemplos ilustram como Filosofia e Matemática sempre estiveram entrelaçadas, influenciando-se mutuamente.

Esse diálogo levou à formulação de perguntas fundamentais sobre a própria natureza da Matemática: quais são seus objetos? Eles existem independentemente da mente humana? O que torna uma proposição Matemática verdadeira? Como é possível que uma ciência tão abstrata seja tão eficaz para descrever o mundo? (LOLLI, 2022, p. 2) A tentativa de responder a essas questões deu origem a diferentes concepções filosóficas sobre a Matemática. Embora cada uma adote um ponto de partida distinto, todas reconhecem que há algo peculiar nessa ciência: ela lida com entidades que não pertencem ao mundo sensível, mas que podem ser manipuladas com rigor e que possuem grande poder explicativo.

O empirismo, por exemplo, defende que o conhecimento tem origem na experiência sensorial (ALVES, 2011, p. 10). Contudo, essa abordagem enfrenta limitações quando confrontada com a Matemática. Como explicar, a partir da experiência, a certeza e a universalidade de proposições Matemáticas? Como justificar a validade de conceitos que não podem ser observados, como o infinito? (TILES, 2013, p. 370) Kant já apontava esses limites, afirmando que a Matemática não depende da experiência, mas da construção racional de conceitos (ARELARO, 2021, p. 78). Ainda que o infinito não seja acessível diretamente aos sentidos, é possível tratar com precisão o comportamento de objetos infinitos ou de operações que envolvem o infinito.

Três correntes filosóficas se destacaram no século XX por suas tentativas de estabelecer fundamentos sólidos para a Matemática: o formalismo, o intuicionismo e o logicismo (TILES, 2013, p. 370). No formalismo, representado principalmente por David Hilbert, a Matemática é concebida como um jogo simbólico, onde importam as

regras de manipulação e a consistência interna do sistema. A axiomatização da geometria, por ele proposta em 1899, dispensava o apelo à intuição espacial e baseava-se apenas na Lógica e em axiomas explícitos (SILVA, 2007, p. 187). O significado dos símbolos era secundário frente à estrutura formal do sistema.

O intuicionismo, por outro lado, enfatiza o papel da construção mental. Desenvolvido por Brouwer, parte da ideia de que os objetos matemáticos são criações da mente, sendo válidos apenas se forem construíveis. Isso implica rejeitar certas noções amplamente aceitas, como a existência de conjuntos infinitos completos ou o uso irrestrito do princípio do terceiro excluído (BRANQUINHO; MURCHO; GOMES, 2020, p. 429). O infinito, nesse contexto, só pode ser entendido como potencial, nunca como totalidade concluída (TILES, 2013, p. 390).

Já o logicismo, proposto por Frege e desenvolvido por Russell, pretendia reduzir toda a Matemática à Lógica. Para esses autores, os conceitos matemáticos poderiam ser definidos a partir de noções lógicas fundamentais, e os teoremas, deduzidos a partir de axiomas lógicos (SHAPIRO, 2015, p. 158). Apesar de sua influência, o projeto logicista encontrou dificuldades, como o paradoxo de Russell e as limitações impostas pelos teoremas de incompletude de Gödel. Além disso, como observa Tiles (2013, p. 388), o logicismo tende a ignorar a forma como seres humanos realmente adquirem e usam o conhecimento matemático.

Essas três abordagens não se esgotam, mas oferecem visões contrastantes sobre a Matemática: uma como jogo simbólico, outra como construção intuitiva, outra como consequência Lógica. Todas, no entanto, enfrentam o desafio de explicar o papel do infinito, um conceito que, embora não possa ser plenamente representado ou experimentado, é central na estrutura da Matemática. O uso do infinito está presente em definições fundamentais, como a de limite:

Diz-se que o número real a é *limite* da sequência (x_n) , e escreve-se $a = \lim x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$ for possível obter um inteiro n_0 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. (LIMA, 2009, p. 107)

Mesmo observando que o símbolo ∞ não apareça explicitamente nessa definição, o conceito de infinito está presente de forma essencial. A exigência de que a propriedade se verifique para todo $n > n_0$ expressa a ideia de um processo que se prolonga indefinidamente.

Ainda que não possamos construir o infinito como objeto completo, segundo o intuicionismo, temos uma noção intuitiva que permite lidar com ele formalmente. Modelos axiomáticos foram desenvolvidos para trabalhar com conjuntos infinitos, e a Matemática opera com tais estruturas com grande sucesso. Mas a pergunta permanece:

tratamos o infinito como ele realmente é, ou apenas contornamos suas dificuldades por meio de ferramentas que funcionam sem necessariamente revelar sua natureza?

Essas reflexões não encerram o debate, mas o alimentam. Na próxima seção, veremos como a ideia de infinito foi sendo formulada e tensionada ao longo da História da Filosofia, influenciando o pensamento matemático desde a antiguidade até a modernidade.

2.3 O Infinito na Filosofia

A palavra infinito, vem do latim *infinitus* (FERREIRA, 2010, p. 647), etimologicamente traz a ideia daquilo que não tem limite, que não tem fim (COMTE-SPONVILLE, 2011, p. 316). O dicionário Novíssimo Aulete traz a seguinte definição para o termo: “Que não é finito; que não tem limites nem medida: O espaço é infinito.”(AULETE, 2011, p. 792). Dessa forma, em termos gerais, a palavra infinito é dada àquilo que não é finito, que não tem fim, não tem limite, ou não acaba. Na sequência apresentaremos como alguns filósofos viam o infinito, com intuito além de lançar luz sobre o conceito em si, mas também elucidar como pode ter evoluído a abordagem matemática para o mesmo.

2.3.1 O Infinito na Filosofia Antiga

A investigação filosófica sobre o infinito remonta aos pensadores da grécia antiga (SILVA, 2016, p. 54), muitos desses pensadores buscaram compreender a origem e a constituição da realidade a partir de princípios racionais. Embora suas formulações ainda não se apoiassem em uma linguagem Matemática formal, boa parte de suas ideias anteciparam discussões fundamentais sobre a infinitude do tempo, do espaço e da matéria. Nesta subseção, apresentamos algumas dessas concepções iniciais, destacando como a noção de infinito começou a ser formulada no contexto cosmológico e metafísico por autores como Anaximandro, Zenão e Aristóteles. Além disso, apresentaremos a síntese feita por Aristóteles sobre o tema, ao inserir o conceito de infinito potencial e infinito atual.

Anaximandro

Anaximandro (610 - 545 a. C.) foi um filósofo Grego, mas especificamente da região de Mileto, “era uma geração mais jovem que Tales, de quem foi discípulo e amigo” (HUISMAN, 2001, p. 43). Anaximandro não é conhecido pela história como autor de novas proposições matemáticas, apesar de ter produzido um resumo de geometria (GOMPERZ, 2011, p. 57). Mas diante de suas contribuições para o conhecimento

com por exemplo, ser considerado o primeiro cientista ⁵, o filósofo pré-socrático é considerado o primeiro a escrever um texto grego em prosa, diferenciando-se dos demais textos da época, por serem escritos em versos (REALE; ANTISERI, 2017, p. 31) e a ele é creditada a produção do primeiro mapa, além de ser um astrônomo competente:

A ele é atribuído a confecção do primeiro mapa-múndi com a descrição de todo o mundo habitado conhecido de sua época; inventou o relógio de sol pelo qual se poderia verificar a obliquidade do zodíaco; introduziu o uso do *gnomo* (o esquadro) e a medição entre as estrelas e o cálculo de suas magnitudes, sendo por isso considerado o iniciador da astronomia grega. (CHAUI, 2002, p. 59)

É de se supor, com base no que lhe é atribuído pelos historiadores da Filosofia, que Anaximandro possuía uma sólida formação matemática. Sua principal proposição filosófica era a de que o infinito seria o princípio de todas as coisas (HUISMAN, 2001, p. 43). Nessa perspectiva, pode-se conjecturar que seus conhecimentos matemáticos tenham influenciado diretamente essa formulação.

Seu predecessor, Tales de Mileto, afirmava que a origem de todas as coisas era a água.

Em primeiro lugar, a tese tradicional, que deriva de Aristóteles, reza que, para Tales, de algum modo, todas as coisas são água; elas são feitas de água. (MCKIRAHAN, 2013, p. 74)

Anaximandro, por sua vez, atribuída ao infinito a origem de tudo. O termo que utilizava para designar esse princípio, que hoje identificamos como infinito, era *ápeiron* (MCKIRAHAN, 2013, p. 81), significando:

aquilo que está privado de limites, tanto externos (ou seja, aquilo que é espacialmente e, portanto, quantitativamente infinito) quanto internos (ou seja, aquilo que é qualitativamente indeterminado). (REALE; ANTISERI, 2017, p. 31)

Dessa forma, o *ápeiron*, por ser a origem de todas as coisas, é ilimitado espacialmente e abarca tudo o que existe. Sua essência consiste justamente em gerar e conter, de modo indeterminado, todas as coisas a partir de si mesmo.

A originalidade do pensamento de Anaximandro está justamente em propor um princípio que não é um elemento determinado da natureza, como a água de Tales, mas

⁵ O primeiro texto de Popper (2019) é o ensaio *De volta aos pré-socráticos*, onde o autor defende a importância do pensamento dos filósofos anteriores a Sócrates, dentre eles Anaximandro, como precursor do método científico: “Mas afirmo que a teoria de Anaximandro abriu caminho para as teorias de Aristarco, Copérnico, Kepler e Galileu” (POPPER, 2019, p. 8).

algo indeterminado, ilimitado e imperecível, o *ápeiron*. Essa escolha indica um salto conceitual importante: ao invés de buscar no mundo sensível a origem de todas as coisas, Anaximandro aponta para uma realidade que transcende os limites da percepção e da definição. Com isso, introduz no pensamento filosófico e, indiretamente, na História da Ciência e da Matemática, a noção de infinito como fundamento. Sua concepção de um princípio infinito não apenas antecipa discussões posteriores, como também revela uma intuição poderosa: de que a origem do mundo não poderia ser algo finito, delimitado ou corruptível, mas sim uma realidade inesgotável que sustenta e gera todas as demais.

Zenão de Eléia

Zenão de Eléia (c. 490 a.C. – c. 430 a.C.) foi discípulo de Parmênides (GOMPERZ, 2011, p. 178) tendo se destacado por sua tentativa de defender as teses de seu mestre por meio de argumentos que desafiavam o senso comum (REALE; ANTISERI, 2017, p. 52). Seu pensamento teve grande importância para o desenvolvimento da noção de infinito, especialmente ao propor situações que colocavam em tensão as ideias de multiplicidade, espaço, tempo e movimento. O pensamento central Parmênides, mentor de Zenão, era “o ser é e não pode não ser; o não ser não é e não pode de nenhum modo ser” (REALE; ANTISERI, 2017, p. 48). Assim, para Parmênides, mesmo que contrariando as percepções dos sentidos, não haviam mudanças no mundo:

Os adversários de Parmênides sustentavam que um corpo pode, movendo-se de um ponto de partida, chegar a uma meta estabelecida. Zenão, com sua argumentação, confuta essa teoria: de fato, esse corpo, antes de alcançar a meta, deveria percorrer a metade do caminho que deve percorrer, e antes ainda, a metade da metade e assim por diante, ao infinito (a metade da metade da metade ... jamais chega a zero) (REALE; ANTISERI, 2017, p. 52)

Ainda que Zenão não oferecesse respostas definitivas, seus argumentos (que são notadamente paradoxos) evidenciam uma intuição filosófica sofisticada sobre o uso do infinito em raciocínios abstratos. Alguns desse paradoxos, que acredita-se inicialmente serem 40 ao todo (MCKIRAHAN, 2013, p. 302), serão explorados com mais profundidade no Capítulo 6, dada sua relevância histórica e filosófica para a compreensão dos limites da razão e para o desenvolvimento da Matemática.

Aristóteles

Aristóteles (384–322 a.C.) era um filósofo grego cuja influência atravessou milênios. Seus estudos trataram de praticamente todas as ciências conhecidas na Antiguidade:

Matemática, Física, Biologia, Lógica, Ética e Metafísica, entre outras (HUISMAN, 2001, p. 62). Em seu *História da Filosofia Ocidental*, Russell escreve o seguinte acerca de Aristóteles:

Aristóteles viveu no final do período criativo do pensamento grego, e após a sua morte dois mil anos se passaram até que o mundo visse outro filósofo que estivesse mais ou menos à sua altura. (RUSSELL, 2015, p. 207)

No que diz respeito ao infinito, Aristóteles foi um dos primeiros a discutir sistematicamente o tema sob uma perspectiva filosófica e científica.

Em Física III, 4-8, por exemplo, Aristóteles, tematiza o infinito/ilimitado/indeterminado (ápeiron) (que se apelide o trecho de Tratado do Infinito); busca decidir, primeiro, se ele é ou não (ei éstin è mé) – afinal, uma noção quase tão negativa quanto à de não-ser, pelo menos enquanto “ser” for “ser determinado”, teria de saída grandes chances de sequer ser – e, em caso afirmativo, o que ele é (ei éstin, tí estin). (RIBEIRO, 2011, p. 99)

Ele distinguia entre o infinito atual (entendido como um todo completo, existente em si) e o infinito potencial, concebido como aquilo que está sempre em processo, como uma possibilidade de ser continuamente aumentado ou dividido, mas nunca plenamente realizado. Para Aristóteles, o infinito atual não existe na realidade, sendo uma ideia incoerente com os princípios de sua filosofia da natureza. Já o infinito potencial, por outro lado, pode ser admitido em contextos como o tempo, o espaço e a divisibilidade da matéria. Essa distinção influenciou profundamente o pensamento ocidental por séculos, moldando a maneira como o conceito de infinito foi abordado tanto na Filosofia quanto na Matemática.

2.3.2 O Infinito na Filosofia Moderna

A reflexão sobre o infinito ganha novo fôlego na modernidade, sendo abordada por diversos filósofos que, a partir de diferentes perspectivas, buscaram compreender suas implicações na Filosofia e na Matemática. Autores como Gottfried Wilhelm Leibniz, Immanuel Kant e Georg Wilhelm Friedrich Hegel contribuíram, cada um a seu modo, para ampliar a noção de infinito no pensamento ocidental. Suas contribuições não apenas influenciaram a Filosofia, mas também estabeleceram fundamentos importantes para o desenvolvimento posterior da Matemática Moderna, culminando nas formulações de Georg Cantor.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), filósofo e matemático alemão, ocupa um lugar central na transição entre o pensamento filosófico clássico e os fundamentos da Ciência Moderna. Batista e Lucas (2011, p. 102) destacam Leibniz como uma figura central na história da Matemática, cuja contribuição ultrapassa o campo técnico e alcança fundamentos lógico-filosóficos profundos. Ele é apontado como um dos responsáveis por avanços na álgebra estrutural e por uma visão do conhecimento matemático que articula rigor, generalidade e abstração, elementos que prepararam o terreno para teorizações posteriores como a de Cantor.

Sua concepção do infinito é marcada por uma tentativa de conciliar o raciocínio racionalista com a ideia de que o infinito, embora incompreensível em termos absolutos, pode ser utilizado legitimamente no pensamento matemático.

Leibniz tem não apenas uma Matemática do infinito, mas também uma filosofia do infinito. O tratamento do infinito a partir da Matemática faz as vezes de uma introdução para pensar a infinitude divina e a infinidade predicados que caracteriza a noção completa da substância criada finita. (LACERDA, 2016, p. 40)

Para Leibniz, o infinito não pode ser tratado como uma totalidade concluída, ele rejeita o infinito atual como entidade real. No entanto, aceita o uso de quantidades infinitamente pequenas (infinitésimos) e de séries infinitas como ferramentas válidas no cálculo e na descrição do mundo. Lacerda (2016) traz a seguinte frase, atribuída ao filósofo alemão:

Para falar propriamente, é verdade que há uma infinidade de coisas, isto é, que há sempre mais do que podemos determinar. Mas não há um número infinito, nem uma linha ou outra quantidade infinita, se tomados como verdadeiros todos, como é fácil demonstrar. (LEIBNIZ, 1990, *apud* LACERDA, 2016, p. 46).

Essa concepção permite uma abordagem operacional do infinito que será retomada mais tarde por Cantor, embora com uma fundamentação de natureza distinta. A Lógica e a Matemática ganham, com Leibniz, uma nova dimensão conceitual que antecipa desenvolvimentos importantes, como o uso de linguagem simbólica e o papel da razão formal. Sua noção de “mônadas”, entidades indivisíveis e infinitamente numerosas que compõem a realidade (ANDRADE; OLIVEIRA, 2022, p. 18), é também uma expressão de um infinito em potência, pertencente a uma parte da realidade que só pode ser pensada (ANDRADE; OLIVEIRA, 2022, p. 19), não observada, mas que se apresenta como múltipla.

Dessa forma, Leibniz mantém o infinito como um conceito funcional e matematicamente produtivo, mesmo que não o reconheça como realidade plena. As contribuições de Leibniz exemplificam o entrelaçamento entre fundamentos lógicos e filosóficos da Matemática, sendo centrais para compreender o desenvolvimento histórico e conceitual dos sistemas algébricos e das noções de estrutura (BATISTA; LUCAS, 2011, p. 102).

Immanuel Kant

Immanuel Kant (1724–1804), um dos principais filósofos do pensamento moderno, abordou o infinito no contexto de sua filosofia transcendental⁶, especialmente na obra *Crítica da Razão Pura*. Para Kant, o infinito não é um dado empírico, nem um conceito extraído da experiência sensível, mas uma ideia da razão uma construção que emerge da necessidade de pensar totalidades inatingíveis. Assim, para Kant, os conceitos como o de infinito não podem ser construídos a partir da intuição sensível, mas pertencem ao domínio das ideias da razão pura, exercendo um papel regulador no pensamento, sem, no entanto, possuírem uma correspondente objetividade empírica (ARELARO, 2021, p. 79).. Sobre o conhecimento matemático e a experiência, ele escreveu:

A Matemática fornece o exemplo mais brilhante de uma razão pura se ampliando por si mesma sem o auxílio da experiência. Exemplos são contagiantes, em especial para a mesma faculdade, que busca ter em outros casos, naturalmente, a mesma sorte que teve em um. (KANT, 2015, p. 531)

Conceitos como a infinitude do tempo e do espaço não são, para Kant, propriedades do mundo em si, mas formas puras da sensibilidade humana. O tempo e o espaço são condições subjetivas que estruturam toda experiência possível, sendo, portanto, projeções da própria razão humana, que antecedem a experiência e moldam os fenômenos (ARELARO, 2021, p. 78). Desse modo, a infinitude atribuída ao tempo e ao espaço não decorre de uma realidade objetiva e externa, mas da estrutura do próprio sujeito que conhece, o qual busca o incondicionado como ideal da razão. Como destaca Arelaro, “Kant mostra, com isso, que a Filosofia não pode imitar o método matemático, uma vez que não pode construir conceitos a partir da intuição *a priori*” (ARELARO, 2021, p. 78).

⁶ Quanto ao conceito de filosofia transcendental, Kant escreveu:

Eu denomino *transcendental* todo conhecimento que se ocupe não tanto com os objetos, mas com o nosso modo de conhecer os objetos. Um sistema de tais conceitos se denominaria *filosofia transcendental*. (KANT, 2015, p. 60)

O conhecimento *filosófico* é o *conhecimento da razão por conceitos*, e o matemático por *construção de conceitos*. *Construir* um conceito, porém, significa expor à intuição *a priori* a ele correspondente. Para a construção de um conceito, portanto, é exigida uma intuição [...].(KANT, 2015, p. 531)

Essa distinção metodológica, entre conceitos construídos com base na intuição e aqueles apenas pensados pela razão, permite compreender por que Kant classifica o infinito não como um objeto matemático construído, mas como uma ideia reguladora.

Assim, podemos perceber que, para Kant, embora o infinito não possua existência objetiva, essa ideia orienta o pensamento na busca por totalidades e fundamentos últimos, exercendo um papel essencial na organização e sistematização do conhecimento. Essa distinção entre o que pode ser conhecido pela experiência e o que pode apenas ser pensado como ideal teve um impacto profundo no pensamento moderno, delimitando seus caminhos e preparando o terreno para abordagens mais abstratas do infinito nos séculos seguintes.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831), figura central do idealismo alemão, elaborou uma concepção dialética⁷ do infinito que rompe com o entendimento tradicional. Logo no início da *Ciência da Lógica*, Hegel problematiza a passagem do finito ao infinito(HEGEL, 1812), destacando que o que costumeiramente é chamado de infinito, um processo de constante superação de limites, permanece preso à negação do finito, sem jamais superá-lo de fato:

[...] para Hegel, o verdadeiro infinito não pode ser obtido por esse suceder infinito de finitos. O finito e o infinito são aspectos do real, aparentemente em eterna oposição que originariam todas as outras oposições, tais como a entre sujeito e objeto, teoria e prática. (BARBIERI, 2012, p. 53)

Para Hegel, o verdadeiro infinito não é algo externo ao finito, mas se realiza na própria superação dialética deste. O infinito autêntico é aquele que nega a sua negação: um movimento de retorno a si, uma unidade dinâmica entre finito e infinito, que expressa a totalidade concreta. Como analisa Barbieri:

[...] finito e infinito compreenderiam uma unidade formada justamente pela reposição de um pelo outro, na medida em que ser infinito requer, em si, o ser finito – porque senão não seria infinito – ao mesmo tempo em

⁷ A dialética no sentido de Hegel, é vista como uma *síntese de opostos*, e como ambos se determinam reciprocamente (ABBAGNANO, 2012, p. 318).

que o finito requer, para ser finito, a restrição de si colocada ao infinito.
(BARBIERI, 2012, p. 53)

Essa formulação também se contrapõe à concepção kantiana, que tratava o infinito como uma ideia reguladora sem realidade objetiva. Hegel, por sua vez, propõe que o infinito esteja presente no próprio real, imanente à vida do Espírito e ao movimento da realidade. Como sintetiza Vinícius dos Santos, “é a tese da imanência dinâmica do finito no infinito o índice que permite ao pensamento hegeliano sustentar e compreender as contradições inerentes ao real” (SANTOS, 2021, p. 433).

Essa concepção do infinito não apenas ultrapassa a visão quantitativa e abstrata herdada da tradição aristotélica, como também antecipa questionamentos modernos sobre a relação entre o finito e o ilimitado. Sua influência repercute em debates filosóficos posteriores sobre a totalidade, o absoluto e o lugar do infinito na constituição do pensamento e da realidade.

A contribuição de Hegel para a Filosofia da Matemática é inseparável de sua crítica à Lógica formal e de sua concepção dialética do infinito. Em contraste com Platão, que situava os objetos matemáticos no “mundo das ideias”, eternas, perfeitas e acessíveis apenas à razão, Hegel insere esses objetos no processo dinâmico da realidade, enfatizando sua natureza histórica e mediada pelo conceito.

Hegel e Platão “nutriram-se de matemáticas”, receberam uma formação Matemática de altíssimo nível e se ocuparam tecnicamente de problemas de Matemática, particularmente de geometria. É muito difícil, portanto, que Hegel e Platão se permitam definir a natureza dos números, ou em geral dos entes matemáticos, de maneira que contradiga os pressupostos, a praxe, e os resultados das ciências Matemáticas do seu tempo. (CATTANEI, 2001, p. 44)

Ambos os filósofos reconhecem o caráter racional e necessário da Matemática, mas diferem quanto à natureza dos objetos matemáticos: enquanto Platão os concebe como entidades fixas e separadas do mundo sensível, Hegel os entende como momentos do desenvolvimento da razão, integrados ao movimento do espírito (CATTANEI, 2001, p. 45 – 46). Como destaca Cattanei (2001, p. 45), a Filosofia de Hegel permite uma reinterpretação dos objetos matemáticos, não como substâncias atemporais, mas como construções que emergem de um processo racional em constante desenvolvimento, sendo, portanto, parte da totalidade concreta do real. Tal concepção oferece uma alternativa potente às visões fragmentadas ou estritamente formais da Matemática Moderna, recolocando-a como um saber integrado ao movimento e à estrutura da realidade.

2.3.3 Cantor e o Infinito Matemático

George Cantor (1845–1918) foi o matemático responsável por introduzir, de forma sistemática e rigorosa, o infinito na Matemática Moderna. Ao desenvolver a Teoria dos Conjuntos, Cantor propôs que diferentes tamanhos de infinitos poderiam ser comparados e classificados.

Antes dos trabalhos de Cantor os matemáticos aceitavam apenas um infinito, denotado por um símbolo como ∞ , o qual era empregado indiscriminadamente para indicar o “número” de elementos de conjuntos como dos números naturais e dos números reais. Com esses trabalhos introduziu-se uma nova visão que resultou, entre outras coisas, numa aritmética e numa escala par as infinidades. (EVES, 2004, p. 662)

Essa proposta revolucionária levou à definição de infinitos enumeráveis e não enumeráveis, conceitos que serão explorados em capítulos posteriores deste trabalho. Para além dos aspectos técnicos, a abordagem de Cantor enfrentou forte resistência de matemáticos e filósofos da época, tanto por razões filosóficas quanto religiosas. A própria noção de que o infinito pudesse ser tratado matematicamente com precisão era considerada, por muitos, uma heresia lógica (SANTOS, 2008, p. 133). Ainda assim, Cantor defendia que o conceito de infinito possuía validade matemática e expressava uma ideia que, para ele, remetia à natureza divina. Sua obra marca um ponto de virada na História da Matemática e inaugura uma nova fase na compreensão do infinito, consolidando-o como objeto legítimo de investigação formal (SANTOS, 2008, p. 134).

Ao desenvolver a Teoria dos Conjuntos transfinitos, George Cantor estabeleceu um marco na História da Matemática ao tratar o infinito como objeto formalmente manipulável. Sua concepção do infinito, porém, contrasta radicalmente com a de Hegel. Enquanto Cantor fundamenta o infinito na Lógica Matemática, atribuindo-lhe existência objetiva por meio de definições precisas e ordens cardinais, Hegel o entende como um processo interno do pensamento, inseparável do movimento do conceito finito. A Matemática Moderna representada por Cantor permanece “ancorada em uma concepção externa à vida do conceito e à dinâmica do real” (CATTANEI, 2001, p. 50). O infinito cantoriano, embora revolucionário no plano formal, mantém-se como abstração quantitativa, ao passo que, para Hegel, o verdadeiro infinito é qualitativo, imanente e parte da autorrealização racional do espírito.

Ao longo da História da Filosofia, o infinito foi pensado sob diferentes prismas: como origem de todas as coisas, como paradoxo lógico, como mistério teológico ou como ideia reguladora da razão. Cada filósofo apresentado nesta seção contribuiu, à sua maneira, para aprofundar ou reconstruir esse conceito, revelando a complexidade

que envolve sua definição e suas implicações. Essa trajetória, que vai de Anaximandro a Cantor, mostra como o infinito nunca deixou de provocar questionamentos profundos, tanto no campo do pensamento quanto na formulação de teorias científicas. A seguir, analisaremos como essas concepções filosóficas influenciaram o surgimento de ferramentas matemáticas que permitiram lidar com o infinito de modo mais estruturado e operacional.

2.4 O Infinito na Matemática

O infinito sempre representou um desafio particular para a Matemática. Diferente de outras áreas do conhecimento, que muitas vezes tratam o infinito de forma mais especulativa ou metafísica, a Matemática precisou desenvolver instrumentos formais para lidar com ele com precisão e coerência. No entanto, mesmo com toda sua estrutura lógica, o infinito continua sendo uma fonte de paradoxos e armadilhas conceituais. Como bem alerta Moraes Filho (2013), “todo cuidado é pouco ao lidar com o infinito” (MORAIS FILHO, 2013, p. 12). Nesta seção, exploraremos como o conceito de infinito foi sendo progressivamente formalizado e como isso levou ao surgimento de diferentes noções de infinito na Teoria dos Conjuntos.

Comte-Sponville (2011) afirma que os exemplos matemáticos de infinito são os mais simples de ser entendidos:

As ilustrações mais cômodas são matemáticas. Todos compreendem que a série dos números é infinita, pois sempre é possível acrescentar um número qualquer ao que seria, supostamente, o maior. (COMTE-SPONVILLE, 2011, p. 316)

Dessa forma, para Comte-Sponville (2011), o termo infinito passa a ter a compreensão facilitada quando estudado do ponto de vista da Matemática. Uma distinção fundamental nesse contexto, e que orientará as discussões a seguir, é aquela entre o infinito potencial e o infinito atual.

2.4.1 Infinito em Potência e em Ato

A distinção entre infinito potencial e infinito atual é um ponto de partida fundamental para compreender como o infinito foi sendo incorporado, ou evitado, na história da Matemática. Esses dois modos de entender o infinito, como visto anteriormente, foram formalizados por Aristóteles e influenciaram tanto o pensamento filosófico quanto o desenvolvimento da própria Matemática ao longo dos séculos (RIBEIRO, 2011, p. 199).

Infinito Potencial

A concepção de infinito potencial diz respeito à ideia de um processo que nunca termina, mas que pode ser continuado indefinidamente:

O *finito* em seu espírito não é apenas a imagem de uma coisa limitada em sua medida? O *infinito* não é a imagem dessa mesma medida que pode ser prolongada sem fim? (VOLTAIRE, 2018, p. 323)

Trata-se de um infinito que nunca está completo, mas que está sempre em construção.

O conceito de infinito potencial foi elaborado por Aristóteles, que negava que o infinito pode ser atual, ou seja real, tanto como realidade em si (substância), quanto atributo de uma realidade. (ABBAGNANO, 2012, p. 647)

Dessa forma o infinito potencial não existe por si próprio, nem enquanto propriedade de alguma coisa que existe. Aristóteles apresentava dois significados para esse infinito,

O primeiro, Infinito é “aquilo que, por natureza, não pode ser percorrido”, no sentido de que não pode ser visto. No segundo, infinito é aquilo que pode ser percorrido, mas não todo, pois não tem fim. (ABBAGNANO, 2012, p. 647)

O último sentido dado por Aristóteles ao infinito, é o mais adequado para Matemática. Como exemplo, temos contexto o da aritmética, ao considerarmos a sequência dos números naturais $1, 2, 3, \dots$, podemos sempre adicionar mais um número, sem jamais alcançar um último elemento. Esse tipo de infinito é aceito mesmo por correntes filosóficas mais conservadoras, como o intuicionismo, que o reconhece como compatível com a construção efetiva e finita do conhecimento matemático.

Infinito Atual

Por outro lado, a concepção de infinito atual é entendido como uma totalidade completa e existente em si. Um conjunto infinito, como o dos números naturais $\mathbb{N}$, seria considerado uma entidade acabada, inteiramente definida e tratável como um objeto matemático legítimo:

[...] um infinito em ato existe como uma coisa ou uma propriedade de coisas existentes, o que significa que, se operamos uma divisão ou uma soma ao infinito, isso só é possível porque o infinito, como um fato, preexiste a essas operações do pensamento[...] (LACERDA, 2016, 43)

Essa concepção foi formalizada por George Cantor no final do século XIX, ao desenvolver a teoria dos conjuntos e introduzir os conceitos de cardinalidade infinita, como o $\aleph_0$ (aleph zero), para a cardinalidade, ou tamanho do conjunto infinito $\mathbb{N}$ (ABBAGNANO, 2012, 648).

A aceitação do infinito atual permite à Matemática trabalhar com conjuntos infinitos como objetos manipuláveis, definidos por propriedades bem estabelecidas. Contudo, a aceitação do infinito atual não é unânime. Correntes como o intuicionismo o rejeitam, argumentando que não se pode afirmar a existência de uma totalidade que, por definição, nunca pode ser construída por inteiro. Segundo Siqueira e Lorin (2021), essa forma de pensar o infinito apesar de ser aceita hoje em dia, não é a mais abordada:

Já a concepção de infinito atual, um objeto matemático, começou a ser trabalhada com Bolzano e Cantor, mas mesmo sendo atual, não é a mais abordada na atualidade. (SIQUEIRA; LORIN, 2021, p. 5)

O formalismo tende a aceitar o infinito atual como parte de um sistema simbólico consistente, independentemente da sua existência concreta. O logicismo, por sua vez, busca justificar o infinito atual por meio de deduções lógicas rigorosas a partir de axiomas.

A distinção entre essas duas concepções de infinito não é apenas filosófica, mas também prática: ela influencia como definimos limites, convergência de sequências, somas infinitas e até a própria noção de número real. Mas, para além da Matemática, a forma com que essa Ciência compreende o infinito contribui para a reflexão sobre temas que ultrapassam os limites do próprio campo científico:

Em outras palavras, podemos por meio de analogias com o infinito matemático, explicar, primeiro, a infinitude divina, entendida como o verdadeiramente infinito, isto é, infinito no sentido de perfeito (perfectum, acabado, absoluto), no qual não há divisão, separação, limite. E podemos, em segundo lugar, chegar à definição da substância criada como uma substância que é finita, mas se define pela infinidade de predicados que a constituem como um sujeito de uma noção completa. (LACERDA, 2016, 40)

Ao longo deste trabalho, examinamos como o uso do infinito abre portas para novos conceitos e impõe desafios significativos, especialmente quando se lida com paradoxos e aparentes contradições. A formalização proposta por Cantor levou, entre outras coisas, à distinção entre diferentes tipos de infinitos, como veremos a seguir.

2.4.2 Tamanhos do Infinito

A ideia de que todos os infinitos são iguais pode parecer intuitiva, mas é enganosa. A Matemática Moderna, por meio da Teoria dos Conjuntos iniciada por George Cantor, demonstrou que existem diferentes tamanhos de infinitos. A ferramenta central para essa distinção é a noção de *correspondência biunívoca*, uma associação entre os elementos de dois conjuntos em que não haja sobras nem repetições.

Formalmente, dizemos que dois conjuntos A e B possuem a mesma *cardinalidade* se existe uma função bijetora $f : A \rightarrow B$, ou seja, uma função que seja ao mesmo tempo injetora (sem repetições) e sobrejetora (sem sobras). Quando isso ocorre, mesmo que A e B sejam conjuntos infinitos, consideramos que seus “tamanhos” são equivalentes.

Um exemplo clássico é a bijeção entre os números naturais $\mathbb{N}$ e os números pares positivos. A função $f(n) = 2n$ associa a cada número natural o seu dobro, criando uma correspondência perfeita entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos pares. Isso indica que ambos os conjuntos têm o mesmo tamanho infinito, uma conclusão que contraria nossa intuição inicial, já que os pares parecem ser “metade” dos naturais.

Essa aparente contradição em dizer que um conjunto infinito pode ser colocado em correspondência um a um com os elementos de uma de suas partes, como é o caso da correspondência entre os naturais e os pares, se tornou exatamente uma definição para conjuntos infinitos:

G. Cantor (Mathematische Annalen, entre 1878 e 1883) e Dedekind (Continuidade e números irracionais, 1872; O que são e o que devem ser os números, 1888) enunciaram um novo conceito de infinito, que consiste em tomar como definição de Infinito o que até então parecera ser o “paradoxo” do próprio Infinito: a equivalência da parte e do todo. (ABBAGNANO, 2012, p. 648)

Uma estratégia semelhante à usada para criar uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e os números pares positivos pode ser utilizada para colocar os números inteiros $\mathbb{Z}$ em correspondência com os naturais. Uma maneira comum é alternar entre inteiros positivos e negativos por meio da função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Com isso, vemos que até mesmo conjuntos aparentemente “maiores”, como $\mathbb{Z}$, compartilham a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$. Essa cardinalidade comum é denotado por $\aleph_0$ (aleph zero), que representa o menor tipo de infinito na hierarquia proposta por Cantor.

A descoberta de que certos conjuntos infinitos podem ser colocados em correspondência com os naturais inaugurou uma nova maneira de pensar o infinito: um conjunto é dito *enumerável* se seus elementos podem ser organizados como uma sequência infinita, isto é, se existe uma bijeção entre ele e $\mathbb{N}$. Como veremos, nem todo infinito possui essa propriedade, e é aí que surgem infinitos ainda maiores.

2.4.3 Limites da Intuição e o Papel da Formalização

O estudo do infinito exige não apenas definições rigorosas, mas também a superação de intuições construídas a partir da experiência com o finito. Como vimos, ideias como “o todo é maior que a parte” não se aplicam a conjuntos infinitos. Situações como a correspondência entre $\mathbb{N}$ e os pares, ou o paradoxo do Hotel de Hilbert, revelam como o infinito desafia o senso comum. Soma de séries infinitas, como $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, também evidenciam o risco de contradições quando se confia apenas na intuição.

A possibilidade de lidar com o infinito de forma segura e produtiva depende, portanto, da formalização matemática. A partir da Teoria dos Conjuntos, tornou-se possível definir com precisão noções como tamanho de conjuntos infinitos, função, bijeção e cardinalidade. A teoria desenvolvida por Cantor foi essencial nesse processo, oferecendo uma linguagem lógica capaz de fundamentar essas ideias e reinterpretar antigos problemas sob novas bases conceituais. Nos próximos capítulos, avançaremos na exploração dessas ideias, iniciando pelos conjuntos infinitos que podem ser organizados de forma enumerável.

2.5 Considerações Finais do Capítulo

A ideia de infinito sempre esteve presente nas reflexões filosóficas e matemáticas, assumindo diferentes significados ao longo do tempo. Desde os primeiros filósofos gregos, como Anaximandro e Aristóteles, até pensadores modernos como Kant, o infinito foi tratado ora como um princípio gerador de todas as coisas, ora como um conceito problemático, impossível de ser plenamente compreendido. Essas diferentes interpretações ajudaram a moldar o modo como o infinito seria mais tarde abordado pela Matemática.

Com George Cantor, o infinito deixou de ser apenas uma noção filosófica e passou a ocupar um lugar central na Matemática, com definições rigorosas e ferramentas próprias para sua análise. Sua proposta representou uma ruptura com visões anteriores e abriu caminho para novos desenvolvimentos em áreas como a teoria dos conjuntos, a Lógica e a análise. Nos próximos capítulos, estudaremos como Cantor diferenciou os infinitos enumeráveis dos não enumeráveis e quais as consequências dessa distinção para o pensamento matemático contemporâneo.

3 Infinitos Enumeráveis

3.1 Introdução: Os Números Racionais

Um número racional é entendido, de forma intuitiva, como aquele que pode ser escrito como uma fração de inteiros. A definição formal e mais comum é dada a seguir:

Definição 3.1 (Números racionais). *O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é o conjunto de todos os números que podem ser representados na forma de uma fração com numerador e denominador inteiros, sendo o denominador diferente de zero. Formalmente:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Algumas observações podem ser feitas em relação à Definição 3.1:

Observações.

- A definição de $\mathbb{Q}$ toma como base o conhecimento do que vem a ser o conjunto $\mathbb{Z}$;
- Em um estudo mais aprofundado, onde seria feita a construção axiomática de $\mathbb{Q}$, seria necessário definir precisamente o que significa $\frac{p}{q}$;
- Quando pensamos na fração $\frac{p}{q}$ como uma divisão, podemos associar toda fração $\frac{n}{1}$, onde n é um número natural, ao próprio n , de modo que podemos afirmar que todo natural pode ser escrito como uma fração e portanto é também racional.

As três observações anteriores nos dão indícios de que a construção precisa do conjunto $\mathbb{Q}$ requer uma série de conhecimentos e aprofundamentos¹.

A terceira observação traz uma indicação que será bastante importante para nossos estudos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. De maneira que o conjunto dos números naturais é parte do conjunto dos racionais. No Livro 1 dos Elementos, Euclides apresenta a seguinte afirmação, no que ele chama de noção comum:

8. E o todo [é] maior do que a parte. (EUCLIDES, 2009, p. 99)

Mais à frente nesse trabalho verificaremos que existem casos em que o todo tem o mesmo tamanho de alguma de suas partes.

¹ Em Ferreira (2011) é encontrada uma construção progressiva dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

O desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos por Cantor revelou que o ato de contar, entendido como a construção de uma correspondência ordenada entre elementos, podia ser estendido para além do finito. Passou-se, assim, a considerar como *enumerável* todo conjunto cujos elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Essa concepção deu origem a uma distinção fundamental: nem todos os infinitos são iguais. Alguns conjuntos infinitos, como os pares, os ímpares e os racionais, admitem uma ordenação completa, sendo, nesse sentido, “do mesmo tamanho” que $\mathbb{N}$. Outros, como os números reais, escapam a essa estrutura de contagem e apontam para uma dimensão maior e mais complexa do infinito. Neste capítulo, concentraremos nossa atenção naqueles conjuntos infinitos que podem ser contados, isto é, os *infinitos enumeráveis*, explorando suas propriedades, exemplos e implicações.

3.2 Funções e Infinitos Enumeráveis

As funções ocupam um papel central em diversos ramos da Matemática. Desde a Aritmética até a Análise, elas são utilizadas para descrever relações entre grandezas, modelar fenômenos físicos e representar transformações. No Cálculo, por exemplo, conceitos como derivada e integral estão fundamentados em noções de funções. Já na Teoria dos Conjuntos, as funções assumem um papel mais abstrata, permitindo formalizar a ideia de correspondência entre elementos de conjuntos diferentes. É justamente essa perspectiva que será explorada a seguir, como ponto de partida para compreendermos o que significa “contar” um conjunto infinito.

3.2.1 O Conceito de Função

Para compreender o que significa um conjunto ser enumerável, é essencial entender o conceito de função. Em alguns livros de Matemática na Educação Básica, a função é apresentada como um subconjunto do produto cartesiano². Essa definição é formalmente correta, mas por vezes deixa de destacar o caráter dinâmico das funções, que podem ser entendidas, de maneira informal, como mecanismos que transformam ou associam elementos entre dois conjuntos. É justamente essa capacidade de estabelecer correspondência que permite traduzir a ideia de contagem em linguagem matemática rigorosa.

² Dados dois conjuntos A e B , o produto cartesiano de A e B , em símbolos $A \times B$, é o conjunto formado pelos pares ordenados cuja primeira coordenada pertence a A e a segunda a B :

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Como forma de ilustrar as funções enquanto transformações esse fato pensemos em figuras de $\mathbb{R}^2$, ou seja figuras no plano cartesiano. Dada uma figura no plano, nesse caso tomemos um quadrilátero $ABCD$ (Figura 1 a seguir).

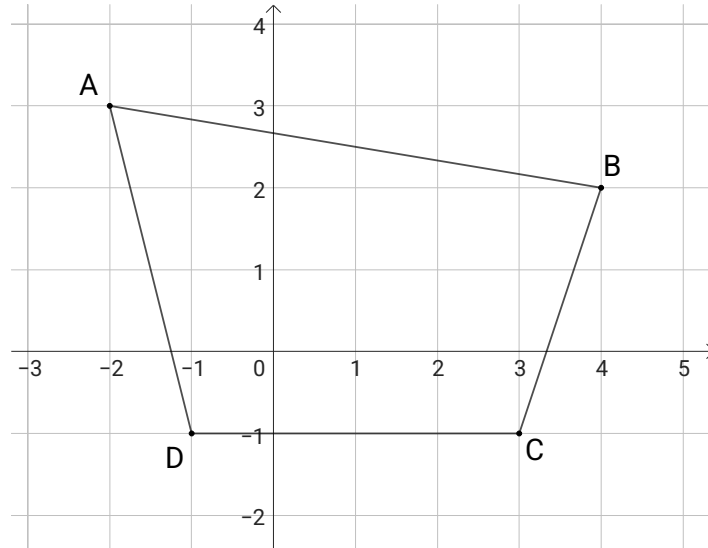


Figura 1 – Quadrilátero $ABCD$ no plano cartesiano

Fonte: o autor

Os pontos do quadrilátero na Figura 1 tem coordenadas $A = (-2, 3)$, $B = (4, 2)$, $C = (3, -1)$ e $D = (-1, -1)$, imaginemos que rotacionemos cada um dos pontos anteriores um ângulo de $\theta = 60^\circ$ em torno da origem. Para formalizarmos essa ideia, vamos analisar essa rotação em relação a um único ponto $P = (x, y)$ (Figura 2 a seguir).

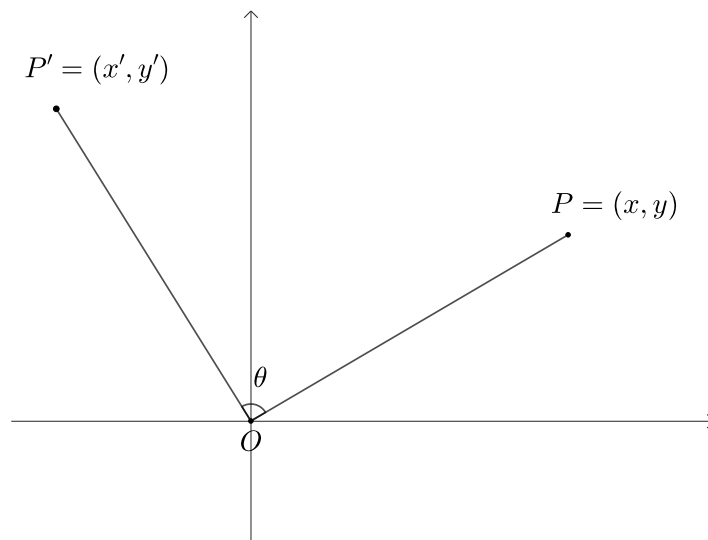


Figura 2 – Rotação de um ponto P em torno da origem

Fonte: o autor

Queremos encontrar as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$, da Figura 2 anterior. Para

isso, devemos primeiro observar que o segmento OP faz um ângulo α com o eixo x . E como podemos observar na Figura 3, as coordenadas de x' e y' são respectivamente $d \cdot \cos(\theta + \alpha)$ e $d \cdot \sin(\theta + \alpha)$, onde d é o comprimento do segmento OP' , além disso temos $P = (d \cdot \cos \alpha, d \cdot \sin \alpha)$:

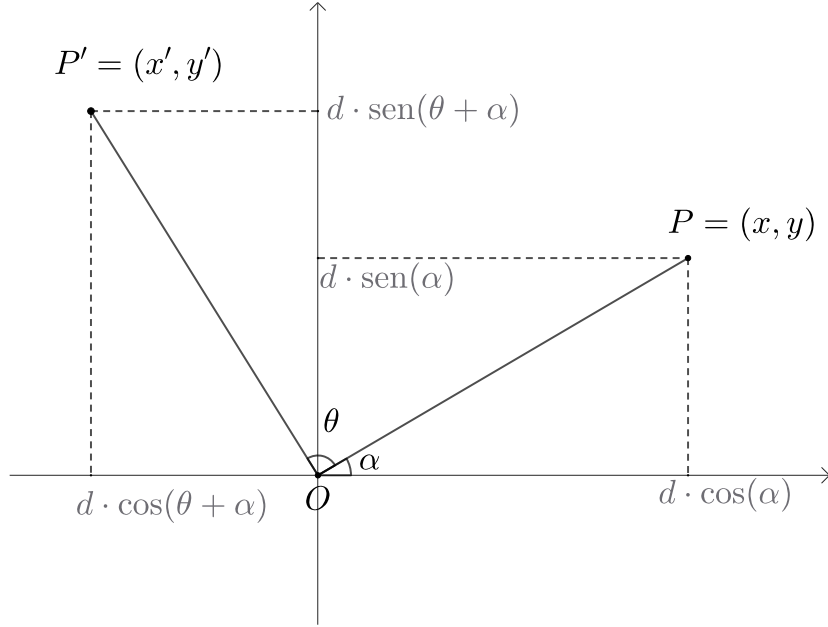


Figura 3 – Coordenadas do ponto P

Fonte: o autor

Utilizando as fórmulas do seno e do cosseno da soma de dois ângulos, obtemos:

$$\begin{aligned} x' &= d \cdot \cos(\theta + \alpha) = d \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta - d \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta; \\ y' &= d \cdot \sin(\theta + \alpha) = d \cdot \cos \alpha \cdot \sin \theta + d \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Agora vamos escrever P' em notação matricial:

$$P' = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \\ x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

A expressão (3.1) nos mostra uma maneira facilitada de calcularmos as coordenadas de um ponto após uma rotação no plano. Com base nela vamos fazer a rotação de $\theta = 60^\circ$ em torno da origem do sistema dos vértices da Figura 1. Para isso primeiro observamos que:

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim devemos calcular os seguintes produtos matriciais:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que obtemos as coordenadas indicadas na Figura 4 a seguir:

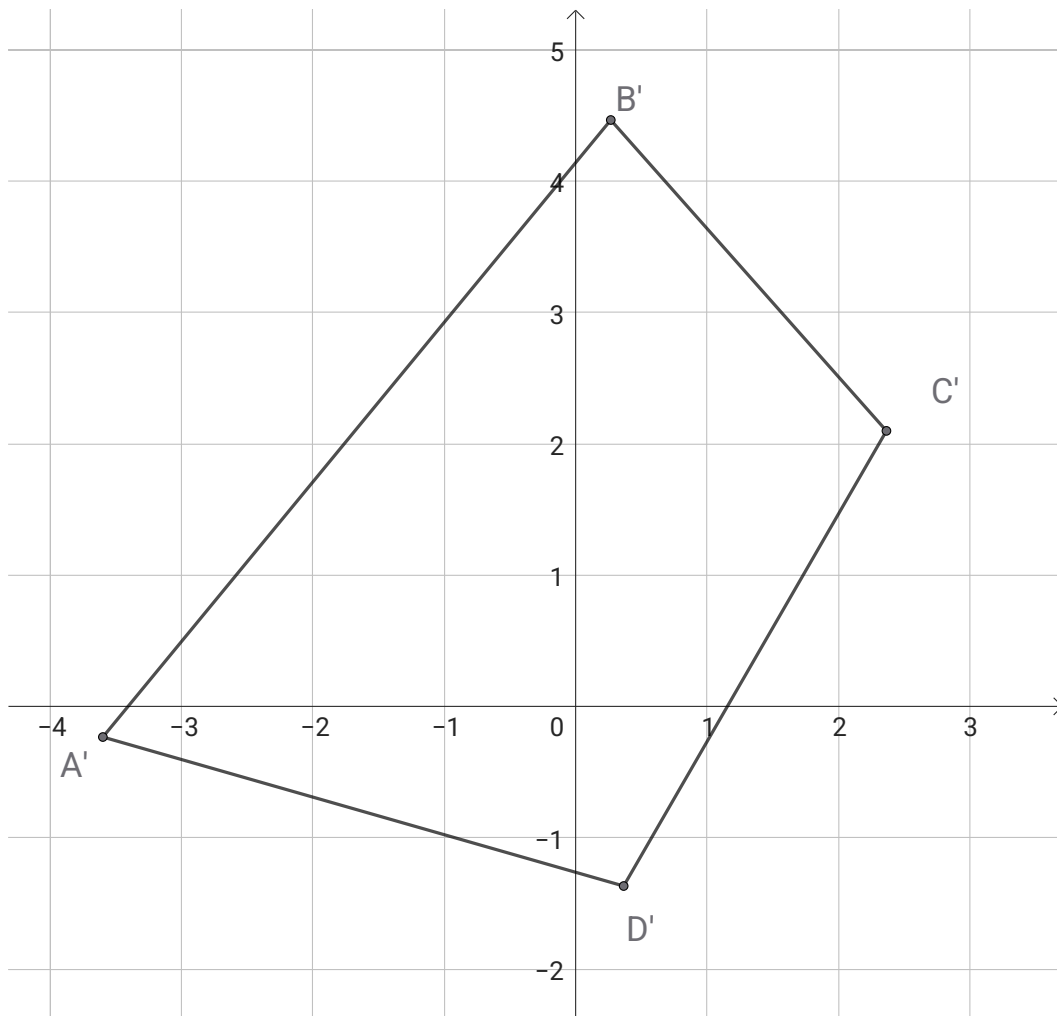


Figura 4 – Rotação do quadrilátero $ABCD$

Fonte: o autor

As rotações são exemplos de transformações entre pontos do plano. Nesse contexto, podemos pensar nelas como funções que associam elementos de $\mathbb{R}^2$ em outros elementos de $\mathbb{R}^2$, pois uma rotação tem uma regra de associação bem clara, e conjuntos origem e final bem definidas. Quando temos um ponto $P = (x, y)$, a rotação de um ângulo θ de $P \in \mathbb{R}^2$ em torno da origem do sistema, entrega o ponto

$$P' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Com base na situação anterior podemos pensar no conceito de função, como transformação de elementos de um conjunto inicial dado, em outros elementos, que no caso da rotação estão no mesmo conjunto, por meio de uma regra previamente definida. No geral, os elementos iniciais (que serão transformados) e finais não necessariamente pre-

cisam ser de um mesmo conjunto. A definição a seguir formaliza o conceito de função, baseada na definição apresentada em (LIMA et al., 2006a, p. 38):

Definição 3.2 (Função). *Sejam X e Y , dois conjuntos. Uma função f de X em Y ($f : X \rightarrow Y$) é uma regra que permite associar a cada elemento $x \in X$ a um único elemento $y = f(x) \in Y$.*

Para uma função $f : X \rightarrow Y$, os conjuntos X e Y são chamados respectivamente de domínio e contradomínio de f . O elemento $f(x) \in Y$, associado a $x \in X$ por meio de f é chamado de imagem de x por f . Podemos então reescrever a rotação de um ângulo θ de um ponto P em torno da origem do sistema, como sendo a função $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$T_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Dessa forma, ao estabelecer uma relação entre os elementos de dois conjuntos por meio de regras bem definidas, o conceito de função se revela como uma das ferramentas mais fundamentais da Matemática. Seja no contexto de conjuntos finitos ou infinitos, compreender como os elementos de um conjunto são associados a elementos de outro permite uma análise precisa da estrutura dessas relações. A seguir, aprofundaremos essa análise ao distinguir diferentes tipos de funções, começando pelas funções injetivas.

3.2.2 Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Ao explorarmos as funções como ferramentas fundamentais para estabelecer correspondências entre conjuntos, torna-se essencial compreender as diferentes formas que essas correspondências podem assumir. Nem toda função associa os elementos do domínio e do contradomínio da mesma maneira: algumas podem repetir imagens, outras podem deixar elementos do contradomínio sem imagem, enquanto outras realizam uma associação completa e sem repetições. Para analisar com rigor essas distinções, recordaremos os três tipos fundamentais de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, cujas propriedades são centrais na comparação entre conjuntos, especialmente no contexto da cardinalidade de conjuntos infinitos.

Funções Injetivas

As funções injetivas são aquelas para as quais diferentes elementos no domínio tem diferentes imagens. Um exemplo desse tipo de função é a função fatorial, que para

$n \in \mathbb{N}$, associa o número $n!$ (n fatorial), definida da seguinte forma:

$$n! = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 1 \\ n(n-1)! & , \text{ se } n \geq 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, e supondo que $n > m$, ou seja $n = m + a$, temos $n! \neq m!$, uma vez que de acordo com (3.3):

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots (n-(a-1))m!.$$

Logo, diferentes naturais têm diferentes fatoriais, o que caracteriza a função fatorial como uma função injetiva. Quando escolhemos considerar $0 \in \mathbb{N}$, e definimos $0! = 1$, a função fatorial perde sua injetividade. O conceito de função injetiva pode ser formalizado a partir da seguinte definição:

Definição 3.3 (Injetividade). *Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, dizemos que f é injetiva (injetora), se dados $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

A partir da Definição 3.3, temos f , uma função de X e Y , injetiva se para $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \quad (3.4)$$

A implicação (3.4) pode ser vista a partir de sua contrapositiva. O conceito de contraposição está ligado à ideia de falar de duas maneiras distintas a mesma coisa. Em termos gerais, o conceito de contraposição afirma que as implicações $p \Rightarrow q$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$ tem o mesmo valor lógico, ou seja se uma é verdadeira a outra também é, o mesmo valendo para o caso de uma ser falsa³. De forma que temos uma maneira de verificarmos que dada função é injetiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad (3.5)$$

Ou em termos informais, se as imagens de dois elementos no domínio de uma função injetiva são iguais, então os dois elementos são iguais.

Funções Sobrejetivas

Considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida pela fórmula:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

³ Em Moraes Filho (2013, p. 283) e Ávila (2006, p. 7), são apresentados o conceito de contraposição e como o mesmo pode ser usado em demonstrações.

Essa regra alterna entre inteiros positivos e negativos, incluindo o zero, produzindo uma lista completa dos elementos de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$. Os primeiros valores podem ser organizados na Tabela 1. Onde podemos observar que todos os inteiros aparecem como imagem de algum natural. Nenhum elemento de $\mathbb{Z}$ fica fora do alcance da função.

$n \in \mathbb{N}$	$f(n) \in \mathbb{Z}$
1	0
2	1
3	-1
4	2
5	-2
6	3
7	-3

Tabela 1 – Sobrejeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

Fonte: o autor

Esse é um exemplo de função *sobrejetiva*, isto é, uma função em que cada elemento do contradomínio é imagem de ao menos um elemento do domínio. Em termos formais, dizemos que $f : A \rightarrow B$ é sobrejetiva se, para todo $b \in B$, existe pelo menos um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Nesse caso, o conjunto B está completamente “preenchido” pelas imagens produzidas por f , sem lacunas. Na sequência temos a formalização da sobrejetividade de funções:

Definição 3.4 (Sobrejetividade). *Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada de sobrejetiva, quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Compreendidas as ideias de injeção e sobrejeção, podemos agora considerar funções que reúnem ambas as características. São essas funções, chamadas bijetivas, que nos permitem estabelecer uma correspondência perfeita entre os elementos de dois conjuntos, o que será essencial na comparação de suas cardinalidades.

Funções Bijetivas

Uma função é chamada *bijetiva* quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Isso significa que cada elemento do contradomínio é atingido por exatamente um elemento do domínio: não há repetições nem omissões. Essa característica torna as funções bijetivas especialmente importantes na comparação entre conjuntos, pois elas estabelecem uma correspondência perfeita entre os elementos dos dois conjuntos envolvidos.

Considere, por exemplo, a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\text{pares}}$, que associa a cada número natural n o número $f(n) = 2n$. Essa função é injetiva, pois valores diferentes de n produzem imagens diferentes, e também é sobrejetiva sobre o conjunto dos pares positivos, já que todo número par pode ser escrito como $2n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Temos, portanto, uma bijeção entre os naturais e os números pares.

$n \in \mathbb{N}$	$f(n) = 2n \in \mathbb{N}_{\text{pares}}$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tabela 2 – Exemplo de uma bijeção

Fonte: o autor

Esse exemplo mostra que, apesar de os pares parecerem “metade” dos naturais, é possível emparelhar cada natural com exatamente um número par, e vice-versa. Isso indica que os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, ou seja, o mesmo tamanho no sentido da teoria dos conjuntos. Esse tipo de equivalência, mediado por uma bijeção, é a base da definição moderna de conjuntos enumeráveis. As bijeções são chamadas também de correspondência biunívoca entre dois conjuntos (ou um para um).

No contexto dos infinitos enumeráveis, as bijeções têm papel central: são elas que permitem afirmar que um conjunto infinito pode ser contado, desde que haja uma maneira de listar seus elementos em uma sequência ordenada, sem repetições nem omissões. Identificar ou construir uma bijeção com os naturais é, portanto, a chave para reconhecer um conjunto como enumerável.

3.2.3 Noções de Cardinalidade

O conceito de cardinalidade de um conjunto está ligado à contagem de elementos do mesmo. Quando realizamos uma contagem dos elementos de um conjunto finito A , estamos criando uma bijeção $f : A \rightarrow I_n$, onde $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Já para conjuntos infinitos, a cardinalidade do mesmo pode ser associado à sua comparação com algum conjunto infinito conhecido, por exemplo $\mathbb{N}$. Vamos aprofundar a contagem de elementos de um conjunto finito, bem como os conceito de finito e infinito e do próprio conjunto $\mathbb{N}$ na próxima seção. Por enquanto nos ateremos a definir quando dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, ou seja o mesmo número de elementos.

Em termos gerais, dados dois conjuntos X e Y , dizemos que ambos têm a mesma cardinalidade (ou mesmo número cardinal), quando existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$. Formalizaremos esse conceito a partir da seguinte definição.

Definição 3.5. *Dados dois conjuntos X e Y , se existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$, dizemos X e Y têm a mesma cardinalidade.*

Essa definição pode parecer simples à primeira vista, mas produz consequências surpreendentes, especialmente no contexto de conjuntos infinitos. Por exemplo, é possível estabelecer uma bijeção entre dois segmentos de reta, ainda que tenham comprimentos diferentes, apenas traçando retas entre pontos correspondentes por uma construção geométrica. Isso indica que, do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, qualquer segmento de reta contém a mesma “quantidade” de pontos que outro.

Outro exemplo marcante é a uma função, que estudaremos posteriormente, que define uma bijeção entre o conjunto dos pares ordenados de naturais $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e o próprio conjunto $\mathbb{N}$. Embora o produto cartesiano pareça ter uma estrutura “maior”, ele possui exatamente a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$. Esses exemplos evidenciam como a noção de cardinalidade, sustentada pelo conceito de bijeção, permite comparar o tamanho de conjuntos infinitos de maneira precisa e não intuitiva.

Além dos exemplos citados, os conjuntos (a, b) e $(0, 1)$, que são intervalos abertos de $\mathbb{R}$, têm a mesma cardinalidade. Embora à primeira vista $(0, 1)$ pareça menor quando tomamos, por exemplo, um intervalo como $(-10^6, 10^6)$, onde $a = -10^6$ e $b = 10^6$, é possível construir uma bijeção entre esses dois intervalos. Uma função que realiza essa correspondência é dada por: $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$, que associa a cada número x do intervalo aberto (a, b) um número no intervalo $(0, 1)$ ⁴. Essa bijeção mostra que $(0, 1)$ e (a, b) têm a mesma cardinalidade, ou seja, o mesmo “tamanho” do ponto de vista da teoria dos

⁴ A demonstração da bijetividade da função $f : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ definida por $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$, não é essencial para o capítulo em si, no entanto a análise dessa bijeção nos fornece é um bom exemplo de como conjuntos que tem tamanho aparentemente diferentes, podem ser colocados em correspondência um para um. O leitor interessado na demonstração deve observar que dados $x_1, x_2 \in (a, b)$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, temos:

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a} \Rightarrow x_1 - a = x_2 - a \Rightarrow x_1 = x_2.$$

De modo que f é injetiva. Para provarmos a sobrejetividade, dado um $y \in (0, 1)$, precisamos encontrar $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$, ou seja:

$$\frac{x - a}{b - a} = y \Rightarrow x - a = y(b - a) \Rightarrow x = a + y(b - a)$$

Como $y \in (0, 1)$, temos: $y > 0 \Rightarrow x > a$ e $y < 1 \Rightarrow x < b$. Ver, de modo que $x \in (a, b)$. Verificando assim a sobrejetividade de f . Uma função semelhante a essa, utilizada como referência para a construção apresentada, é discutida em <<https://math.stackexchange.com/q/124245>> (acesso em 12 jul. 2025).

conjuntos. Resultados como esse reforça a ideia de que, no contexto do infinito, noções intuitivas como extensão ou medida não são adequadas para comparar a quantidade de elementos de um conjunto.

Uma bijeção entre dois segmentos de diferentes comprimentos

Um exemplo interessante de conjuntos que tem a mesma cardinalidade são dois segmentos de reta. Dois segmentos AB e CD , não importando o tamanho de ambos, sempre terão a mesma cardinalidade. Ilustraremos esse fato criando uma bijeção entre os elementos (pontos) de AB e CD . Para isso vamos fazer a seguinte construção, tomando AB e CD em retas paralelas distintas r e s , tracemos as retas AC e BD e finalmente tomemos o pontos P interseção das retas AC e BD (Figura 5).

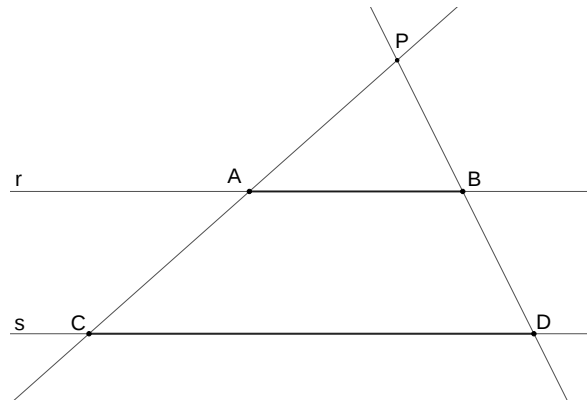


Figura 5 – Segmentos AB e CD

Fonte: o autor

Dado um ponto X no segmento AB , para construirmos uma bijeção f que associa X a um único ponto $f(X)$ em CD , tracemos a reta PX , o ponto Y , interseção das retas PX e CD será a imagem de X pela bijeção f (Figura 6).

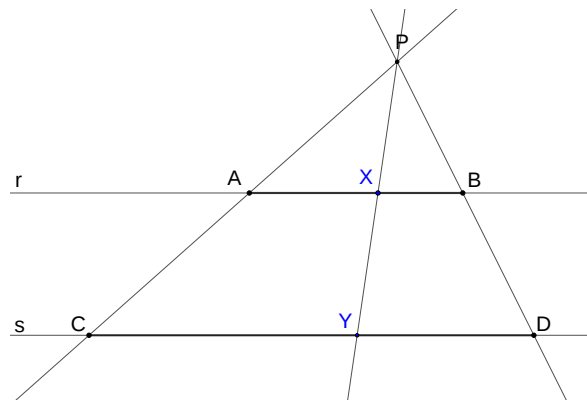


Figura 6 – Bijeção entre AB e CD

Fonte: o autor

Note para cada ponto X do segmento AB , podemos traçar uma reta PX , que terá uma única interseção com a reta CD . Podemos observar que os tamanhos dos segmentos é irrelevante para a construção em si, indicando que todo segmento de reta (visto como um conjunto de pontos) tem um mesmo número cardinal, ou seja uma mesma quantidade de elementos. Na verdade o número de elementos de todo segmento de reta é igual ao número de elementos de uma reta, esse fato será trabalhado no Capítulo 4.

3.3 Números Naturais

Nessa seção vamos explorar um conceito fundamental no estudo dos conjuntos infinitos: a enumerabilidade. Intuitivamente, dizemos que um conjunto A é enumerável quando seus elementos podem ser organizados em uma lista, de modo que cada elemento da lista ocupe uma posição identificada por um número natural. Formalmente, isso equivale a dizer que existe uma função bijetiva $a : \mathbb{N} \rightarrow A$, associando cada número natural a um único elemento do conjunto A , e vice-versa.

Essa ideia de “colocar em uma lista” é essencial para compararmos o tamanho de conjuntos infinitos. Se conseguirmos construir tal função, dizemos que A é um conjunto enumerável (ou contável). Um exemplo interessante é o subconjunto $\mathbb{Q}^+$ dos números racionais positivos. Embora $\mathbb{Q}^+$ seja infinito e denso na reta real, é possível demonstrar que ele é enumerável ao construirmos explicitamente uma função bijetiva $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$.

Uma maneira engenhosa de listar os elementos de $\mathbb{Q}^+$ consiste na construção que apresentamos a seguir:

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \dots \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \searrow & \\
 \frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \dots \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 \frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \searrow & \\
 \frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array} \tag{3.6}$$

Todos os números da forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ aparecerão na estrutura (3.6). Ao percorrer as frações seguindo o sentido das setas teremos uma lista desses elementos. De modo

que podemos pensar em uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$, que associa a cada natural n o n -ésimo elemento da ordenação proposta pelo sentido da setas em (3.6). Dessa forma verificamos que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável. Nessa seção vamos explorar os números naturais e a ideia de enumerabilidade.

3.3.1 Axiomas de Peano

A intuição que temos sobre os números naturais provém da contagem, mas uma construção matemática rigorosa exige a formalização das propriedades que caracterizam esse conjunto. Essa formalização pode ser feita por meio dos chamados *Axiomas de Peano*, que descrevem o comportamento essencial dos números naturais e fornecem uma base sólida para o desenvolvimento da Aritmética.

Foi Giuseppe Peano quem propôs, no final do século XIX, um sistema axiomático baseado em três noções primitivas: o número zero, o conjunto dos naturais e a operação de sucessor. A partir desses elementos, ele estabeleceu cinco axiomas fundamentais (RUSSELL, 2018; NAGEL; NEWMAN, 2001, p. 377, p. 91):

1. 0 é um número natural;
2. o sucessor de um número natural é também um número natural;
3. 0 não é sucessor de nenhum número natural;
4. se dois números naturais têm o mesmo sucessor, então são iguais;
5. se um subconjunto A dos naturais contém o 0 e é fechado por sucessão, então contém todos os naturais.

O quinto Axioma, conhecido como *Princípio da Indução Matemática*, é uma das ferramentas mais importantes da Aritmética. Ele permite demonstrar que uma propriedade vale para todos os naturais, desde que se verifique sua validade para o primeiro número natural, e que, sendo válida para um número n , continue válida para o seu sucessor.

Com o tempo, diferentes versões dessa axiomática foram formuladas, especialmente em linguagem de Teoria dos Conjuntos. Uma apresentação moderna dos axiomas de Peano aparece, por exemplo, em Lima (2013, p. 34), onde se assume a existência de um conjunto $\mathbb{N}$ e de uma função sucessora $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, e se adotam as seguintes condições:

1. A função s é injetiva: se $s(m) = s(n)$, então $m = n$;
2. Existe um único elemento de $\mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum outro — denotado por 1;

3. (Princípio da indução) Se $X \subset \mathbb{N}$, com $1 \in X$ e $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Essa formulação adota o 1 como ponto de partida, ao contrário da axiomática original de Peano, que parte do zero. Embora essa distinção seja irrelevante do ponto de vista estrutural, ela levanta uma discussão interessante sobre qual número deve iniciar a construção dos naturais. Autores como Leibniz, Mill e H. Grassmann defenderam a exclusão do zero como número natural (FREGE, 2021, p. 35).

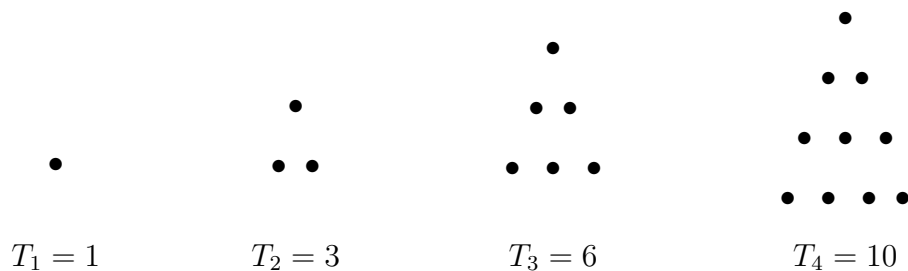
Para efeito de uniformização, e adotando a abordagem proposta por Lima (2013), ao não considerar o 0, um número natural, podemos reescrever os axiomas, de forma adaptada, da seguinte forma:

1. $1 \in \mathbb{N}$;
2. Se $n \in \mathbb{N}$, então $S(n) \in \mathbb{N}$;
3. Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(n) = 1$;
4. Se $S(n) = S(m)$, então $n = m$;
5. Se $A \subseteq \mathbb{N}$ contém 1, e sempre que contém n , também contém $S(n)$, então $A = \mathbb{N}$.

A apresentação acima, em linguagem mais próxima da Teoria dos Conjuntos, destaca a função sucessora como um dos elementos centrais da construção dos naturais. O quinto axioma, que reafirma o princípio da indução, será aplicado a seguir para demonstrarmos um resultado interessante envolvendo os chamados *números triangulares*.

Números triangulares

Os números triangulares são assim chamados porque podem ser representados geometricamente na forma de um triângulo formado. Por exemplo, os quatro primeiros números triangulares podem ser visualizados da seguinte maneira:



A cada novo número triangular, acrescentamos uma nova linha com um ponto a mais do que a anterior, formando uma figura triangular. O n -ésimo número triangular, que

denotaremos por T_n , é a soma dos n primeiros números naturais:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Essa soma pode ser expressa pela fórmula:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.7)$$

A seguir, demonstraremos essa fórmula usando o princípio da indução matemática.

Proposição 3.1. *Para todo número natural n , vale:*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

Base da indução: Para $n = 1$, temos:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

portanto a fórmula é válida para $n = 1$.

Hipótese da indução: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}$, valha:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (3.8)$$

Passo da indução: Mostremos que então:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Somando $k+1$ a ambos os lados da igualdade (3.8), obtemos:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Portanto, a fórmula vale para $k+1$. Pelo princípio da indução, ela é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Demonstrada da fórmula (3.7), temos assim uma forma de calcular o n -ésimo número triangular.

Os axiomas de Peano não apenas caracterizam o conjunto $\mathbb{N}$, como também fundamentam todas as construções e provas envolvendo os números naturais. A partir deles, pode-se desenvolver toda a aritmética elementar, definir as operações fundamentais (adição, multiplicação) e estabelecer suas propriedades com rigor lógico.

3.3.2 Sequências Numéricas

Uma exemplo de sequência

Dada a função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Vamos calcular alguns valores para $a(n)$:

$n \in \mathbb{N}$	$a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828

Tabela 3 – Alguns valores de $a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Fonte: o autor

Ao observarmos os valores na Tabela 4, percebemos que mesmo quando tomamos grandes valores para n , $a(n)$ é um valor menor do que 3. Vamos provar isso:

Proposição 3.2. *Temos $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Da Análise Combinatória, sabemos que

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$. E assim temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}. \quad (3.9)$$

Além disso, vamos observar o valor das parcelas $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ no segundo membro de (3.9), para $k > 1$:

A partir das informações contidas na Tabela 4 faremos a seguinte generalização:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

A demonstração da desigualdade $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \frac{1}{2^{k-1}}$ pode ser feita com **indução matemática**. E assim, temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (3.10)$$

k	$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$
2	$\binom{n}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{2! \cdot n} = \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!} < \frac{1}{2}$
3	$\binom{n}{3} \frac{1}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{3! \cdot n^2} = \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$
4	$\binom{n}{4} \frac{1}{n^4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4! \cdot n^3} = \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) < \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$

Tabela 4 – Alguns valores de $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

Fonte: o autor

No segundo membro da desigualdade (3.10) temos a soma dos termos de uma progressão geométrica⁵ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, de maneira que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Definindo seqüências

Uma das formas mais acessíveis de compreender os conjuntos enumeráveis é por meio da noção de seqüência. Em termos formais, uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Ou seja, uma seqüência é uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow A$, na qual cada número natural n é associado a um elemento $a(n) = a_n$ do conjunto A . Muitas vezes denotamos a seqüência por (a_n) ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente listando seus termos:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots).$$

O exemplo de função com qual iniciamos a subseção é assim uma seqüência. E nesse caso específico, todos os termos da seqüência pertencem a $A = \{x \in \mathbb{Q}; 2 \leq x \leq 3\}$. Como os termos da seqüência

$$\left(a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right),$$

estão todos contido em um intervalo, dizemos que a seqüência é limitada.

A linguagem das seqüências está intimamente ligada à noção de enumerabilidade. Quando organizamos os elementos de um conjunto A em ordem, como em uma seqüência sem repetições nem omissões, estabelecemos uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e A . Assim, dizer

⁵ No próximos capítulos exploraremos mais somas de termos como essa.

que um conjunto é enumerável equivale a afirmar que seus elementos podem ser dispostos em uma sequência, o que traduz sua estrutura segundo o infinito mais básico e familiar: o dos números naturais.

Mesmo conjuntos definidos por critérios menos numéricos podem ser organizados em sequência. É o caso, por exemplo, dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ ou dos números racionais positivos (como vimos anteriormente). Esses conjuntos podem ser listados elemento a elemento, desde que exista uma regra bem definida que permita associá-los, de forma ordenada, aos números naturais. Um exemplo importante é o do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ⁶. Existe uma bijeção entre esse conjunto e $\mathbb{N}$, e uma forma possível de definí-la é por meio da seguinte expressão:

$$\pi(a, b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a,$$

em que se considera $a, b \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Essa fórmula associa a cada par ordenado de números naturais um único número natural, garantindo uma correspondência biunívoca⁷. Uma apresentação detalhada dessa construção pode ser encontrada em Lisi (2007). A seguir, apresentamos uma tabela que ilustra visualmente essa correspondência, em que cada par (a, b) é posicionado segundo o valor de $\pi(a, b)$.

$a \mid b$	0	1	2	3	4	...
0	0	2	5	9	14	...
1	1	4	8	13	...	
2	3	7	12	...		
3	6	11	...			
4	10	...				
$\vdots$	$\vdots$					

Tabela 5 – Tabela ilustrando uma bijeção entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$

Fonte: o autor

Listando os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

A tabela anterior nos oferece uma maneira funcional de mapear pares ordenados em números naturais. No entanto, também é possível construir essa correspondência de forma visual e intuitiva, percorrendo uma grade de pares (a, b) segundo diagonais de soma constante. Esse método alternativo nos ajuda a visualizar como se dá a listagem completa dos elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sem repetições.

⁶ Nesse caso consideramos $0 \in \mathbb{N}$ que é uma prática comum sobretudo em computação.

⁷ Outros exemplos de bijeções $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ podem ser encontradas em Enderton (1977, p. 133).

Organizamos os pares ordenados de números naturais (com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) em uma grade:

$$\begin{array}{cccccc}
 (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \tag{3.11}$$

Agora percorremos os pares seguindo o sentido das setas, ou seja percorremos os pares seguindo diagonais de soma constante $a + b = k$, para pares (a, b) , em ordem crescente de k

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), \dots$$

Dessa forma, obtemos uma sequência que lista todos os pares de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sem repetições, o que estabelece uma bijeção com $\mathbb{N}$. Cada posição na sequência pode ser associada a um número natural n , definindo uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Essa construção reforça que, os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade $\mathbb{N}$. Quando reformulamos a maneira como percorremos a estrutura 3.6, da forma a seguir:

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 \frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \tag{3.12}$$

Estamos também criando uma correspondência entre os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^+$, que é uma forma clássica de construir o conjunto $\mathbb{Q}^+$, usando $\mathbb{N}$ e o conceito de par ordenado.

Esses exemplos mostram que, para além de sua formalização como função, a ideia de sequência é uma ferramenta conceitual bastante versátil: ela nos permite capturar a estrutura de conjuntos infinitos por meio da linguagem da contagem. Ao fazer isso, aproxima o abstrato do concreto e torna possível comparar infinitos distintos com precisão matemática.

3.4 Conjuntos Enumeráveis

Estamos prontos assim para uma definição mais formal de enumerabilidade, que apresentaremos a seguir:

Definição 3.6. *Dizemos que um conjunto A é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.*

Em outras palavras, quando um conjunto é enumerável pode ser colocado em correspondência biúnivoca (um para um) com o conjunto dos números naturais, ou com alguma de suas partes próprias.

3.4.1 Exemplos básicos de conjuntos enumeráveis

Pares e ímpares

O conjunto dos números pares $\mathcal{P}$ e o conjunto dos números ímpares $\mathcal{I}$ são enumeráveis. Verificamos esse fato tomando a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}$ definida por $f(n) = 2n$ e a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}$ definida por $g(n) = 2n - 1$, nos dão exemplos de correspondências biunívocas entre $\mathbb{N}$ e os conjuntos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$.

O conjunto $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números inteiros é enumerável. Uma maneira de verificarmos essa afirmação é observarmos a construção a seguir:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
 \dots, & 7, & 5, & 4, & 1, & 2, & 4, & 6, & \dots
 \end{array}$$

Essa organização alterna entre números inteiros positivos e negativos, intercalando-os de forma a cobrir todo o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Podemos formalizar essa ideia por meio de uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida anteriormente, da seguinte maneira:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Essa função associa a cada número natural n um número inteiro, alternando entre valores positivos e negativos conforme o par ou ímpar de n . Como essa associação é biunívoca, cada natural gera exatamente um inteiro, e cada inteiro é atingido por algum natural, temos uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Assim, concluímos que o conjunto dos inteiros é enumerável.

3.4.2 Os Números Racionais

De maneira análoga à construção (3.12), podemos verificar a enumerabilidade de $\mathbb{Q}^-$ substituindo cada uma das frações em (3.12) por seu inverso aditivo, gerando assim uma lista ordenada contendo todos os racionais negativos e, portanto, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^-$. A enumerabilidade do conjunto dos números racionais decorre do fato de que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ e dos resultados apresentados nos Teoremas 3.3 e 3.4 a seguir. Esses teoremas, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em Figueiredo (2011, p. 14) e Hrbacek e Jech (1978, p. 75).

Teorema 3.3.

- (i) *A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.*
- (ii) *A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração.

- (i) Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto finito com n elementos, e $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ um conjunto enumerável, queremos provar que $A \cup B$ também é enumerável. De fato, podemos construir uma correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1, & a_2, & \dots, & a_n, & b_1, & b_2, & \dots & & \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\ 1, & 2, & \dots, & n, & n+1, & n+2, & \dots & & \end{array}$$

(ii) Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ dois conjuntos enumeráveis, $A \cup B$ é enumerável, verificamos isso observando a correspondência biúnivoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ definida na estrutura a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1, & b_1, & a_2, & b_2 & \dots, & a_n, & b_n, \dots \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow \\
 1, & 2, & 3, & 4, & \dots & 2n-1, & 2n, \dots
 \end{array}$$

■

Além dos resultados enunciados no Teorema 3.3, apresentamos o Teorema 3.4 a seguir, cuja demonstração foi inspirada no resultado apresentado em Lima (2009, p. 51):

Teorema 3.4. *A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Seja $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$, $\dots$, $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$, $\dots$, uma lista enumerável de conjuntos enumeráveis. Podemos organizar os elementos de cada uma dos conjuntos como no quadro a seguir:

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots \\
 a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots \\
 a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots &
 \end{array}$$

Seguindo um procedimento similar ao usado para demonstrarmos que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável, verificamos que a união é enumerável. ■

Com base nos Teoremas 3.3 e 3.4, podemos concluir que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável. De fato, como já mostramos que $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Q}^-$ são enumeráveis, e como o conjunto $\{0\}$ é finito, a união $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ consiste na união de três conjuntos enumeráveis (sendo um deles finito), o que, pelos resultados apresentados, garante que $\mathbb{Q}$ também é enumerável. Assim, é possível listar todos os números racionais (positivos, negativos e o zero) em uma única sequência infinita, sem repetições e cobrindo todos os elementos de $\mathbb{Q}$. Essa constatação reforça o poder do conceito de bijeção como ferramenta para comparar o tamanho de conjuntos infinitos.

3.4.3 Produto Cartesiano de dois Conjuntos Enumeráveis

A noção de produto cartesiano entre conjuntos é central em várias construções matemáticas. Um exemplo particularmente importante é a construção dos números racionais $\mathbb{Q}$, que pode ser pensada como o conjunto de pares ordenados (a, b) , com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, sujeitos a uma relação de equivalência. Isso evidencia a utilidade do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, o qual surge como etapa intermediária na construção de $\mathbb{Q}$. Para assegurar que tal conjunto também é enumerável, é necessário demonstrar que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis continua sendo enumerável. A seguir, formalizamos esse resultado. Tanto o teorema quanto sua demonstração foram inspirados em Lima (2009, p. 50)

Teorema 3.5. *Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano $A \times B$ também é enumerável.*

Demonstração. Como A e B são enumeráveis, existem funções bijetoras $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow B$. Consideremos a função:

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times B, \quad h(m, n) = (f(m), g(n)).$$

Essa função é bem definida e sua imagem é $A \times B$, pois f e g são sobrejetoras sobre suas imagens. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, basta mostrar que a imagem de h , que é $A \times B$, também é enumerável. De fato, sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pode ser enumerado usando, por exemplo, a enumeração por diagonais:

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), \dots$$

Portanto, podemos compor a enumeração de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com a função h , obtendo uma sequência enumerando os pares $(f(m), g(n)) \in A \times B$, cobrindo todos os elementos. Logo, $A \times B$ é enumerável. ■

Encerramos esta seção ressaltando que os exemplos apresentados até aqui são apenas uma amostra da ampla variedade de conjuntos enumeráveis presentes na Matemática e em outros campos do conhecimento. Por exemplo, o conjunto dos polinômios com coeficientes racionais, denotado por $\mathbb{Q}[x]$, é enumerável, pois cada polinômio possui grau finito e coeficientes em $\mathbb{Q}$, que é um conjunto enumerável. Ao fixar um grau n , o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n é enumerável, uma vez que podemos pensar nele como subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{Q}^{n+1}$, e a união enumerável desses conjuntos fornece a enumerabilidade de $\mathbb{Q}[x]$. Outro exemplo notável vem da Computação Teórica: o conjunto das máquinas de Turing (ou, de forma equivalente, dos programas de computador possíveis) é enumerável, já que toda máquina pode ser codificada como uma sequência finita de símbolos sobre um alfabeto finito.

3.5 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, exploramos a noção de conjuntos enumeráveis como uma primeira aproximação formal da ideia de infinitude matemática. Vimos que, embora infinitos, conjuntos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e mesmo estruturas mais elaboradas como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}[x]$, podem ser colocados em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$. Esse tipo de infinito, por vezes chamado de “infinito enumerável” ou “contável”, preserva uma certa intuitividade da contagem e da listagem de elementos.

Apresentamos também ferramentas formais importantes, como os axiomas de Peano, o Princípio da Indução Matemática, e os teoremas sobre a preservação da enumerabilidade em uniões, produtos e subconjuntos. Tais ferramentas reforçam a estrutura Lógica sobre a qual se fundamenta a noção de contagem no infinito.

Apesar da diversidade dos exemplos discutidos, todos os conjuntos considerados até aqui compartilham a característica comum de poderem ser listados em uma sequência, ainda que infinita. No entanto, esse não é o único tipo de infinito. A partir do próximo capítulo, investigaremos um novo patamar: os conjuntos que, embora infinitos, não podem ser enumerados. São os chamados conjuntos não enumeráveis, cuja existência desafia ainda mais nossa intuição e amplia significativamente os horizontes da Matemática. O exemplo mais notável e surpreendente desse tipo de conjunto é o conjunto dos números reais.

4 Infinitos Não Enumeráveis

4.1 Introdução: Números Irracionais

O conjunto dos números racionais positivos $\mathbb{Q}^+$, representado por frações da forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}^1$, foi por muito tempo considerado suficiente para expressar todas as medidas e quantidades contínuas. Isso se deve, em parte, ao fato de que $\mathbb{Q}^+$ é denso na reta real, ou seja, entre dois números racionais distintos sempre existe outro número racional (EVES, 2004, p. 662). Esse resultado é sistematizado no teorema a seguir, cuja formulação e demonstração foram inspiradas na apresentação de (LIMA, 2009, p. 71).

Teorema 4.1. *Sejam $r, s \in \mathbb{Q}^+$ com $r < s$. Então, existe um número racional $q \in \mathbb{Q}^+$ tal que*

$$r < q < s.$$

Demonstração. Sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Consideremos a média aritmética entre r e s :

$$q = \frac{r + s}{2} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2}.$$

Como a soma e o produto de números racionais são racionais, $q \in \mathbb{Q}$. Vamos verificar que $q > r$ e que $q < s$. De fato, como $r < s$, temos:

$$r + r < r + s \Rightarrow r < \frac{r + s}{2}, \quad r + s < s + s \Rightarrow \frac{r + s}{2} < s,$$

e como por definição temos $q = \frac{r + s}{2}$, conclui-se que $r < q < s$, como queríamos. Assim, provamos que existe um número racional entre quaisquer dois números racionais distintos. ■

Foi provavelmente Pitágoras e seus discípulos que descobriram a existência de segmentos cuja medida não está no conjunto $\mathbb{Q}^+$, ou seja, medidas que não podem ser expressas como uma fração $\frac{p}{q}$, com p e q naturais. Um exemplo clássico disso é o número $\sqrt{2}$. Para demonstrarmos que de fato $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$, vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional, e portanto pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$, e p e q não tem divisor em comum. Assim

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2. \quad (4.1)$$

¹ Não estamos considerando $0 \in \mathbb{N}$.

A segunda igualdade da implicação em (4.1) nos permite concluir que p^2 é um número par, e conseqüentemente que p também é par. De fato, por contraposição, se p for ímpar, então $p = 2n + 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$, assim teríamos $p^2 = 2(2n^2 + n) + 1$, e dessa forma p^2 também seria ímpar. Logo, p é da forma $2r$ para algum $r \in \mathbb{N}$, de modo que

$$p^2 = 4r^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2. \quad (4.2)$$

A partir da última igualdade na sequência de implicações em (4.2), é possível concluir que q também é número par, contradizendo a suposição inicial de que p e q são primos entre si. Essa contradição provém inicialmente da hipótese de que $\sqrt{2}$ é número racional, logo podemos concluir que $\sqrt{2}$ não é racional.

Usando um argumento análogo, podemos verificar que toda raiz de um número natural α que não é um quadrado perfeito, isto é, $\sqrt{\alpha}$, também não pode ser escrita em forma de fração, de modo a ser possível encontrar um variedade de outros números que também não são racionais. Os números que não podem ser expressos como frações são chamados de irracionais, e o conjunto desses números é representado por $\mathbb{I}$. Uma pergunta que pode surgir em relação ao conjunto $\mathbb{I}$ é: seria possível listar todos os seus elementos, criando, assim, uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$? Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{I}$ é enumerável? A resposta para essa pergunta é não. Um caminho para constatar isso consiste em analisarmos a cardinalidade do conjunto dos reais $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, e percebermos que não é possível construir uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, e de posse disso do Teorema 3.3, visto no capítulo anterior, concluir que o conjunto dos números irracionais não pode ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais. Surge, assim, um exemplo de conjunto não enumerável. Neste capítulo, exploraremos alguns exemplos de conjuntos não enumeráveis. Além disso, faremos a prova de que, de fato, os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$ não são enumeráveis.

4.2 Exemplos de conjuntos não enumeráveis

Após a apresentação dos conjuntos enumeráveis no capítulo anterior, passamos agora à investigação de conjuntos cuja cardinalidade é estritamente maior do que a dos números naturais. Esses conjuntos são chamados de *não enumeráveis*, ou seja, não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus elementos e os elementos de $\mathbb{N}$. A existência de conjuntos não enumeráveis foi um dos grandes marcos da Teoria dos Conjuntos, tendo sido demonstrada por Georg Cantor no final do século XIX. Nesta seção, exploraremos diferentes exemplos de conjuntos não enumeráveis, cada um revelando aspectos distintos e profundos da estrutura do infinito. Começaremos pelas sequências infinitas de dígitos binários, passaremos pela análise do conjunto das partes de $\mathbb{N}$ e, por fim, abordaremos o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

4.2.1 Sequências de termos 1 ou 0

Considere o conjunto A formado por todas as sequências cujos termos são apenas 0 ou 1. Um exemplo de elemento do conjunto A é a sequência $(1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)$, onde cada termo é escolhido de maneira arbitrária entre os dois dígitos possíveis. O conjunto A também pode ser entendido como o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 0\}$. Além do exemplo citado temos a sequência nula $(0, 0, 0, \dots)$ e a sequência $(1, 1, 1, 1, \dots)$ como elementos de A .

Nosso objetivo é mostrar que A é um conjunto não enumerável, ou seja, não existe uma função bijetora entre $\mathbb{N}$ e A . Para isso, utilizaremos um argumento célebre introduzido por Georg Cantor, conhecido como método da diagonal de cantor, o texto do Teorema 4.2 bem como sua demonstração foram inspirados em Lima (2009, p. 53).

Teorema 4.2. *O conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 0\}$ não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que existe uma função bijetora entre $\mathbb{N}$ e A , ou seja, é possível enumerar todos os elementos do conjunto A . Isso significa que podemos construir uma lista em que cada linha representa uma sequência da forma:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots) \\ a_2 & = & (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots) \\ a_3 & = & (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots) \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & = & (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \dots) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Agora, construiremos uma nova sequência $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, onde cada termo α_n é definido como:

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{nn} = 1 \\ 1, & \text{se } a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Essa nova sequência α difere da sequência a_1 na primeira posição, difere de a_2 na segunda posição, de a_3 na terceira posição, e assim sucessivamente. Portanto, α difere de todas as sequências da lista em pelo menos uma posição, o que significa que não está na lista, contradizendo nossa suposição inicial de que todas as sequências haviam sido enumeradas. Logo, o conjunto A não é enumerável. ■

Concluimos, assim, que o conjunto A não é enumerável. Este resultado marca a primeira distinção fundamental entre diferentes formas de infinito: enquanto o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é enumerável, e dizemos que tem cardinalidade $\aleph_0$ (alef-zero),

o conjunto das sequências infinitas de 0s e 1s tem uma infinidade ainda “maior”, sendo um exemplo clássico de conjunto não enumerável.

4.2.2 Conjunto das Partes de $\mathbb{N}$

Um resultado clássico e fundamental para o entendimento da hierarquia de infinitos é a não enumerabilidade do conjunto das partes do conjunto $\mathbb{N}$. Na sequência falaremos sobre a noção de subconjunto e conjunto das partes de um conjunto dado, e finalizaremos apresentando uma demonstração da não enumerabilidade do conjunto das partes de $\mathbb{N}$.

Dado um conjunto A qualquer, dizemos que X é um subconjunto de A ou X está contido em A (em símbolos $X \subset A$), quando todo elemento de X é também elemento de A . Assim

$$X \subset A \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in A).$$

A ideia de subconjunto define uma relação muito importante na Matemática: a relação de inclusão entre conjuntos. E pode ser usada dentre outras aplicações para construir conjuntos a partir de um conjunto dado. Por exemplo, dado o conjunto $A = \{1, 2\}$, os seus subconjuntos são:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}. \quad (4.3)$$

Cabem duas observações sobre a lista anterior, a primeira e mais óbvia é que $A \subset A$; a segunda observação tem haver com o fato de $\emptyset \subset A$, sua constatação é facilitada quando definimos a não inclusão entre dois conjuntos. Dados dois conjuntos A e X , dizemos que X não está contido em A , quando existe pelo um elemento de X que não é elemento de A :

$$X \not\subset A \Leftrightarrow (\exists x \in X; x \notin A).$$

Assim para negarmos $\emptyset \subset A$, devemos encontrar um elemento x em $\emptyset$, tal que $x \notin A$. O que é impossível, uma vez que não existe x no conjunto vazio $\emptyset$.

Os conjuntos listados em (4.3), podem ser reunidos em único conjunto que para o caso específico de $A = \{1, 2\}$ é chamado de conjunto das partes de A (ou conjunto potência de A), que denotaremos por $\mathcal{P}(A)$:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Podemos generalizar o conceito de conjunto das partes de qualquer conjunto dado, da seguinte forma:

Definição 4.1. *Dado um conjunto A , o conjunto das partes de A , $\mathcal{P}(A)$ é conjunto definido por:*

$$\mathcal{P}(A) = \{X; X \subset A\}.$$

Assim o conjunto das partes de um conjunto A dado é conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A . Na Tabela 6 é mostrado os elementos do conjunto das partes para alguns conjuntos numéricos dados (usamos a notação $|A|$ para o número de elementos de A):

A	$ A $	$\mathcal{P}(A)$	$ \mathcal{P}(A) $
$\emptyset$	0	$\{\emptyset\}$	1
$\{1\}$	1	$\{\emptyset, \{1\}\}$	2
$\{1, 2\}$	2	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$	4
$\{1, 2, 3\}$	3	$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$	8

Tabela 6 – Conjunto das partes de alguns subconjuntos de $\mathbb{N}$

Fonte: o autor

No caso em que $\{1, 2, 3, 4\}$, $|\mathcal{P}(A)| = 16$, indicando que para um conjunto A , com n elementos $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. A demonstração desse fato pode ser feita com indução.

Quando analisamos a cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ chegamos a uma conclusão inesperada, o conjunto em questão não é enumerável. Esse fato está sistematizado no Teorema 4.3 a seguir, seu texto, bem como sua demonstração foram inspirados em Lima (2009, p. 54):

Teorema 4.3. *O conjunto das partes de $\mathbb{N}$, denotado por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é enumerável. Então existe uma função bijetora

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

isto é, conseguimos listar todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ como

$$f(1), f(2), f(3), \dots$$

Vamos construir um subconjunto $D \subset \mathbb{N}$ de forma que

$$n \in D \iff n \notin f(n).$$

Esse conjunto D está bem definido, pois para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos verificar se $n \in f(n)$ e, com base nisso, decidir se n pertence a D . Como D é um subconjunto de $\mathbb{N}$, ele deveria estar na imagem da função f , ou seja, existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(k) = D$.

Vamos verificar o que acontece com o número k :

- Se $k \in D$, então pela definição de D , temos $k \notin f(k) = D$, contradição.
- Se $k \notin D$, então pela definição de D , temos $k \in f(k) = D$, também contradição.

Portanto, nossa suposição de que existe tal função f leva a uma contradição lógica. Logo, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não pode ser enumerável. ■

O resultado demonstrado acima evidencia que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ possui uma cardinalidade estritamente maior do que a do próprio conjunto dos números naturais. Isso marca um ponto crucial na compreensão da hierarquia dos infinitos, pois mostra que existem diferentes “tamanhos” de infinito.

4.2.3 Conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

O conjunto das funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, desempenha um papel central na Lógica Matemática e na Teoria da Computação. Naturalmente, é possível perguntar se esse conjunto é enumerável, ou seja, se seria possível listar todas essas funções de maneira ordenada, como se faz com os números naturais. A resposta, no entanto, é negativa: o conjunto de todas as funções dos naturais nos naturais é não enumerável.

Uma maneira de enxergar esse conjunto é notar que cada função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pode ser representada como uma sequência infinita de números naturais $(f(0), f(1), f(2), \dots)$, com $f(n) \in \mathbb{N}$ para todo n . Dessa forma, estamos lidando com o conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, isto é, o conjunto de todas as sequências infinitas de números naturais. Como mostraremos a seguir, esse conjunto não pode ser colocado em correspondência biunívoca com os naturais².

Teorema 4.4. *O conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o conjunto de todas as funções f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ seja enumerável. Isso significa que é possível listar todas essas funções da forma: $f_0, f_1, f_2, \dots$, onde cada f_n é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Construiremos agora uma nova função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por: $g(n) = f_n(n) + 1$. Essa função está bem definida, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $f_n(n) \in \mathbb{N}$ e, portanto, $f_n(n) + 1 \in \mathbb{N}$.

Vamos verificar se g coincide com alguma das funções da lista. Suponha que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $g = f_k$. Então, avaliando ambos os lados em k , teríamos: $g(k) = f_k(k) + 1$, mas como também estamos assumindo $g = f_k$, isso implicaria: $f_k(k) = f_k(k) + 1$, o que é um absurdo. Portanto, g é uma função que não aparece na lista supostamente completa de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Isso contradiz a hipótese inicial de que tal conjunto seria enumerável. Logo, o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ não é enumerável. ■

Esse resultado é ainda mais surpreendente quando observamos que o conjunto das funções computáveis $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é enumerável (SIPSER, 2017; SANTIAGO; BEDRE-

² O enunciado e a demonstração do Teorema 4.4 foram adaptados de uma discussão disponível em <<https://math.stackexchange.com/q/685730>>. Acesso em: 25 jul. 2025.

GAL, 2012, p. 187, p. 68). Ou seja, existem muito mais funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ do que funções que podem ser descritas por um algoritmo ou programa. Na teoria da computação, um algoritmo pode ser representado formalmente por uma máquina de Turing. Embora esse modelo envolva definições matemáticas, é possível descrever cada máquina de Turing usando apenas uma *sequência finita de símbolos* de um certo alfabeto Σ ; por exemplo, podemos ter $\Sigma = \{0, 1\}$. Dessa forma, podemos pensar no conjunto de todas as máquinas de Turing como um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é o conjunto de todas as sequências finitas formadas por símbolos desse alfabeto. No caso em que $\Sigma = \{0, 1\}$, teríamos:

$$\mathcal{M} = \{(0), (1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots\}.$$

Podemos provar que o conjunto de todas as sequências finitas $\mathcal{M}$ é enumerável. Conclui-se, portanto, que o conjunto das máquinas de Turing também é enumerável. Assim, o conjunto de todos os algoritmos é também enumerável. Uma abordagem técnica e cuidadosa desse assunto pode ser encontrada em Ramos, Neto e Vega (2023, p. 555). Essa distinção tem implicações profundas em Teoria da Computação, Lógica Matemática e no entendimento dos limites do que é efetivamente calculável.

4.3 O Conjunto de Cantor

Dentre os exemplos clássicos de conjuntos não enumeráveis, o conjunto de Cantor ocupa um lugar de destaque, não apenas por sua construção elegante e contraintuitiva, mas também pelas profundas implicações que possui na Análise, na Topologia e na Teoria da Medida. Sua elaboração envolve um processo infinito de remoções sucessivas de subintervalos do intervalo unitário $[0, 1]$, resultando em um conjunto que, surpreendentemente, é ao mesmo tempo não enumerável e de medida nula. Nesta subseção, exploraremos tanto a construção geométrica do conjunto de Cantor quanto sua caracterização por meio da representação ternária dos números reais, evidenciando, ao final, sua não enumerabilidade.

4.3.1 Definição

O conjunto de Cantor, que denotaremos por $\mathcal{K}$, é um subconjunto do intervalo unitário $[0, 1]$, cuja construção e propriedades revelam aspectos profundos da matemática do infinito. Em Lima (2009) encontramos uma análise do conjunto de Cantor.

O conjunto de Cantor $\mathcal{K}$ é um subconjunto fechado do intervalo $[1, 0]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo: retira-se do intervalo $[1, 0]$ seu terço médio aberto $1/3, 2/3$. Depois

retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo infinitamente. O conjunto $\mathcal{K}$ dos pontos não retirados é o conjunto de cantor. (LIMA, 2009, p. 172)

Como indicado na citação, a construção do conjunto de Cantor ocorre por um processo iterativo de remoções sucessivas de partes do intervalo $[0, 1]$. Na sequência vamos ilustrar as etapas desse processo:

- **Etapa 0:** Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ (Figura 7 a seguir).



Figura 7 – Intervalo fechado $[0, 1]$.

Fonte: O autor.

- **Etapa 1:** Removemos o terço aberto central, ou seja, o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, restando os dois subintervalos $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (Figura 8 a seguir).



Figura 8 – Primeira etapa da construção do conjunto de Cantor.

Fonte: O autor.

- **Etapa 2:** De cada um dos intervalos restantes, removemos novamente o terço aberto central, resultando em quatro subintervalos (Figura 9 a seguir).

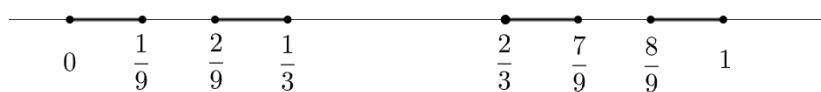


Figura 9 – Segunda etapa da construção do conjunto de Cantor.

Fonte: O autor.

⋮

- **Etapa n:** Esse processo se repete infinitamente. A cada etapa n , o número de intervalos remanescentes dobra, e o comprimento total removido tende a 1.

O conjunto de Cantor $\mathcal{K}$ é definido como o conjunto dos pontos que nunca são removidos nesse processo. Em Lima (2009) encontramos a seguinte formalização para o conjunto $\mathcal{K}$.

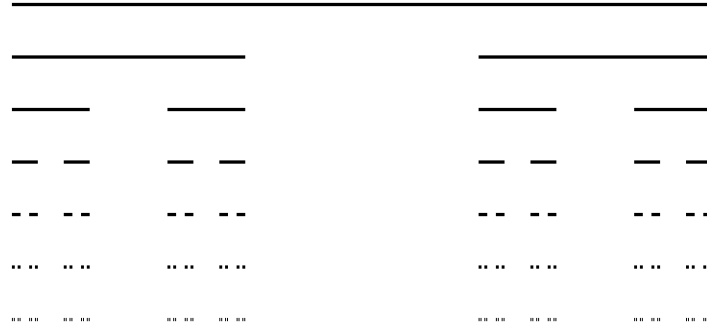


Figura 10 – Sexta etapa da construção do conjunto de Cantor.

Fonte: O autor.

Se indicarmos com $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ os intervalos abertos omitidos, temos
 $\mathcal{K} = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, isto é, $\mathcal{K} = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \bigcup I_n)$. (LIMA, 2009, p.173)

Essa definição formal destaca que o conjunto de Cantor consiste exatamente nos pontos do intervalo $[0, 1]$ que não pertencem a nenhum dos intervalos abertos removidos em cada etapa do processo. Embora a construção se baseie em uma sequência infinita de remoções, o conjunto resultante é bem definido e possui uma estrutura interna surpreendentemente rica. Para compreendê-lo melhor, é útil analisá-lo por meio de uma abordagem alternativa que utiliza a representação dos números em base 3, a qual revela propriedades notáveis do conjunto, inclusive sua cardinalidade.

4.3.2 Representação ternária e a cardinalidade de $\mathcal{K}$

Uma maneira alternativa e bastante instrutiva de descrever os elementos do conjunto de Cantor é por meio de suas representações na base 3. Em vez da base decimal habitual (base 10), usamos apenas os dígitos 0, 1 e 2 para representar números reais entre 0 e 1. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0,1_3, \quad \frac{2}{3} = 0,2_3, \quad \frac{1}{9} = 0,01_3$$

Durante a construção do conjunto de Cantor, a cada etapa, são removidos intervalos correspondentes a números cuja representação em base 3 tem o dígito 1 na posição correspondente. Assim, todos os pontos removidos ao longo do processo possuem, em alguma posição da sua expansão ternária, o dígito 1:

Vamos definir um conjunto $[\dots]$ que chamaremos de conjunto K de Cantor, usando-se uma expansão ternária. Tal expansão ternária é formalmente escrita por:

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots, \text{ onde } a_k = 0, 1 \text{ ou } 2$$

[...] *Definição 1.1:* O conjunto K de Cantor é o conjunto de números reais no intervalo $[0, 1]$ que admite uma expansão ternária $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$, onde a_k é ou 0 ou 2. (FREIRIA, 1992, p. 73-74)

De maneira que os pontos que permanecem (isto é, os que pertencem ao conjunto de Cantor) são exatamente aqueles cujas representações ternárias usam apenas os dígitos 0 e 2. Como exemplo disso temos o número

$$x = 0,20200022 \dots_3$$

que pertence ao conjunto de Cantor, pois sua representação ternária não contém o dígito 1. Por outro lado, o número

$$y = 0,1201 \dots_3$$

não pertence ao conjunto de Cantor, pois o dígito 1 aparece em sua expansão ternária.

A partir disso, podemos estabelecer uma bijeção entre o conjunto de Cantor e o conjunto de todas as sequências infinitas de 0's e 1's. Basta associar o dígito 0 ao dígito 0 e o dígito 2 ao dígito 1. Por exemplo, a sequência ternária:

$$0,002220 \dots_3 \quad \leftrightarrow \quad (0, 0, 1, 1, 1, 0, \dots)$$

Como já demonstramos na seção anterior, o conjunto de todas as sequências infinitas de 0's e 1's, é não enumerável. Portanto, o conjunto de Cantor não é enumerável.

O conjunto de Cantor exemplifica de forma notável como a matemática do infinito pode produzir estruturas contraintuitivas, mas rigorosamente definidas. Apesar de ser construído a partir da remoção sucessiva de partes do intervalo $[0, 1]$, resultando em um conjunto de medida nula, $\mathcal{K}$ ainda conserva uma complexidade infinita: é não enumerável. Sua análise por meio da representação ternária revela uma ligação direta com o conjunto das sequências infinitas de dígitos binários, cuja cardinalidade ultrapassa a de $\mathbb{N}$. Assim, o conjunto de Cantor não apenas reforça a existência de diferentes tamanhos de infinito, como também evidencia a profundidade conceitual da Teoria de Conjuntos na compreensão das estruturas matemáticas contínuas.

4.4 O Conjunto dos Números Reais

A construção dos números racionais representou um avanço significativo na compreensão dos números e das quantidades, permitindo representar razões entre grandezas e solucionar uma ampla gama de problemas aritméticos e geométricos. No entanto, apesar de sua utilidade e elegância, os racionais não são suficientes para descrever todas as magnitudes possíveis, especialmente aquelas que surgem de certos contextos geométricos. A partir de um olhar histórico, percebe-se que alguns comprimentos não podem

ser expressos como razão entre dois números naturais. Esses casos, que remontam à antiguidade, colocaram em xeque a completude dos racionais e revelaram a existência de grandezas incomensuráveis. Para entender melhor essa limitação e motivar a necessidade de ampliar nosso conceito de número, exploraremos inicialmente a noção de segmentos incomensuráveis.

4.4.1 Segmentos Icomensuráveis

Um dos grandes legados dos matemáticos gregos antigos para a Matemática Moderna foi a descoberta dos incomensuráveis (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 70). Uma definição para segmentos comensuráveis e incomensuráveis pode ser encontrada no livro *X* dos elementos de Euclides:

Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se. (EUCLIDES, 2009, p. 353)

Em outros termos, dizemos que dois segmentos são comensuráveis quando podem ser medidos com uma mesma unidade de medida, e incomensuráveis quando não podem. Mais precisamente, sejam AB e CD dois segmentos como indicados na Figura 11.

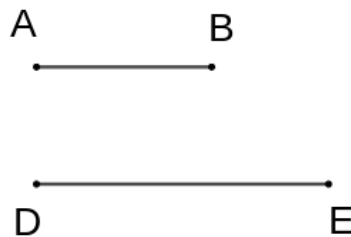


Figura 11 – Segmentos AB e CD

Fonte: o autor

Observamos que apesar de $\overline{AB} < \overline{DE}$, mas AB não cabe duas vezes em DE . Nessa situação pode ser que exista um segmento u que caiba uma quantidade inteira de vezes em AB e que caiba uma quantidade inteira de vezes em DE .

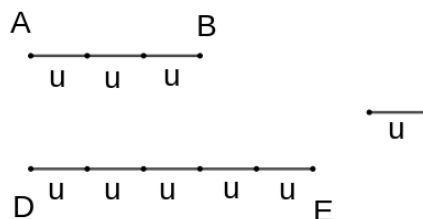


Figura 12 – Segmentos AB e CD medidos com a mesma unidade de medida

Fonte: o autor

Na Figura 12, observamos que existe um segmento u que se encaixa exatamente 3 vezes em AB e 5 vezes em DE . Podemos então dizer que AB está para DE assim como 3 está para 5, ou seja, $AB : DE :: 3 : 5$ ³. Nesse caso, dizemos que AB e DE são segmentos comensuráveis, pois é possível encontrar uma mesma unidade u que meça ambos por um número inteiro de vezes. No caso geral, dados dois segmentos AB e DE , se existir um segmento u que caiba m vezes em AB e n vezes em DE , com $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que AB e DE são comensuráveis e que $AB : DE :: m : n$.

É intuitivo supor que todo par de segmentos seja comensurável, bastando escolher uma unidade adequada. No entanto, uma das descobertas mais marcantes da história da Matemática foi a existência de segmentos incomensuráveis (EVES, 2004, p. 105), isto é, pares de segmentos que não admitem uma mesma medida comum. Em termos formais, dois segmentos AB e DE são ditos incomensuráveis quando não existe um segmento u que caiba um número inteiro de vezes em ambos. A seguir, apresentamos uma demonstração clássica da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado.

Para compreender a fundo o significado da incomensurabilidade e seu impacto no desenvolvimento da Matemática, é útil analisarmos um caso concreto e historicamente relevante. A descoberta de que a diagonal de um quadrado não é comensurável com seu lado expôs, de forma inequívoca, os limites da aritmética racional e abriu caminho para a necessidade de ampliar o conceito de número. A seguir, retomamos essa demonstração clássica como mostrada em (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 77).

Incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado

A construção geométrica que apresentaremos torna visível a impossibilidade de se encontrar uma unidade comum para medir simultaneamente a diagonal e o lado do quadrado. Tal impossibilidade está na origem da noção moderna de número irracional e constitui um dos primeiros exemplos rigorosos de grandezas incomensuráveis, antecipando, ainda na Antiguidade, o conceito de números reais que será formalizado apenas séculos depois. Vamos a demonstração de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis.

Teorema 4.5. *Dado um quadrado $ABCD$, os segmentos AB e AC são incomensuráveis.*

Demonstração. Para um quadrado $ABCD$, marquemos na diagonal AC o ponto B_1 de modo que $\overline{B_1C} = \overline{BC}$ (Figura 13).

³ A notação $AB : DE :: 3 : 5$ indica uma proporção entre dois pares de segmentos. Ela deve ser lida como: “ AB está para DE assim como 3 está para 5”, ou seja, $\frac{AB}{DE} = \frac{3}{5}$.

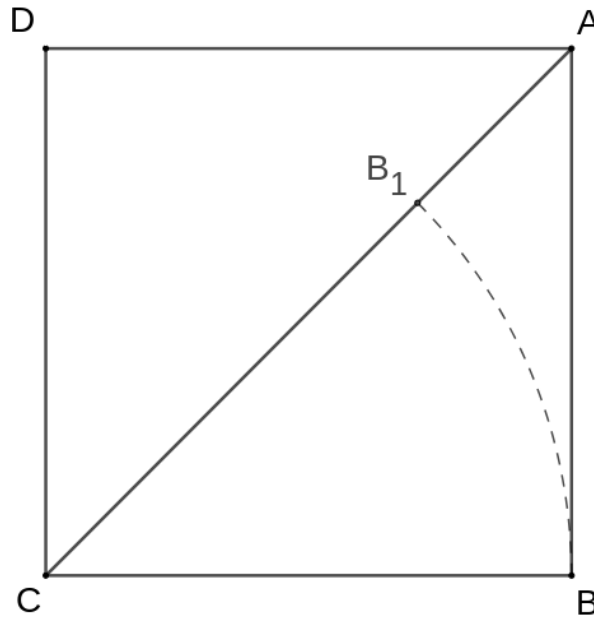


Figura 13 – Ponto B_1 , sobre a diagonal do quadrado $ABCD$

Fonte: o autor

Por B_1 tracemos a perpendicular r ao segmento AC . Seja $C_1 = r \cap AB$ (Figura 14).

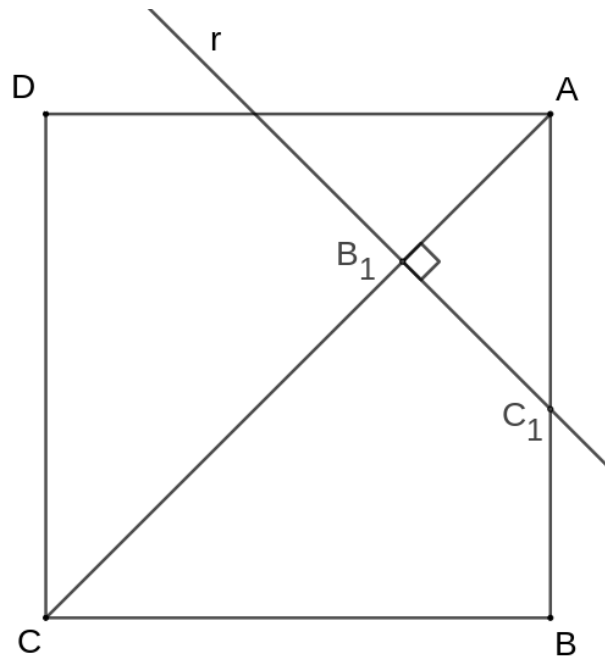


Figura 14 – Reta r perpendicular a AC por B_1

Fonte: o autor

Por A tracemos s , paralela a r e por C_1 tracemos t , paralela a AC . Seja $D_1 = s \cap t$ (Figura 15).

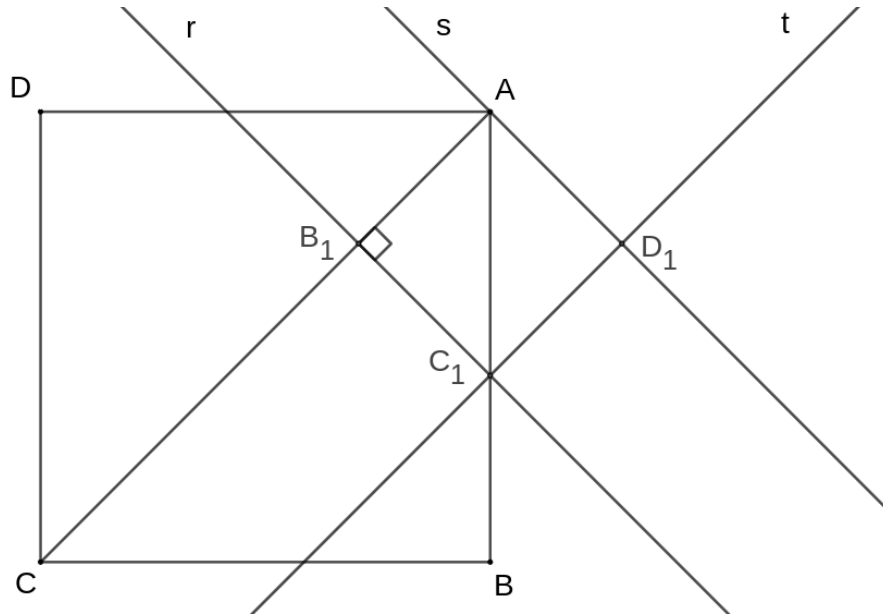


Figura 15 – Retas s e t , respectivamente perpendiculares à AC e r

Fonte: o autor

O quadrilátero $AB_1C_1D_1$ da Figura 15 é um quadrado. De fato, como $\widehat{B_1AC_1} = 45^\circ$ e $\widehat{AB_1C_1} = 90^\circ$, então $\widehat{AC_1B_1} = 45^\circ$. Assim o triângulo AB_1C_1 será isósceles de base AC_1 , logo $\overline{AB_1} = \overline{B_1C_1}$. Além disso, como $t \parallel AC$, no quadrilátero $AB_1C_1D_1$, temos $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{B_1C_1D_1} = 90^\circ$ e por termos $s \parallel r$, $\widehat{B_1AD_1} = \widehat{AB_1C_1} = 90^\circ$. Finalmente temos $\widehat{AD_1C_1} = 90^\circ$, uma vez que os outros três ângulos internos de $AB_1C_1D_1$ são retos. Concluindo assim nossa demonstração de que o quadrilátero $AB_1C_1D_1$ é um quadrado (Figura 16).

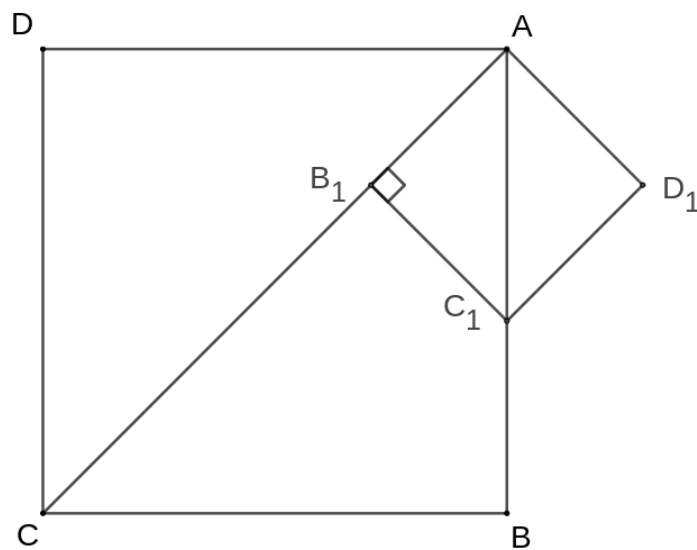


Figura 16 – Quadrado $AB_1C_1D_1$

Fonte: o autor

Para provarmos que o lado AB e a diagonal AC do quadrado $ABCD$ (Figura 16) são incomensuráveis, vamos supor por absurdo que AB e AC são comensuráveis, e portanto existe um segmento AP que mede AB e AC . Após a suposição obteremos uma absurdo que nos fará acreditar que os dois segmentos não são comensuráveis.

Suponhamos que os segmentos AB e AC são comensuráveis, então AB_1 e AC_1 também o são. De fato, $AB_1 = AC - B_1C$ mas $B_1C = BC = AB$, de maneira que $AB_1 = AC - AB$, mostrando que AB_1 pode ser colocado em termos de AB e AC . Para verificarmos que AC_1 também pode ser colocado em termos de AB e AC , primeiro observamos que $AC_1 = AB - BC_1$, mas podemos provar que $BC_1 = B_1C_1 = AB_1$. Vamos à demonstração da igualdade $BC_1 = B_1C_1$. Primeiro traçando o segmento BB_1 na Figura 16, obtemos o triângulo BCB_1 (Figura 17), isósceles de base BB_1 , uma vez que por construção $\overline{B_1C} = \overline{BC}$.

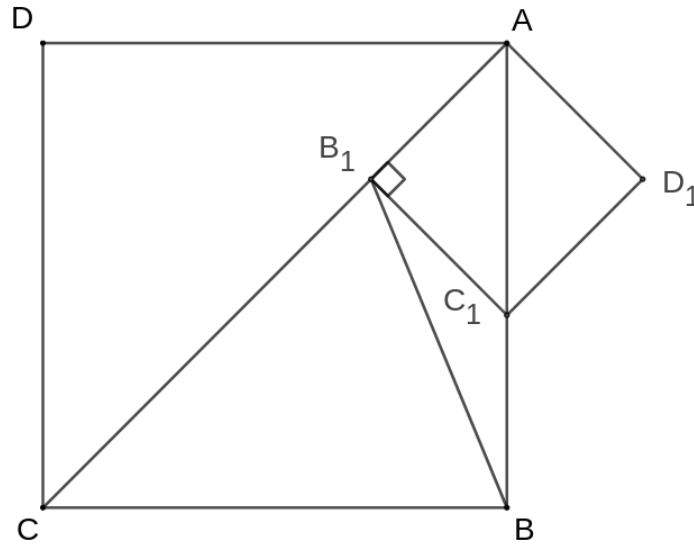


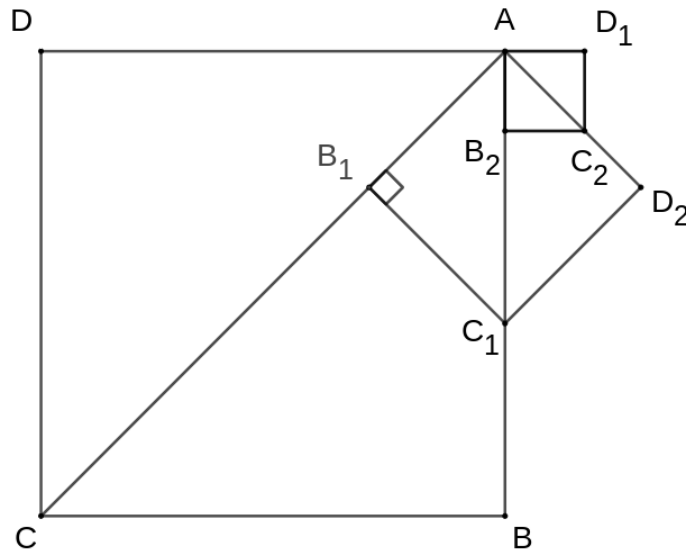
Figura 17 – Triângulo isósceles BCB_1

Fonte: o autor

Assim, $\widehat{CB_1B} = \widehat{CBB_1}$, mas $\widehat{CB_1B} + \widehat{BB_1C_1} = 90^\circ$ e $\widehat{CBB_1} + \widehat{B_1BC_1} = 90^\circ$, de sorte que $\widehat{BB_1C_1} = \widehat{BC_1B_1}$. Logo o BCB_1 é isósceles de base BB_1 , que implica $\overline{BC_1} = \overline{B_1C_1}$.

Como $AB_1C_1D_1$ é um quadrado $\overline{B_1C_1} = \overline{AB_1}$. Mas $AB_1 = AC - AB$ e também $AC_1 = AB - BC_1 = AB - AB_1$, que implica $AC_1 = 2AB - AC$, provando que AC_1 pode ser escrito em termos de AB e AC concluindo assim que se AB e AC podem ser medidos por AP , AB_1 e AC_1 também podem. Logo AB_1 e AC_1 são comensuráveis.

Tomemos agora um ponto B_2 no segmento AC_1 da Figura 16, de maneira que $\overline{B_2C_1} = \overline{B_1C_1}$, seguindo um processo análogo ao usado na construção do quadrado $AB_1C_1D_1$ da Figura 16, obtemos o quadrado $AB_2C_2D_2$ mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Ponto B_2 sobre AC_1

Fonte: o autor

Podemos provar que a comensurabilidade de AB e AC também implica a comensurabilidade de AB_2 e AC_2 , e além disso AB_2 e AC_2 são também medidos por AP . Seguindo essa mesma linha de raciocínio podemos obter quadrados cada vez menores de lado AB_n e diagonal AC_n , para $n \in \mathbb{N}$, construídos sobre a diagonal AC_{n-1} do quadrado de lado AB_{n-1} .

A contradição consiste no fato de podermos obter um quadrado cujo lado AB_i e diagonal AC_i , que podem ser medidos pelo segmento AP , mas tanto que AB_i quanto AC_i tem medida inferior à medida de AP . A obtenção do quadrado com lado AB_i e diagonal AC_i cuja medida é menor que a medida de AP é possível pois podemos tornar a medida de AB_n e de AC_n menores que a medida de qualquer segmento dado. Na demonstração desse fato podemos usar um resultado conhecido como Lema de Euclides, “mas que deve ter sido conhecido antes de Euclides” (ROQUE, 2012, p. 129). ■

A investigação sobre os segmentos incomensuráveis nos levou à constatação de que existem grandezas que não podem ser representadas por números racionais, exigindo assim a introdução de uma classe mais ampla de números: os irracionais.

[...] é provado que existem realmente retas, ilimitadas em quantidade, tanto comensuráveis quanto também incomensuráveis com a reta proposta[...]

Seja chamada, de fato, por um lado, a reta proposta racional, e as comensuráveis com essa [...] racionais, e, por outro lado, as incomensuráveis com essa sejam chamadas irracionais. (EUCLIDES, 2009, p. 353)

Com a união dos racionais e irracionais, obtemos os números reais. Antes, porém, de nos aprofundarmos na estrutura completa do conjunto $\mathbb{R}$, voltamos nossa atenção para

um subconjunto particularmente importante: o intervalo aberto $(0, 1)$. Esse intervalo será ponto de partida para novas análises sobre a cardinalidade dos conjuntos reais, revelando que mesmo subconjuntos aparentemente “pequenos” dos reais podem ter uma infinidade não enumerável.

4.4.2 O intervalo real $(0, 1)$

A seção anterior nos permitiu compreender, a partir de uma construção geométrica, que existem segmentos incomensuráveis, ou seja, pares de segmentos que não podem ser medidos com uma mesma unidade comum. Essa descoberta, atribuída à tradição pitagórica, revelou a existência de grandezas que não pertencem ao conjunto dos números racionais. Com isso, torna-se possível indicar pontos na reta real cuja posição não corresponde a nenhuma fração $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, onde $0 \notin \mathbb{N}$. Esses pontos são chamados de irracionais, e sua presença na reta real evidencia que o conjunto dos racionais, embora denso, não é completo.

Partindo dessa ideia, podemos marcar pontos irracionais no intervalo real $(0, 1)$, mesmo sem conhecermos seus valores exatos. Para isso, podemos utilizar construções geométricas que envolvem segmentos incomensuráveis. Um exemplo é a marcação do comprimento da diagonal de um quadrado de lado $\frac{1}{2}$, que, por ser incomensurável com o lado, define um ponto irracional no intervalo $(0, 1)$. Assim, sem realizar qualquer cálculo algébrico, conseguimos garantir a existência de irracionais dentro desse intervalo. Esse tipo de construção reforça a ideia de que os irracionais preenchem a reta real de maneira substancial, sendo inclusive elementos fundamentais para compreendermos sua estrutura e cardinalidade. Para isso vamos marcar na reta real os pontos $B = \frac{1}{2}$ e $C = 0$, na sequência traçaremos o quadrado $ABCD$ (como indicado na Figura 19).

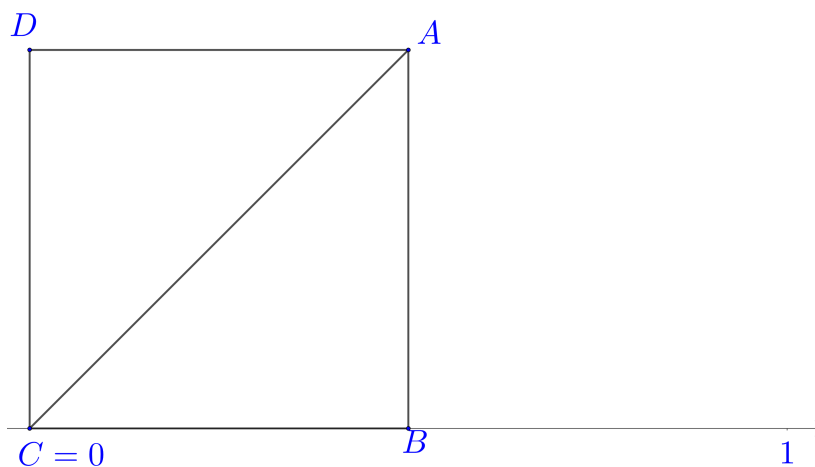


Figura 19 – Quadrado $ABCD$ de lado $\frac{1}{2}$

Fonte: o autor

Pela desigualdade triangular, temos:

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (4.4)$$

Trançando a circunferência Γ de centro C e raio AC , podemos marcar no intervalo $(0, 1)$ da reta real o ponto Δ que representa a medida irracional do segmento AC (Figura 20).

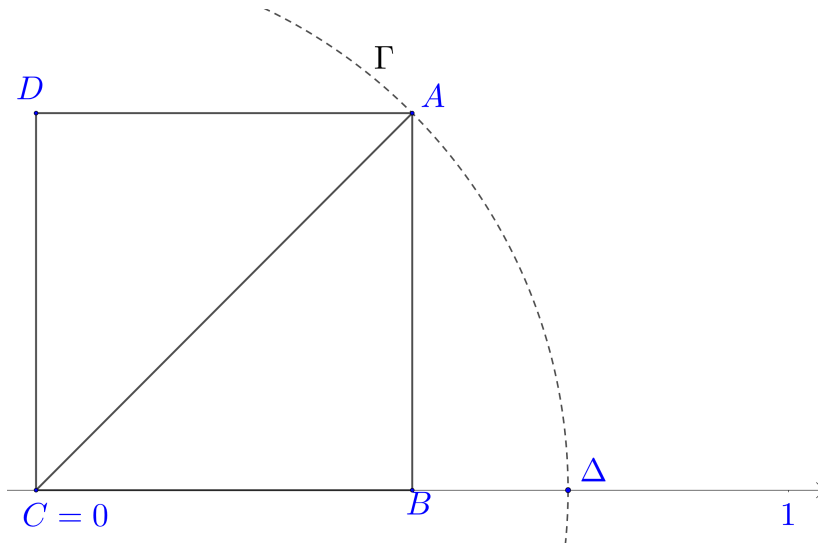


Figura 20 – Ponto Δ marcando um número irracional em $(0, 1)$

Fonte: o autor

Por meio de construções análogas à anterior, pode-se marcar quantos pontos irracionais se queira no intervalo $(0, 1)$, bastando, para isso, escolher valores para o lado do quadrado que sejam maiores ou iguais a $\frac{1}{2}$. Como os números racionais são densos na reta real, ou seja, entre dois racionais sempre existe outro racional, temos uma indicação de que esse processo de marcar pontos que representam irracionais em (A, B) não se esgota. De fato, escolhidos dois valores racionais para os lados de dois quadrados distintos, é sempre possível escolher entre eles um terceiro valor racional para construir um novo quadrado, cuja diagonal resultará novamente em um número irracional diferente. Esse procedimento pode ser realizado indefinidamente, fornecendo uma construção geométrica que gera infinitos irracionais no intervalo real $(0, 1)$.

Na Figura 21 a seguir, são ilustradas construções análogas à apresentada anteriormente. A partir das diagonais dos quadrados $A_1B_1CD_1$ e $A_2B_2CD_2$, cujos lados medem, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, marcam-se sobre o intervalo $(0, 1)$ os pontos Δ_1 e Δ_2 . Esses pontos correspondem aos comprimentos das diagonais desses quadrados e, por serem incomensuráveis com seus respectivos lados, representam números irracionais. Essa construção reforça a ideia de que é possível identificar geometricamente infinitos irracionais no interior de qualquer intervalo real, mesmo sem conhecê-los numericamente. A liberdade na escolha dos lados dos quadrados, desde que estejam contidos

em $(0, 1)$, permite obter irracionais distintos, evidenciando a abundância desses números no conjunto dos reais e antecipando a discussão sobre sua não enumerabilidade.

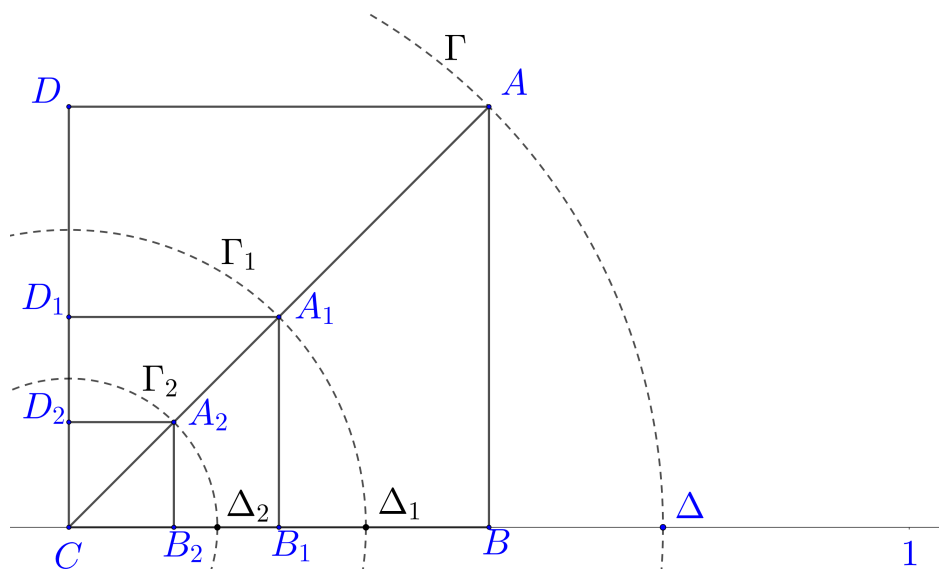


Figura 21 – Pontos Δ_1 e Δ_2 marcando números irracionais em $(0, 1)$

Fonte: o autor

As construções apresentadas até aqui não apenas evidenciam a presença de números irracionais no intervalo $(0, 1)$, como também sugerem que tais números são numerosos e densamente distribuídos. Essa percepção nos conduz a um questionamento natural: seria possível listar todos os números reais pertencentes a esse intervalo, assim como fizemos anteriormente com os números racionais? Ou seja, o conjunto $(0, 1)$ seria enumerável? Na sequência, abordaremos essa questão de maneira mais rigorosa, demonstrando que, embora possamos identificar infinitos pontos irracionais no intervalo, não é possível organizar todos os seus elementos em uma lista infinita indexada pelos números naturais. Estamos, portanto, diante de um conjunto cuja cardinalidade ultrapassa a dos enumeráveis.

Não enumerabilidade de $(0, 1)$

A importância do conceito de conjunto enumerável reside no fato de existirem conjuntos que não são enumeráveis. Um exemplo desse tipo de conjunto é $\mathbb{R}$, cuja não enumerabilidade pode ser verificada a partir da demonstração de que o intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é enumerável. Vamos então à demonstração do seguinte resultado:

Teorema 4.6. *O conjunto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $(0, 1)$ seja enumerável. Então, é possível listar todos os seus elementos como uma sequência infinita. Cada número $x \in (0, 1)$

pode ser representado por uma expansão decimal da forma

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad (4.5)$$

em que cada a_i é um dos dígitos $0, 1, 2, \dots, 9$, com a condição de que a sequência não seja composta apenas de zeros.

Assim todos os elementos de $(0, 1)$ podem organizados em uma lista, como a mostrada a seguir.

$$\begin{aligned} &0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ &0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ &0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Construiremos um novo número $0, b_1 b_2 b_3 \dots$, cuja n -ésima casa decimal b_n é diferente de a_{nn} , e tal que $b_n \notin \{0, 9\}$ para evitar ambiguidades com representações decimais duplas (como $0,4999\dots = 0,5$). Assim, esse número difere do primeiro elemento da lista na primeira casa decimal, do segundo na segunda, e assim por diante. Consequentemente, o número $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ não aparece em nenhuma linha da lista (4.6), o que contradiz nossa suposição inicial de que todos os elementos de $(0, 1)$ estavam nela contidos. Logo, o intervalo $(0, 1)$ não é enumerável. ■

A demonstração apresentada confirma que o intervalo real $(0, 1)$, embora aparentemente “pequeno” quando comparado ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, possui a mesma complexidade cardinal. Essa constatação pode parecer contraintuitiva à primeira vista, mas será fortalecida por um resultado notável: é possível construir uma função bijetora entre $\mathbb{R}$ e $(0, 1)$, ou seja, ambos os conjuntos têm a mesma cardinalidade. A seguir, apresentaremos explicitamente tal bijeção, evidenciando que todo número real pode ser associado, de forma única e reversível, a um número real pertencente ao intervalo aberto $(0, 1)$.

Uma bijeção $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

Como vimos na subseção anterior, o intervalo real $(0, 1)$ não é enumerável. Mostraremos agora que existe uma bijeção entre $(0, 1)$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, o que nos permitirá concluir, que $\mathbb{R}$ também não é enumerável.

Considere a função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x(1 - x)}$$

Essa função é definida para todo $x \in (0, 1)$. À medida que x se aproxima de 0, o denominador $x(1 - x)$ tende a 0 e o numerador tende a -1 , fazendo com que

$f(x) \rightarrow -\infty$. Quando x se aproxima de 1, temos novamente $x(1-x) \rightarrow 0$ e $2x-1 \rightarrow 1$, de modo que $f(x) \rightarrow +\infty$. Além disso, temos $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, e a função é estritamente crescente em $(0, 1)$. Na Figura 22 é mostrado o gráfico da função f .

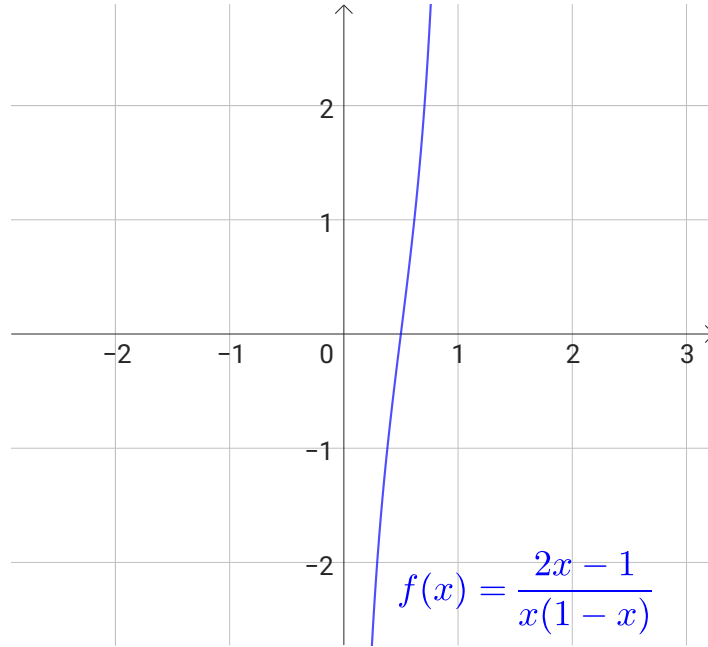


Figura 22 – Gráfico da função definida por $f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$

Fonte: o autor

É possível verificar que f é uma bijeção de $(0, 1)$ em $\mathbb{R}$, esse resultado está sistematizado na Proposição 4.7 a seguir⁴ :

Proposição 4.7. *A função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)},$$

é uma bijeção do intervalo $(0, 1)$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Demonstração. Para verificarmos que a função f na Proposição 4.7 é uma bijeção, devemos verificar que ela é injetiva (não repete valores) e sobrejetiva (atinge todos os valores reais).

Injetividade: Sejam $x_1, x_2 \in (0, 1)$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Pela definição da função, temos:

$$\frac{2x_1-1}{x_1(1-x_1)} = \frac{2x_2-1}{x_2(1-x_2)} \Rightarrow (2x_1-1) \cdot x_2(1-x_2) = (2x_2-1) \cdot x_1(1-x_1). \quad (4.7)$$

⁴ A função definida na Proposição 4.7 tem origem em uma discussão disponível em <<https://math.stackexchange.com/q/1966067>> (acesso em 28 jul. 2025), a partir da qual foram elaborados tanto o enunciado quanto a demonstração da proposição.

Expandindo ambos os lados na segunda igualdade de (4.7), obtemos:

$$\begin{aligned}(2x_1 - 1)(x_2 - x_2^2) &= 2x_1x_2 - 2x_1x_2^2 - x_2 + x_2^2, \\ (2x_2 - 1)(x_1 - x_1^2) &= 2x_2x_1 - 2x_2x_1^2 - x_1 + x_1^2.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$-2x_1x_2^2 - x_2 + x_2^2 = -2x_2x_1^2 - x_1 + x_1^2 \Rightarrow (-2x_1x_2^2 + 2x_2x_1^2) + (-x_2 + x_2^2 + x_1 - x_1^2) = 0.$$

Ou seja,

$$2x_1x_2(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2) + (x_2^2 - x_1^2) = 0.$$

Como $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, temos:

$$(x_1 - x_2)[2x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2)] = 0. \quad (4.8)$$

A equação (4.8) só é satisfeita se $x_1 - x_2 = 0$ ou se

$$2x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2) = 0.$$

No primeiro caso, temos $x_1 = x_2$, como desejado. Vamos verificar que a segunda possibilidade não pode ocorrer. De fato:

$$2x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2) = (1 - x_1)(1 - x_2) + x_1x_2. \quad (4.9)$$

Como $x_1, x_2 \in (0, 1)$, então $(1 - x_1), (1 - x_2), x_1x_2 > 0$. Logo, o segundo membro da equação (4.9) é a soma de dois números reais positivos e, portanto, diferente de zero. Assim, a única possibilidade na equação (4.8) é que $x_1 = x_2$, o que conclui a demonstração da injetividade de f .

Sobrejetividade: Seja $y \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = y$, isto é, que

$$\frac{2x - 1}{x(1 - x)} = y. \quad (4.10)$$

Vamos supor que $y \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $x = \frac{1}{2}$, encerrando assim a busca pelo x . A partir da Equação (4.10) obtemos $2x - 1 = yx(1 - x)$ e, daí, $yx(1 - x) - 2x + 1 = 0$. Expandindo $yx(1 - x)$, obtemos:

$$yx - yx^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow -yx^2 + (y - 2)x + 1 = 0. \quad (4.11)$$

A última igualdade em (4.11) é uma equação do segundo grau em x . Como $y \in \mathbb{R}$, o discriminante é dado por:

$$\Delta = (y - 2)^2 + 4y = y^2 + 4 > 0,$$

portanto, há duas raízes reais distintas, dadas por:

$$x = \frac{-(y-2) \pm \sqrt{y^2+4}}{-2y}.$$

Vamos analisar a raiz com o sinal negativo no radical:

$$x = \frac{-(y-2) - \sqrt{y^2+4}}{-2y} = \frac{y-2 + \sqrt{y^2+4}}{2y}.$$

Como $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vamos considerar dois casos:

- Se $y > 0$: o numerador é positivo, pois

$$\sqrt{y^2+4} > y \Rightarrow \sqrt{y^2+4} + y - 2 > 2y - 2 > 0,$$

para $y > 1$, e é facilmente verificável para $0 < y \leq 1$, e o denominador também é positivo. Portanto, $x > 0$.

Além disso, como $\sqrt{y^2+4} < y+2$, segue que:

$$x = \frac{y-2 + \sqrt{y^2+4}}{2y} < \frac{y-2 + y+2}{2y} = \frac{2y}{2y} = 1.$$

Logo, $x \in (0, 1)$.

- Se $y < 0$: o numerador $y-2 + \sqrt{y^2+4}$ continua positivo (pois $\sqrt{y^2+4} > |y|$), mas o denominador $2y < 0$, então a fração é negativa. Neste caso, a outra raiz (com o sinal de mais) é positiva e pode ser analisada com o mesmo raciocínio acima. De fato:

$$x = \frac{y-2 - \sqrt{y^2+4}}{2y} \in (0, 1),$$

pois numerador e denominador são ambos negativos, e, novamente, podemos verificar que essa raiz está entre 0 e 1 por estimativas semelhantes.

Em todos os casos, ao menos uma das raízes pertence ao intervalo $(0, 1)$. Assim, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = y$, o que mostra que f é sobrejetora.

Como a função é sobrejetiva e injetiva, provamos assim que ela é bijetiva, como queríamos. ■

4.5 Cardinalidade de $\mathbb{I}$

Sabemos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. No Capítulo 3, discutimos que a união de dois conjuntos enumeráveis também é enumerável. Esse resultado, apresentado no Teorema 3.3, pode ser enunciado da seguinte forma:

Proposição 4.8. *Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então, $A \cup B$ também é enumerável.*

A partir desse resultado, podemos aplicar um raciocínio por contraposição: se a união de dois conjuntos é não enumerável, então pelo menos um deles não pode ser enumerável.

Sabemos que os números reais podem ser escritos como a união dos racionais com os irracionais:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável, e já demonstramos que $\mathbb{R}$ não é enumerável, segue que o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ não pode ser enumerável. Assim, concluímos que $\mathbb{I}$ é um exemplo de conjunto não enumerável.

4.6 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, exploramos a noção de infinitos não enumeráveis, destacando sua importância para a compreensão da complexidade do conjunto dos números reais. A partir de diferentes construções, como o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's e o intervalo real $(0, 1)$, discutimos como certos conjuntos infinitos não podem ser listados ou colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Essa constatação nos levou à ideia de que existem diferentes “tamanhos” de infinito, e de que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$ ultrapassa a dos conjuntos enumeráveis.

Demonstramos que o intervalo $(0, 1)$ não é enumerável e construímos uma bijeção entre esse intervalo e $\mathbb{R}$, concluindo que o conjunto dos números reais também não pode ser enumerado. A partir disso, utilizamos uma proposição sobre a união de conjuntos enumeráveis para concluir que o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ é também um exemplo clássico de conjunto não enumerável.

Embora já tenhamos avançado significativamente na compreensão do conjunto $\mathbb{R}$, há ainda muito o que explorar. No próximo capítulo, nos dedicaremos a examinar com mais profundidade a estrutura interna dos números reais. Abordaremos a existência de bijeções entre $\mathbb{R}$ e outros conjuntos relevantes, como $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (sequência cujos únicos elementos são 0 e 1), $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, que denotaremos por $\mathcal{F}(\mathbb{N})$, além de discutir a distinção entre números algébricos e transcendentais. Finalizaremos com uma breve análise sobre como calcular com precisão constantes fundamentais como π e e , ampliando nossa perspectiva sobre o infinito no contexto dos números reais.

5 Explorando o Conjunto $\mathbb{R}$

5.1 Introdução: Criando uma Correspondência Biunívoca entre um Segmento e uma Reta

Ao longo deste trabalho, temos nos deparado com diferentes manifestações do infinito, seja na contagem de elementos de conjuntos, nas aproximações sucessivas de valores, ou na extensão ilimitada de certas construções matemáticas. Um aspecto especialmente intrigante do infinito surge quando investigamos a cardinalidade dos conjuntos: até que ponto é possível estabelecer uma correspondência entre conjuntos que, à primeira vista, parecem ter tamanhos distintos? Antes de discutirmos formalmente a estrutura do conjunto dos números reais, propomos uma construção geométrica intuitiva que nos ajuda a visualizar como um segmento finito pode, surpreendentemente, ser colocado em correspondência um a um com toda a reta real. Essa ideia, embora contraintuitiva, é um passo importante para compreendermos como o infinito opera na Matemática.

Dado um segmento de reta AB fora da reta real $\mathbb{R}$, como indicado na Figura 23.

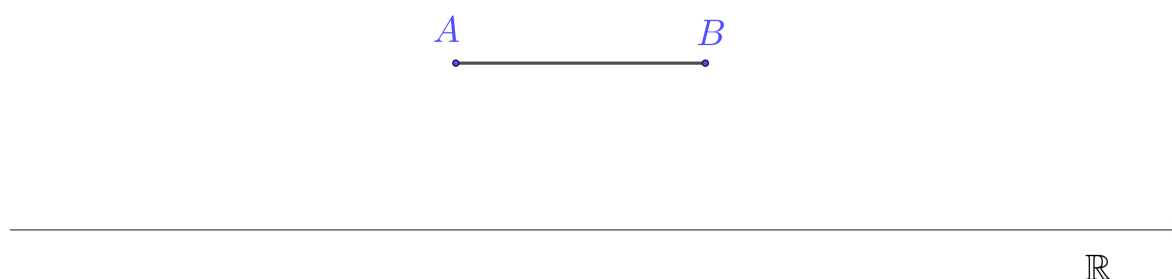
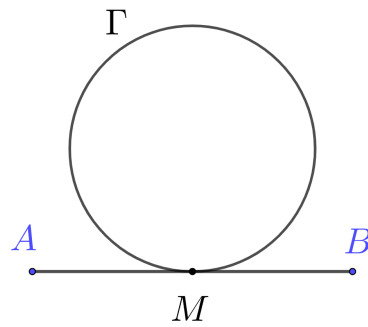


Figura 23 – Segmento AB fora de $\mathbb{R}$

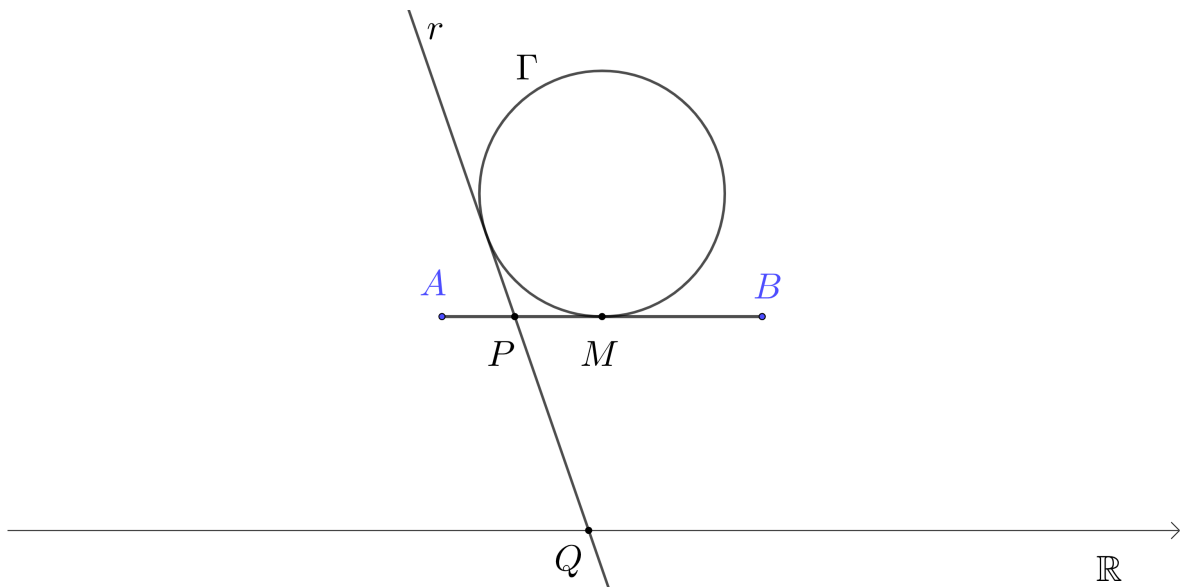
Fonte: o autor

Intuitivamente, diríamos que esse segmento contém menos pontos do que a reta inteira, pois ele tem início e fim, enquanto a reta é ilimitada em ambas as direções. No entanto é possível associar, de forma precisa e sem repetições, cada ponto desse segmento a um único ponto da reta real, cobrindo-a completamente. Uma forma de fazer isso é traçando uma circunferência Γ de diâmetro menor que o comprimento do segmento AB , e tangente a AB em seu ponto médio M , como indicado na Figura 24:

Figura 24 – Circunferência Γ tangenciando AB em M

Fonte: o autor

Agora dado um ponto P , no segmento AB , encontraremos seu correspondente Q em $\mathbb{R}$, traçando por P uma reta r tangente a Γ . A interseção $r \cap \mathbb{R}$ é ponto correspondente que queremos (Figura 25 a seguir).

Figura 25 – Ponto $Q \in \mathbb{R}$ corresponde a $P \in AB$

Fonte: o autor

Esse exemplo explora a ideia de criar uma correspondência biunívoca entre um segmento de reta e uma reta. Essa ideia tem relação com a existência da bijeção $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, vista no Capítulo 4¹. Na Figura 26 marcamos os pontos P_1 , P_2 e P_3 ,

¹ No Capítulo 3, foi apresentada uma forma de colocar em correspondência biunívoca quaisquer

no segmento AB e seus respectivos correspondentes Q_1 , Q_2 e Q_3 em $\mathbb{R}$. Para termos de fato uma correspondência completa os pontos de AB e $\mathbb{R}$, precisamos definir qual ponto será correspondente a M em $\mathbb{R}$, nesse caso podemos tomar o pé da perpendicular a $\mathbb{R}$ passando por M .

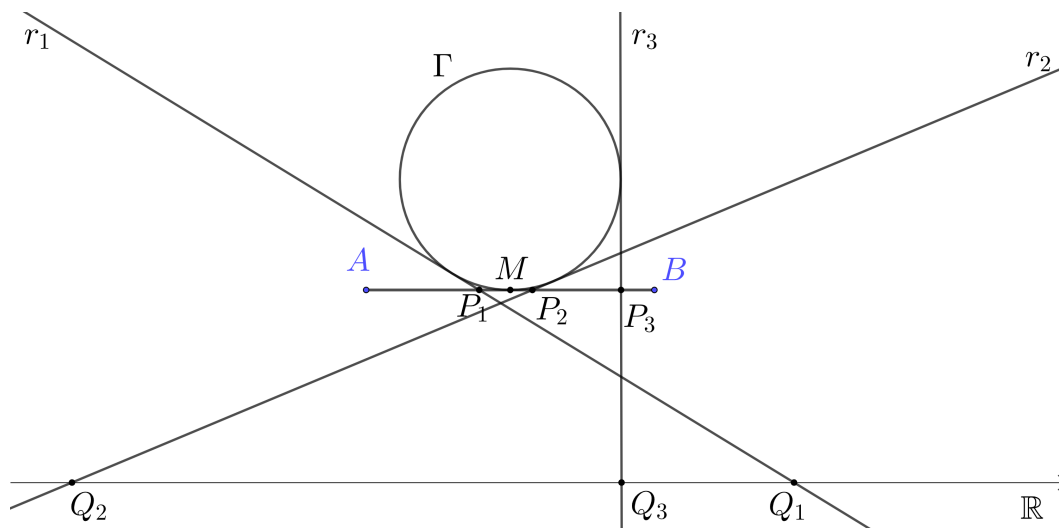


Figura 26 – Ponto corresponde a $P \in AB$ em $\mathbb{R}$

Fonte: o autor

A correspondência um para um feita entre um segmento AB e a reta real, serve como ponto de partida para refletirmos sobre a natureza dos conjuntos infinitos e sobre como a intuição falha quando lidamos com o infinito. Neste capítulo, investigaremos o conjunto dos números reais, suas propriedades e sua estrutura interna. Analisaremos diferentes formas de descrevê-lo, por meio de sequências, subconjuntos e funções, e mostraremos que há mais de um “tamanho” de infinito. Veremos também que existem números dentro de $\mathbb{R}$ que não podem ser obtidos por nenhuma equação algébrica: os números transcendentos. Entre eles, destacam-se π e e , cuja construção e aproximações revelam a presença do infinito em suas definições. Por fim, discutiremos como certos conjuntos ultrapassam até mesmo a imensidão de $\mathbb{R}$, apontando para infinitos ainda maiores.

5.2 Os Conjuntos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

No Capítulo 4 demonstramos que o conjunto das sequências cujos elementos são 0 ou 1, o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ e o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ não podem ser enumerados, ou seja, não existe uma correspondência biunívoca entre esses conjuntos e

dois segmentos de reta, de maneira que quando pensamos em $(0, 1)$ como um segmento da reta, é possível colocá-lo em correspondência um para um com qualquer outro segmento de reta AB . Como existe uma bijeção $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, podemos concluir que existe uma bijeção entre AB e $\mathbb{R}$.

o conjunto dos números naturais. Essa constatação revela que tais conjuntos possuem uma infinitude de natureza diferente daquela associada a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou mesmo $\mathbb{Q}$. No entanto, resta uma questão importante: esses conjuntos não enumeráveis possuem a mesma “quantidade” de elementos que $\mathbb{R}$? Nesta seção, vamos examinar precisamente essa questão, estabelecendo, por meio da construção de bijeções, que todos esses conjuntos têm a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais. Veremos que, embora não possam ser listados como os conjuntos enumeráveis, eles compartilham com $\mathbb{R}$ um mesmo grau de infinitude, conhecido como a cardinalidade do contínuo.

5.2.1 Sequências de 0's e 1's

Uma sequência compostas por 0's e 1's é uma sequência da forma:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots), \quad \text{com } a_i \in \{0, 1\}. \quad (5.1)$$

É comum denotar o conjunto de todas as sequências do tipo (5.1) por $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Sabemos que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é um conjunto não enumerável, mas uma pergunta plausível, é qual seu “tamanho”: o mesmo que $\mathbb{R}$, ou tem um “tamanho” diferente de $\mathbb{R}$ (sendo maior ou menor). Na verdade a cardinalidade do conjunto de todas as sequências de 0's e 1's tem a mesma que $\mathbb{R}$. Verificaremos isso, criando uma bijeção $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow (0, 1)$. Essa demonstração busca seguir o caminho apresentando por Enderton (1977, p. 149) ².

Uma bijeção de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ no intervalo $(0, 1)$

Considere o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ formado por todas as sequências infinitas de 0's e 1's, cada elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, uma sequência da forma (5.1), pode ser naturalmente associadas a números reais no intervalo $(0, 1)$ por meio da função $F : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow (0, 1)$, definida por:

$$F(a_1, a_2, a_3, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \in [0, 1].$$

A imagem dessa função está contida no intervalo $[0, 1]$, e mais especificamente em $(0, 1)$, desde que façamos alguns ajustes. Por exemplo as sequências $(0, 0, 0, \dots)$ e $(1, 1, 1, \dots)$ estariam associadas respectivamente a 0 e a 1 por meio de F . Além disso, devemos lidar com ambiguidades, alguns números reais no intervalo $(0, 1)$ possuem mais de uma forma de serem escritos em binário. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ escrito em base 2 pode ser representado como $0,1000\dots$ (seguido de infinitos zeros) ou como $0,0111\dots$ (seguido de infinitos uns)³. Essas duplicidades ocorrem sempre que a sequência termina

² Uma orientação de como a demonstração pode ser feita pode ser encontrada em <<https://math.stackexchange.com/q/1719885>> (Acesso em 25 julho de 2025).

³ Isso advém do fato de que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$, estudaremos esse tipo de soma no Capítulo 6.

com uma repetição infinita de 1's, afetando exatamente os números racionais com expansão binária finita.

No entanto, essas ambiguidades são pouco numerosas em comparação com o próprio intervalo $(0, 1)$: o conjunto de todas as sequências que terminam em uma sucessão infinita de 1's é enumerável, pois correspondem a um subconjunto enumerável de racionais (os números da forma $\frac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$). Como conjuntos enumeráveis têm cardinalidade estritamente menor que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, podemos excluí-los do domínio da função sem afetar sua cardinalidade total. Dessa forma, restringindo a função às sequências que não terminam com uma cadeia infinita de 1's, temos uma aplicação injetiva de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ em $(0, 1)$, cuja imagem cobre todo o intervalo. Como já foi demonstrado que $(0, 1)$ não é enumerável, e estamos omitindo apenas um subconjunto enumerável de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, conclui-se que essa função pode ser ajustada para tornar-se bijetiva. Portanto, o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tem a mesma cardinalidade que o intervalo $(0, 1)$. Devido ao fato de já termos demonstrado a existência de uma bijeção entre $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$, segue que os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tem mesma cardinalidade, ou em símbolos:

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}.$$

5.2.2 O conjunto das partes de $\mathbb{N}$

O conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$, cuja representação é $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é um conjunto enumerável, vamos verificar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$, para isso usaremos um método indireto, contruindo uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, como já verificamos que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$, poderemos concluir que os $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R}$, tem a mesma cardinalidade. A demonstração a seguir foi baseada na demonstração apresentada em (HRBACEK; JECH, 1978, p. 91).

Uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Vamos criar uma função $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, onde cada subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, associamos uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in A \\ 0, & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Dessa forma, cada subconjunto de $\mathbb{N}$ determina de maneira única uma sequência de 0's e 1's. Por exemplo, o subconjunto $A = \{1, 3, 4\}$ corresponde à sequência $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$, em que os termos são 1 nas posições correspondentes aos elementos de A e 0 nas demais. Essa correspondência também é injetiva: subconjuntos diferentes produzem sequências diferentes. É sobrejetiva: toda sequência de 0's e 1's

determina um subconjunto de $\mathbb{N}$, a saber, o conjunto dos índices onde ocorrem os 1's. Portanto, essa função define uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. E assim, pelo fato de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ter a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$, concluímos que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}.$$

5.2.3 O conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$

Um conjunto particularmente interessante no estudo das cardinalidades é o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, que denotaremos por $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Cada elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ou seja, uma sequência infinita de números naturais. Embora $\mathbb{N}$ seja enumerável, o conjunto de todas as suas funções não é: $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ é um conjunto não enumerável. Mais do que isso, $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Para demonstrarmos que $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, seguiremos um caminho indireto, apresentando uma bijeção entre $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ e $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. A demonstração que apresentaremos foi inspirada em uma discussão informal no site Math StackExchange⁴. Embora essa construção específica não tenha sido encontrada em obras formais da literatura consultada, sua validade matemática é garantida e será apresentada aqui com o maior cuidado e formalização possível.

Uma correspondência entre $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ e elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ é formado por todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, ou seja, por todas as sequências infinitas de números naturais. Já o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as sequências infinitas de zeros e uns. Embora o primeiro conjunto pareça maior, pois cada termo da sequência pode assumir infinitos valores, enquanto no segundo temos apenas duas opções por posição, esses dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade. Para compreender essa igualdade, podemos imaginar uma maneira de transformar qualquer sequência de números naturais em uma sequência de zeros e uns. Para isso, podemos representar cada número natural por um pequeno bloco de uns seguido de um zero, usando a seguinte regra:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 0 \\ 1 &\rightarrow 10 \\ 2 &\rightarrow 110 \\ 3 &\rightarrow 1110 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, o número n é transformado em uma sequência de n números 1, seguida de um zero. Se tivermos uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, com valores como $f(0) = 2$, $f(1) = 0$,

⁴ Ver: <<https://math.stackexchange.com/q/2146599>> (Acesso em: 25 de julho de 2025).

$f(2) = 1$, podemos aplicar essa regra a cada valor da função e formar uma sequência de “zeros” e “uns”:

$$f \mapsto 110\ 0\ 10\ \dots$$

A união dessas representações forma uma sequência infinita de 0's e 1's, ou seja, um elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. E como essa regra é simples e organizada, também conseguimos fazer o caminho inverso: a partir da sequência de “zeros” e “uns”, conseguimos recuperar os números naturais originais, um por um. Com isso, vemos que há uma correspondência entre as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ e as sequências infinitas de 0's e 1's. Embora a codificação apresentada não gere todas as sequências de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ela mapeia cada função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ em uma sequência binária com a propriedade de conter infinitos zeros, um para cada valor de $f(n)$. Por construção, toda sequência binária com infinitos zeros pode ser decomposta unicamente em blocos da forma uma sequência de n uns seguida de um zero, com $n \geq 1$, permitindo assim a recuperação da sequência original de números naturais. Dessa forma, há uma bijeção entre $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ e o subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ formado pelas sequências com infinitos zeros. Apesar de ser um subconjunto próprio, esse conjunto possui a mesma cardinalidade de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, pois é possível construir uma bijeção entre ambos, por exemplo, intercalando os termos de uma sequência qualquer com bits auxiliares que garantam a presença de infinitos zeros. Assim, concluímos que

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}.$$

Ou seja, o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais.

5.2.4 A Cardinalidade do Contínuo

Vimos nesta seção que os conjuntos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ têm a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$. A essa cardinalidade damos o nome de *cardinalidade do contínuo*, e a representamos pelo símbolo $\mathfrak{c}$. Usando a notação $|A|$ para a cardinalidade de um conjunto A , podemos expressar essa equivalência por meio da igualdade:

$$|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

Para a cardinalidade do conjunto dos números naturais, utilizamos o símbolo $\aleph_0$. Uma questão importante da matemática é saber se existe algum outro “tamanho” de infinito entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$. Para qualquer conjunto A , vale a relação $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ uma demonstração desse fato pode ser encontrada em Novaes (2018, p. 114). Assim, podemos pensar na cardinalidade do contínuo como:

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0},$$

já que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. A pergunta então se transforma em saber se existe um número cardinal entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Em outras palavras, a dúvida é se o *próximo* cardinal após $\aleph_0$, denotado por $\aleph_1$, é igual à cardinalidade do contínuo:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \quad ? \quad (5.2)$$

A resposta afirmativa ao questionamento (5.2) é conhecida como **hipótese do contínuo**. Tanto essa hipótese quanto sua negação são consistentes com a Teoria dos Conjuntos atualmente aceita (baseada nos axiomas de Zermelo–Fraenkel com o Axioma da Escolha, ZFC). Isso significa que *nenhuma das duas respostas pode ser provada ou refutada a partir desses axiomas*, como demonstrado nos trabalhos de Gödel e Cohen. Assim, a hipótese do contínuo permanece uma das questões mais profundas e intrigantes da matemática contemporânea (BRANQUINHO; MURCHO; GOMES, 2020, p. 285).

A discussão sobre os diferentes “tamanhos” de infinito e, em particular, sobre a cardinalidade do conjunto dos números reais, nos leva naturalmente a investigar com mais profundidade a própria constituição do conjunto $\mathbb{R}$. Afinal, quais tipos de números habitam esse conjunto? Como são classificados? Uma distinção fundamental nesse universo é aquela entre os números algébricos, aqueles que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, e os números transcendentos, que escapam a essa descrição algébrica. A seguir, exploraremos essas duas categorias de números, suas propriedades e o que elas nos revelam sobre a riqueza estrutural do conjunto dos reais.

5.3 Números Algébricos e Transcendentos

Neste ponto da nossa investigação, após compreendermos que o conjunto dos números reais possui uma cardinalidade superior à dos números naturais, torna-se pertinente analisar mais de perto a natureza dos elementos que compõem $\mathbb{R}$. Entre os diversos subconjuntos dos reais, destacam-se dois grupos de grande interesse matemático: os números algébricos e os números transcendentos. Os primeiros são aqueles que satisfazem equações polinomiais com coeficientes inteiros; os segundos, por sua vez, não são solução de nenhuma equação desse tipo. Nesta seção, exploraremos resumidamente essas duas classes, observando sua definição, propriedades e distribuição dentro do conjunto dos reais. Para quem deseja uma abordagem aprofundada dos números algébricos sugerimos Endler (2006).

5.3.1 Os Inteiros Algébricos

Toda solução de uma equação polinomial da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \quad (5.3)$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ são inteiros é chamada um *inteiro algébrico*. Na equação polinomial (5.3), o coeficiente do termo dominante é igual a 1. Polinômios que tem essa característica são chamadas de mônico. Assim podemos afirmar que um inteiro algébrico é toda raiz de um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Um fato importante é que os inteiros algébricos formam um anel⁵. A demonstração desse resultado foge ao escopo desse trabalho, mas é curioso perceber que o conjunto das raízes de equações com a forma (5.3) tem uma estrutura que se assemelha ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Observamos que todo número $\alpha \in \mathbb{Z}$ é um inteiro algébrico, como raiz da equação $x - \alpha = 0$, um questionamento ao qual podemos chegar é se todo real é também um inteiro algébrico. Existe um resultado que traz uma resposta para esse questionamento, mostrando que todo racional não inteiro não é um inteiro algébrico. Antes de enunciarmos o resultado, vamos apresentar um lema que será necessário para a sua demonstração:

Lema 5.1. *Seja $r \in \mathbb{N}$ um número primo, e sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se r dividir o produto ab então r deve dividir a ou b .*

A demonstração do Lema 5.1 exige alguns resultados da Aritmética, que não serão detalhados neste trabalho. Uma apresentação completa encontra-se em Figueiredo (2011, p. 2), de onde também foi extraída a base para o Teorema 5.2 e sua demonstração.

Teorema 5.2. *Um inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional.*

Demonstração. Seja α um inteiro algébrico. Suponhamos por absurdo que $\alpha = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ e p e q primos entre si. Substituindo $x = \frac{p}{q}$ na equação 5.3 obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 &= 0 \Rightarrow \\ p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Da segunda igualdade na implicação (5.4) vem

$$p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - \dots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}). \quad (5.5)$$

Observando a Equação (5.5), percebemos q divide p^n . Seja r um fator primo de q , assim r divide p^n , e pelo Lema 5.1, r divide p , o que é uma contradição uma vez que supomos p e q primos entre si. Logo a suposição de que α é um racional não inteiro

⁵ Um anel é uma estrutura algébrica composta por um conjunto munido de duas operações, adição e multiplicação, que generaliza propriedades dos inteiros, em Lang (2008, p. 118) e Hefez (2010, p. 130) é possível encontrar duas abordagens desse conteúdo.

é um absurdo, demonstrando assim o nosso resultado. E dessa forma as soluções da equação 5.3 só poderão ser inteiros ou irracionais. ■

5.3.2 Números Algébricos

Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (5.6)$$

onde os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são inteiros, é chamada de número algébrico (EVES, 2004, p. 664). Ao tomarmos $a_n = 1$ em (5.6), obtemos a equação polinomial que é usada para definir os inteiros algébricos, assim todo inteiro algébrico é também um número algébrico. Além disso, todo racional $\alpha = \frac{p}{q}$ é também um número algébrico uma vez que é raiz da equação

$$qx - p = 0.$$

Na Seção 5.3.1 provamos que existem inteiros algébricos que são irracionais. Assim os Números Algébricos podem, ser inteiros, racionais ou irracionais. Quando um número não é solução de uma equação da forma (5.6) dizemos que o mesmo é transcendente. A existência de números transcendentos, e portanto que não são raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros pode ser demonstrada usando o conceito de cardinalidade.

5.3.3 Números Transcendentos

Demonstraremos a seguir, Teorema 5.3, que o conjunto dos reais algébricos é enumerável. De posse desse resultado e do fato de $\mathbb{R}$ não ser enumerável. Concluímos que existe um subconjunto não enumerável em $\mathbb{R}$, composto por números que não são raízes de equações polinomiais como a equação (5.6). Esse números são chamados de transcendentos.

Teorema 5.3. *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Dado um polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \quad (5.7)$$

Definimos sua altura como sendo o número natural

$$|P| = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|. \quad (5.8)$$

Uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra é que a equação $P(x) = 0$, com $P(x)$ dado nos moldes de (5.7), tem exatamente n raízes complexas (LIMA et al.,

2006b; FERNANDEZ; SANTOS, 2010, p. 219, p. 19), de forma que o conjunto de todas as raízes de polinômios de uma dada altura é finito. Além disso o número de polinômios com uma dada altura é também finito. Assim o conjunto das raízes de todos os polinômios de coeficientes inteiros é enumerável, uma vez que o mesmo é uma união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos. ■

A demonstração de que existem números reais que não são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros mostra que os números transcendentem formam um subconjunto não enumerável de $\mathbb{R}$. No entanto, até aqui essa existência foi estabelecida de forma abstrata, sem a exibição de exemplos específicos. Isso levanta uma questão natural: quais são, concretamente, alguns desses números transcendentem? A resposta a essa pergunta envolve avanços históricos importantes na Matemática do século XIX, quando surgiram as primeiras demonstrações formais da transcendência de certos números bem conhecidos.

Exemplos de Números Transcendentem

Embora a demonstração da existência de números transcendentem utilize argumentos envolvendo cardinalidade, como vimos anteriormente, identificar exemplos concretos desses números não é uma tarefa simples. Por muito tempo, não se conhecia nenhum número específico que pudesse ser provado como transcendente. Essa situação mudou no século XIX, quando matemáticos como Joseph Liouville, Charles Hermite e Ferdinand Lindemann conseguiram estabelecer os primeiros exemplos concretos. No Capítulo 5 de Figueiredo (2011) encontramos exemplos desses números.

O primeiro número explicitamente construído e provado como transcendente foi o chamado número de Liouville, definido por meio de uma série infinita cuidadosamente construída (FIGUEIREDO, 2011, p. 21). O número Liouville ou *Constante de Liouville* (VIEIRA et al., 2019, p. 87), tem a forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110001000000000000000001\dots$$

Posteriormente, Charles Hermite demonstrou que o número e (a base dos logaritmos naturais) é transcendente. Poucos anos depois, Ferdinand Lindemann mostrou que o número π , a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, também é transcendente, o que implicou, entre outras coisas, a impossibilidade da antiga tarefa de quadrar o círculo usando régua e compasso. Esses dois números, π e e , são exemplos notáveis de números transcendentem que desempenham papéis fundamentais em diversas áreas da Matemática. Na próxima seção, voltaremos nossa atenção para a forma como podemos obter aproximações cada vez mais precisas desses números.

5.4 Os números π e e

Entre os números reais que não são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, destacam-se π e e , dois exemplos notáveis de números transcendentos. Ambos desempenham papéis centrais em diversas áreas da Matemática, da Geometria ao Cálculo. Nesta seção, examinaremos algumas formas de aproximar esses números, destacando como o infinito se manifesta em sua construção.

5.4.1 Calculando aproximações para π

O número π está presente em diversos contextos matemáticos, surgindo sobretudo na relação entre o comprimento C e o raio r de uma circunferência:

$$C = 2\pi r.$$

No Capítulo 7, aprofundaremos o estudo desse número, discutindo algumas interpretações e aparentes paradoxos que envolvem seu valor e suas aproximações. Por ora, vamos nos concentrar em um método geométrico para estimar π , utilizando ferramentas acessíveis e intuitivas. O método envolve a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, que representa o arco superior de uma circunferência de raio 1 centrada na origem. A análise dessa função nos permitirá construir aproximações sucessivas para π , a partir do comprimento de poligonais sobre o gráfico da função.

Dada uma função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, cujo gráfico está representado na Figura 27.

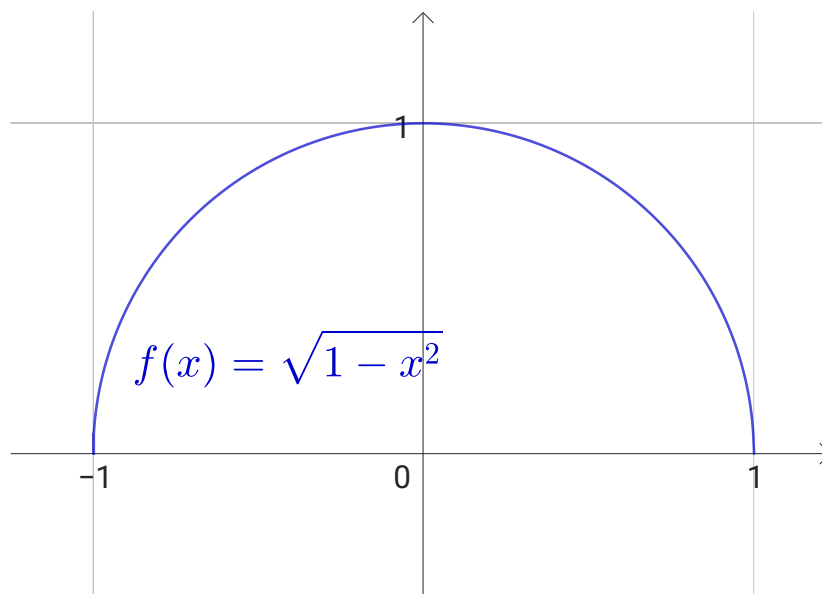


Figura 27 – Gráfico da função definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Fonte: o autor

Como a curva é uma semicircunferência de raio 1, seu comprimento é π^6 . Vamos marcar sobre o gráfico de f pontos igualmente espaçados na horizontal. De maneira que para cada um dos pontos da Figura 28, teremos $P_i = (x_i, f(x_i))$ e $x_{i+1} - x_i = \Delta x$. Assim, observando que o intervalo considerado é $[-1, 1]$, se tomarmos n subdivisões iguais desse intervalo, teremos $n + 1$ pontos $(x_i, 0)$, dados por:

$$x_i = -1 + i \cdot \Delta x \quad \text{com} \quad \Delta x = \frac{2}{n}, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

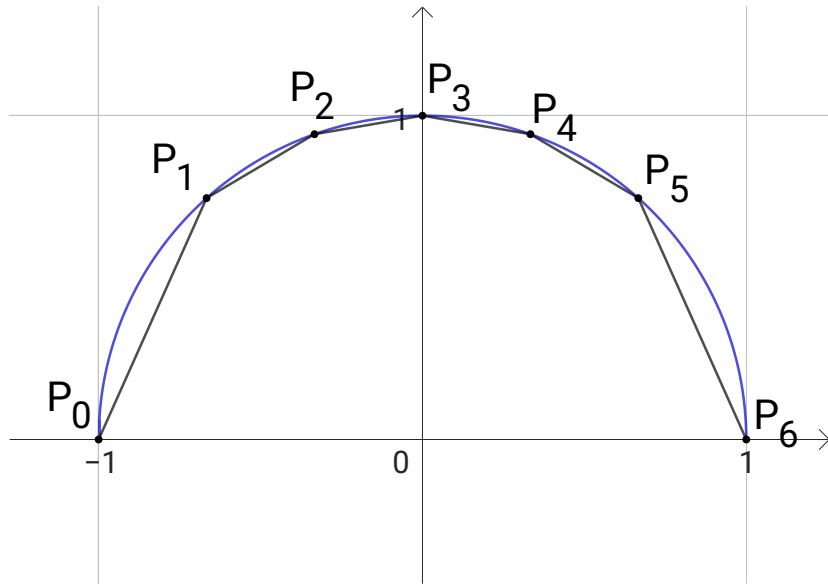


Figura 28 – Pontos sobre a curva $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Fonte: o autor

Cada ponto P_i é então da forma $P_i = (x_i, f(x_i))$, com $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, e os segmentos de reta consecutivos $P_i P_{i+1}$ formam uma poligonal que aproxima a semicircunferência no intervalo $[-1, 1]$. À medida que aumentamos o número de subdivisões n , o valor de Δx diminui, e a poligonal se ajusta melhor à curvatura da função, permitindo calcular aproximações cada vez mais precisas para o comprimento da curva, e portanto para π . Na Figura 28 traçamos a poligonal para os pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$, e P_6 , e os P_i , com $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ são da forma

$$P_i = \left(-1 + i \frac{2}{n}, f \left(-1 + i \frac{2}{n} \right) \right), \quad (5.9)$$

onde, para esse caso temos $n = 6$. A poligonal $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ mostrada na Figura 28 é uma aproximação para o comprimento da curva gráfico de f . Para calcularmos o comprimento da poligonal, devemos calcular a soma da medida dos segmento $P_k P_{k+1}$,

⁶ Essa forma de definir o número π , como comprimento de um semicírculo de raio 1 pode ser encontrada, por exemplo em Barbosa (2012, p. 179).

com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\sum_{i=0}^5 \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \overline{P_3 P_4} + \overline{P_4 P_5} + \overline{P_5 P_6}. \quad (5.10)$$

Esses segmentos tem medida:

$$\overline{P_k P_{k+1}} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}. \quad (5.11)$$

Onde (x_{k+i}, y_{k+i}) e x_k, y_k são respectivamente as coordenadas dos pontos P_k e P_{k+1} (ambos no formato 5.9). Uma maneira prática de calcular a soma (5.10) é usando a linguagem de programação Python, obtendo o número 3,0842528502040896 (no Capítulo 8 é apresentado o código usado no cálculo da soma (5.10)).

O número 3,0842528502040896, obtido como uma aproximação para a soma (5.10), é um valor inferior ao que conhecemos para $\pi = 3,141592653589793 \dots$. Isso é coerente com a construção apresentada, uma vez que a poligonal $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ da Figura 28 fornece uma aproximação por baixo para o comprimento da semicircunferência. Como indicado na figura, os segmentos retos subestimam o arco da curva. Quando aumentamos a quantidade de pontos marcados, os segmentos passam a seguir com mais precisão o contorno da curva, produzindo valores cada vez mais próximos do comprimento verdadeiro. Na Figura 29, temos uma aproximação para o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ com 9 segmentos de reta.

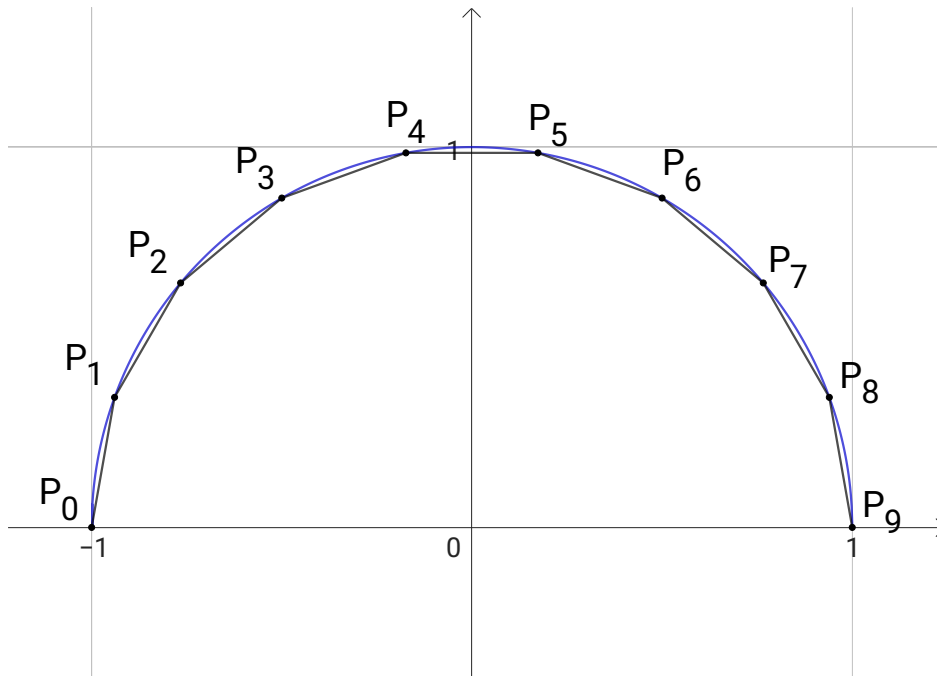


Figura 29 – Aproximação da curva $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ com 9 segmentos

Fonte: o autor

Realizando os cálculos para o comprimento da poligonal $P_0 \dots P_9$, mostrada na Figura 29, obtemos 3,11054173693886, um valor ainda inferior a π , mas superior ao obtido

com menos divisões. Esse resultado reforça a ideia de que o aumento na quantidade de segmentos produz aproximações progressivamente mais precisas para o comprimento da semicircunferência.

A seguir é apresentada a Tabela 7 com valores para o comprimento de uma poligonal $P_0 \dots P_n$, com n segmentos de reta, construída sobre o gráfico da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$:

Quantidade de segmento	comprimento da poligonal
10	3,115105950558346
100	3,1407605898424658
500	3,1415182688023964
1000	3,141566356216479
10.000	3,1415918220397847

Tabela 7 – Comprimento da poligonal $P_0 \dots P_n$ para alguns valores de n

Fonte: o autor

Mostrando números que vão se aproximando de $\pi = 3,141592653589793 \dots$. Para valores cada vez maiores de n , obtemos melhores aproximações para π , por exemplo, para $n = 1.000.000$, obtemos 3,141592652758248 e para $n = 10.000.000$ obtemos 3,1415926535632894. De maneira que podemos admitir que o número π surge quando fazemos n ir para o infinito na soma (5.10), ou seja:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \dots \quad (5.12)$$

Para tornar a Definição 5.12 mais precisa, vamos incluir a expressão que define a função f . Sabendo que $\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$, temos $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a_n$, com:

$$a_n = \sqrt{\left[\left(-1 + \frac{2(i+1)}{n} \right) - \left(-1 + \frac{2i}{n} \right) \right]^2 + \left[f \left(-1 + \frac{2(i+1)}{n} \right) - f \left(-1 + \frac{2i}{n} \right) \right]^2}.$$

E daí vem

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2(i+1)}{n} - 1 \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{2i}{n} - 1 \right)^2} \right]^2}. \quad (5.13)$$

Que pode ser pensanda como uma definição para o número π , ou como uma maneira de obter aproximações para ele, a partir dos elementos sequência que tem como termo geral:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2(i+1)}{n} - 1 \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{2i}{n} - 1 \right)^2} \right]^2}. \quad (5.14)$$

Na Tabela 8 a seguir alguns dos primeiros termos da sequência de termo geral (5.14):

a_n	Valor
a_4	3,035276180410083
a_5	3,065955435741682
a_6	3,084252850204089
a_7	3,096194954379304
a_8	3,1044960677748414
a_9	3,1105417369388597
a_{10}	3,1151059505583465

Tabela 8 – Termos da sequência de aproximações para π

Fonte: o autor

Para valores maiores de n , se torna facilitado, por meio de métodos computacionais, calcular o n -ésimo termo da sequência em (5.14), como exemplo temos, $a_{100.000.000} = 3.141592653589688$.

A construção de π como uma sequência bem definida de números é útil tanto para facilitar aproximações quanto para permitir a compreensão desse número a partir das operações elementares. Existem diversas maneiras de definir a constante π , como por meio de séries distintas da série (5.13), algumas das quais podem ser encontradas em Maor (2025, p. 74). Embora tenhamos adotado aqui uma abordagem voltada para aspectos geométricos e numéricos, a ampla ocorrência de π em vários contextos matemáticos justifica um estudo mais aprofundado, o que será feito no Capítulo 7. Na sequência, voltamos nossa atenção a outro número igualmente fundamental e transcendente: o número e , que se destaca no contexto dos logaritmos, do Cálculo Diferencial e Integral e de fenômenos de crescimento exponencial. Assim como fizemos com π , buscaremos explorar aproximações e construções que evidenciem sua profunda conexão com o infinito.

5.4.2 O Número e

Assim como π , o número e ocupa lugar central na Matemática, especialmente no Cálculo. Uma de suas definições mais elegantes relaciona-se à área sob o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, entre 1 e e , sendo essa área igual a 1, como mostrado na Figura 30. Além dessa interpretação geométrica, e possui propriedades aritméticas notáveis: é irracional, como será demonstrado nesta seção, e também transcendente, como discutido em Figueiredo (2011, p. 29).

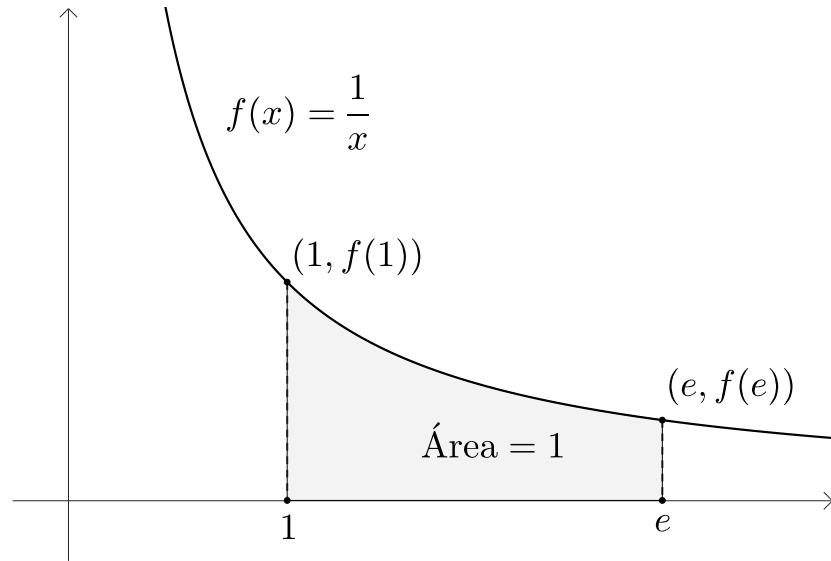


Figura 30 – Área sob o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Fonte: O autor.

Em notação do Cálculo, podemos formalizar a ideia do número e com a seguinte definição:

Definição 5.1. *O número e é o número real tal que:*

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1. \quad (5.15)$$

A notação apresentada na Equação (5.15) é útil no sentido de simplificar a definição do número e , no entanto apresenta a desvantagem de ter como pré-requisito para seu entendimento o conhecimento do conceito de integral definida. Nos cursos de Cálculo também é apresentado e demonstrado que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \quad (5.16)$$

Podemos reescrever a Equação (5.16) usando a notação de somatório:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (5.17)$$

Uma demonstração para a igualdade (5.17) pode ser encontrada em Stewart (2006, p. 760) e Muniz Neto (2022, p. 346).

Irracionalidade de e

Um fato bastante conhecido sobre o número e é que ele é irracional. A seguir, apresentaremos uma demonstração dessa propriedade, inspirada na abordagem apresentada por Figueiredo (2011, p. 7).

Teorema 5.4. *O número e é irracional.*

Demonstração. Suponhamos que e seja racional, assim existem $p, q \in \mathbb{N}$, primos entre si, tais que $e = \frac{p}{q}$. Fazendo a diferença $e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$, obtemos:

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (5.18)$$

Faremos agora uma estimativa para o segundo membro da igualdade da equação (5.18):

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \right) < \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots \right). \quad (5.19)$$

A expressão entre parêntese no último membro de (5.19) é a soma dos termos de uma P.G. cujo primeiro membro e a razão são iguais a $\frac{1}{q+1}$. Como a razão é menor do que 1, podemos fazer a soma infinita de todos os termos, logo:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots = \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}. \quad (5.20)$$

Assim por (5.19) e por (5.20) temos

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}. \quad (5.21)$$

A partir da equação (5.18) e da desigualdade (5.21), obtemos

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}.$$

E daí,

$$0 < q! \left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q}. \quad (5.22)$$

O termo central apresentado na desigualdade (5.22) é inteiro positivo, uma vez que $q!$ todos os denominadores das frações apresentadas na expressão entre parêntese. Como $\frac{1}{q} \leq 1$, a desigualdade (5.22) indica que seu termo central é um inteiro positivo entre 0 e 1, o que é um absurdo. Esse absurdo provém inicialmente da hipótese de que e é um número racional. Dessa forma somos levados a acreditar que e é um número irracional. Concluindo assim nossa demonstração. ■

Calculando aproximações para e

Um valor aproximado para e é 2,718281828459046. A igualdade (5.16) nos permite fazer ótimas aproximações para e , na Tabela 9 são apresentadas algumas aproximações para e , obtidas usando Python (os códigos podem ser encontrados no Capítulo 8):

n	$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$
0	1
1	2
2	2,5
3	2,6666666666666665
4	2,7083333333333333
5	2,7166666666666663
6	2,7180555555555554
7	2,7182539682539684
8	2,71827876984127
9	2,7182815255731922

Tabela 9 – Aproximações para e usando $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Fonte: o autor

No entanto, vamos apresentar uma forma alternativa de calcular uma aproximação para e , baseada na Definição 5.1. Para isso, consideraremos novamente a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, e utilizaremos uma abordagem geométrica: construiremos trapézios sob o gráfico dessa função, a partir do ponto $x = 1$, com base de comprimento $\delta = 0,25$. A ideia é somar as áreas desses trapézios sucessivos até que o valor acumulado se aproxime de 1. A Figura 31 ilustra esse processo. Os trapézios são da forma $E_i P_i P_{i+1} E_{i+1}$, com $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, além disso temos $\overline{E_i P_i} = \frac{1}{1 + 0,3i}$. Somaremos as áreas dos trapezédios, até obtermos o primeiro valor maior que 1, nesse caso paramos as operações. Para os trapézios da figura a seguir, temos a soma:

$$\sum_{i=0}^5 \frac{(\overline{E_i P_i} + \overline{E_{i+1} P_{i+1}}) \cdot 0,3}{2} = \frac{\left(\frac{1}{1 + 0,3(i+1)} + \frac{1}{1 + 0,3i} \right) \cdot 0,3}{2}, \quad (5.23)$$

cujo resultado é 0,9225276039749724, obtido usando Python, é menor que 1, logo uma aproximação para e seria a coordenada x do ponto E_5 , ou seja $1 + 5 \cdot 0,3 = 2,5$. Que é uma aproximação boa para $e = 2.718281828459045$.

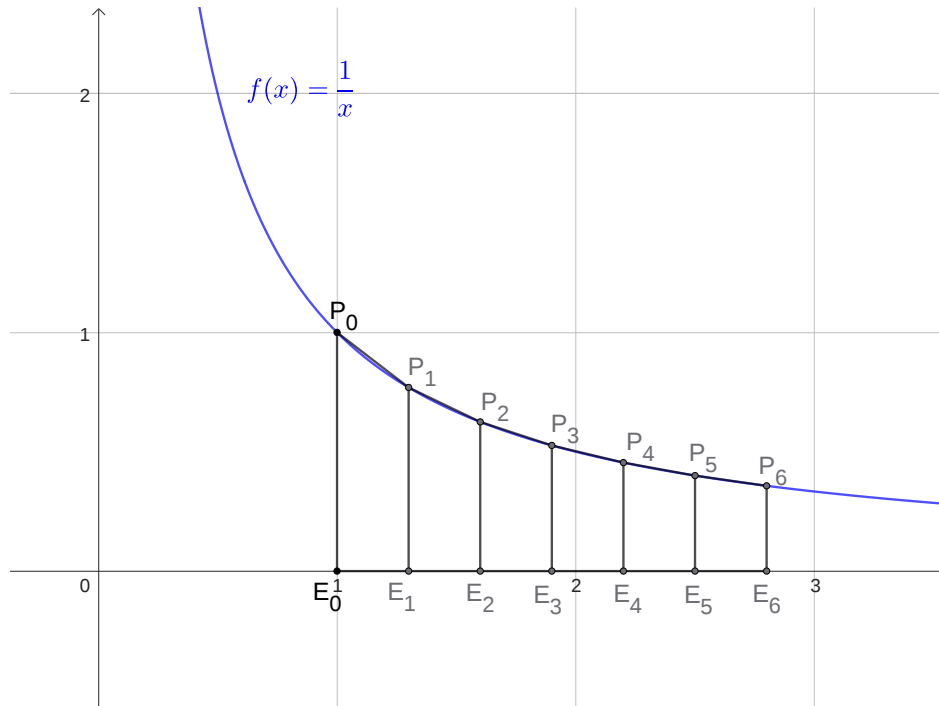


Figura 31 – Trapézios sob a curva da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Fonte: O autor.

Inicialmente escolhemos $\delta = 0,3$ para a medida da altura dos trapézios sob a curva $y = \frac{1}{x}$, no entanto quanto menor for δ , melhor será a aproximação de e . No Capítulo 8 apresentamos um código que nos permite escolher valores pequenos para δ , a fim de obtermos aproximações para e . A Tabela 10 traz aproximações para e , a partir de alguns valores para δ .

Altura do Trapézio	Aproximação de e
0,3	2,5
0,2	2,6
0,1	2,7
0,01	2,71
0,001	2,718

Tabela 10 – Aproximações para e usando áreas de trapézios

Fonte: o autor

As diferentes estratégias apresentadas para aproximar o número e , tanto por meio de séries infinitas quanto por métodos geométricos baseados em áreas, evidenciam, assim como ocorreu com o número π , a relação desses números transcendententes e o conceito de infinito. A construção de aproximações sucessivas revela não apenas seu valor numérico com alta precisão, mas também oferece um caminho didático e conceitualmente rico

para compreender sua origem e comportamento. Na próxima seção, retomaremos o ponto de vista da Teoria dos Conjuntos para abordar o surpreendente crescimento das cardinalidades.

5.5 Conjunto das partes $\mathbb{R}$

Um dos resultados mais surpreendentes da teoria dos conjuntos é o fato de que, para qualquer conjunto A , o conjunto das partes de A , denotado por $\mathcal{P}(A)$, tem uma cardinalidade maior do que o próprio conjunto A . Usando a notação $|A|$, para representar a cardinalidade do conjunto A , em símbolos, temos:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|. \quad (5.24)$$

Esse resultado foi demonstrado por Georg Cantor e é válido tanto para conjuntos finitos quanto para infinitos. Na sequência o resultado é sistematizado no Teorema 5.5, cuja redação e demonstração foram baseadas em Halmos (2001, p. 157).

Teorema 5.5 (Teorema de Cantor). *Dado um conjunto A , temos $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma função $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ que associa a cada elemento de A um subconjunto de A , e que essa função seja sobrejetiva, ou seja, que cada subconjunto de A seja imagem de algum elemento de A por meio de f . A partir dessa função, construiremos um subconjunto especial de A , definido da seguinte forma:

$$B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

Esse conjunto B contém todos os elementos de A que não pertencem ao subconjunto que lhes foi associado pela função f . Como B é um subconjunto de A , então, pela suposição, existe algum elemento $a \in A$ tal que $f(a) = B$. Agora consideramos se a pertence ou não a B :

- Se $a \in B$, então, pela definição de B , $a \notin f(a) = B$: uma contradição.
- Se $a \notin B$, então, pela definição de B , $a \in f(a) = B$: também uma contradição.

Em ambos os casos, obtemos uma contradição lógica. Isso significa que nossa suposição de que existia uma função sobrejetora de A para $\mathcal{P}(A)$ está incorreta. Portanto, não existe nenhuma correspondência completa entre os elementos de um conjunto e os seus subconjuntos. Assim, concluímos que:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Como queríamos. ■

Esse resultado vale, em particular, para o conjunto dos números naturais como foi provado no Capítulo 4. Logo, o conjunto de todas as partes de $\mathbb{N}$, ou seja, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tem cardinalidade maior que $\mathbb{N}$, o que confirma que ele é um conjunto não enumerável. Resultado já verificado no início do capítulo quando demonstramos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade.

O Teorema de Cantor nos permite construir conjuntos com cardinalidades cada vez maiores:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \dots \quad (5.25)$$

O argumento apresentado demonstra não apenas que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é um conjunto não enumerável, mas também estabelece um princípio fundamental da teoria dos conjuntos: o fato de que, para qualquer conjunto A , sempre existe um conjunto com cardinalidade estritamente maior, a saber, seu conjunto das partes. Isso inaugura uma hierarquia infinita de infinitos cada vez maiores, como indicado na cadeia de desigualdades em (5.25). Tal constatação amplia consideravelmente nossa compreensão do conceito de infinito e prepara o terreno para reflexões mais profundas. Encerramos, assim, a apresentação dos principais conjuntos não enumeráveis e suas inter-relações.

5.6 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, exploramos o conceito de número real sob diferentes perspectivas: histórica, geométrica, algébrica e conjuntista. Partimos de construções aproximadas para π e e , passando por suas definições analíticas e propriedades, como irracionalidade e transcendência, além de discutirmos métodos para suas aproximações numéricas.

Durante o capítulo, avançamos para uma investigação mais abstrata dos conjuntos numéricos, com foco na cardinalidade dos reais. Apresentamos exemplos de conjuntos não enumeráveis, como o intervalo $(0, 1)$, o conjunto das sequências binárias $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, o conjunto das partes de $\mathbb{N}$, e o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Em todos esses casos, mostramos que suas cardinalidades coincidem com a dos números reais, denotada por $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, estabelecendo, assim, um panorama dos infinitos maiores que $\aleph_0$, a cardinalidade dos conjuntos enumeráveis.

A noção de que nem todo infinito é do mesmo tamanho revelou-se uma das ideias mais transformadoras da Matemática Moderna. Ao longo deste capítulo, evidenciamos que a reta real não é apenas contínua e densa, mas também muito mais rica em termos de quantidade de elementos do que o conjunto dos números naturais ou racionais. Essa constatação abre caminho para discussões mais sofisticadas sobre o infinito, que serão objeto do próximo capítulo, no qual abordaremos paradoxos, somas infinitas e tensões conceituais associadas ao uso do infinito na Matemática.

6 Explorando o Infinito: Paradoxos, Séries e Conflitos Conceituais

6.1 Introdução: Séries e a Espiral de Teodoro

Teodoro de Cirene foi um matemático grego que nasceu em 470 a.C, teve um papel importante na formação matemática de Sócrates (EVES, 2004, p. 131), além de que um dos seus discípulos, Teeteto é possivelmente o grande responsável pelo material contido no décimo e décimo terceiro livros dos Elementos. Teodoro é reconhecido como um dos grandes contribuidores da Matemática, inicialmente organizada pelos pitagóricos, e que posteriormente que culminou nos Elementos (EVES, 2004, p. 132). Segundo Platão, Teodoro provou que os números

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15} \text{ e } \sqrt{17}, \quad (6.1)$$

são todos irracionais (CAJORI, 2007, p. 94). Além da irracionalidade para os números em (6.1), Teodoro apresentou uma construção para $\sqrt{n}$, onde $\sqrt{n}$ é a metade do cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $n + 1$ e cujo outro cateto é $n - 1$ (EVES, 2004, p. 126). De fato, seja r , uma reta, O e A , pontos em r tais que $\overline{OA} = n - 1$. Para construirmos o triângulo retângulo em questão, inicialmente tracemos por A uma perpendicular t à reta r , na sequência com o compasso centrado em O vamos traçar o círculo Γ de raio $n + 1$. Seja $P = \Gamma \cap t$, o segmento AM , onde M é o ponto médio de AP tem medida $\sqrt{n}$ (Figura 32).

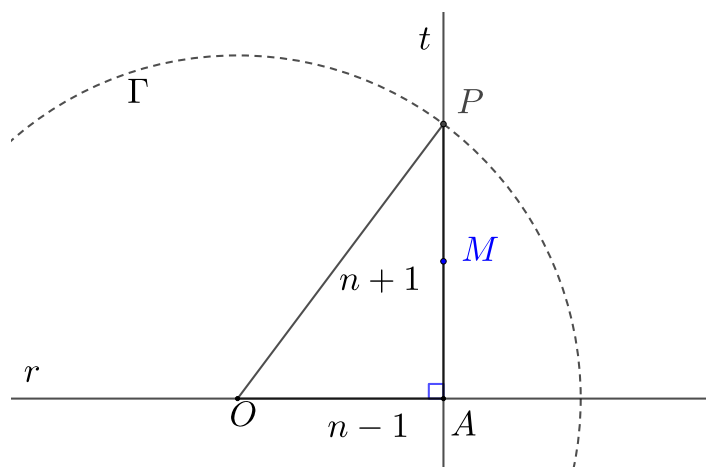


Figura 32 – Construção com régua e compasso do número $\sqrt{n}$

Fonte: o autor

Como o triângulo OAP da Figura 32 é retângulo em A , pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 \\ (n+1)^2 &= (n-1)^2 + \overline{AP}^2 \\ n^2 + 2n + 1 &= n^2 - 2n + 1 + \overline{AP}^2 \\ \overline{AP}^2 &= 4n \\ \overline{AP} &= 2\sqrt{n}.\end{aligned}$$

A tradição também atribui a Teodoro a construção de $\sqrt{n}$, com $2 \leq n \leq 17$, a partir de uma figura em forma de espiral cohecida atualmente como Espiral de Teodoro (EVES, 2004, p. 126). A espiral de Teodoro é uma figura composta por triângulos retângulos adjacentes como indicado na Figura 33.

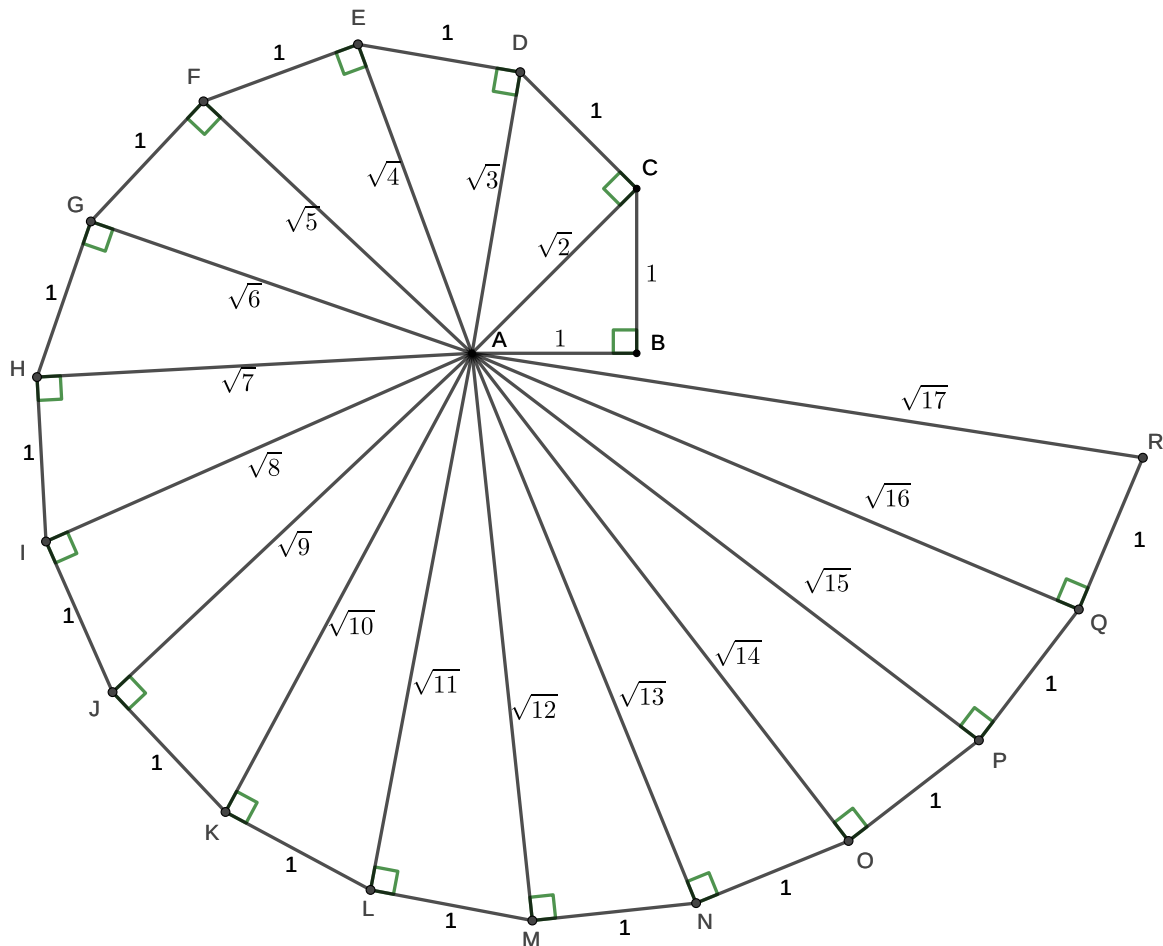


Figura 33 – Espiral de Teodoro

Fonte: o autor

A partir da espiral de Teodoro é possível construir com régua e compasso a raiz

de qualquer número inteiro positivo. Ao construirmos $\sqrt{18}$ percebemos que há uma interseção de triângulos, como indicado na Figura 34 a seguir.

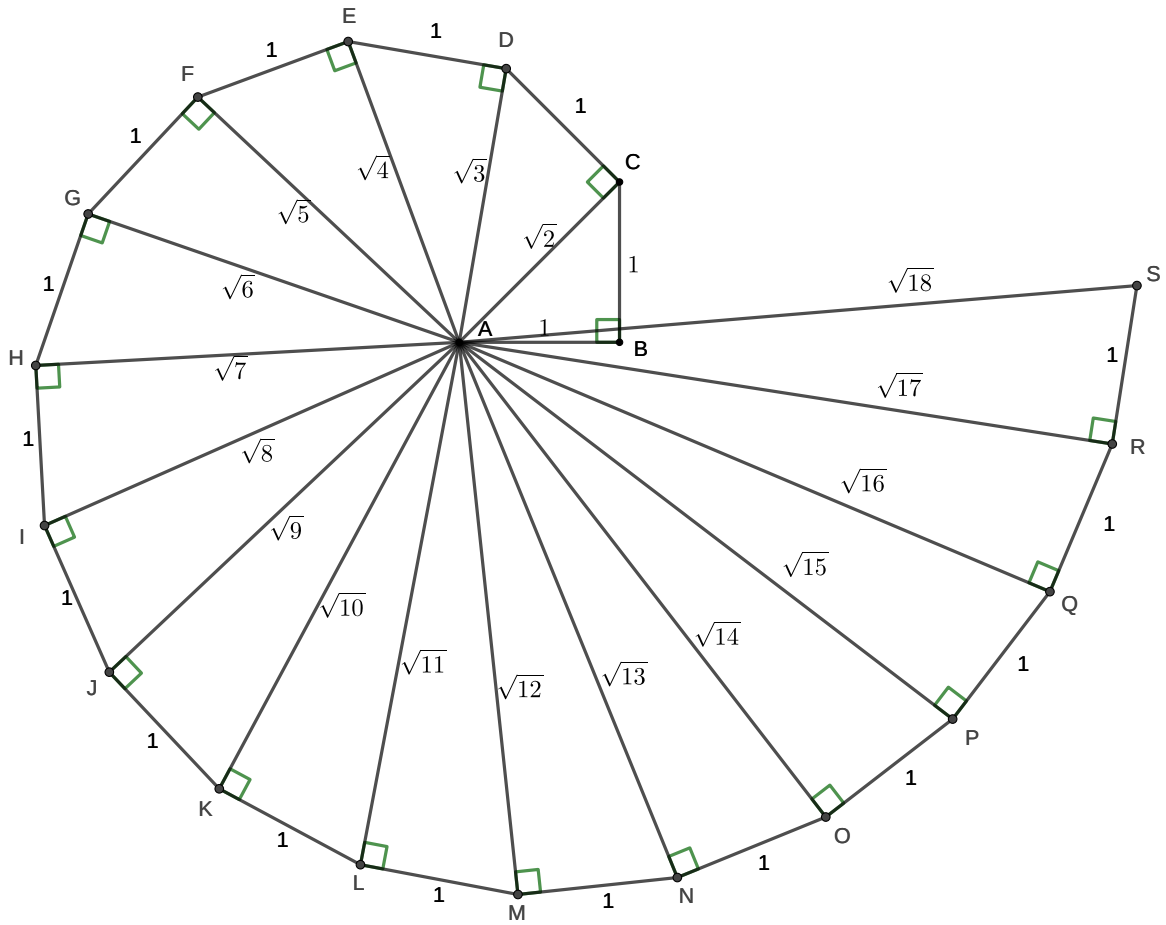


Figura 34 – Interseção de triângulos na espiral de Teodoro.

Fonte: o autor

De fato, em cada um dos triângulos ilustrados na Figura 33, o ângulo cujo vértice é o ponto A possui medida $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, com $n = 1, 2, \dots, 16$. Assim, a soma desses 16 ângulos com vértice em A pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) \\
 S_2 &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 S_3 &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
 &\vdots \\
 S_n &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
 \end{aligned}$$

A construção anterior sugere a existência de uma sequência (S_n) formada por somas de termos da sequência (a_n) , cujo termo geral é:

$$a_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Calculando a (S_{16}) , soma dos ângulos dos triângulos com vértice em A da Figura 33, obtemos:

$$S_{16} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{16}}\right) \simeq 6,13. \quad (6.2)$$

O valor da soma dos ângulos indicado em (6.2) é inferior a $2\pi \simeq 6,28$. Ao adicionarmos o ângulo $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \simeq 0,24$, essa soma ultrapassa 6,37 radianos, excedendo 2π . Indicando que o maior número que pode ser construído na espiral de Teodoro, sem que ocorra interseção entre os triângulos, é $\sqrt{17}$.

Essa análise geométrica nos conduz naturalmente à investigação de somas sucessivas de termos, formando uma sequência (S_n) . A ideia de somar indefinidamente quantidades cada vez menores é um dos pilares da Análise Matemática e da compreensão moderna do infinito. Neste capítulo, a partir desse ponto de partida visual, avançaremos para outras formulações que também desafiam nossa intuição sobre o infinito, como os paradoxos atribuídos a Zenão de Eleia, que ainda hoje suscitam questionamentos filosóficos e matemáticos profundos.

Além dos paradoxos, exploraremos situações envolvendo somas infinitas, mostrando como a Matemática Contemporânea constrói ferramentas rigorosas para tratar aparentes contradições. Questões como a igualdade $1 = 0,999\dots$ ou a ambiguidade de séries alternadas revelam a necessidade de uma linguagem precisa para lidar com o infinito. Ao longo desta seção, nosso objetivo não é apenas apresentar resultados, mas também revelar os impasses conceituais que impulsionaram avanços fundamentais na História da Matemática.

6.2 Paradoxos de Zenão

As ideias de infinito, continuidade e movimento, analisadas muitas vezes a partir dos paradoxos, estão entre as mais desafiadoras da História do pensamento (TASSARA; MORAIS; ABBUD, 2018, p. 3). Muito antes do surgimento do Cálculo e da Análise Matemática, já se questionava o que significa mover-se de um ponto a outro ou dividir uma grandeza em partes cada vez menores (ROQUE, 2012, p. 132). Os paradoxos tradicionalmente atribuídos a Zenão de Eleia operam precisamente nesse território de incerteza:

Os paradoxos de Zenão levantam uma questão fundamental sobre o universo: será que o tempo e o espaço são contínuos, infinitamente divisíveis, como habitualmente os concebemos, ou serão discretos, havendo uma unidade mínima indivisível de espaço e, analogamente, para o tempo? Estas são questões muito atuais que têm motivado acesa controvérsia nas comunidades científicas de físicos, filósofos da Ciência e matemáticos. (TAVARES, 2023, p. 3)

Apesar de serem de uma era de conhecimento que antecede a Matemática formal, levantam questões fundamentais que permanecem relevantes mesmo sob a ótica dessa Ciência (TASSARA; MORAIS; ABBUD, 2018, p. 11). Nesta seção, exploraremos algumas dessas formulações, procurando evidenciar os conflitos que surgem quando a intuição e a lógica são confrontadas com o infinito.

6.2.1 Paradoxo da Pluralidade

A tentativa de compreender o infinito remonta à antiguidade (LORIN; BATISTA, 2023), sendo o Paradoxo da Pluralidade também conhecido como a primeira antinomia de Zenão, é uma das formulações mais intrigantes nesse contexto, ele aborda especificamente o problema da multiplicidade das coisas. Podemos analisá-lo sobre a ótica da Geometria, partindo da suposição de que um segmento de reta possa ser dividido indefinidamente. No entanto, ao se considerar a possibilidade de uma divisão infinita, surgem consequências que desafiam o senso comum: como é possível obter um comprimento finito a partir da soma de infinitas partes? Ainda que esse paradoxo tenha surgido em um contexto que é anterior à Matemática formal, sua essência permanece atual, sobretudo quando se busca compreender como a Matemática Moderna lida com a ideia de soma de infinitos termos.

Dado um segmento AB , é possível marcar seu ponto médio P , dividindo o segmento em dois segmentos AP e PB (Figura 35).



Figura 35 – Ponto médio do segmento AB

Fonte: o autor

Supondo que o comprimento de AB seja 1, os segmentos AP e PB terão comprimento $\frac{1}{2}$. De maneira análoga é possível tomar os pontos médios AP e PB , respectivamente P_1 e P_2 (Figura 36). Essa construção gera quatro segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$.

Figura 36 – Pontos médios dos segmentos AP e PB

Fonte: o autor

Continuando com o processo, é possível dividir cada um dos segmentos AP_1 , P_1P , PP_2 e P_2B a partir de seus respectivos pontos médios P_3 , P_4 , P_5 e P_6 (Figura 37).

Figura 37 – Pontos médios dos segmentos AP_1 , P_1P , PP_2 e P_2B

Fonte: o autor

Na Figura 35, dividimos os segmentos AB em dois segmentos de mesmo comprimento $\frac{1}{2}$, por outro lado, na Figura 36, AB foi dividido em 4 segmentos de medida $\frac{1}{4}$ e na Figura 37, o segmento AB foi dividido em 8 segmentos de mesmo comprimento $\frac{1}{8}$. Poderíamos continuar a divisão AB em segmentos cada vez menores, de maneira que após n divisões teríamos 2^n segmentos de comprimento $\frac{1}{2^n}$. Para valores inteiros de n é imediato perceber que a soma dos 2^n segmentos de comprimento $\frac{1}{2^n}$ é 1, que é justamente a medida do segmento AB .

Esse processo pode continuar indefinidamente. A questão central do Paradoxo da Pluralidade, atribuído a Zenão de Eleia, é a seguinte: O que acontece quando o número de divisões tende ao infinito? Ou seja, o que ocorre quando n tende a infinito? Nesse ponto surgem duas contradições aparentes:

- À medida que n cresce, a fração $\frac{1}{2^n}$ vai se aproximando cada vez mais de zero, no entanto se supormos que $\frac{1}{2^n} = 0$ quando $n = \infty$, teremos uma soma de infinitos segmentos de comprimento 0, compondo o segmento AB , de maneira que AB terá comprimento

$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Contradizendo o fato de que $\overline{AB} = 1$.

- Por outro lado supondo que para n tendendo a infinito, o comprimento de cada segmento é dado por um número positivo $\epsilon > 0$, por pequeno que seja, então

somar infinitamente essas parcelas produziria um valor infinito:

$$\epsilon + \epsilon + \epsilon + \epsilon + \dots,$$

Concluindo que o comprimento de AB seria infinito, o que também é falso.

O paradoxo da pluralidade não aponta uma contradição real na Matemática, mas sim nas limitações da linguagem e da Lógica Aristotélica para lidar com o infinito. A Matemática Moderna resolve esse paradoxo ao trabalhar com o conceito de limite. Quando dizemos que estamos dividindo o segmento indefinidamente, o que estamos de fato considerando é o limite da soma de uma série convergente, e não uma soma literal de infinitos zeros ou infinitos ϵ . Assim, a soma infinita dos 2^n comprimentos $\frac{1}{2^n}$ tende para 1, mesmo que as frações $\frac{1}{2^n}$ tendam a zero.

6.2.2 Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

O paradoxo de Aquiles e a tartaruga é talvez o mais conhecido entre os paradoxos atribuídos a Zenão (TASSARA; MORAIS; ABBUD, 2018, p. 6). A situação descrita é simples: Aquiles, o mais veloz dos guerreiros, desafia uma tartaruga para uma corrida. Como gesto de generosidade, ele permite que a tartaruga largue com certa vantagem (KANGUSSU, 2004, p. 86). A partir daí, o argumento apresentado leva à surpreendente conclusão de que Aquiles nunca conseguirá alcançar a tartaruga.

Para entender essa conclusão, consideremos que, no momento em que Aquiles chega ao ponto de partida da tartaruga, esta já terá avançado uma certa distância. Quando Aquiles percorre essa nova distância, a tartaruga já terá se deslocado um pouco mais.

Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um décimo; Aquiles corre esse décimo, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro. (KANGUSSU, 2004, p. 86)

Esse processo continua indefinidamente: cada vez que Aquiles atinge a posição anterior da tartaruga, ela já não está mais lá. Ainda que as distâncias percorridas se tornem cada vez menores, sempre haverá uma nova etapa a ser vencida, levando à conclusão de que Aquiles jamais a alcançará.

A força do paradoxo está em mostrar que, mesmo sendo mais rápido, Aquiles parece prisioneiro de uma sequência infinita de metas intermediárias. A corrida se transforma

em uma sucessão de etapas infinitas, sugerindo que o movimento, quando analisado em termos de uma divisão infinita do espaço e do tempo, se torna logicamente impossível.

O paradoxo de Aquiles e a tartaruga antecipa uma discussão sofisticada sobre a soma de uma série infinita de intervalos de tempo ou espaço (TASSARA; MORAIS; ABBUD, 2018, p. 9). A Matemática Moderna resolve a aparente contradição utilizando o conceito de limite: ainda que a sequência de etapas seja infinita, o tempo total para que Aquiles alcance a tartaruga pode ser finito (TAVARES, 2023, p. 3). Essa distinção entre o número de passos e a duração total de tempo é central para superar o paradoxo, mas isso só se torna possível com o advento do Cálculo e da Análise. Podemos analisar esse paradoxo sobre a seguinte ótica, supondo que as velocidades de Aquiles e da tartaruga sejam respectivamente v_A e $\frac{v_A}{10}$, a distância percorrida por ambos após um certo tempo Δt pode ser encontrada com:

- **Distância percorrida por Aquiles:** $v_a \cdot \Delta t$
- **Distância percorrida pela tartaruga:** $10 + \frac{v_a}{10} \cdot \Delta t$

Ou após 2 tempos Δt :

- **Distância percorrida por Aquiles:** $v_a \cdot \Delta t + v_a \cdot \Delta t$
- **Distância percorrida pela tartaruga:** $10 + \frac{v_a}{10} \cdot \Delta t + \frac{v_a}{10} \cdot \Delta t$

Em linhas gerais teríamos as distâncias percorridas para ambos, após n tempos, sendo:

- **Distância percorrida por Aquiles:** $v_a \cdot (\Delta t + \Delta t + \dots)$
- **Distância percorrida pela tartaruga:** $10 + \frac{v_a}{10} \cdot (\Delta t + \Delta t + \dots)$

O paradoxo surge quando consideramos Δt cada vez menor, se aproximando de 0, assim a soma $\Delta t + \Delta t + \dots$ teria um valor tão pequeno, que o produto $v_A \cdot (\Delta t + \Delta t + \dots)$ nunca ultrapassaria $10 + \frac{v_a}{10} \cdot (\Delta t + \Delta t + \dots)$.

Podemos também analisar o paradoxo a partir da função horária do espaço para Aquiles e a Tartaruga $S = S_0 + v \cdot t$. A função horária do espaço na Física, descreve como a posição de um objeto varia com o tempo. Ela é utilizada para determinar a posição de um objeto em um determinado instante, dado seu movimento e condições iniciais. Supondo que ambos continuem seu percurso em uma mesma direção, e sendo v_T a velocidade da tartaruga e $v_A = 10v_T$ a velocidade de Aquiles, suas posições pode ser encontradas a partir $S_{\text{tartaruga}} = S_0 + v_T \cdot t$, onde S_0 é a vantagem em metros dada por Aquiles, e $S_{\text{Aquiles}} = v_A \cdot t$. Para que Aquiles alcance a tartaruga devemos ter:

$$S_{\text{Aquiles}} = S_{\text{tartaruga}} \Rightarrow t = \frac{S_0}{v_A - v_T}. \quad (6.3)$$

A segunda igualdade em 6.3 nos indica que o tempo que Aquiles levará para alcançar a tartaruga será menor quanto menor o denominador $v_A - v_T$, implicando um tempo infinito, ou seja, Aquiles nunca encontrando a tartaruga, quando $v_A = v_T$, que não é o caso. Como supomos que $v_A = 10v_T$, teríamos

$$t = \frac{S_0}{9v_T}.$$

Ou seja, nesse caso, Aquiles acompanharia a tartaruga após precisamente $\frac{S_0}{9v_T}$ unidades de tempo.

Uma formulação semelhante ao paradoxo da Aquiles e da Tartaruga, é o chamado paradoxo da dicotomia (TASSARA; MORAIS; ABBUD, 2018, p. 8). Nele, argumenta-se que, para que qualquer corpo percorra uma certa distância, é preciso antes atingir a metade desse trajeto, depois a metade da metade, e assim sucessivamente. Como há infinitas etapas a serem vencidas, conclui-se que o movimento jamais se completa. Essa estrutura argumentativa também está presente no paradoxo de Aquiles, mas, enquanto na dicotomia o foco está na divisão progressiva do espaço, em Aquiles e a tartaruga o destaque recai sobre a repetição infinita de metas intermediárias. Em ambos os casos, o infinito aparece como obstáculo lógico à ideia de movimento contínuo.

De forma indireta, o paradoxo da dicotomia apresenta uma reflexão sobre somas de infinitos termos como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots, \quad (6.4)$$

que em termos da Matemática atual, converge para 1, ou em símbolos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Na sequência faremos uma discussão sobre essa igualdade.

6.2.3 A soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

O paradoxo da dicotomia nos leva a refletir sobre o comportamento de processos infinitos, especialmente no contexto de divisões sucessivas de um intervalo. A ideia de que um percurso finito pode envolver infinitas etapas desafiou, por séculos, a noção de completude no movimento e no espaço. Uma atual de abordar esse tipo de situação é por meio das chamadas séries infinitas, onde somamos infinitos termos de uma sequência. A sequência dos deslocamentos sugeridos no paradoxo, percorrer metade do caminho, depois metade do restante, depois metade do que resta e assim por diante, pode ser representada pela soma dos termos da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$. A seguir, analisaremos essa soma por meio de suas somas parciais, o que nos permitirá compreender melhor como o “infinito” pode resultar em um valor finito.

Dada uma sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, podemos contruir outra sequência (s_n) formada pela somas parciais dos termos de (a_n) . De maneira geral podemos construir

(s_n) da seguinte forma:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k.$$

Podemos também denotar os termos de (s_n) usando o símbolo de somatório $\sum$

$$\left(s_1 = \sum_{i=1}^1 a_i, \quad s_2 = \sum_{i=1}^2 a_i, \quad s_3 = \sum_{i=1}^3 a_i, \dots, \quad s_k = \sum_{i=1}^k a_i, \dots \right).$$

Grosso modo, a notação $\sum_{i=1}^k a_i$ pode ser entendida como a soma dos termos da sequência (a_n) começando em 1 até o k -ésimo termo. Para exemplificar, vamos pensar na somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$:

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad s_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k}.$$

Uma série é a soma de todos os termos de uma sequência, ou em termos matemáticos, dada uma sequência (a_n) uma série S é a soma $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Para a sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, temos a série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Analisando a sequência das somas parciais de $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, obtemos: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\right)$. Nos permitindo conjecturar que a soma de k termos da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ é dada por $\frac{2^k - 1}{2^k}$. Provemos que de fato, a soma de k primeiros termos da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ é $\frac{2^k - 1}{2^k}$, para isso vamos usar indução em k . Para $k = 1$, temos

$$s_1 = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

Suponhamos agora que $s_k = \frac{2^k - 1}{2^k}$ para algum k inteiro, fazendo

$$s_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (6.5)$$

O primeiro membro da igualdade (6.5) é por definição s_{k+1} , realizando a soma no segundo membro de (6.5), obtemos

$$\frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^k - 1) + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Obtemos $s_{k+1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$, concluindo nossa demonstração por indução.

O fato de que a k -ésima soma parcial da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ é dada por $\frac{2^k - 1}{2^k}$, nos permite verificar que para valores grandes de k temos $\frac{2^k - 1}{2^k}$ próximo de 1, sem, no entanto, ser exatamente 1 ou ultrapassar 1. Como exemplo, para $k = 10$ temos

$$s_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}.$$

Que é uma fração muito próxima de 1. Outra forma de verificar que os termos da sequência de somas parciais de $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ vão se aproximando de 1 é usando um código Python. Usando a linguagem de programação, calculamos as somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ até o 10º termo, obtendo a Tabela 11. Os valores na Tabela 11 mostram que, à medida que somamos mais termos da sequência, o valor acumulado se aproxima cada vez mais de 1, embora nunca o ultrapasse. Isso evidencia o fenômeno da convergência: mesmo com infinitos termos, a soma total tende a um número real finito.

Número de termos	Soma parcial
1	0,5
2	0,75
3	0,875
4	0,9375
5	0,96875
6	0,984375
7	0,9921875
8	0,99609375
9	0,998046875
10	0,9990234375

Tabela 11 – Somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Fonte: o autor

As somas parciais na segunda coluna da da Tabela 11 indicam uma aproximação cada vez maior de 1. No caso específico da série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, formalmente dizemos que é uma série convergente, uma vez que a sequência de somas parciais se aproxima de um valor específico, e escrevemos: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Voltaremos a estudar essa série na Seção 6.3, onde ela será classificada como uma *série geométrica*, ou seja, uma série que soma os termos de uma progressão geométrica infinita.

6.2.4 Paradoxo da Flexa em Voo

De acordo com Tavares (2023, p. 1), Zenão pode ter criado cerca de quarenta paradoxos, dentre eles os dois tratados nas subseções anteriores, todos com o objetivo de demonstrar os absurdos da multiplicidade, da divisibilidade e do movimento, defendendo que estes seriam meras ilusões. Outro paradoxo atribuído ao filósofo grego é o da flecha em voo.

O paradoxo da flecha afirma que o movimento é ilusório. Segundo Zenão, uma flecha lançada em direção ao alvo, em qualquer instante de tempo, ocupa um único ponto fixo do espaço. Se em cada instante ela está imóvel, então está sempre parada, e nunca se move. O argumento parece absurdo, mas levanta uma dificuldade real: como pode haver movimento se o tempo é composto por instantes indivisíveis, em que nada acontece?

Esse raciocínio supõe que o tempo é uma sequência de estados pontuais, e que o movimento deveria ocorrer dentro de cada instante. O paradoxo confronta a experiência contínua do movimento com uma tentativa de analisá-lo por momentos estáticos. Sua resolução, como nos demais paradoxos de Zenão, exige a formalização da Matemática do Contínuo, sobretudo com o Cálculo Diferencial.

Na linguagem moderna, a posição de um corpo em movimento é descrita por uma função $s(t)$, que associa a cada instante t uma posição no espaço. O movimento não ocorre em um instante isolado, mas entre instantes. Isso é evidenciado pela definição da velocidade instantânea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Esse valor representa a taxa de variação da posição em um instante e permite descrever rigorosamente o movimento, ainda que a posição permaneça constante em cada ponto do tempo. Em outras palavras, o movimento se expressa por essa taxa, e não por deslocamentos dentro de um instante.

O paradoxo da flecha não revela uma contradição no movimento real, mas uma limitação do pensamento estático ao tentar compreender o contínuo. Com as ferramentas da Análise Matemática, é possível formalizar o movimento de forma consistente, preservando a continuidade do tempo e a noção de velocidade instantânea. O que Zenão apontou como um problema tornou-se, séculos depois, um fundamento da Física e da Matemática Moderna.

6.3 Somas Infinitas: Intuições Que Podem Enganar

Ao longo da história, somas infinitas despertaram tanto fascínio quanto perplexidade. A possibilidade de somar infinitas parcelas e obter um valor finito desafia a intuição. Embora pareça natural esperar que uma soma infinita cresça sem limites, exemplos clássicos mostram o contrário, e em alguns casos, manipulações ingênuas levam a resultados contraditórios. Nesta seção, investigamos essas situações à luz dos conceitos de convergência, divergência e reordenação de termos.

6.3.1 Sobre $0,999\dots = 1$ e séries geométricas

A sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ é classificada com uma progressão geométrica. Em termos gerais, uma progressão geométrica é uma sequência (a_n) , tal que dados quaisquer dois termos consecutivos a_k e a_{k+1} , temos $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, o número q é chamado razão da progressão geométrica. No caso da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, temos $q = \frac{1}{2}$. Quando temos uma progressão geométrica (a_n) de razão $0 < q < 1$ ou $-1 < q < 0$ é possível provar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}. \quad (6.6)$$

Para a demonstração de (6.6), primeiro observamos que uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão q , pode ser reescrita como

$$(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}, \dots). \quad (6.7)$$

Vamos somar os n primeiros termos da sequência (6.7), e seja

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (6.8)$$

o valor dessa soma. Multiplicando os dois membros de (6.8) por q , obtemos

$$s_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n. \quad (6.9)$$

Subtraindo (6.9) de (6.8), vem

$$s_n - s_nq = a_1 - a_1q^n \Rightarrow s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \quad (6.10)$$

Donde obtemos $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ para a soma dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q . O argumento usado não demonstra a veracidade da igualdade na segunda parte da implicação (6.10), mas nos traz um indicativo da fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Na sequência faremos uma demonstração para a fórmula, usando indução matemática.

Dada uma progressão geométrica (a_n) de primeiro termo a_1 e razão q , encontramos a fórmula

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (6.11)$$

como uma possível fórmula para a soma dos seus n primeiros termos. Faremos agora uma demonstração mais detalhada da veracidade de (6.11).

Teorema 6.1. *Dada progressão geométrica (a_n) de primeiro termo a_1 e razão q , a soma de seus n primeiros termos é*

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução matemática. Para uma progressão geométrica (a_n) de primeiro termo a_1 e razão q , seja a afirmação

$$p(n) : s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Onde s_n é a soma dos n primeiros termos de (a_n) . Queremos provar que $p(1)$ é verdadeira e que $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$, concluindo assim nossa demonstração por indução matemática. De fato:

- por definição temos $s_1 = a_1$ e $p(1) : s_1 = \frac{a_1(1 - q^1)}{1 - q} = a_1$, logo $p(1)$ é verdade, vamos provar agora que $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$;
- Suponhamos que $p(n)$ seja válida para algum inteiro n , logo

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (6.12)$$

Adicionando a_{n+1} a ambos os membros da igualdade (6.12), vem:

$$s_n + a_{n+1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} + a_{n+1}. \quad (6.13)$$

A soma $s_n + a_{n+1}$ no primeiro membro de (6.13) é por definição s_{n+1} , para realizar a soma no segundo membro, primeiro devemos observar que $a_{n+1} = a_1 q^n$, e portanto:

$$\frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} + a_1 q^n = \frac{a_1(1 - q^n) + a_1 q^n(1 - q)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1 q^n + a_1 q^n - a_1 q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dessa forma o segundo membro da igualdade (6.13) é $\frac{a_1(1 - q^{n+1})}{1 - q}$. De sorte

que $s_{n+1} = \frac{a_1(1 - q^{n+1})}{1 - q}$, que é precisamente $p(n + 1)$. Logo verificamos que $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$.

Como $p(1)$ é verdadeira e $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$, por indução $p(n)$ também é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Para uma progressão geométrica $(a_n) = (a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots)$, a soma dos n primeiros termos é dada por

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Suponhamos que $0 < q < 1$, assim para n arbitrariamente grande, temos q^n muito próximo de 0. Voltando ao exemplo da progressão geométrica $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, cuja razão é $q = \frac{1}{2}$, temos os seguintes valores da Tabela 12 para as 8 primeiras potências de q .

n	$(1/2)^n$
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125
6	0,015625
7	0,0078125
8	0,00390625

Tabela 12 – Potências de $\frac{1}{2}$

Fonte: o autor

Indicando que nesse caso, os valores de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ vão se aproximando cada vez mais de 0 à medida que aumentamos n . Podemos generalizar da seguinte forma, para uma progressão geométrica $(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots)$, onde $0 < q < 1$, podemos somar todos os seus termos, ou seja, ao tomarmos $n = \infty$, teremos

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Uma vez que $1 - q^n$ vai para 1 quando n vai para infinito. Uma aplicação interessante dos conhecimentos desenvolvidos nessa seção é a análise da progressão geométrica $\left(\frac{9}{10^n}\right)$ e da série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$. Enquanto progressão geométrica, a sequência $\left(\frac{9}{10^n}\right)$ tem razão $\frac{1}{10}$, e assim pode ter todos os seus termos somados, de modo que:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

No entanto quando, observamos alguma das somas parciais dos termos da sequência $\left(\frac{9}{10^n}\right)$ obtemos

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{9}{10} = 0,9 \\ s_2 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = 0,99 \\ s_3 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = 0,999 \\ s_4 &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} = 0,9999. \end{aligned}$$

O que nos permite supor que na verdade o valor da série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$ é $0,999\dots$. Ou em outras palavras temos $1 = 0,999\dots$. A igualdade $0,999\dots = 1$ nos ensina que certas

expressões infinitas, por mais estranhas que pareçam à primeira vista, fazem sentido dentro do rigor matemático. Ela desafia a intuição de que um número representado com infinitas casas decimais não pode coincidir com um número “exato”, mas essa visão se desfaz quando compreendemos que a notação decimal infinita é apenas uma forma diferente de representar o mesmo valor. Ao final, o caso do $0,999\dots$ não é um erro da Matemática, mas sim uma lição sobre os limites da linguagem informal e a necessidade de se compreender o significado dos símbolos e operações que utilizamos.

6.3.2 A série alternada $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

A associatividade é uma propriedade fundamental da adição de números reais. Ela garante que, ao somarmos três números reais quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, a ordem das operações não altera o resultado:

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (6.14)$$

Quando lidamos com somas infinitas, em muitas situações, não é possível aplicar a propriedade (6.14), um exemplo disso pode ser observado na série

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \quad (6.15)$$

Poderíamos proceder com as operações no segundo membro de (6.15) da seguinte forma

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots, \quad (6.16)$$

que é uma soma de infinitas parcelas de valor 0, e portanto temos $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} = 0$. Por outro lado podemos fazer

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots, \quad (6.17)$$

que é uma soma de uma parcela 1 com infinitas parcelas 0, e assim tem valor 1.

A partir das expressões (6.16) e (6.17), percebemos que a série (6.15) tem valor 0 ou 1, dependendo da forma como realizamos a soma. Quando pensamos na comutatividade, onde dados dois reais a e b , temos $a + b = b + a$, poderíamos pensar em um rearranjo das parcelas da soma no segundo membro de (6.15):

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \quad (6.18)$$

De maneira que fazendo $-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, teríamos uma soma de valor -1 , ou 0 caso fizéssemos $(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$. Em termos gerais, analisando as somas parciais sequência $(a_n = (-1)^{n+1})$, percebemos que as somas vão oscilando em 1 ou 0, a sequência $(a_n = (-1)^n)$ que resulta na série (6.18), tem suas somas parciais oscilando em -1 ou 0. Como podemos observar na tabela a seguir:

	$((-1)^{n+1})$	$((-1)^n)$
s_1	1	-1
s_2	$1 - 1 = 0$	$-1 + 1 = 0$
s_3	$1 - 1 + 1 = 1$	$-1 + 1 - 1 = -1$
s_4	$1 - 1 + 1 - 1 = 0$	$-1 + 1 - 1 + 1 = 0$
s_5	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$	$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1$

Tabela 13 – Primeiras somas parciais das sequências $((-1)^{n+1})$ e $((-1)^n)$

Fonte: o autor

A instabilidade da série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ pode ser ainda melhor compreendida quando se considera o efeito da reordenação de seus termos. Embora a série, quando escrita na ordem usual, oscile entre 1 e 0, é possível rearranjar seus termos para que o somatório parcial ocile de formas a diferentes, dependendo da forma como os agrupamentos são feitos. Por exemplo, suponha que tomemos dois termos positivos para cada termo negativo: $1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \dots$. Essa nova sequência de somas parciais assume os valores 1, 2, 1, 2, 1, 2, e assim por diante, oscilando entre 1 e 2. Já se tomarmos mais termos negativos, como em $1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + \dots$, o comportamento muda novamente. Nesse caso, os valores parciais passam a oscilar entre -1 e 2. Dependendo da ordem escolhida, é possível fazer com que a sequência das somas parciais varie dentro de diferentes intervalos. Essa instabilidade mostra que, em séries infinitas como essa, a ordem dos termos influencia diretamente o comportamento da soma.

Esse fenômeno não ocorre apenas na série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ em específico. Existe um resultado em Análise Matemática, onde se apresenta o fato de que para alguns tipo de série, é possível rearranjar os termos de modo que a mesma seja convergente para qualquer número real, ou até mesmo que ela não seja convergente, no caso inicial de a série ser convergente (esse resultado e sua demonstração pode ser encontrado em Ávila (2012, p. 87)). A análise das séries

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ e } e - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

revelam que, ao trabalhar com somas infinitas, não basta considerar os termos isoladamente, a ordem e o método de agrupamento dos termos também desempenham um papel crucial no resultado final.

6.3.3 A soma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Uma das séries mais estudadas na História da Matemática é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (6.19)$$

conhecida como série harmônica. Em um primeiro momento pode-se supor que, como seus termos ficam cada vez menores, tendendo a zero, e tal qual a série $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, que converge para 1, a série harmônica também converge para um valor real finito. Essa suposição toma ainda mais embasamento quando analisamos suas somas parciais. Calculamos os 10 primeiros termos da sequência de somas parciais de $\left(\frac{1}{n}\right)$. Os valores obtidos estão organizados na Tabela 14 a seguir:

Número de termos	Soma parcial
1	0,5
2	1,5
3	1,8333333333333333
4	2,0833333333333333
5	2,2833333333333333
6	2,4499999999999997
7	2,5928571428571425
8	2,7178571428571425
9	2,8289682539682537
10	2,9289682539682538

Tabela 14 – Primeiros 10 termos da sequência de soma parciais de $\left(\frac{1}{n}\right)$

Fonte: o autor

Ao calcularmos a soma parcial para valores maiores obtemos a seguinte Tabela 15 que reforça à expectativa de que a soma total se aproxime de algum valor finito.

Número de termos	Soma parcial
10.000	9,787606036044348
100.000	12,090146129863335
1.000.000	14,392726722864989
10.000.000	16,695311365857272
100.000.000	18,997896413852555
1.000.000.000.000	21,30048150234855

Tabela 15 – Somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$, para valores grandes de n

Fonte: o autor

Pelos valores observados na Tabela 15, percebemos que grandes valores de n não produzem mudanças significativas na soma parcial de $\left(\frac{1}{n}\right)$. No entanto, esse é mais um exemplo de como o infinito pode enganar. Apesar de seus termos tenderem a zero, a

série harmônica não converge para nenhum valor específico, ou seja, sua soma cresce indefinidamente.

Essa conclusão é conhecida desde o século XIV, com Nicole Oresme, que apresentou uma demonstração engenhosa e acessível (ÁVILA, 1995, p. 56). O argumento consiste em agrupar os termos da série da seguinte forma:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Observa-se que cada grupo contém um número de parcelas que dobra a cada passo, e a soma de cada grupo é maior que $\frac{1}{2}$. Assim, temos uma infinidade de grupos com soma maior que $\frac{1}{2}$, o que mostra que a soma total não pode ser finita. Esse exemplo é importante para mostrar que a simples diminuição dos termos de uma série não garante sua convergência. O critério de que “os termos tendem a zero” é necessário, mas não suficiente. A série harmônica, portanto, é um marco no estudo das séries infinitas: ela nos obriga a abandonar a intuição ingênua e buscar critérios mais rigorosos para decidir quando uma soma infinita realmente se aproxima de valor numérico finito.

6.4 Considerações Finais do Capítulo

Os exemplos analisados neste capítulo mostram como a noção de infinito pode gerar conflitos entre a intuição e a formalização matemática. Paradoxos como os de Zenão desafiam concepções básicas de tempo, espaço e movimento, revelando que, sem um aparato conceitual adequado, é possível construir argumentos que parecem provar a impossibilidade do deslocamento. Foi com o desenvolvimento do Cálculo e da Análise que se tornou possível tratar rigorosamente grandezas variáveis e definir com precisão conceitos como limite, continuidade e velocidade instantânea.

Do mesmo modo, as somas infinitas apresentadas, como na igualdade $0,999\dots = 1$, nas séries alternadas ou na série harmônica, demonstram que, ao lidarmos com infinitos termos, a ordem, o método e os critérios de convergência importam tanto quanto os valores individuais. A soma de infinitos não segue as regras da Aritmética comum, e a Matemática precisou refinar suas definições para lidar com isso de forma coerente.

O infinito, portanto, não é apenas uma questão de quantidade, mas de processo, de limite e de linguagem. Muitas das aparentes contradições analisadas não são falhas da Matemática, mas desafios que estimularam seu desenvolvimento. Compreendê-las é também compreender como a Matemática cresceu ao enfrentar suas próprias fronteiras conceituais.

7 Aparentes Absurdos Matemáticos: O Infinito em π e $\sqrt{2}$

7.1 Introdução: Estimando a Área de uma Elipse

Na Figura 38 é mostrada uma elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$, e que tem $B = (2, 0)$, como um de seus vértices.

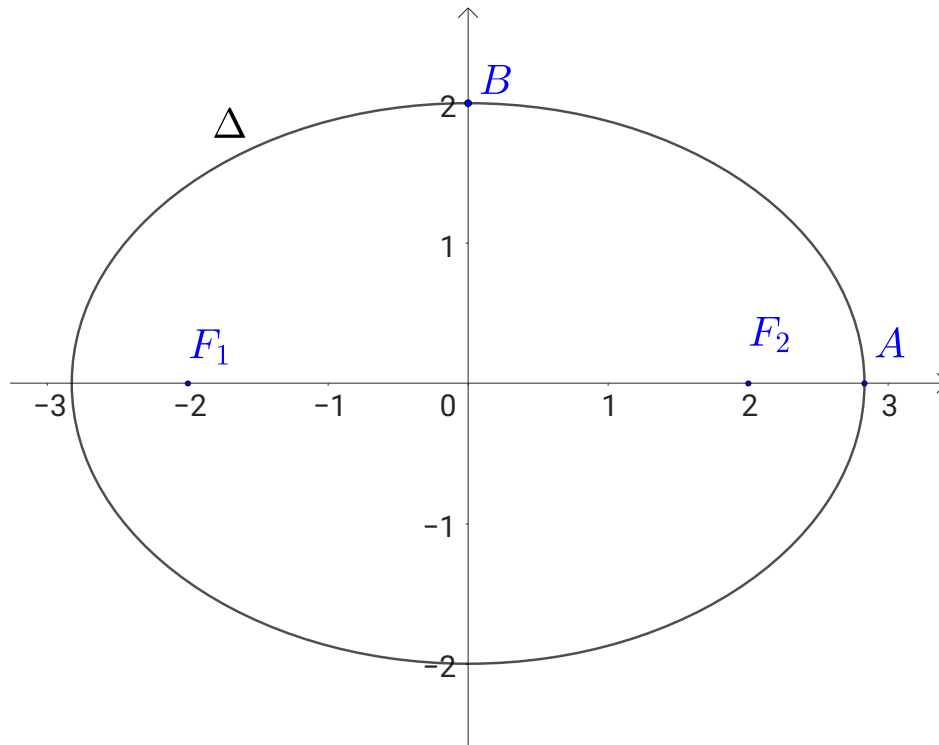


Figura 38 – Elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$ e vértice $B = (2, 0)$

Fonte: O autor.

A partir da discussão apresentada em Reis e Silva (1996, p. 56), é possível encontrar as coordenadas dos demais vértices, a começar pela coordenada do vértice no eixo maior $A = (a, 0)$. Temos $F_1 = (c, 0)$ e $B = (b, 0)$, e como $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$a = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Logo a equação de Δ na Figura 38 é $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Uma pergunta que interessa a nosso trabalho é qual seria a área da região compreendida pela elipse Δ ? Encontramos a resposta nos livros Cálculo. Uma elipses que tem como eixo maior a e eixo menor b , é: $S = \pi ab$, assim para a elipse anterior, vem:

$$S = \pi \cdot \sqrt{8} \cdot 2 \simeq 17,77.$$

Uma aproximação para a área compreendida pela elipse Δ da Figura 38, poderia ser feita, estimando a área sob a curva da função $f : [-\sqrt{8}, \sqrt{8}] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2}}, \quad (7.1)$$

Cujo gráfico é a parte superior da elipse Δ . Na Figura 39, marcamos alguns pontos sobre o gráfico da função definida por 7.1.

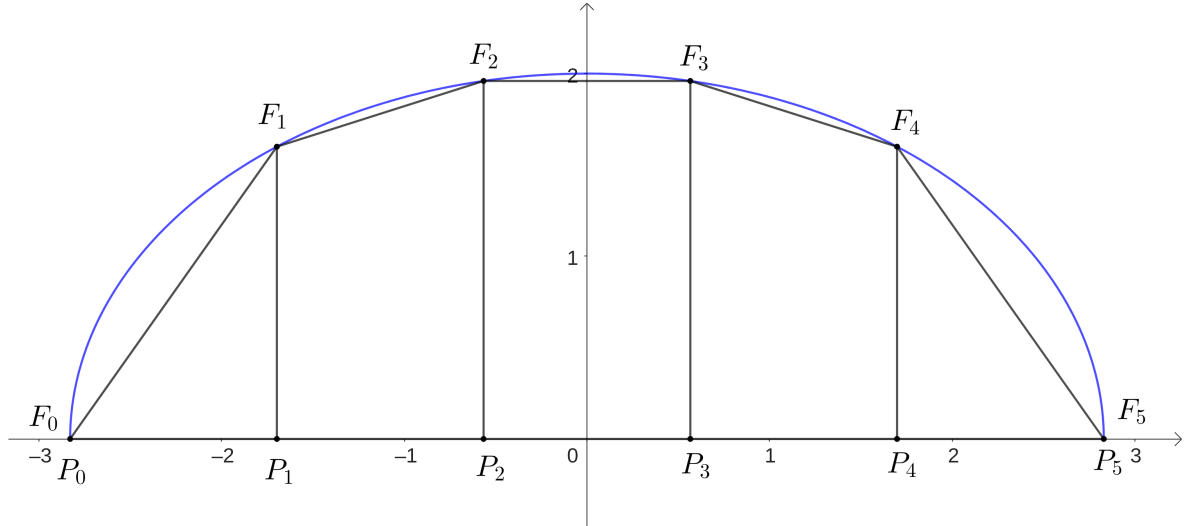


Figura 39 – Estimativa da área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2}}$.

Fonte: o autor

Consideramos os pontos $P_k = (x_k, 0)$ e $F_k = (x_k, f(x_k))$, com $x_k = -\sqrt{8} + k \cdot h$ e $h = \frac{2\sqrt{8}}{5}$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. A área sob o gráfico pode ser aproximada pela soma das áreas dos trapézios $P_i P_{i+1} F_i F_{i+1}$, com $i = 0, 1, 2, 3, 4$, resultando na expressão:

$$S = \sum_{k=0}^4 \frac{[f(x_k) + f(x_{k+1})] \cdot h}{2}.$$

Admitimos, aqui, uma concessão conceitual ao considerar os triângulos $P_0 F_1 P_1$ e $P_4 F_4 P_5$ como trapézios com uma das bases nulas. O cálculo fornece uma área aproximada de 8,054 para a metade superior da elipse e, ao dobrarmos esse valor, obtemos 16,11, valor próximo de 17,77. À medida que aumentamos n , refinando a aproximação com mais trapézios, os valores se aproximam de 17,77. A Tabela 16 apresenta essas aproximações para diferentes valores de n (os códigos usados estão no Capítulo 8).

Números de Trapézios	Área aproximada da elipse
10	17,18
50	17,72
100	17,75
500	17,77

Tabela 16 – Aproximações para área da elipse.

Fonte: o autor

No entanto, essa aproximação da área obtida com $\pi \cdot \sqrt{8} \cdot 2$ pode suscitar uma pergunta: o que exatamente é o número π , que aparece na fórmula $S = \pi ab$ para o cálculo da área de uma elipse de eixo maior a e eixo menor b ?

A ideia de infinito continua a produzir questionamentos que, muitas vezes, desafiam o senso comum e até mesmo resultados bem estabelecidos da Matemática. Neste capítulo, retomamos esse tema por meio de exemplos que, à primeira vista, parecem absurdos, como as “verificações” de que $\pi = 4$ ou de que $\sqrt{2} = 2$. Longe de meros equívocos, esses raciocínios revelam armadilhas conceituais e dificuldades em lidar com aproximações, limites e com a própria natureza dos objetos matemáticos.

Na primeira parte, exploraremos diferentes formas de definir e aproximar o número π , recorrendo a fontes históricas, argumentos geométricos e até simulações probabilísticas. Na segunda parte, analisamos um argumento que leva à conclusão equivocada de que $\sqrt{2} = 2$, a partir de uma sequência de construções geométricas sobre a diagonal de um quadrado. Em ambas as seções, o infinito se manifesta por meio de processos de refinamento, seja na soma de infinitas parcelas, seja na divisão contínua de segmentos, apontando para os limites da intuição e a importância do rigor matemático.

7.2 Quando π Parece Ser 4: Aproximações, Definições e Armadilhas do Infinito

Na Bíblia, no primeiro livro de Reis, capítulo 7, versículo 23, podemos obter dados que nos permitem calcular uma aproximação para π :

Hiram fez ainda o Mar¹, todo de metal fundido, com cinco metros de diâmetro. Era redondo, tinha dois metros e meio de altura, e sua circunferência tinha quinze metros. (BÍBLIA SAGRADA, 2005, p. 312)

¹ O mar de bronze era um grande reservatório de água necessária para as purificações rituais e a limpeza do Templo.

Sabemos que o número π é obtido dividindo a circunferência de círculo por seu diâmetro. Dessa forma com base nas informações do versículo anterior temos: $\pi = \frac{15}{5} = 3$. Em outra tradução para a língua portuguesa do livro sagrado do cristianismo, obtemos para 1Reis, 7:23:

Hurão fez também uma piscina, chamada Mar, de metal fundido, redonda, medindo quatro metros e meio de diâmetro e dois metros e vinte e cinco centímetros de altura. Era necessário um fio de treze metros e meio para medir a sua circunferência. (BÍBLIA SAGRADA, 2012, p. 424)

De onde obtemos $\pi = \frac{13,5}{4,5} = 3$. Para além das diferenças de linguagem e dados apresentados no versículo tirado das duas versões em língua portuguesa, os dois textos concordam essencialmente em um detalhe, que em linguagem da Matemática moderna, ficaria: $\pi = 3$. No entanto no dia-a-dia do contexto escolar nos é indicado que uma boa aproximação para o número π é 3,14. Nessa Seção faremos uma abordagem do número π , onde apresentaremos uma forma de encontrar aproximações para o mesmo. Na sequência apresentaremos um raciocínio que contradizendo o texto bíblico, e os manuais de Matemática, “prova” que na verdade temos $\pi = 4$.

7.2.1 Definições do Número π

Razão entre circunferência e diâmetro de um círculo

Em alguns livros de Matemática para a educação básica o número π é apresentado como a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, esse é caminho adotado por Dolce e Pompeo (2013), o número π é apresentado partir de propriedade dos círculos: “A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um número constante representado por π ” (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 282). Já em Coutinho (2014), onde o autor apresenta uma metodologia para trabalhar o número π em sala de aula. Ele propõe o uso de diferente itens circulares, os quais teriam sua circunferência medida:

Agora, diga que, se dividirmos esse comprimento pelo diâmetro da circunferência ($2R$) obteremos, aproximadamente 3,14159. E que isso ocorrerá **SEMPRE**, em **QUALQUER** circunferência. Demonstre esse fato usando os outros objetos que você trouxe. Esse n. (irracional) passará a ser notado pela letra grega π (pi). (COUTINHO, 2014, p. 229)

O destaque dado às palavras *sempre* e *qualquer* observadas na citação anterior são do autor da mesma. Para além das críticas à metodologia usada, e sobretudo à forma como é apresentado o número π aos estudantes, vemos que π , por essa definição, está

associado a pelo menos dois conceitos: circunferência e diâmetro. Seguindo um caminho semelhante para definir π temos Wagner (2017) que na página 38 escreve: “O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro”. Nesse caso, o escritor é mais cuidadoso e indica:

Mas, o que é o comprimento de uma circunferência? Nós sabemos o que é o comprimento de um segmento, mas temos apenas uma ideia intuitiva do que seja o comprimento de uma circunferência. (WAGNER, 2017, p. 38)

Na sequência encontramos em Wagner (2017) uma argumentação que ajuda a construir uma ideia intuitiva do que é comprimento de uma circunferência, e na sequência uma definição precisa do conceito:

O comprimento da circunferência é, por definição, o número real cujas aproximações por falta são o perímetro dos polígonos regulares inscritos e cujas aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos regulares circunscritos. (WAGNER, 2017, p. 38)

Que traz a vantagem de indicar uma forma de calcular o comprimento de uma circunferência fazendo aproximações por polígonos inscritos e circunscritos à mesma.

Com essa definição podemos dizer que o número “ π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1”. Cujas verificação é imediata, uma vez que

$$\pi = \frac{\text{circunferência}}{\text{diâmetro}}, \text{ logo temos circunferência} = \pi \text{ quando diâmetro} = 1.$$

Com base nisso podemos verificar que o comprimento da circunferência de raio r é dado por $2\pi r$.

A definição de π como a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro nos leva naturalmente à questão de como medir esse comprimento. Enquanto em segmentos de reta essa medida é direta, em curvas, como a circunferência, ela exige mais cuidado. Historicamente, utilizar polígonos regulares inscritos ou circunscritos foi uma estratégia eficaz para aproximar o comprimento curvilíneo, estabelecendo uma ponte entre a Geometria e a Análise por meio do conceito de limite. Sob essa perspectiva, podemos demonstrar a fórmula do comprimento de uma circunferência de raio r , assumindo que π representa o comprimento de uma circunferência de diâmetro 1.

Proposição 7.1. *O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$. Onde π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro 1.*

Demonstração. Dados dois círculos Γ e Δ , cujos diâmetros são respectivamente 1 e $2r$, ambos com um mesmo centro C . Vamos construir um polígono regular de 6 lados

com vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 em Γ , na sequência prolongaremos cada um dos segmentos CA_i , com $i = 1, \dots, 6$, obtendo assim pontos B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6 em Δ , vértices de um polígono regular de 6 lados (Figura 40).

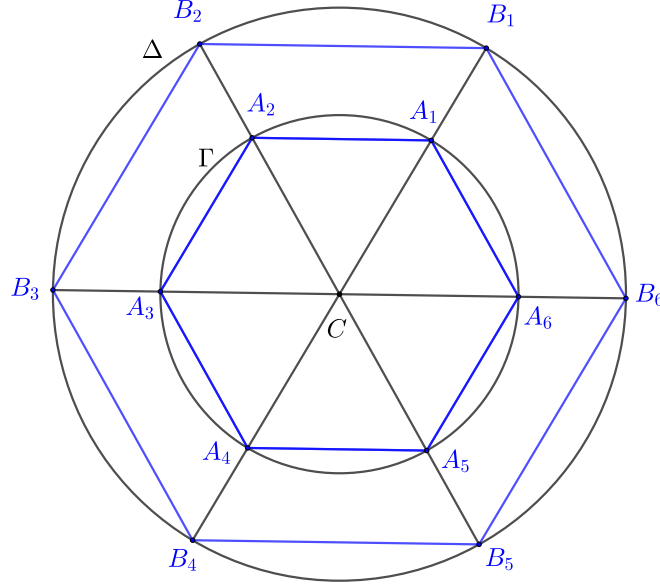


Figura 40 – Polígonos de 6 lados inscritos em círculos de diâmetros 1 e $2r$

Fonte: o autor

Os triângulos CA_iA_{i+1} e CB_iB_{i+1} , com $i = 1, \dots, 5$, são semelhantes, de modo que:

$$\frac{CA_i}{CB_i} = \frac{A_iA_{i+1}}{B_iB_{i+1}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{r} = \frac{A_iA_{i+1}}{B_iB_{i+1}} \Rightarrow \frac{1}{2r} = \frac{A_iA_{i+1}}{B_iB_{i+1}}.$$

Tomando cada um dos triângulos separadamente, obtemos:

$$\frac{1}{2r} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_5}{B_4B_5} = \frac{A_5A_6}{B_5B_6}.$$

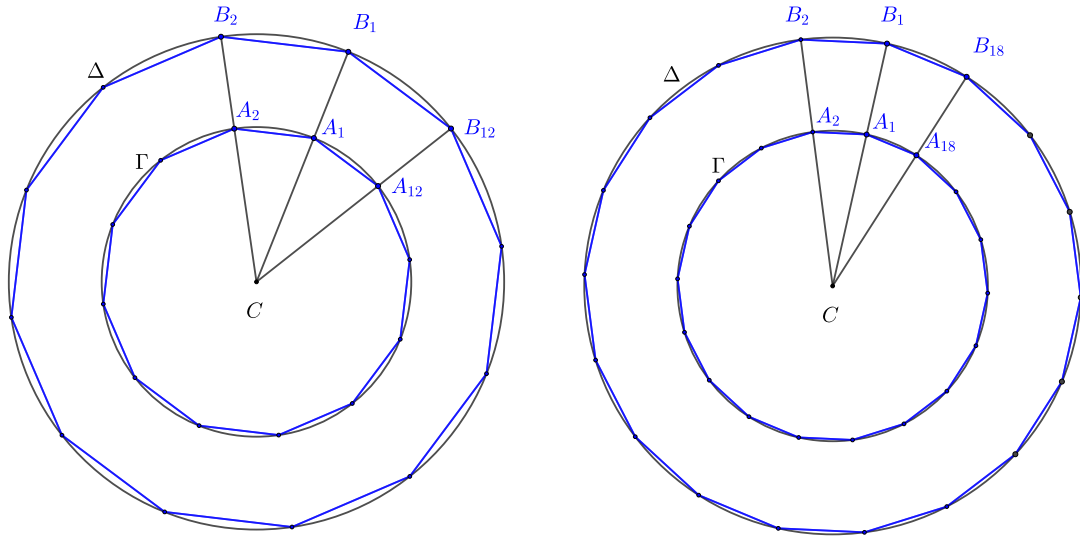
E, portanto

$$\frac{1}{2r} = \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6}{B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_5 + B_5B_6}. \quad (7.2)$$

O numerador da fração no segundo membro de (7.2) representa o perímetro do polígono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, e o denominador, o perímetro do polígono $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. Como os dois polígonos são regulares, podemos substituir cada uma das parcelas da soma $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_5A_6$ por ℓ_6 , e cada parcela de $B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_5B_6$ por L_6 . Assim, a igualdade (7.2) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2r} = \frac{6\ell_6}{6L_6}. \quad (7.3)$$

Aumentando o número de lados do polígono regular em Γ , e construindo um polígono correspondente em Δ , obteríamos expressões semelhantes à (7.3). A Figura 41 mostra as construções para polígonos com 12 e 18 vértices.

Figura 41 – Polígonos com 12 e 18 lados inscritos em círculos e diâmetros 1 e $2r$

Fonte: O autor

Assim, para um número n de vértices teríamos:

$$\frac{1}{2r} = \frac{n\ell_n}{nL_n}. \quad (7.4)$$

Quando o número n cresce abirtrariamente o valor $n\ell_n$ vai se aproximando cada vez mais do comprimento da circunferência de Γ cujo diâmetro é 1, de maneira análoga nL_n se aproxima cada vez do comprimento da circunferência de Δ . Chamando de C a circunferência Δ , temos em símbolo:

$$\frac{n\ell_n}{nL_n} \rightarrow \frac{\pi}{C}, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

Agora faremos uma passagem sutil ao combinarmos a igualdade (7.4) e a segunda fração em (7.5), e afirmaremos que quando fazemos o número de lados do polígono ir para o infinito teremos:

$$\frac{1}{2r} = \frac{\pi}{C} \Rightarrow C = 2\pi r. \quad (7.6)$$

Com isso, estabelecemos a conhecida fórmula para o comprimento da circunferência de raio r , evidenciando sua dependência direta da constante π . Esse resultado, obtido por meio da comparação de polígonos regulares inscritos em círculos de diferentes raios, ressalta o papel central de π na Geometria. Assim como o comprimento, a área do círculo também está intimamente ligada a essa constante, como veremos a seguir. ■

A constante π , além de aparecer na expressão do comprimento da circunferência, também surge de maneira natural em problemas envolvendo áreas. A relação entre o círculo e sua área é tão fundamental quanto a que envolve seu perímetro, e por isso diferentes abordagens foram desenvolvidas ao longo da História para justificá-la com rigor.

Área de um círculo de raio 1

W

Outra maneira de definir π leva em consideração a ideia de área. “O que é o número π ? A maneira mais rápida de responder é dizer que π é a área de um círculo de raio 1” (LIMA, 2012, p. 232). Essa definição é adotada também em Muniz Neto (2013, p. 234): “Definimos o número real π como a área de um círculo de raio 1”. A partir dessa definição podemos deduzir a fórmula geral para a área um círculo de raio r .

Proposição 7.2. *A área de um círculo de raio r é πr^2 . Onde π é a área de um círculo de raio 1.*

Demonstração. De fato, tomemos o círculos Γ e Δ , ambos com mesmo centro C e respectivamente raios 1 e r , e nesses círculos marquemos polígonos regulares $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$, como mostrado na Figura 42. A Figura 42 mostra essa construção, evidenciando como os polígonos regulares estão dispostos em cada círculo, com vértices ligados ao centro comum C .

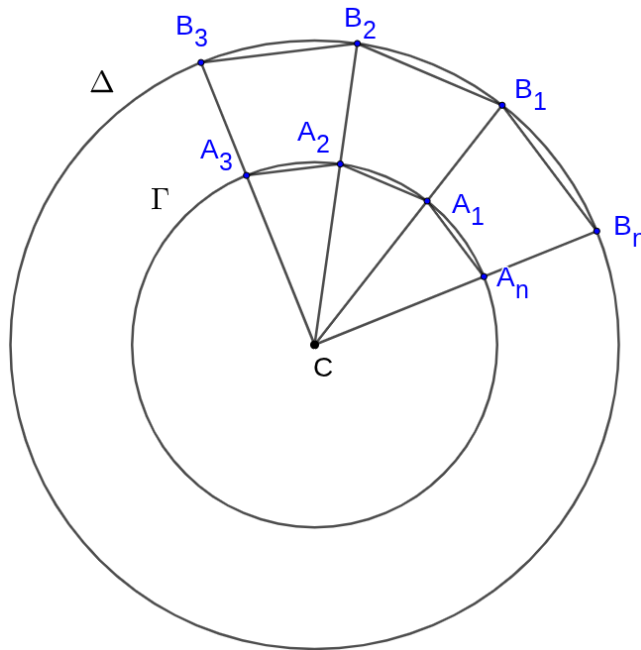


Figura 42 – Polígonos regulares $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ inscritos em Γ e Δ

Fonte: o autor

Sejam S_Γ e S_Δ as áreas de Γ e Δ , temos $S_\Gamma = \pi$, queremos provar que $S_\Delta = \pi r^2$, onde r é o raio de Δ . A soma das áreas dos triângulos A_iCA_{i+1} , com $i = 1, 2, \dots, n$ (quando tomamos $i = n$, definimos o ponto A_{n+1} como sendo o ponto A_1), é um valor próximo de S_Γ . Essa proximidade entre as somas das áreas do triângulo A_iCA_{i+1} e S_Γ se acentua à medida que tomamos valores cada vez maiores para n . De modo análogo, temos S_Δ

próximo da soma das áreas dos triângulos B_iCB_{i+1} , com $i = 1, 2, \dots, n$. Escrevendo (A_iCA_{i+1}) , para a área do triângulo A_iCA_{i+1} , temos:

$$S_\Gamma \simeq (A_1CA_2) + (A_2CA_3) + \dots + (A_nCA_1). \quad (7.7)$$

Os triângulo A_iCA_{i+1} são congruentes uma vez que $A_1A_2 \dots A_n$ é um polígono regular, e portanto tem a mesma altura h_A , logo podemos reescrever (7.7) como

$$\pi \simeq \frac{h_A}{2} (\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}). \quad (7.8)$$

Onde para valores cada vez maiores de n , a altura h_A vai se aproximando do raio de Γ , e a soma $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}$ vai se aproximando da medida da circunferência de Γ , C_Γ , de forma que para n indo para infinito, temos

$$\pi = \frac{1}{2} C_\Gamma \Rightarrow C_\Gamma = 2\pi. \quad (7.9)$$

De forma semelhante, podemos calcular a área de Δ , a partir da soma das áreas dos triângulos B_iCB_{i+1} , chegando à seguinte expressão:

$$S_\Delta \simeq \frac{h_B}{2} (\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \dots + \overline{B_nB_1}). \quad (7.10)$$

Pela semelhança $A_iCA_{i+1} \sim B_iCB_{i+1}$, temos

$$\frac{h_A}{h_b} = \frac{A_iA_{i+1}}{B_iB_{i+1}} \Rightarrow B_iB_{i+1} = \frac{h_B}{h_A} A_iA_{i+1}.$$

Nos permitindo reescrever (7.10) como

$$S_\Delta \simeq \frac{(h_B)^2}{2h_A} (\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}).$$

No entanto, quando tomamos n indo para infinito, temos h_A indo para 1, h_B indo para r e a soma $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}$ indo para C_Γ , de maneira que $S_\Delta = \frac{r^2}{2} C_\Gamma$. E pela segunda equação em 7.9, vem $S_\Delta = \pi r^2$. De sorte que um círculo de raio r tem área πr^2 , onde π é a área de um círculo de raio 1. Concluindo assim nossa demonstração. ■

Escolhendo uma definição para π

Concluída a demonstração da fórmula da área do círculo, cabe discutir o significado e a definição do número π . Embora frequentemente apresentado como um valor aproximado, é essencial compreender sua origem conceitual e evitar interpretações equivocadas sobre sua natureza. Costuma-se dizer que π é usado no cálculo da área ou do comprimento da circunferência, assumindo o valor $\pi \simeq 3,14$. No entanto, esse tipo de abordagem pode sugerir, que se trata de um número racional. Uma alternativa mais adequada é partir de uma definição clara de π e, a partir dela, investigar suas propriedades. A definição que adotaremos, tomando como base Lima (2012, p. 232), será a seguinte:

Definição 7.1. O número π é o comprimento de um círculo de diâmetro 1.

A Definição 7.1 não faz referência direta a um valor numérico, tampouco sugere algo sobre a racionalidade ou irracionalidade de π . No entanto, ela permite refletir sobre como calcular seu valor e, posteriormente, sobre sua relação com a área de um círculo de diâmetro 1, bem como com áreas e comprimentos de circunferências de diâmetros diferentes.

Provamos que a circunferência C de um círculo de raio r é dada por $C = 2\pi r$, onde π é o perímetro de um círculo de diâmetro 1. O próximo passo será a dedução da fórmula da área do círculo, apresentada no resultado a seguir:

Proposição 7.3. Dado um círculo de raio r sua área é πr^2 onde π é comprimento de um círculo de diâmetro 1.

Demonstração. Tomemos um polígono regular de n lados inscrito em um círculo Γ de raio r (na Figura 43 a seguir temos como exemplo um polígono regular de 12 lados inscrito em um círculo de raio r com centro em C).

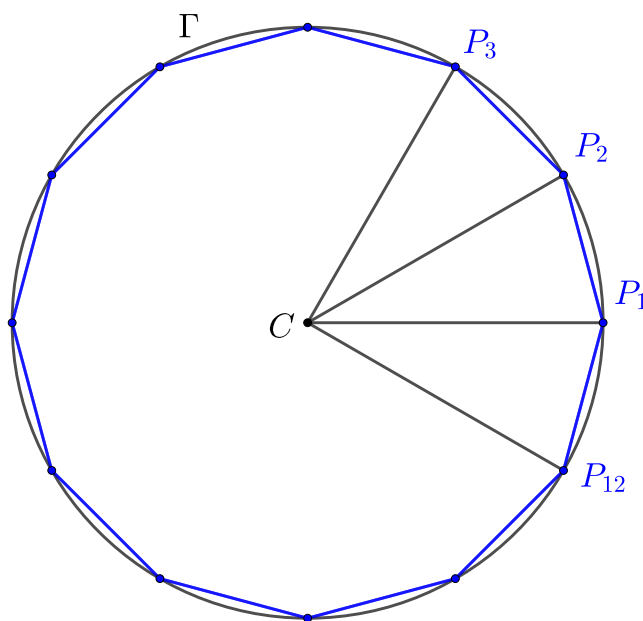


Figura 43 – Polígono regular de 12 lados inscrito em um círculo

Fonte: o autor

Podemos fazer aproximações para área do círculo calculando a área de polígonos regulares inscritos no mesmo. Por exemplo, o círculo Γ da Figura 43, pode ter sua área S_Γ , aproximada pela soma S das áreas dos triângulos formados com vértices em C e dois vértices consecutivos do polígono nele inscrito:

$$S = \sum_{i=1}^{12} (A_i C A_{i+1}). \quad (7.11)$$

Na última parcela do somatório anterior, estamos considerando $A_{13} = A_1$. Os triângulos A_iCA_{i+1} , com $i = 1, 2, \dots, 12$ são todos congruentes, de forma que tem uma mesma altura h_{12} , assim podemos reescrever (7.11) da seguinte maneira:

$$S = \sum_{i=1}^{12} \frac{h_{12}}{2} (\overline{A_iA_{i+1}}) \quad (7.12)$$

De maneira que para uma quantidade n de vértices no polígono regular inscrito no círculo, teremos a seguinte aproximação para área do círculo:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{h_n}{2} (\overline{A_iA_{i+1}}) \quad (7.13)$$

Se fizermos n ir para infinito, teremos h_n indo para o raio, e a soma $\sum_{i=1}^n \overline{A_iA_{i+1}}$ tenderá para o comprimento da circunferência. Mas para além disso a aproximação S irá para área do próprio círculo S_Γ , de forma que:

$$S_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{h_n}{2} (\overline{A_iA_{i+1}}) = \frac{r}{2} \cdot 2\pi r. \quad (7.14)$$

Donde teremos $S_\Gamma = \pi r^2$, como queríamos. ■

Os primeiros registros do número π surgem em textos antigos que já buscavam uma aproximação para a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. Também há menções indiretas em passagens bíblicas, sugerindo o valor $\pi \simeq 3$. Ao longo do tempo, diversos métodos foram desenvolvidos para estimá-lo, incluindo construções geométricas, séries infinitas e técnicas algorítmicas. Entre essas abordagens, destacamos uma de natureza probabilística, baseada em experimentos aleatórios e conceitos da teoria das probabilidades, que será apresentada a seguir.

7.2.2 Como aproximar π usando probabilidade

A área de um círculo de raio r é πr^2 , onde π é o comprimento de um círculo de diâmetro 1. Tracemos um círculo de raio 1, com centro na origem no plano cartesiano, como indicado na Figura 44. O círculo Π , da Figura 44, tem área π e está inscrito no quadrado $ABCD$, cujo lado mede 2, assim sua área é 4. Ao tomarmos aleatoriamente um ponto do quadrado $ABCD$, a probabilidade de que esse ponto esteja no interior do círculo Π é $\frac{\pi}{4}$. De fato, ao considerar um quadrado de lado $2r$ com um círculo inscrito de raio r , essa probabilidade é dada pela razão entre a área do círculo e a área do quadrado:

$$\frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2}.$$

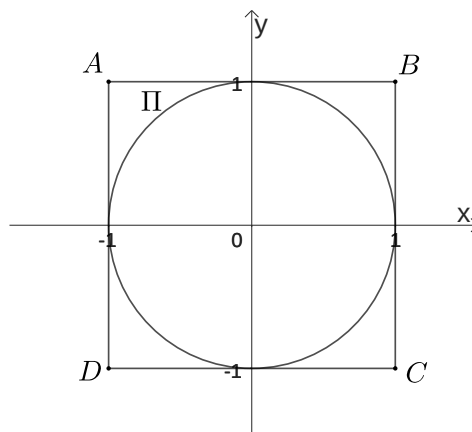


Figura 44 – Círculo e quadrado centrados na origem do plano cartesiano.

Fonte: o autor

Logo, ao tomarmos aleatoriamente n pontos no interior do quadrado $ABCD$, cujo lado é 2, e observarmos quantos deles, digamos c , estão dentro do círculo Π (de raio 1), podemos supor que

$$\frac{c}{n} \simeq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi \simeq \frac{4c}{n}. \quad (7.15)$$

Em (7.15), supomos que, ao gerar aleatoriamente n pontos dentro da região quadrada $ABCD$, a razão c/n dos pontos localizados dentro da região circular Π aproxima-se de $\pi/4$. Assim, podemos utilizar um método computacional para gerar pontos aleatórios no conjunto $[-1, 1]^2$, contar quantos deles estão contidos no interior do círculo, e então, por meio da razão $\frac{4c}{n}$, obter uma aproximação para o número π .

Utilizando a linguagem de programação Python, realizamos simulações com diferentes valores de n , cujos resultados estão apresentados na Tabela 17 (o código pode ser encontrado no Capítulo 8)².

Número de pontos	Aproximação para π
100	3,32
1000	3,188
10.000	3,1288
100.000	3,1444
1.000.000	3,141432

Tabela 17 – Aproximações para π .

Fonte: o autor

Nas Figuras 45, 46, 47 e 48, são apresentadas aproximações para π , realizadas com o auxílio da linguagem Python, utilizando o método probabilístico descrito an-

² Vale ressaltar que o código utiliza números aleatórios, de modo que as aproximações obtidas a cada execução podem variar, não sendo necessariamente iguais às apresentadas na Tabela 17.

teriormente. Em cada figura, foram plotados os pontos gerados aleatoriamente no subconjunto $[-1, 1]^2$ do plano $\mathbb{R}^2$. Os pontos que caem no interior do círculo estão destacados na cor laranja, enquanto os pontos fora do círculo aparecem em azul³.

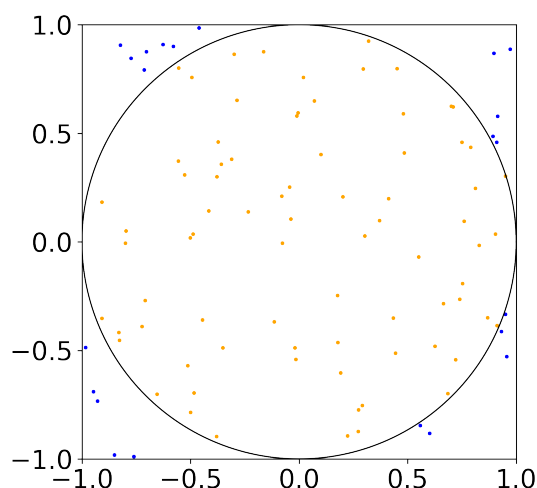


Figura 45 – Estimativa de π com 100 pontos aleatórios.

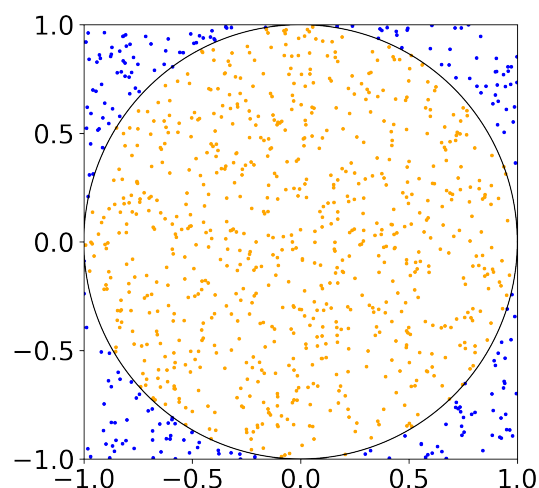


Figura 46 – Estimativa de π com 1.000 pontos aleatórios.

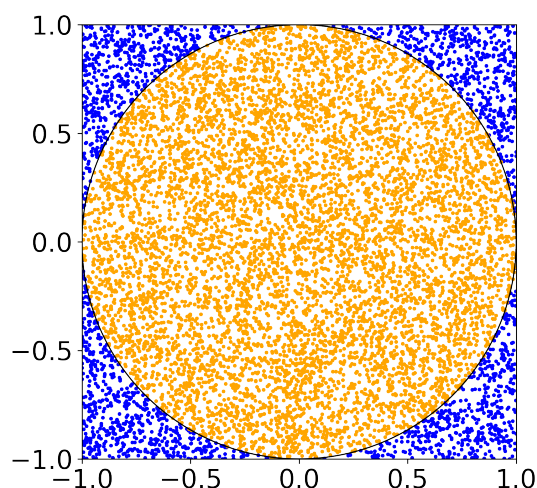


Figura 47 – Estimativa de π com 10.000 pontos aleatórios.

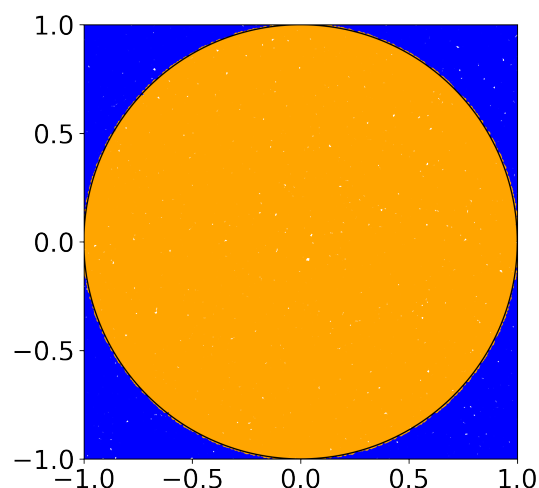


Figura 48 – Estimativa de π com 100.000 pontos aleatórios.

Fonte: o autor

As aproximações apresentadas para π , tanto geométricas quanto probabilísticas, indicam que, por mais que aumentemos a precisão dos métodos utilizados, não al-

³ O código utilizado para gerar figuras semelhantes às Figuras 45, 46, 47 e 48 encontra-se no Capítulo 8. Vale lembrar que, por se tratar de um método baseado em geração de números aleatórios, as figuras obtidas a cada execução do código podem variar ligeiramente.

cançaremos seu valor exato. Isso ocorre porque π é um número irracional, não pode ser expresso como uma fração exata de números inteiros. A irracionalidade de π foi demonstrada pela primeira vez em 1761, pelo matemático francês Johann Heinrich Lambert. Ainda assim, devido à sua definição como limite de certos processos, o número π pode ser alvo de interpretações enganosas. Na próxima seção, analisaremos um desses casos: um argumento que, a partir de uma construção geométrica, leva à conclusão errônea de que $\pi = 4$.

7.2.3 Aproximando π a partir de polígonos

Uma das maneiras mais envolventes de refletir sobre o infinito é por meio de paradoxos que desafiam nossa intuição. Nesta subseção, analisamos um argumento visual que, à primeira vista, parece sugerir que $\pi = 4$. A construção consiste em transformar progressivamente um quadrado em uma figura que se assemelha cada vez mais a um círculo, mantendo o perímetro constante. O raciocínio, embora sedutor, nos leva a uma conclusão absurda. Isso nos oferece uma excelente oportunidade para discutir os limites da intuição geométrica, o papel das aproximações e a importância de conceitos como continuidade e limite no tratamento rigoroso de objetos infinitos.

Tomemos um círculo inscrito em um quadrado de lado 1. Como indicado na Figura 49 a seguir:

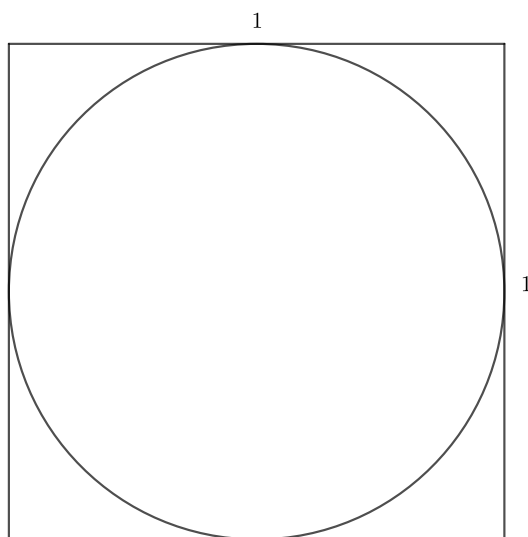


Figura 49 – Círculo inscrito em um quadrado de lado 1.

Fonte: O autor.

O perímetro do quadrado é 4, quanto ao círculo, por construção, sabemos que seu diâmetro é 1, de maneira que encontrando sua circunferência também encontraremos o valor para π . Para encontrarmos a circunferência, vamos mudar a forma do quadrado,

obtendo figuras com o mesmo perímetro, mas que vão cada vez mais se aproximando do circunferência do círculo.

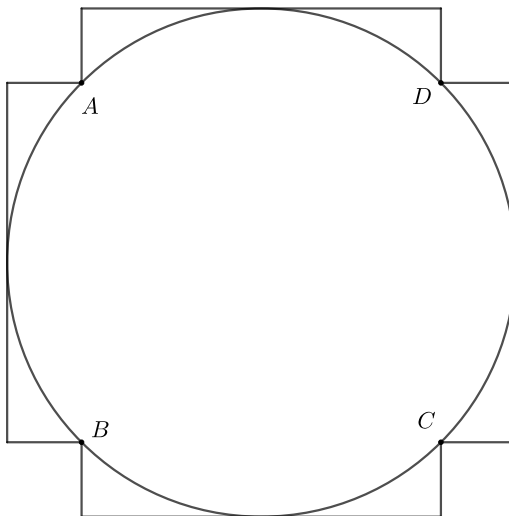


Figura 50 – Círculo inscrito em um polígono de 12 lados.

Fonte: O autor.

Tomando 4 pontos A , B , C e D na circunferência, e traçando por eles perpendiculares aos lados quadrado, podemos construir um polígono de 12 lados como indicado na Figura 50. Como podemos verificar facilmente o polígono da Figura 50 tem uma área menor que o quadrado da Figura 49, no entanto, pela forma como foi construído, o polígono tem o mesmo perímetro que o quadrado, ou seja 4.

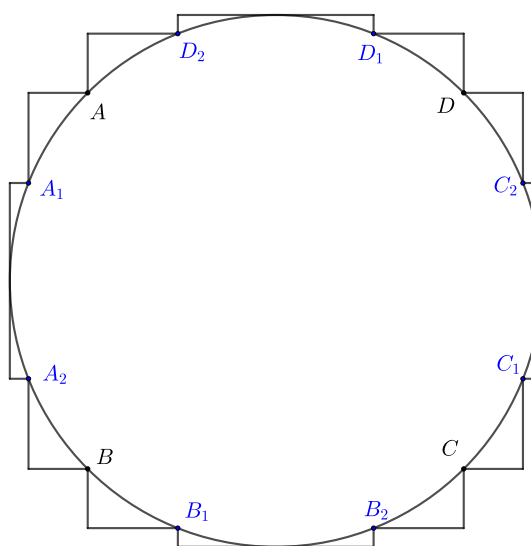


Figura 51 – Círculo inscrito em um polígono de 28 lados.

Fonte: O autor.

Seguindo um processo semelhante, podemos contruir um novo polígono, agora com 28 lados circunscrito ao círculo. Para isso tomamos os pontos $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ e D_2 , ou seja entre em cada um dos segmentos de arco AB, BC, CD e DA , marcamos dois pontos. E traçamos novos segmentos de reta perpendiculares aos lados do quadrado. Como pode ser verificado o polígono na Figura 51, tem uma área menor que a do quadrado, mas seu perímetro continua sendo 4.

Poderíamos tomar cada vez mais pontos sobre o círculo obtendo polígonos com um número maior de lados, e cujo perímetro é 4. O ponto importante dessa construção é que os polígonos, como pode ser observado na Figura 52, têm sua forma cada vez se aproximando do círculo.

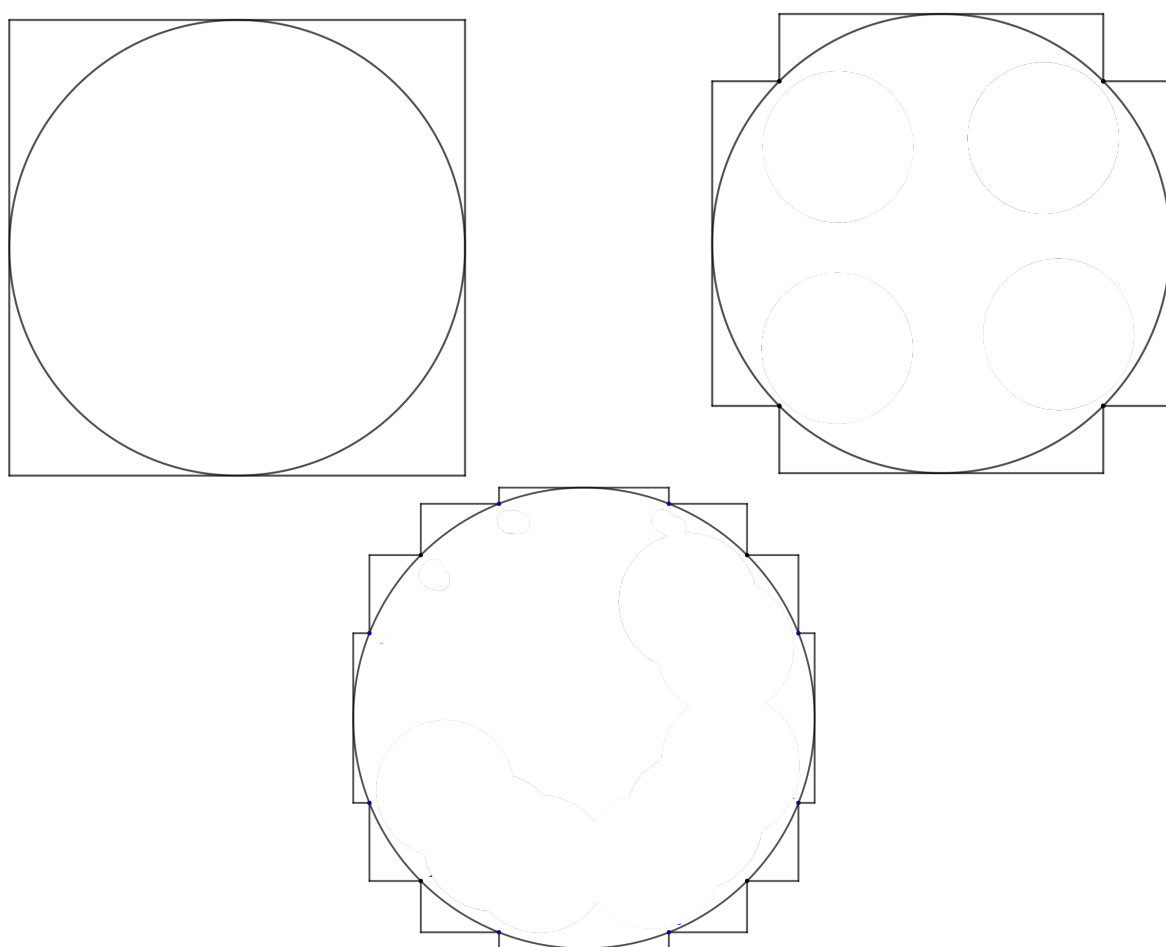


Figura 52 – Polígonos circunscritos ao círculo

Fonte: O autor

Assim quanto maior o número de lados mais o polígono se assemelha ao círculo. E portanto podemos supor que tomando uma quantidade infinita de pontos teríamos um polígono cujo perímetro é 4 e que é igual ao círculo. Ou seja, a circunferência de um círculo cujo diâmetro é 1, mede 4, logo $\pi = 4$.

Levando em consideração que os textos bíblicos e os manuais de Matemática estejam corretos, ou mesmo nossas observações empírica para π , ao dividirmos a circunferência e o diâmetro de um objeto circular obtemos um valor mais próximo de 3 do que 4, é de supormos que é falso que $\pi = 4$. Então onde está o erro da argumentação anterior?

Uma explicação para o erro presente no argumento de que $\pi = 4$ está em um detalhe sutil, mas essencial. A cada passo da construção, tomamos mais pontos sobre a circunferência e construímos polígonos com vértices nesses pontos. Mesmo que o número de lados cresça indefinidamente, os polígonos obtidos continuam sendo formados por segmentos retilíneos, que se ligam por ângulos. Apesar de sua aparência se tornar cada vez mais semelhante à de um círculo, essas figuras jamais reproduzem a curvatura contínua da circunferência. O erro do argumento está em supor que, ao fazer com que os lados do polígono se tornem cada vez menores, o comprimento da figura se aproxima necessariamente do comprimento da curva. No entanto, o perímetro desses polígonos permanece constante e igual a 4, enquanto o comprimento da circunferência inscrita é π . Na Seção 7.4, apresentaremos um argumento que justifica a diferença entre o limite das formas poligonais e o comprimento da circunferência.

7.3 Quando $\sqrt{2}$ Parece Ser 2: Uma Reflexão Sobre Erros e Aproximações

Nesta seção, analisamos uma construção geométrica que, à primeira vista, parece levar à conclusão equivocada de que $\sqrt{2} = 2$. A ideia parte de um quadrado de lado 1 e utiliza linhas poligonais formadas por segmentos horizontais e verticais para se aproximar da diagonal. À medida que o número de segmentos aumenta, o comprimento total da poligonal tende a 2, o que pode ser mal interpretado como o valor da própria diagonal. Nosso objetivo é examinar essa construção, identificar o erro conceitual e, com base no Teorema de Pitágoras, determinar corretamente a medida da diagonal.

7.3.1 A Diagonal do Quadrado e a Proposição 47 de Euclides

Um dos teoremas mais célebres da História da Matemática é aquele que conhecemos atualmente como Teorema de Pitágoras. Sua demonstração aparece no primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, obra que sistematiza o conhecimento geométrico da Grécia Antiga. A proposição que encerra esse primeiro livro, conhecida como Proposição 47, afirma que, em todo triângulo retângulo, o quadrado do lado oposto ao ângulo reto (a hipotenusa) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. Essa proposição, cuja elegância atravessa os séculos, fundamenta-se em construções geométricas rigorosas e

serve de base para deduções posteriores em geometria e álgebra. Em Euclides (2009), encontramos a formulação clássica da proposição:

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.
(EUCLIDES, 2009, p. 132)

Vamos apresentar a demonstração para a proposição anterior, seguindo a mesma ideia apresentada por Euclides. No entanto, faremos uma adaptação dessa proposição clássica, expressando-a com uma linguagem mais simples e atualizada.

Teorema 7.4 (Teorema de Pitágoras). *Nos triângulos retângulos, a área do quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.*

Demonstração. Usaremos a notação $(P_1P_2 \dots P_n)$ para a área do polígono $P_1P_2 \dots P_n$. Dado um triângulo ABC , retângulo em A , e sejam $BDEC$, $ABFG$ e $AHCK$ os quadrados construídos respectivamente sobre os lados BC , AB e AC de ABC (Figura 53 a seguir), queremos provar que:

$$(BDEC) = (AHKC) + (ABFG). \quad (7.16)$$

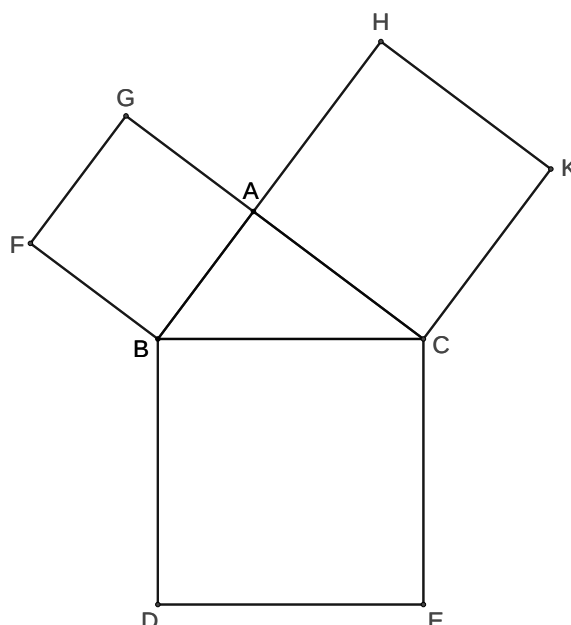


Figura 53 – Quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo ABC

Fonte: o autor

Traçando por A a reta r , paralela a BD e CE , sejam M e L respectivamente as interseções de r com BC e DE e como mostrado na Figura 54. Mostraremos que $(BDLM) = (ABFG)$ e que $(CELM) = (ACKH)$, verificando a igualdade 7.16 uma vez que $(BDEC) = (BDLM) + (CELM)$.

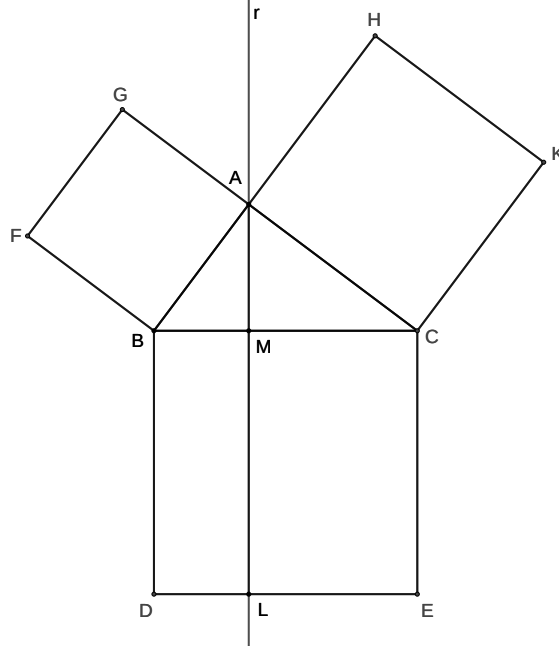


Figura 54 – Reta passando por A , perpendicular ao segmento BC

Fonte: o autor

Traçando os segmentos CF e AD , obtemos os triângulos BCF e ABD (Figura 55). Os ângulos $\widehat{ABF}$ e $\widehat{CBD}$ são retos, e além disso o ângulo $\widehat{ABC}$ é comum aos dois triângulos citados, de sorte que $\widehat{ABD} = \widehat{FBC}$. Por outro lado $\overline{AB} = \overline{BF}$ e $\overline{DC} = \overline{BD}$, assim pelo caso LAL vale a congruência

$$\triangle ABD \equiv \triangle FBC. \quad (7.17)$$

Pela validade da congruência (7.17), temos $(ABD) = (FBC)$. Prolongando os segmentos DB e FB (Figura 56), percebemos que

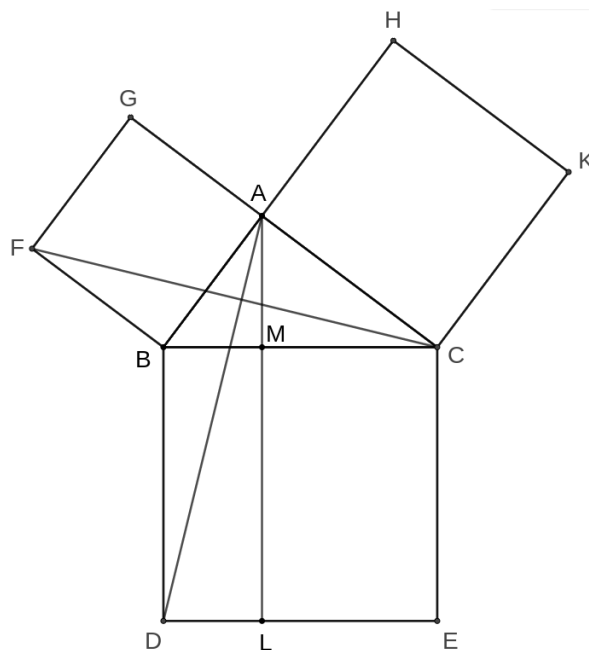
$$(ABD) = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{BM}}{2} \text{ e } (BDLM) = \overline{BD} \cdot \overline{BM} \Rightarrow (BDLM) = 2(ABD). \quad (7.18)$$

Além disso,

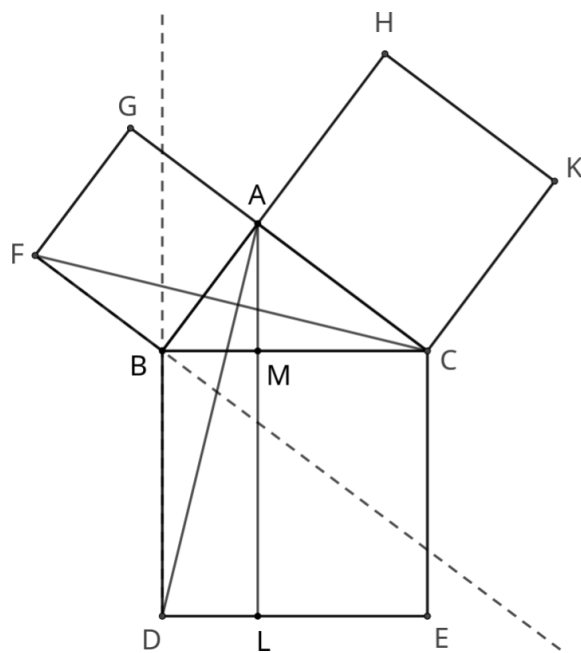
$$(FBC) = \frac{\overline{BF} \cdot \overline{AB}}{2} \text{ e } (ABFG) = \overline{BF} \cdot \overline{AB} \Rightarrow (ABFG) = 2(FBC). \quad (7.19)$$

Tomando como base última igualdade nas implicações (7.18) e (7.19) e a igualdade $(ABD) = (FBC)$ obtemos:

$$(ABFG) = (BDLM). \quad (7.20)$$


 Figura 55 – Triângulos BCF e ABD

Fonte: o autor


 Figura 56 – Prolongamento dos segmentos DB e FB

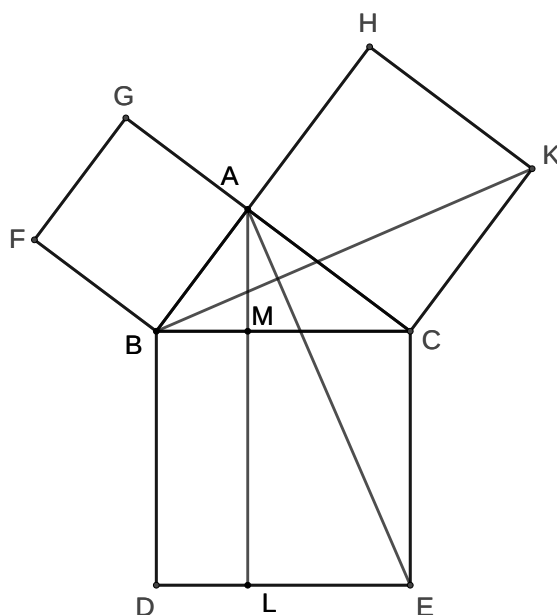
Fonte: o autor

Traçando os segmentos BK e AE (Figura 57).

Por um método análogo ao usado para obtermos (7.20), obtemos

$$(AHKC) = (CELM). \quad (7.21)$$

Finalmente, como $(BDEC) = (BDLM) + (CELM)$, e além disso $(ABFG) = (BDLM)$

Figura 57 – Segmentos BK e AE

Fonte: o autor

e $(AHKC) = (CELM)$, obtemos

$$(BDEC) = (AHKC) + (ABFG)$$

como queríamos. ■

Teorema de Pitágoras

É comum no ensino básico dar nomes aos lados de um triângulo retângulo. Seja ABC um triângulo retângulo em A , como indicado na Figura 58.

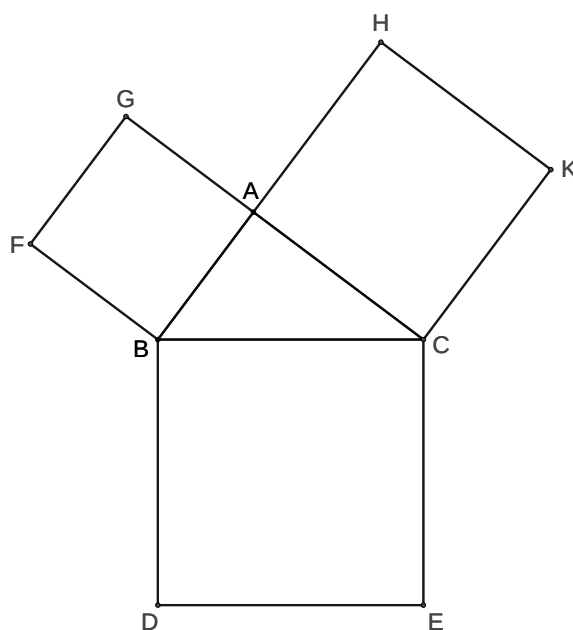
Chamamos BC de hipotenusa do triângulo e os lados AB e AC de catetos do triângulo. Pelo Teorema 7.4, sabemos que $(BDEC) = (AHKC) + (ABFG)$, de maneira que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \quad (7.22)$$

A partir da igualdade (7.22), podemos dizer que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Assim em um quadrado $ABCD$ de lado 1, podemos calcular a medida de sua diagonal com o Teorema 7.22, obtendo $\sqrt{2}$.

7.3.2 Aproximando a Diagonal de um Quadrado com Polígonos

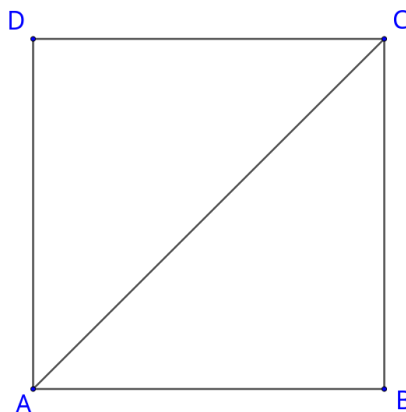
Após calcularmos a diagonal de um quadrado pelo Teorema de Pitágoras, examinamos agora uma construção em zigue-zague, com segmentos verticais e horizontais,

Figura 58 – Triângulo ABC retângulo em A

Fonte: o autor

que liga os vértices opostos. Embora a trajetória se aproxime visualmente da diagonal, seu comprimento permanece constante, igual a 2. Apresentamos essa construção como ponto de partida para discutir interpretações equivocadas ligadas ao uso de processos infinitos.

Dado um quadrado $ABCD$ de lado 1 e diagonal AC (Figura 59).

Figura 59 – Quadrado $ABCD$

Fonte: o autor

Pelo Teorema 7.4, sabemos que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ e portanto $\overline{AC} = \sqrt{2}$. Marcando M_1 , ponto médio do segmento AC e P_1 e Q_1 , respectivamente pontos médios dos segmentos AB e BC , obtemos os triângulos AP_1M_1 e CQ_1M_1 (Figura 60).

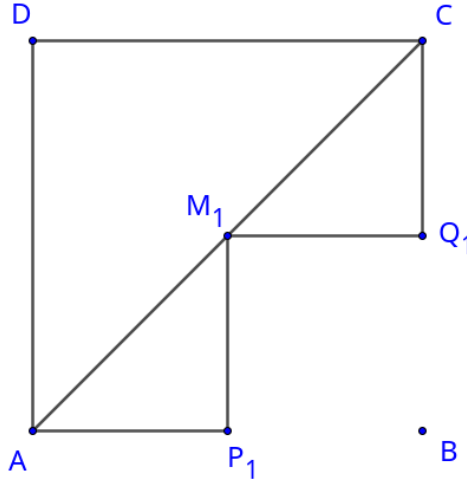


Figura 60 – M_1, P_1, Q_1 pontos médios de AC, AB e BC .

Fonte: o autor

Temos $\overline{AP_1} = \overline{P_1M_1} = \overline{M_1Q_1} = \overline{Q_1C} = \frac{1}{4}$, e assim $\overline{AP_1} + \overline{P_1M_1} + \overline{M_1Q_1} + \overline{Q_1C} = 2$. Na sequência após tomar pontos médios nos segmentos com extremidades nos pontos A, P_1, M_1, Q_1, C , e traçar os triângulos como mostrados na Figura 61 a seguir, obtemos uma série de segmentos de comprimento $\frac{1}{8}$.

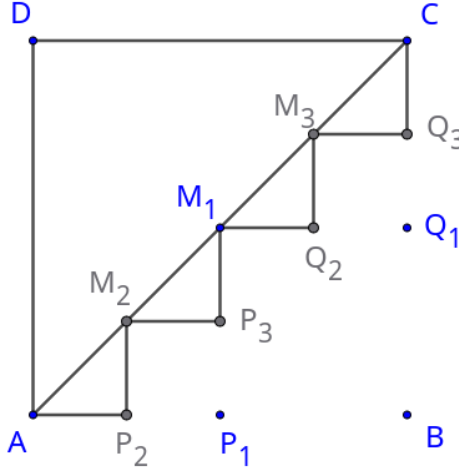


Figura 61 – Poligonal $AP_2M_2P_3M_1Q_2M_3Q_3C$.

Fonte: o autor

De maneira que

$$\overline{AP_2} + \overline{P_2M_2} + \overline{M_2P_3} + \overline{P_3M_1} + \overline{M_1Q_2} + \overline{Q_2M_3} + \overline{M_3Q_3} + \overline{Q_3C} = 2.$$

É possível observar que a poligonal definida pelos segmentos

$$AP_2, P_2M_2, M_2P_3, P_3M_1, M_1Q_2, Q_2M_3, M_3Q_3 \text{ e } Q_3C, \quad (7.23)$$

está se “aproximando” do segmento AC . Isso fica mais claro à medida que construímos mais triângulos a partir dos pontos médios dos segmentos que compõe diagonal AC e na poligonal definida pelos segmentos em (7.23) (Figura 62).

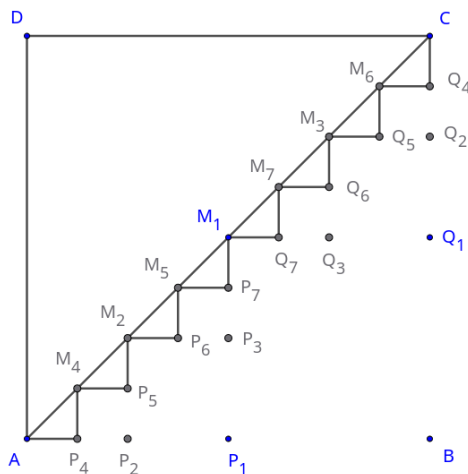


Figura 62 – Poligonal de extremidades A e C se aproximando do segmento AC .

Fonte: o autor

Ao tomarmos cada vez mais pontos, tornando a poligonal de extremidades A e C com um número maior de segmentos, estaremos nos aproximando do segmento AC . Vale ressaltar que a soma dos segmentos da diagonal extremidades A e C é 2. Na Figura 63 construímos uma poligonal com 64 segmentos de medida $\frac{1}{32}$.

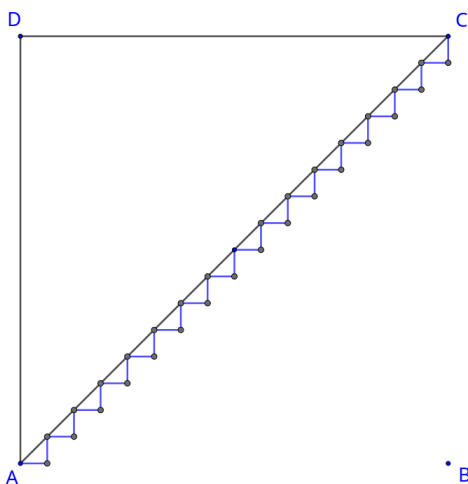


Figura 63 – Poligonal com 32 segmentos.

Fonte: o autor

Logo tomando uma quantidade infinita de segmentos na poligonal de extremidades A e C , teríamos uma correspondência entre a mesma e o segmento AC , de tal modo que tanto a poligonal quanto o segmento teriam o mesmo comprimento, e assim temos $\sqrt{2} = 2$.

Concluimos, que embora a construção apresentada leve a uma sequência de segmentos poligonais cujo comprimento parece tender a 2, esse resultado não reflete a medida real da diagonal do quadrado de lado 1. O erro está em supor que a aproximação feita por uma poligonal, ainda que com infinitos segmentos, represente exatamente a diagonal, quando na verdade ela apenas se aproxima do seu traçado retilíneo. A Matemática moderna, ao distinguir entre comprimento de curvas e distância entre pontos, mostra que a diagonal mantém seu valor exato $\sqrt{2}$, independentemente do número de segmentos usados na aproximação. Assim, afirmar que $\sqrt{2} = 2$ revela um mal-entendido sobre os limites do processo de aproximação e a natureza do comprimento em geometria.

7.4 Uma métrica não usual

Ao estudarmos o plano cartesiano, uma das primeiras ferramentas desenvolvidas é a noção de distância entre dois pontos. Essa distância é usualmente calculada com base no Teorema de Pitágoras, o que nos permite associar ao plano uma estrutura métrica euclidiana. No entanto, a escolha dessa métrica não é a única possível. Existem outras formas de medir distâncias que, embora não correspondam à nossa intuição geométrica cotidiana, são igualmente válidas do ponto de vista matemático. Antes de introduzirmos uma dessas métricas alternativas, fundamental para entender o erro presente no argumento de que $\pi = 4$ e de que $\sqrt{2} = 2$, recordemos a fórmula clássica para a distância euclidiana entre dois pontos do plano.

Proposição 7.5 (Distância Entre Pontos). *Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, dois pontos no plano cartesiano, (Figura 64).*

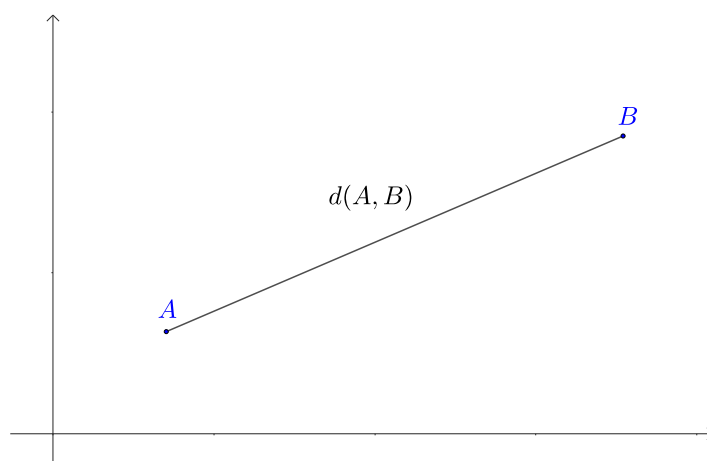


Figura 64 – Distância entre pontos no plano

Fonte: o autor.

A distância entre A e B , em símbolos $d(A, B)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (7.24)$$

Demonstração. De fato, traçando as retas r por A e s por B , respectivamente paralelas aos eixos x e y , obtemos o ponto $C = (x_2, y_1) = r \cap s$ (Figura 65 a seguir).

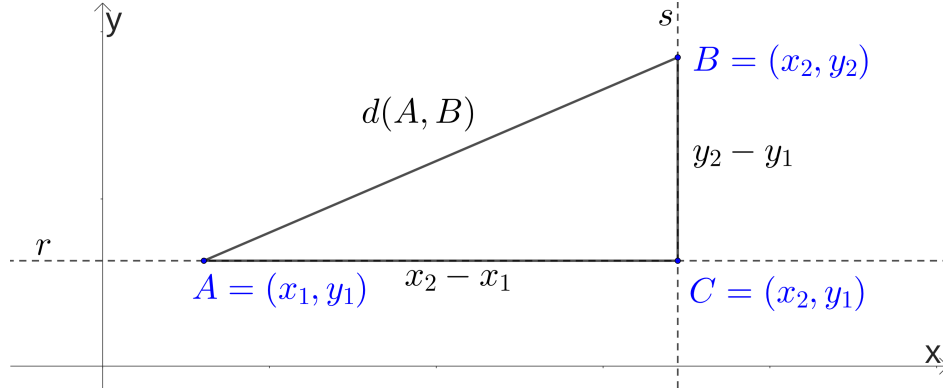


Figura 65 – Ponto $C = (x_2, y_1)$

Fonte: o autor.

Aplicando o teorema de pitágoras ao triângulo ABC , retângulo em C , obtemos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Concluindo assim nossa demonstração. ■

Uma outra forma de calcular distância entre dois pontos pode ser obtida considerando, em vez da medida retilínea entre eles, a soma dos deslocamentos horizontais e verticais necessários para ir de um ponto ao outro. Assim, dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, podemos definir:

$$d'(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \quad (7.25)$$

Embora essa forma de medir distância não coincida com a que utilizamos intuitivamente na geometria euclidiana, ela satisfaz as propriedades fundamentais de uma métrica e é perfeitamente válida do ponto de vista matemático. Além disso, sejam a e b números reais maiores ou iguais a 0, temos $a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2}$, de fato, temos

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \leq (a + b)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(a + b)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b.$$

Os argumentos de que $\pi = 4$ e $\sqrt{2} = 2$ podem ser entendidos a partir de uma perspectiva alternativa de medida, em que se utilizam linhas compostas apenas por segmentos horizontais e verticais, cuja soma dos comprimentos permanece constante (como 2 ou 4), independentemente do número de subdivisões. Essa abordagem dá a

falsa impressão de que a figura converge para uma diagonal ou circunferência, sem alterar seu comprimento, mas a desigualdade

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \geq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

mostra por que essa métrica não usual gera valores maiores para π e $\sqrt{2}$.

No entanto, essas construções desconsideram a continuidade da curva e a verdadeira distância entre os pontos segundo a geometria euclidiana. A métrica usual, fundamentada no Teorema de Pitágoras, é a que define corretamente o círculo no plano cartesiano e a medida da diagonal de um quadrado. Confundir essas formas de medir leva a interpretações equivocadas, evidenciando a importância do rigor conceitual na análise de processos infinitos.

7.5 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, exploramos dois exemplos que mostram como o uso inadequado do infinito pode gerar confusões e aparentes contradições. A discussão sobre o número π revelou diversas abordagens para sua definição e aproximação, de métodos geométricos e probabilísticos a interpretações equivocadas, como a que sugere que $\pi = 4$. Compreender essa constante exige mais do que intuição: são necessárias definições precisas e análise rigorosa dos limites envolvidos. A segunda parte tratou de uma construção geométrica que, à primeira vista, leva ao absurdo de que $\sqrt{2} = 2$, erro que surge da confusão entre aproximação e identidade, pois a trajetória construída se aproxima da diagonal, mas não a substitui.

Esses exemplos reforçam que o infinito, além de ferramenta matemática, é fonte de desafios conceituais. Ao discutir esses raciocínios, mostramos como erros plausíveis podem fortalecer a Matemática, ampliando seus fundamentos e linguagem. Utilizamos também códigos computacionais em *Python* para simular aproximações para o número π , tanto por métodos geométricos quanto probabilísticos. Esses recursos tornam visíveis os efeitos de refinamentos sucessivos e da aleatoriedade, oferecendo uma abordagem prática e visual para temas abstratos. No próximo capítulo, apresentamos esses códigos, explicando seu funcionamento e destacando seu potencial didático e investigativo.

8 Visualizando o Infinito: Códigos e Experimentos

8.1 Introdução: Computação e Ensino de Matemática

O uso da linguagem de programação Python no ensino de matemática tem se mostrado uma estratégia eficaz para promover a aprendizagem ativa, o raciocínio lógico e a aproximação entre a abstração matemática e a experimentação computacional. Trabalhos como Andrade et al. (2024) evidenciam que a programação pode não apenas ampliar a compreensão de conteúdos escolares, mas também favorecer o desenvolvimento da autonomia e da resolução de problemas. Além disso, o uso de bibliotecas como *NumPy* e *Matplotlib*, bem como de ambientes como o Google Colab, permite ao estudante visualizar padrões, testar hipóteses e construir representações algorítmicas de conceitos matemáticos.

Essa abordagem, aplicada de forma contextualizada ao currículo, tem sido reconhecida por seu potencial didático. Como afirmam Souza, Rodriguez e Poffal (2024):

[...] o desenvolvimento de algoritmos e o emprego da linguagem de programação potencializam o processo de ensino e aprendizagem, permitindo um maior protagonismo. Quando o estudante escreve o código de um algoritmo ele relaciona os conceitos envolvidos e analisa a coerência dos resultados obtidos, indo além do conteúdo estudado em sala de aula. (SOUZA; RODRIGUEZ; POFFAL, 2024, p. 73)

De maneira que a metodologia de inserir programação em aulas de Matemática contribui para tornar a aprendizagem mais exploratória e conectada a diferentes conteúdos. A seguir, retomamos e comentamos os principais códigos utilizados nesse trabalho, destacando como a linguagem Python pode ser integrada a diversos eixos temáticos do ensino da Matemática.

Nos capítulos anteriores, utilizamos algoritmos em Python e, em alguns momentos, o *software* SageMath, para realizar simulações, visualizações e aproximações numéricas envolvendo o infinito. A integração desses códigos ao desenvolvimento teórico buscou reforçar os argumentos apresentados e oferecer uma dimensão concreta a ideias que, muitas vezes, escapam à intuição. Neste capítulo, discutiremos brevemente a implementação desses códigos, com o objetivo de facilitar sua reprodução e incentivar o uso de recursos computacionais como aliados no ensino e na investigação matemática.

8.2 Linguagem de programação e *softwares* usados no texto

Neste trabalho, os recursos computacionais não foram utilizados de forma meramente instrumental, mas como parte integrante da construção conceitual dos temas abordados. A linguagem de programação e os ambientes computacionais escolhidos permitiram a criação de representações algorítmicas, visualizações gráficas e aproximações numéricas que enriqueceram a análise dos conceitos matemáticos discutidos. A seguir, apresentamos a linguagem de programação adotada e os principais softwares utilizados para a implementação dos códigos, destacando seus potenciais didáticos e suas contribuições ao desenvolvimento do presente estudo.

8.2.1 Linguagem de programação Python

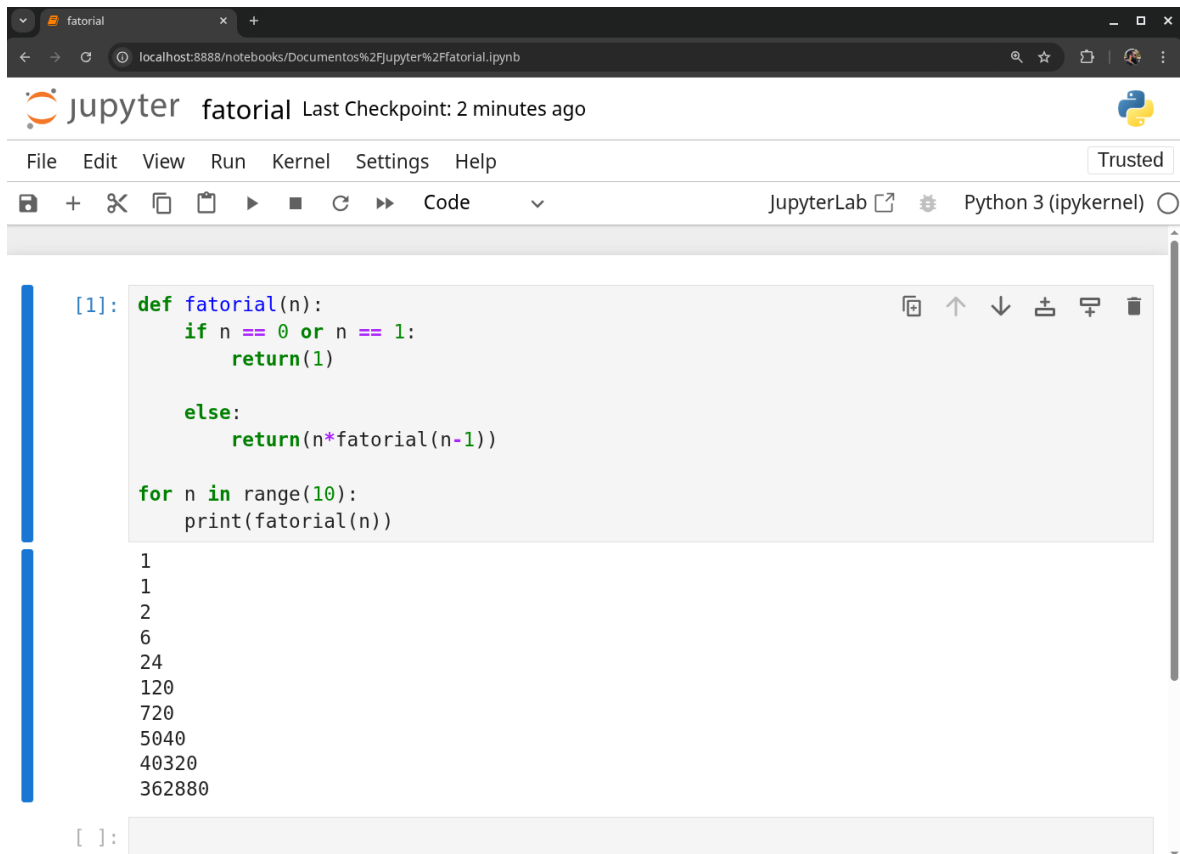
A linguagem Python é amplamente reconhecida por seus códigos serem de fácil leitura, o que a torna especialmente adequada para iniciantes em programação. Seu design intuitivo permite que conceitos fundamentais sejam assimilados com maior facilidade, ao mesmo tempo em que oferece robustez e versatilidade para aplicações mais avançadas. Essa combinação faz com que Python seja não apenas uma excelente porta de entrada para quem está dando os primeiros passos na computação, mas também uma linguagem poderosa em ambientes profissionais e acadêmicos. Sua capacidade de integrar recursos matemáticos, gráficos e estatísticos a torna particularmente útil para atividades de ensino e pesquisa.

Python vem crescendo em várias áreas da computação, como inteligência artificial, banco de dados, biotecnologia, animação 3D, aplicativos móveis (celulares), jogos e mesmo como plataforma web. (MENEZES, 2019, p. 26)

Além da referência indicada na citação anterior, existem muitas outras fontes acessíveis e de qualidade que introduzem a linguagem Python, incluindo videoaulas, artigos didáticos e produções acadêmicas. Essa diversidade de recursos reforça o papel de Python como uma linguagem didática e, ao mesmo tempo, poderosa, capaz de conectar a Matemática formal com experimentações computacionais significativas.

Executando programas em Python

O método mais utilizado para escrever e executar programas em Python é baixando e instalando a linguagem em um computador. Em Netto e Maciel (2021, p. 5) é mostrado como instalar a linguagem Python e algumas ferramentas que serão muito úteis na execução dos programas, dentre elas o Jupyter. Na Figura 66 é mostrado uma janela Jupyter, onde é executado um código Python para o cálculo do fatorial de um número.



```
[1]: def fatorial(n):
      if n == 0 or n == 1:
          return(1)

      else:
          return(n*fatorial(n-1))

      for n in range(10):
          print(fatorial(n))

1
1
2
6
24
120
720
5040
40320
362880

[ ]:
```

Figura 66 – Janela Jupyter

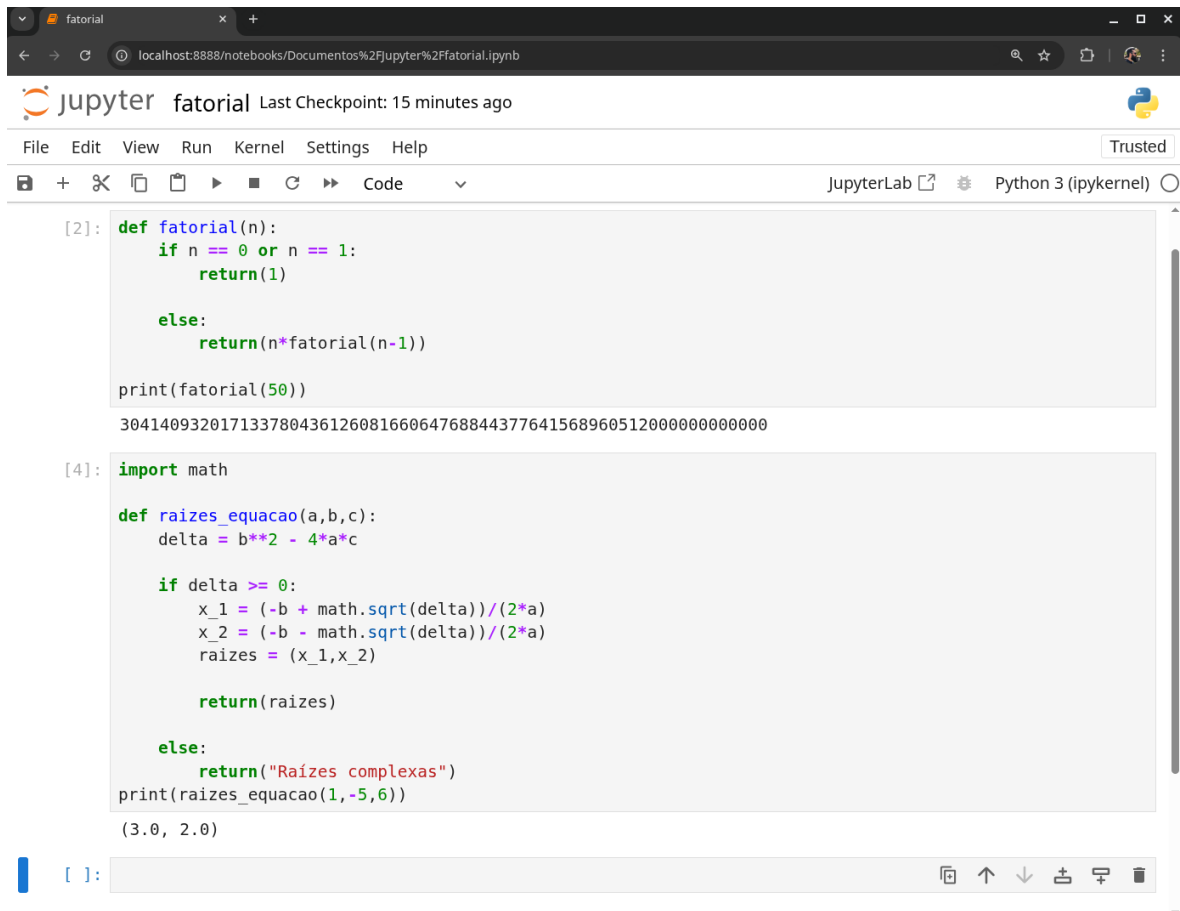
Fonte: o autor.

Além de trazer um método para calcular o fatorial, o programa faz o cálculo do fatorial para os dez primeiros números inteiros não negativos. O código em questão está escrito a seguir:

```
def fatorial(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return(1)
    else:
        return(n*fatorial(n-1))

for n in range(10):
    print(fatorial(n))
```

A grande vantagem em usar Jupyter consiste na possibilidade de executar e visualizar a saída de vários algoritmos em uma mesma janela. Na Figura 67, além do algoritmo fatorial usado para calcular $50!$, é mostrado um código que calcula as raízes reais de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$.



```
[2]: def fatorial(n):
      if n == 0 or n == 1:
          return(1)

      else:
          return(n*fatorial(n-1))

      print(fatorial(50))

      304140932017133780436126081660647688443776415689605120000000000000

[4]: import math

      def raizes_equacao(a,b,c):
          delta = b**2 - 4*a*c

          if delta >= 0:
              x_1 = (-b + math.sqrt(delta))/(2*a)
              x_2 = (-b - math.sqrt(delta))/(2*a)
              raizes = (x_1,x_2)

              return(raizes)

          else:
              return("Raízes complexas")

      print(raizes_equacao(1,-5,6))

      (3.0, 2.0)
```

Figura 67 – Janela Jupyter com dois algoritmos

Fonte: o autor.

O código para calcular as raízes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, está listado a seguir:

```
import math

def raizes_equacao(a,b,c):
    delta = b**2 - 4*a*c

    if delta >= 0:
        x_1 = (-b + math.sqrt(delta))/(2*a)
        x_2 = (-b - math.sqrt(delta))/(2*a)
        raizes = (x_1,x_2)
        return(raizes)
    else:
        return("Raízes complexas")
```

Outra forma de escrever e executar códigos Python é usando um plataforma online, em destaque temos o Google Colab (abreviação para Colaboratory). O Colab é uma plataforma gratuita oferecida pelo Google que permite escrever e executar códigos

Python diretamente no navegador, assim como o Jupyter, no entanto sem necessitar instalar a linguagem no computador. Com foco especial em ciência de dados, aprendizado de máquina e ensino de programação, o Colab funciona como um Jupyter Notebook online, com o diferencial de oferecer acesso gratuito a GPUs e armazenamento na nuvem via Google Drive, facilitando o compartilhamento e a colaboração entre usuários. Na Figura 68 é mostrada uma janela do Google Colab. O acesso ao Google Colab é possível a partir do link <https://colab.google/>, clicando em *New Notebook*, caso não esteja logado com a conta Google, basta realizar o acesso.

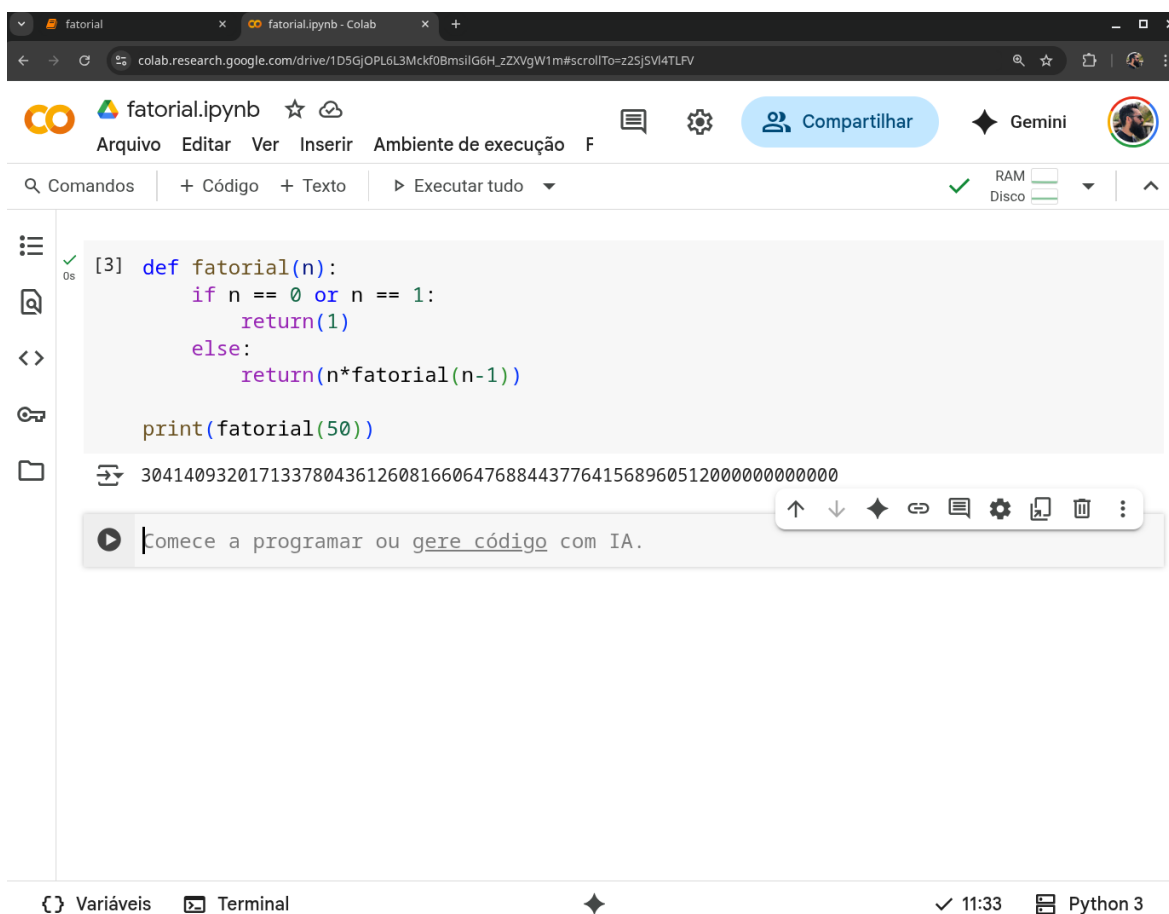


Figura 68 – Janela Google Colab

Fonte: o autor.

8.2.2 O software matemático SageMath

SageMath é um *software* matemático que engloba uma série de aplicações focadas em cálculo e programação, dentre elas a linguagem Python.

Grande parte dos *softwares* matemáticos são comerciais. Dessa forma, muitos professores e estudantes em formação deixam de usar *softwares* de Matemática Computacional devido ao valor elevado das licenças de uso, gerando

o problema de adquiri-las e, em seguida, o problema de manter os *softwares* atualizados. (SILVA; SANTOS; MACHADO, 2019, p. 2)

Silva, Santos e Machado (2019) é uma referência completa sobre o uso de aplicação do SageMath. Em termos gerais, os códigos em Sage são muito semelhantes aos códigos em Python, no entanto são simples quando é preciso lidar com precisão. Para trabalhar com maior precisão decimal em Python é preciso usar ferramentas mais avançadas da linguagem.

É possível usar SageMath instalando a distribuição no computador, e executando os códigos em uma janela jupyter, por exemplo, ou usando algum serviço online, dentre eles o `<https://sagecell.sagemath.org/>`.

Uma Aplicação do SageMath

O número π é um número irracional positivo, assim não pode ser representado como uma fração $\frac{m}{n}$, com $n, m \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, π tem uma representação decimal infinita e não periódica, usando `N(pi,digits=n)` em SageMath obtemos como saída o número π com n dígitos. Um exemplo disso é o número a seguir, uma representação de π com 500 dígitos:

```
3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751058
2097494459230781640628620899862803482534211706798214
8086513282306647093844609550582231725359408128481117
4502841027019385211055596446229489549303819644288109
7566593344612847564823378678316527120190914564856692
3460348610454326648213393607260249141273724587006606
3155881748815209209628292540917153643678925903600113
3053054882046652138414695194151160943305727036575959
0921861173819326117931051185480744623799627495673518
857527248912279381830119491
```

Uma questão interessante é a seguinte: na expressão decimal do número π existem igualmente o mesmo número de dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? Ou em outras palavras, tomando-se ao acaso um dos dígitos da expressão decimal de π , a probabilidade dele ser qualquer um dos números de 0 a 9 é igual para todos eles, ou seja, $\frac{1}{10}$?

Esse problema pode ser investigado com SageMath a partir do seguinte algoritmo:

```
# Escolhendo a quantidade de dígitos de pi
n = 1000
```

```
# Armazenando o pi com n dígito em uma variável
a = N(pi, digits=n)

# Transformando o número em um string para poder comparar
string = str(a)

# Criando um vetor que receberá as quantidades de cada um dos dígitos
quantidades = [0 for i in range(10)]

# Lista de caracteres para comparação
lista = ['0','1','2','3','4','5','6','7','8','9']

# Percorrendo toda a string
for i in range(len(string)):
    # Percorrendo toda a lista
    for k in range(len(lista)):
        # Comparando o elemento da string com cada elemento da lista
        if string[i] == lista[k]:
            quantidades[k] += 1

# Exibindo os resultados
print(quantidades)
```

Uma execução do programa anterior retorna a lista [93, 116, 103, 103, 93, 97, 94, 95, 100, 106], onde cada elemento representa respectivamente as quantidades de dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Executando o algoritmo anterior para $n = 10.000.000$, obtemos a lista

[999441, 999333, 1000306, 999965, 1001093, 1000466, 999337, 1000206, 999813, 1000040].

Esses dois resultados indicam que de fato as quantidades de cada um dos dígitos vai se igualando à medida que aumentamos o número de dígitos da expressão decimal de π . Ajustando o código é possível calcular as probabilidades de obter cada um dos dígitos:

- π com 1.000 dígitos:

[0.0930, 0.116, 0.103, 0.103, 0.0930, 0.0970, 0.0940, 0.0950, 0.100, 0.106];

- π com 100.000.000 de dígitos:

[0.0999, 0.0999, 0.100, 0.100, 0.100, 0.100, 0.0999, 0.100, 0.100, 0.100].

O novo código está listado a seguir:

```
n = 1000

a = N(pi, digits=n)
string = str(a)

quantidades = [0 for i in range(10)]
probabilidades = [0 for i in range(10)]

lista = ['0','1','2','3','4','5','6','7','8','9']

for i in range(len(string)):
    for k in range(len(lista)):
        if string[i] == lista[k]:
            quantidades[k] += 1

for i in range(len(quantidades)):
    probabilidades[i] = N(quantidades[i]/n, digits=3)

print(probabilidades)
```

A familiarização com o uso de ferramentas como o Jupyter, o Google Colab e o SageMath oferece não apenas um suporte prático para o desenvolvimento e execução de algoritmos, mas também amplia as possibilidades de exploração prática de conceitos teóricos. Tais ambientes tornam a experimentação computacional mais acessível, permitindo que estudantes e professores investiguem propriedades, verifiquem padrões e testem hipóteses de forma interativa. A seguir, apresentaremos os códigos que foram utilizados nos capítulos anteriores, com breves comentários sobre sua função e relação com os conceitos explorados ao longo do trabalho.

8.3 Códigos do Capítulo 5

Calculando aproximações para π com segmentos de reta

Na Seção 5.4, calculamos aproximações para o número π usando segmentos construídos sobre o gráfico da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Uma aproximação para π foi calculada usando 6 segmentos.

Soma $\sum_{i=0}^5 \overline{P_i P_{i+1}}$

O código a seguir calcula o valor da soma

$$\sum_{i=0}^5 \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \overline{P_3 P_4} + \overline{P_4 P_5} + \overline{P_5 P_6}. \quad (8.1)$$

Onde cada segmento $P_k P_{k+1}$ tem medida:

$$\overline{P_k P_{k+1}} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}. \quad (8.2)$$

Com y_{k+1} e y_k , sendo respectivamente $f(x_{k+1})$ e $f(x_k)$.

```
# Importando o módulo matemático
import math

# Definindo a função f
def f(x):
    return math.sqrt(1-x**2)

# Definindo a quantidade de segmentos
n = 6

# Entrando com as coordenadas dos pontos
pontos = []
for i in range(n+1):
    P_i = []
    x_i = -1 + i*(2/n)
    P_i.append(x_i)
    P_i.append(f(x_i))
    pontos.append(P_i)

# Definindo uma função para calcular o comprimento de um segmento PQ,
# com P = [P[0],P[1]] e Q = [Q[0],Q[1]]
def comprimento(P,Q):
    dx = Q[0] - P[0]
    dy = Q[1] - P[1]

    return math.sqrt(dx**2+dy**2)

# Calculando os comprimentos dos segmentos
```

```

comprimentos = []
for i in range(n):
    c = comprimento(pontos[i], pontos[i+1])
    comprimentos.append(c)

# Imprimindo na tela a soma dos comprimentos
print(sum(comprimentos))

```

A execução do código anterior resulta em 3.0842528502040896.

Aproximações para π com n segmentos

Na Seção 5.4 também calculamos aproximações para π com um número variável de segmentos sobre o gráfico da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Uma forma de pensar na soma dos segmentos é analisá-los como elementos de uma sequência (a_n) cujo termo geral é definido por:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2(i+1)}{n} - 1\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{2i}{n} - 1\right)^2} \right]^2}. \quad (8.3)$$

A seguir temos um código em python que calcula o n -ésimo termo da sequência (8.3):

```

import math

def f(x):
    return(math.sqrt(1 - x**2))

def an(n):
    soma = 0
    for i in range(n):
        x1 = (i * 2) / n - 1
        x2 = ((i + 1) * 2) / n - 1
        ai = math.sqrt((2 / n)**2 + (f(x2) - f(x1))**2)
        soma += ai

    return(soma)

print(an(100))

```

No exemplo específico anterior, é calculado o centésimo termo: 3,1407605898424658.

Aproximações para e

Na Seção 5.4 é mostrado como calcular aproximações para o número e usando, tanto áreas como a definição desse número.

Aproximações para e usando $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$

O código a seguir calcula aproximações para e , calculando o n -ésimo termo da sequência

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

```
import math
def aproxima_e(n):
    soma = 0

    for i in range(n+1):
        soma = soma + 1/math.factorial(i)

    return(soma)

print(aproxima_e(100))
```

Aproximações para e usando áreas

Outra forma de encontrar aproximações para e é calculando áreas de trapézios sob o gráfico da função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. O primeiro trapézio tem como base maior o segmento de extremidades $(1, 0)$ e $(1, 1)$ e altura δ (que será também a altura de todos os demais trapézios), e a base menor será o segmento de extremidades $(1 + \delta, 0)$ e $(1 + \delta, f(1 + \delta))$. Em termos gerais todos trapézios terão como vértices os pontos $(1 + i \cdot \delta, 0)$, $(1 + i \cdot \delta, f(1 + i \cdot \delta))$, $(1 + (i + 1) \cdot \delta, f(1 + (i + 1) \cdot \delta))$ e $(1 + (i + 1) \cdot \delta, 0)$, com $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Uma aproximação para a soma de 5 trapézios sob o gráfico de f , com $\delta = 0,3$ pode se obtida com seguinte expressão:

$$\sum_{i=0}^4 \frac{(\overline{E_i P_i} + \overline{E_{i+1} P_{i+1}}) \cdot 0,3}{2} = \sum_{i=0}^4 \frac{[f(1 + i \cdot \delta) + f(1 + (i + 1) \cdot \delta)] \cdot 0,3}{2}. \quad (8.4)$$

Onde $E_i = (1 + i \cdot \delta, 0)$ e $P_i = (1 + i \cdot \delta, f(1 + i \cdot \delta))$. O algoritmo para calcular o valor de (8.4) é mostrado a seguir.

```

def f(x):
    return(1/x)

def soma(n):
    delta = 0.3
    soma = 0

    for i in range(n):
        soma_bases = f(1+i*delta) + f(1+(i+1)*delta)
        soma = soma + soma_bases

    area = soma * (delta/2)
    return(area)

print(soma(5))

```

A execução do código anterior nos resulta 0.9225276039749724. Se fizermos $n=6$ no algoritmo anterior obtemos 1.036099032546401, de forma que a soma das áreas dos trapézios sob o gráfico de f ultrapassa 1, assim uma aproximação para e seria algo entre $1 + 5 \cdot \delta = 2,5$ e $1 + 6 \cdot \delta = 2,8$.

No código anterior nós definimos um valor para δ , agora implementaremos um código que busca uma aproximação para e , com um valor δ dado, sem no entanto, precisarmos definir quantos trapézios construiremos sob o gráfico de f . O código a seguir nos ajuda encontrar aproximações para e , escolhendo valores pequenos para δ :

```

def aproxima_e_areas(delta):
    n = 0; e = 1; area = 0
    while area < 1:
        H = 1/(1+n*delta); h = 1/(1+(1+n)*delta)
        area_trapezio = (H+h)*delta/2
        area = area + area_trapezio
        e = 1 + n*delta
        n = n + 1

    return(e)

deltas = [0.3, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001]
for delta in deltas:
    print(aproxima_e_areas(delta))

```

A execução do código anterior retornou os valores 2.5, 2.7, 2.71, 2.718, 2.7182, 2.71828, como aproximações para e , com os valores de δ dados.

8.4 Códigos do Capítulo 6

Espiral de Teodoro

No início do Capítulo 6, apresenta-se uma discussão sobre a Espiral de Teodoro, na qual surge a necessidade de calcular a soma

$$S_{16} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{16}}\right) \simeq 6,13.$$

A seguir temos um código Python que realiza a soma anterior.

```
import math
soma = 0
for i in range(16):
    n = i + 1
    angulo = math.atan(1/math.sqrt(n))
    soma += angulo

print(soma)
```

Aproximações para soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Um código que calcula os termos da sequência de somas parciais de $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ está listado a seguir:

```
def soma_parcial(k):
    s_k = 0
    for i in range(k):
        s_k = s_k + 1/2**(i+1)
    return s_k

for i in range(10):
    print(soma_parcial(i+1))
```

No código anterior criamos uma função `soma_parcial(k)` que calcula a soma de k termos da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, nas duas últimas linhas do código calculamos as somas parciais até o 10º termo.

Série harmônica

A série harmônica é a soma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (8.5)$$

Com o seguinte programa em Python, calculamos as somas parciais da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$.

```
def soma_parcial_serie_harmonica(k):
    s_k = 0
    for i in range(k):
        s_k = s_k + 1/(i+1)

    return s_k

for i in range(10):
    print(soma_parcial_serie_harmonica(i+1))
```

8.5 Códigos do Capítulo 7

Aproximação da Área de uma Elipse

Começamos o Capítulo 7 fazendo aproximações para a área de uma elipse centrada na origem do plano cartesiano e eixo maior em x . A elipse tem equação $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Para isso usamos aproximações por meio da construção de trapézios sob o gráfico da função $f : [-\sqrt{8}, \sqrt{8}] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2}}.$$

Inicialmente aproximamos a área com 5 trapézios, calculando a soma a

$$S = \sum_{k=0}^5 \frac{[f(x_k) + f(x_{k+1})] \cdot h}{2}.$$

com $h = \frac{2a}{5}$ e $x_k = -\sqrt{8} + k \cdot h$ (a é o eixo maior do trapézio). Para realizar os cálculos foi utilizado o SageMath, a seguir é apresentado o código em questão:

```
# Definindo a altura dos trapézios
h = 2*sqrt(8)/5
# Coordenada x do primeiro ponto do gráfico (vértice)
a = -sqrt(8)
```

```
# Criando a regra de associação da função
def f(x):
    fx = sqrt(4-(x**2)/2)
    return(fx)

# Lista vazia para receber as bases dos trapézios
lista = []
for i in range(6):
    x = a + h*i
    P = f(x)
    lista.append(P)

# Variável que vai receber as somas das áreas dos trapézios
soma = 0

for i in range(len(lista)-1):
    trapezio = ((lista[i]+lista[i+1])*h)/2
    soma = soma + trapezio

print(2*soma.n())
```

Aproximações para π Usando Probabilidade

No Capítulo 7 foram feitas aproximações para π usando um método que envolve probabilidade. O código Python usado para isso é o seguinte:

```
import random # Trabalha com números randômicos

numero_de_pontos = 1_000 # Quantidade de pontos do experimento
pontos_no_circulo = 0

# Tomando números aleatórios no intervalo [-1,1]
for i in range(numero_de_pontos):
    x = random.uniform(-1,1)
    y = random.uniform(-1,1)

    # Verificando se o ponto (x,y) está no círculo
    if (x**2+y**2<=1):
        pontos_no_circulo = pontos_no_circulo + 1
```

```
aproximacao_para_pi = (4*pontos_no_circulo/numero_de_pontos)
print(aproximacao_para_pi)
```

No código anterior, selecionamos aleatoriamente 1.000 pontos no quadrado de lado 2, centrado na origem do plano cartesiano. Em seguida, contamos quantos desses pontos, denotados por c , pertencem ao interior do círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$. A partir disso, calculamos a razão $\frac{4c}{1.000}$ como uma aproximação para π , pois a probabilidade de que um ponto escolhido ao acaso nesse quadrado (de área 4) esteja dentro do círculo nele inscrito é dada por

$$\frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2}.$$

Assim, se considerarmos que $\frac{c}{1.000} \simeq \frac{\pi r^2}{4r^2}$, onde c representa a quantidade de pontos pertencentes ao círculo, obtemos

$$\pi \simeq \frac{4c}{1.000},$$

uma vez que $r = 1$.

8.6 Considerações Finais do Capítulo

Os códigos utilizados neste trabalho foram elaborados com o objetivo de facilitar sua implementação e leitura por pessoas com pouco ou nenhum contato prévio com programação. Nesse sentido, cabe ao professor dosar ou conduzir seu uso em sala de aula. Assim, não priorizamos necessariamente a execução mais otimizada possível dos códigos, mas sim a sua legibilidade para o programador iniciante. Como exemplo, temos o código utilizado para fazer aproximações de π por meio de simulação probabilística, que poderia ser substituído por uma implementação mais eficiente, como a apresentada a seguir. No entanto, tal substituição, a nosso ver, implicaria um grau de dificuldade maior para estudantes que ainda não conhecem bibliotecas como a NumPy.

```
import numpy as np
numero_de_pontos = 10_000_000

x = np.random.uniform(-1, 1, numero_de_pontos)
y = np.random.uniform(-1, 1, numero_de_pontos)

pontos_no_circulo = np.sum(x**2 + y**2 <= 1)
```

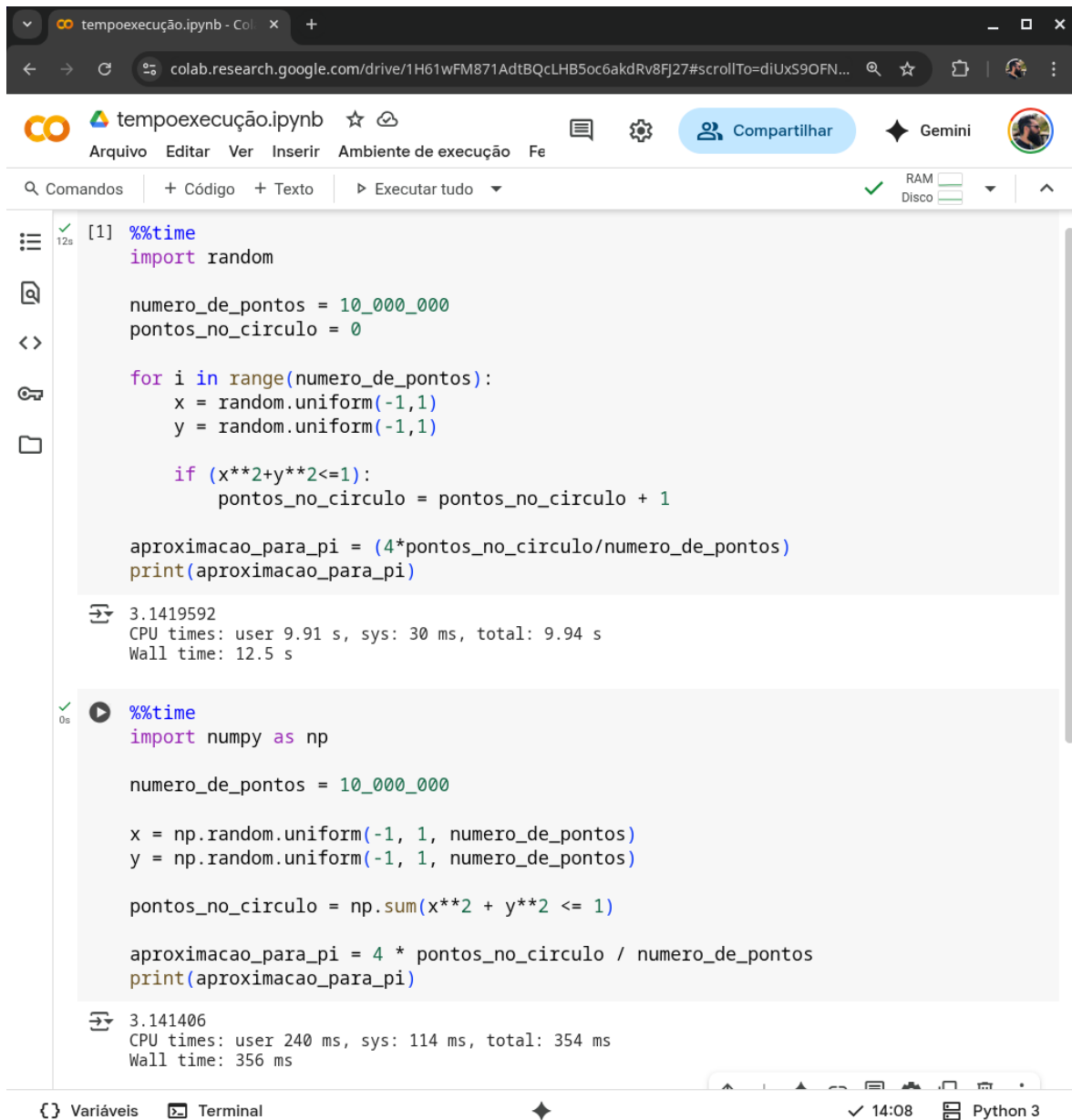
```
aproximacao_para_pi = 4 * pontos_no_circulo / numero_de_pontos  
print(aproximacao_para_pi)
```

Enquanto o código original pode levar cerca de 10 a 20 segundos para processar 10 milhões de pontos no Google Colab, a versão vetorizada com NumPy executa a mesma tarefa em menos de 1 segundo, representando um ganho de desempenho superior a 10 vezes. Esse tipo de comparação pode ser inclusive explorado pelo professor, destacando que o tempo de execução é um fator relevante no trabalho de um programador, mas que otimizações como essa pressupõem um conhecimento mais aprofundado tanto da linguagem de programação utilizada quanto de conceitos matemáticos. A Figura 69 traz um exemplo de execução dos dois códigos no Google Colab. Onde na primeira versão, o tempo total gasto foi de 12,5 segundos, já com o código otimizado o tempo gasto foi de 0,356 segundos, o que nos mostra um tempo pelo menos 35 vezes menor.

O uso da programação neste trabalho não foi um recurso acessório, mas uma estratégia estruturante para explorar conceitos matemáticos frequentemente resistentes à intuição. A linguagem Python, com sua sintaxe simples e vasto ecossistema de bibliotecas, permitiu construir algoritmos que simularam, estimaram e visualizaram aspectos do infinito, tornando mais tangíveis ideias tradicionalmente abstratas. Ferramentas como Jupyter, Google Colab e SageMath viabilizaram essas investigações com precisão e acessibilidade, promovendo um ambiente experimental no ensino e na pesquisa em Matemática. Os códigos apresentados neste capítulo estão disponíveis no link a seguir.

<<https://tinyurl.com/CodigosDissertacao>>

A integração entre código e teoria permitiu observar a Matemática em movimento, em constante aproximação e ajuste. Espera-se que os algoritmos apresentados sirvam não apenas como exemplos ilustrativos, mas também como convites à exploração. A computação, nesse contexto, aparece como aliada da intuição, da conjectura e da demonstração, ampliando as possibilidades de ensino, aprendizagem e investigação matemática.



The screenshot shows a Google Colab notebook titled "tempoexecução.ipynb". The notebook contains two code cells comparing different methods for approximating pi using the Monte Carlo method. The first cell uses a loop to generate random points and check if they fall within a unit circle, taking 12.5 seconds. The second cell uses numpy to generate random points and check if they fall within a unit circle, taking 356 ms.

```
[1] %%time
import random

numero_de_pontos = 10_000_000
pontos_no_circulo = 0

for i in range(numero_de_pontos):
    x = random.uniform(-1,1)
    y = random.uniform(-1,1)

    if (x**2+y**2<=1):
        pontos_no_circulo = pontos_no_circulo + 1

aproximacao_para_pi = (4*pontos_no_circulo/numero_de_pontos)
print(aproximacao_para_pi)
```

3.1419592
CPU times: user 9.91 s, sys: 30 ms, total: 9.94 s
Wall time: 12.5 s

```
%%time
import numpy as np

numero_de_pontos = 10_000_000

x = np.random.uniform(-1, 1, numero_de_pontos)
y = np.random.uniform(-1, 1, numero_de_pontos)

pontos_no_circulo = np.sum(x**2 + y**2 <= 1)

aproximacao_para_pi = 4 * pontos_no_circulo / numero_de_pontos
print(aproximacao_para_pi)
```

3.141406
CPU times: user 240 ms, sys: 114 ms, total: 354 ms
Wall time: 356 ms

Figura 69 – Coparação de tempo dos dois códigos

Fonte: o autor.

9 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar uma proposta de abordagem do infinito voltada à formação de professores da Educação Básica. Essa abordagem se apoia em uma análise articulada entre os aspectos históricos, filosóficos e matemáticos que permeiam esse conceito. Essa proposta se alinha à necessidade de “ir além da perspectiva conteudista do ensino e começar a propor uma educação interdisciplinar” (FAINGUELERNT; NUNES, 2012, p. 20). Partimos da constatação de que o infinito, embora recorrente em discussões e conteúdos escolares, é frequentemente abordado de forma superficial ou fragmentada no ensino médio. Como aponta o próprio documento oficial:

O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as idéias de convergência e de infinito. (BRASIL, 2006, p. 120)

Diante desse cenário, buscamos construir uma narrativa que ampliasse a compreensão dos docentes sobre a natureza e os desdobramentos do conceito de infinito ao longo do tempo.

A primeira parte da dissertação foi dedicada à investigação do desenvolvimento histórico da noção de infinito, desde os primeiros registros na Grécia Antiga até os avanços teóricos promovidos por Cantor.

[...] não parece concebível ensinar qualquer disciplina sem despertar o interesse em sua história – e na história em sentido pleno. Ainda que possamos tentar ensinar os conceitos que nos interessam tais como eles se nos apresentam atualmente, os significados são vivos, eles se transformam, eles têm história. (MACHADO, 2011, p. 193)

Ao revisitar os caminhos percorridos por filósofos e matemáticos, foi possível evidenciar como as concepções de infinito refletiram “divergências conceituais amplas” e contribuíram para transformações no pensamento matemático. Essa contextualização mostrou-se fundamental para compreender tanto os obstáculos quanto as potencialidades didáticas associadas ao tema.

Em seguida, exploramos a distinção entre infinitos enumeráveis e não enumeráveis, evidenciando as contribuições de Cantor para a formalização do conceito de cardinalidade. Como exemplo, temos a primeira demonstração da não enumerabilidade de $\mathbb{R}$,

enviada por Cantor a Dedekind no início de 1873 (BELNA, 2011, p. 97). Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ foram analisados sob essa perspectiva, permitindo discutir não apenas o crescimento da hierarquia dos infinitos, mas também a ruptura com a ideia de que o infinito seria uma entidade única e homogênea. A introdução dos números transfinitos e a demonstração da existência de conjuntos não enumeráveis forneceram base para reflexões profundas sobre a estrutura do universo matemático. Com relação à criação dos números transfinitos, Belna (2011, p. 199) apresenta um trecho de Cantor (1883) no qual o autor afirma:

Na verdade, não vejo o que nos poderia deter nesta atividade criadora de novos números, desde o momento em que, para o progresso da ciência, a introdução de uma nova classe de números tornou-se desejável ou, até mesmo indispensável. Eis o que me parece produzir-se, efetivamente, na teoria dos conjuntos e, talvez, até mesmo, em um domínio muito mais amplo. Sem essa extensão, já não consigo avançar; com ela, alcanço qualquer espécie de resultados inesperados.

As seções finais do trabalho foram dedicadas à exposição de aparentes paradoxos e “absurdos” matemáticos que envolvem o uso do infinito, como séries divergentes, propriedades não intuitivas de números irracionais e aproximações computacionais de π e $\sqrt{2}$. Esses exemplos serviram tanto como ilustração das dificuldades conceituais quanto como estímulo para a construção de uma postura investigativa por parte dos professores, evidenciando a importância de se explorar os limites e as fronteiras da matemática escolar.

A história privilegiou uma visão da matemática como uma “ciência exata”, rigorosa, formal e precisa. A busca da verdade e da certeza, ou seja, de criar um método de raciocínio que pudesse provar todas as afirmações matemáticas, se tornou uma obsessão de muitos estudiosos que acreditavam que os erros e as contradições que surgissem nas teorias eram fruto do descuido dos próprios seres humanos. (COURY, 2016, p. 131)

O grande matemático David Hilbert acreditava que “toda a Matemática poderia ser reduzida a um número finito de axiomas consistentes” (SILVA, 2023, p. 171); no entanto, mesmo diante dos esforços em resolver os “absurdos” aqui apresentados, sabemos hoje, a partir dos teoremas de incompletude de Gödel, que existem proposições matemáticas verdadeiras que não podem ser provadas dentro de certos sistemas formais (NAGEL; NEWMAN, 2001, p. 19), o que evidencia os próprios limites da formalização e da certeza na Matemática.

Acreditamos que a compreensão ampliada sobre o infinito, ancorada em uma abordagem histórica, filosófica e formal, contribui significativamente para a formação crítica e reflexiva do professor de Matemática. O contato com argumentos rigorosos, mas acessíveis, e a articulação com ferramentas computacionais como Python e SageMath, enriquecem o repertório didático e favorecem práticas mais conscientes em sala de aula. Segundo Giraldo, Caetano e Mattos (2013, p. 208), os recursos computacionais são pertinentes para o ensino, pois dispõem de uma vasta gama de ferramentas para lidar com diversos conceitos de Matemática. No entanto, os autores ressaltam que:

[...] o uso de tais recursos requer linguagem de programação com comandos e sintaxe específicos, que podem ser bastante sofisticados, e cuja aprendizagem pode ser difícil para alunos no ensino básico. Por outro lado, esse grau de dificuldade pode ser dosado de acordo com o nível escolar, por meio do planejamento [...] (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2013, p. 208)

Esses aspectos reforçam a necessidade de um professor preparado não apenas para lidar com os fundamentos conceituais do infinito, mas também para mediar, com sensibilidade e intencionalidade pedagógica, a introdução progressiva de recursos computacionais no processo de ensino-aprendizagem.

Esperamos que esta dissertação possa representar não um ponto de chegada, mas um convite à continuidade: à busca por novas formas de explorar o infinito no ensino, à valorização da História da Matemática como instrumento pedagógico e ao aprofundamento permanente sobre os fundamentos daquilo que ensinamos. Por fim, encerramos este trabalho com uma citação de Hardy, em que ele apresenta duas questões que surgem quando buscamos justificar nossa vida e o que fazemos dela:

Um homem que se propõe a justificar sua existência e suas atividades tem de distinguir duas questões diferentes. A primeira é se o trabalho que ele faz é um trabalho que vale a pena; a segunda é por que ele o faz, qualquer que seja seu valor. Muitas vezes a primeira pergunta é difícil, e a resposta, muito desencorajadora; mas a maioria das pessoas achará a segunda fácil mesmo assim. (HARDY, 2000, p. 64)

Acerca das questões de Hardy em sua *Defesa de um Matemático*, podemos dizer que acreditamos que o trabalho produzido tem um valor em si, e que, dentre suas motivações, está o desejo pessoal de contribuir, em alguma escala, com a Matemática e com o seu ensino.

Referências

- ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 6. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 30, 34, 35 e 36.
- ALVES, F. R. V. *Filosofia das Ciências e da Matemática*. Fortaleza: UAB/IFCE, 2011. Acesso em: 15 jul. 2025. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/430203?mode=full>>. Citado na página 22.
- ANDRADE, A. K. S.; OLIVEIRA, L. G. R. d. Uma crítica sobre leibniz, as mônadas e a razão pura. *Occursus: Revista de Filosofia*, v. 7, n. 2, p. 17–22, jul./dez. 2022. ISSN 2526-3676. Acesso em: 05 de agosto de 2025. Disponível em: <<https://revistas.uece.br/index.php/Occursus/article/view/9208>>. Citado na página 28.
- ANDRADE, E. G. de et al. Análise comparada de linguagens de programação para resolução de problemas matemáticos: uma experiência no ensino médio integrado. *Research, Society and Development*, v. 13, n. 1, 2024. ISSN 2525-3409. Acesso em: 24 jul. 2025. Disponível em: <<https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/download/44750/35751/467518>>. Citado na página 154.
- ARELARO, A. L. A distinção entre método matemático e filosófico em kant: El problema de la síntesis en la filosofía. *PÓLEMOS - Revista de Estudantes de Filosofia da Universidade de Brasília*, v. 10, n. 19, p. 77–104, Mai. 2021. Acesso em: 14 jul. 2025. Disponível em: <<https://periodicostestes.bce.unb.br/index.php/polemos/article/view/34935>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 29.
- AULETE, C. *Novíssimo Aulete*: dicionário contemporâneo da língua portuguesa. Organizado por Paulo Geiger. Rio de Janeiro: Lexikon, 2011. Citado na página 24.
- BARBIERI, G. A. O conceito de infinito hegeliano na ciência da lógica. *Revista Eletrônica Estudos Hegelianos*, v. 9, n. 16, p. 52–66, Abr. 2012. Acesso em: 12 jul. 2025. Disponível em: <<https://ojs.hegelbrasil.org/index.php/reh/article/view/94>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 98.
- BARELLI, E.; PENNACCHIETTI, S. *Dicionário das Citações*. São Paulo: Martins Fontes, 2001. Citado na página 5.
- BATISTA, I. d. L.; LUCAS, S. Abordagem histórico-filosófica e educação matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 6, n. 1, jan. 2011. Acesso em: 18 jul. 2025. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4682>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 28 e 29.
- BELNA, J.-P. *Cantor*. São Paulo: Estação Liberdade, 2011. Citado na página 173.

- BÍBLIA SAGRADA. *Bíblia Sagrada*: Edição pastoral. São Paulo: Paulus, 2005. Citado na página 129.
- BÍBLIA SAGRADA. *Bíblia Sagrada*: Tradução king james atualizada. São Paulo: Abba Press, 2012. Citado na página 130.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado na página 72.
- BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N. G. *Enciclopédia de termos lógicos-filosóficos*. 2. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 14, 23 e 93.
- BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. 2006. Acesso em: 18 jul. 2025. Disponível em: <<https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Citado na página 172.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. 2018. Acesso em: 18 jul. 2025. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. 2018. Acesso em: 18 jul. 2025. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_Ensino_Medio_em_pdf.pdf>. Citado na página 16.
- CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007. Citado na página 108.
- CANTOR, G. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig: B. G. Teubner, 1883. Citado na página 173.
- CATTANEI, E. Hegel e Platão, filósofos da matemática. *HYPNOS*, n. 7, p. 37–55, Dez. 2001. Acesso em: 12 jul. 2025. Disponível em: <<https://hypnos.org.br/index.php/hypnos/article/view/106/106>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- CHAUÍ, M. *Introdução à história da filosofia*: dos pré-socráticos a aristóteles. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2002. v. 1. Citado na página 25.
- COMTE-SPONVILLE, A. *Dicionário Filosófico*. 2. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 33.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000. Citado na página 20.
- COURY, A. G. F. O impacto dos paradoxos na história e desenvolvimento das teorias matemáticas. In: VILELA, D. S.; MONTEIRO, A. o. (Ed.). *Paradoxos do infinito e os limites da linguagem*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. Citado na página 173.
- COUTINHO, M. M. *Como Ensinei Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. Citado na página 130.

- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9. Citado na página 130.
- ENDERTON, H. B. *Elements of Set Theory*. San Deigo: Academic Press, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 89.
- ENDLER, O. *Teoria dos Números Algébricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. Citado na página 93.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 20, 38, 72, 77 e 144.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 32, 62, 73, 95, 108 e 109.
- FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. *Matemática: Práticas pedagógicas para o ensino médio*. Porto Alegre: Penso, 2012. Citado na página 172.
- FERNANDEZ, C. d. S.; SANTOS, R. A. d. O teorema fundamental da Álgebra. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*. João Pessoa, PB, 2010. Universidade Federal da Paraíba, 18 a 22 de outubro de 2010. Acesso em: 17 jul. 2025. Disponível em: <https://mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC5Completo.pdf>. Citado na página 96.
- FERREIRA, A. B. d. H. *Míni Aurélio: o dicionário da língua portuguesa*. 8. ed. Curitiba: Positivo, 2010. Citado na página 24.
- FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado na página 38.
- FIGUEIREDO, D. G. d. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 58, 94, 96, 101 e 102.
- FREGE, J. G. *Os Fundamentos da Aritmética: Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021. Citado na página 51.
- FREIRIA, A. A. A teoria dos conjuntos de cantor. *Paidéia (Ribeirão Preto)*, v. 20, n. 45, p. 63–74, 1992. Acesso em: 20 jul. 2025. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/paideia/v20n45/a12v20n45.pdf>>. Citado na página 71.
- GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 174.
- GOMPERZ, T. *Os Pensadores da Grécia: história da filosofia antiga*. 1. ed. São Paulo: EDIÇÕES 70, 2011. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- HALMOS, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001. Citado na página 106.
- HARDY, G. H. *Em Defesa de um Matemático*. São Paulo: Martins Fontes, 2000. Citado na página 174.

- HEFEZ, A. *Curso de Álgebra*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v. 1. Citado na página 94.
- HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 21.
- HEGEL, G. W. F. *A Ciência da Lógica*. Marxists Internet Archive, 1812. Acesso em: 12 jul. 2025. Disponível em: <<https://www.marxists.org/portugues/hegel/1812/logica/index.htm>>. Citado na página 30.
- HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to Set Theory*. New York: Marcel Dekker, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 90.
- HUISMAN, D. *Dicionário dos Filósofos*. São Paulo: Martins Fontes, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 27.
- KANGUSSU, I. Breve consideração sobre intertícios de trevas gregas. *Revista de Filosofia Aurora*, v. 16, n. 19, p. 85–92, maio 2004. Acesso em: 14 jul. 2025. Disponível em: <<https://periodicos.pucpr.br/aurora/article/view/1033>>. Citado na página 114.
- KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. 4. ed. Bragança Paulista: Editora Vozes, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- KING, S. *Sobre a escrita: A arte em memórias*. 3. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2015. Citado na página 18.
- LACERDA, T. M. Leibniz: A infinitude divina e o infinito em nós. *Cadernos Espinosanos*, v. 6, n. 34, p. 39–63, jun. 2016. Acesso em: 17 jul. 2025. Disponível em: <<https://revistas.usp.br/espinosanos/article/view/116945>>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 34 e 35.
- LANG, S. *Álgebra para Graduação*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008. Citado na página 94.
- LEITE, F. T. *Metodologia Científica: Métodos e técnicas de pesquisa (monografias, dissertações, teses e livros)*. Aparecida: Ideias & Letras, 2008. Citado na página 17.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1. Citado 9 vezes nas páginas 23, 59, 60, 62, 64, 66, 68, 69 e 70.
- LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 134 e 135.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- LIMA, E. L. et al. *Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. Citado na página 43.
- LIMA, E. L. et al. *Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3. Citado na página 96.

LISI, M. Some remarks on the cantor pairing function. *Le Matematiche*, LXII, n. 1, p. 55–65, 2007. Acesso em: 20 jul. 2025. Disponível em: <<https://lematematiche.dmi.unict.it/index.php/lematematiche/article/download/14/13/68>>. Citado na página 55.

LOLLI, G. A questão dos fundamentos entre matemática e filosofia: visão geral introdutória. *REMATEC*, v. 17, n. 41, p. 01–19, ago. 2022. Acesso em: 10 jul. 2025. Disponível em: <<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/432>>. Citado na página 22.

LORIN, J. H.; BATISTA, I. d. L. Uma discussão a respeito da natureza do conceito de infinito. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 13, n. 2, maio 2023. Acesso em: 14 jul. 2025. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/3355>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 112.

LUCKESI, C. C. *Filosofia da Educação*. 3. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1990. Citado na página 15.

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua*. 6. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2011. Citado na página 172.

MAOR, E. *e: a história de um número*. 9. ed. Rio de Janeiro: Record, 2025. Citado na página 101.

MCKIRAHAN, R. D. *A Filosofia antes de Sócrates: Uma introdução com textos e comentários*. São Paulo: Paulus, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

MENEZES, N. N. C. *Introdução à Programação com Python: Algoritmos e lógica de programação para iniciantes*. 3. ed. São Paulo: Novatec editora Ltda., 2019. Citado na página 155.

MORAIS FILHO, D. C. d. *Um Convite à Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 20, 33 e 44.

MORAIS FILHO, D. C. d. *Manual de Redação Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 134.

MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de cálculo*. SBM, Rio de Janeiro, 2022. Citado na página 102.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. *A prova de Godel*. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 173.

NETTO, A.; MACIEL, F. *Python Para Data Science: e machine learning descomplicado*. Rio de Janeiro: Alta Books Editora, 2021. Citado na página 155.

NOVAES, G. P. *Introdução à Teoria dos Conjuntos*. Rio de Janeiro: SBM, 2018. Citado na página 92.

- NUNES, T. et al. *Educação matemática: números e operações numéricas*. 2. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2009. Citado na página 15.
- POPPER, K. *O Mundo de Parmênides: Ensaio sobre o iluminismo pré-socrático*. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2019. Citado na página 25.
- RAMOS, M. V. M.; NETO, J. J.; VEGA, I. S. *Linguagens Formais: Teoria e conceitos*. São Paulo: Blucher, 2023. Citado na página 68.
- REALE, G.; ANTISERI, D. *Filosofia: Antiguidade e idade média*. 2. ed. São Paulo: Paulus, 2017. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- REIS, G. L. d.; SILVA, V. V. da. *Geometria Analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. Citado na página 127.
- RIBEIRO, L. F. B. O problema do infinito na física de aristóteles. *O que nos faz pensar*, v. 20, n. 30, p. 195–206, dez. 2011. ISSN 0104-6675. Acesso em: 17 jul. 2025. Disponível em: <<https://oquenofazpensar.fil.puc-rio.br/oqfnf/article/view/349>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 33.
- ROQUE, T. *História da História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 111.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 73.
- RUSSELL, B. *História da filosofia ocidental*. 1. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2015. v. 1. Citado na página 27.
- RUSSELL, B. *Conhecimento humano: Seus escopos e seus limites*. 3. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2018. Citado na página 50.
- SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. R. C. *Computabilidade: os limites da computação*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), 2012. Acesso em: 23 jul. 2025. Disponível em: <https://www.sbmec.org.br/wp-content/uploads/2022/08/livro_11.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.
- SANTOS, E. E. dos. *O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/425138>>. Citado na página 32.
- SANTOS, J. P. d. O. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado na página 21.
- SANTOS, V. d. O infinito e a vida em hegel: apontamentos a partir do terceiro capítulo da fenomenologia do espírito. *Trans/Form/Ação*, v. 44, n. 3, p. 433–452, Jul./Set. 2021. Acesso em: 12 jul. 2025. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/trans/a/5VbXrR4C6QqPqtyvRJG4Sxz>>. Citado na página 31.

- SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. 24. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2016. Citado na página 16.
- SHAPIRO, S. *Filosofia da Matemática*. Lisboa: Edições 70, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.
- SILVA, A. A. d. A primeiridade e infinito na grécia antiga e na amazônia. *Complexitas – Revista de Filosofia Temática*, v. 1, n. 2, p. 52–64, jul./dez. 2016. Acesso em: 10 jul. 2025. Disponível em: <<https://periodicos.ufpa.br/index.php/complexitas/article/view/4367>>. Citado na página 24.
- SILVA, C. P. d. *Avanços da Matemática no Brasil: Visão panorâmica*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2023. Citado na página 173.
- SILVA, J. J. d. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007. Citado na página 23.
- SILVA, L.; SANTOS, M.; MACHADO, R. *Elementos de Computação Matemática com SageMath: e machine learning descomplicado*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. Citado na página 159.
- SIPSER, M. *Introdução à teoria da computação*. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.
- SIQUEIRA, F. K. d. S.; LORIN, J. H. Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras. *ACTIO: Docência em Ciências*, v. 6, n. 2, mai./ago. 2021. ISSN 2525-8923. Acesso em: 17 jul. 2025. Disponível em: <<http://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12677>>. Citado na página 35.
- SOUZA, L. F. S.; RODRIGUEZ, B. D. do A.; POFFAL, C. A. Linguagem python e jupyter notebook: uma proposta didática a fim de determinar o preço adequado à venda utilizando conceitos de Álgebra linear, cálculo diferencial e métodos numéricos. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 9, n. 2, p. 66–74, jan. 2024. Acesso em: 24 jul. 2025. Disponível em: <<https://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/52305>>. Citado na página 154.
- STEWART, J. *Cálculo*. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006. v. 2. Citado na página 102.
- SUGUITANI, L.; VIANA, J. P.; D’OTTAVIANO, I. M. L. Prefácio. In: SUGUITANI, L.; VIANA, J. P.; D’OTTAVIANO, I. M. L. (Ed.). *Conferências na Unicamp em 1975*. Campinas: Editora da Unicamp, 2016. p. 7–9. Acesso em: 22 jul. 2025. Disponível em: <<https://www.cle.unicamp.br/ebooks/index.php/publicacoes/catalog/book/103>>. Citado na página 14.
- TARSKI, A. Verdade e demonstração. In: MORTARI, C. A.; DUTRA, L. H. de A. (Ed.). *A concepção semântica da verdade: Textos clássicos de Alfred Tarski*. São Paulo: Editora UNESP, 2007. p. 203–227. Citado na página 14.

- TASSARA, E. T. d. O.; MORAIS, L. d.; ABBUD, N. Paradoxos: Zenão de eléia e os processos de compreensão da inteligibilidade. *Cognitio-Estudos: revista eletrônica de filosofia*, v. 15, n. 1, jun. 2018. Acesso em: 10 jul. 2025. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/cognitio/article/view/36946>>. Citado 5 vezes nas páginas 111, 112, 114, 115 e 116.
- TAVARES, J. N. Paradoxos. (clássico e quântico) de zenão. *REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR*, v. 11, n. 03, out. 2023. Acesso em: 17 jul. 2025. Disponível em: <<https://rce.casadasciencias.org/rceapp/pdf/2023/035/>>. Citado 3 vezes nas páginas 112, 115 e 118.
- TILES, M. Filosofia da Matemática. In: BUNNIN, N.; TSUI-JAMES, E. P. (Ed.). *Compêndio de Filosofia*. 4. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2013. cap. 11. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- VIEIRA, L. et al. Introdução aos números transcendentos e aos números de liouville. *Professor de Matemática Online*, v. 7, n. 1, p. 77–94, 2019. ISSN 2319-023X. Acesso em 27 jul. 2025. Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/05/art7_vol7_2019_PMO_SBM.pdf>. Citado na página 96.
- VOLTAIRE. *Dicionário Filosófico*. São Paulo: LaFonte, 2018. Citado na página 34.
- WAGNER, E. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Citado na página 131.
- ÁVILA, G. S. d. S. A série harmônica e a fórmula de euler-maclaurin. *Matemática Universitária*, n. 19, p. 55–63, dez. 1995. Acesso em: 20 jul. 2025. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n19_Artigo05.pdf>. Citado na página 126.
- ÁVILA, G. S. d. S. *Análise matemática para licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2006. Citado na página 44.
- ÁVILA, G. S. d. S. *Cálculo das funções de uma variável*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 2. Citado na página 124.