UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional – PROFMAT/CCT/UFCG

Alberis Antonio de Souza

UM ESTUDO SOBRE A DENSIDADE NATURAL DE SUBCONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS E SUAS IMPLICAÇÕES NO ENSINO

Campina Grande - PB

Julho/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional – PROFMAT/CCT/UFCG

Alberis Antonio de Souza

UM ESTUDO SOBRE A DENSIDADE NATURAL DE SUBCONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS E SUAS IMPLICAÇÕES NO ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Orientador: Dr. Renan Jackson Soares Isneri

Campina Grande - PB

Julho/2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

S729e Souza, Alberis Antonio de.

Um estudo sobre a densidade natural de subconjuntos dos números naturais e suas implicações no ensino / Alberis Antonio de Souza. – 2026.

89 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Renan Jackson Soares Isneri".

Referências.

1. Teoria Analítica dos Números. 2. Densidade Natural. 3. Números Naturais. 4. Distribuição de Conjuntos. I. Isneri, Renan Jackson Soares. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Alberis Antonio de Souza

UM ESTUDO SOBRE A DENSIDADE NATURAL DE SUBCONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS E SUAS IMPLICAÇÕES NO ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Campina Grande - PB, 07 de julho de 2026

gov.br Documento assinado digitalmente
RENAN JACKSON SOARES ISNERI
Data: 22/09/2026 11:26:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Renan Jackson Soares Isneri

Orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
Data: 21/09/2026 14:06:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Membro interno- UFCG

gov.br Documento assinado digitalmente
VANDENBERG LOPES VIEIRA
Data: 22/09/2026 14:19:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Vandenberg Lopes Vieira

Membro externo- UFCG

Campina Grande - PB

Julho/2026

Dedico este trabalho, primeiramente, à minha amada esposa, que foi a minha base firme, a minha calmaria nos dias de tempestade e a maior incentivadora dos meus sonhos. Sua paciência compreensiva diante das minhas ausências e das longas horas de estudo e sua fé inabalável em meu potencial foram o combustível essencial para que eu cruzasse esta linha de chegada. Esta conquista não é apenas minha, mas nossa.

Aos meus pais e a toda a minha família, que plantaram em mim as primeiras sementes do saber e me ensinaram o valor da perseverança e da honestidade. Mesmo sem compreender, muitas vezes, a complexidade dos teoremas e das equações que preenchiam minhas noites, apoiaram-me com um amor incondicional que sempre encurtou as distâncias e suavizou o peso de cada jornada acadêmica trazendo segurança nas longas viagens interestaduais para poder cumprir presencialmente o compromisso de estudo e dedicação ao PROFMAT.

Por fim, dedico esta dissertação a todos os estudantes e professores da educação básica, em especial os colegas da turma 2024.1, que buscam enxergar a Matemática para além das fórmulas prontas. Que este estudo sobre a densidade natural e suas aplicações no ensino possa servir de inspiração para uma prática docente mais profunda, humana e transformadora.

Agradecimento

Agradeço a Deus, pela dádiva da vida, pela saúde e pela força mental concedidas para superar as exigências e os momentos de exaustão ao longo do mestrado. À minha esposa e à minha família, expresso minha gratidão mais profunda; vocês abriram mão de momentos de lazer ao meu lado para que eu pudesse me doar a este projeto, oferecendo-me um refúgio de afeto e compreensão que tornou este caminho possível.

Manifesto meu sincero agradecimento à Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) e ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT/CCT) em especial aos professores: Daniel Cordeiro de Morais Filho, Leomaques Francisco Silva Bernardo, Luiz Antônio da Silva Medeiros, Rodrigo Cohen Mota Nemer, José de Arimatéia Fernandes, Jaime Alves Barbosa Sobrinho, Marcelo Carvalho Ferreira, Deise Mara Barbosa de Almeida e Romildo Nascimento de Lima cujos ensinamentos e rigor intelectual expandiram meus horizontes, permitindo-me compreender as estruturas dos números. Desse modo pude aprimorar substancialmente a minha prática pedagógica e a minha formação como educador.

Agradeço de maneira muito especial ao meu orientador, Dr. Renan Jackson Soares Isneri, pela paciência, condução segura e brilhantismo com que guiou o desenvolvimento deste trabalho. Sua generosidade em compartilhar conhecimentos e sua constante exigência pelo rigor acadêmico foram fundamentais para a superação dos desafios teóricos encontrados ao longo desta pesquisa. Mais do que uma orientação técnica, suas críticas construtivas e incentivos minuciosos foram essenciais para consolidar minha formação profissional e científica, tornando-se um modelo de excelência acadêmica que levarei para toda a minha trajetória.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo introdutório sobre a densidade natural de subconjuntos de números naturais, uma ferramenta da Teoria Analítica dos Números que permite medir a proporção de ocupação de um conjunto em relação à totalidade dos naturais. Partindo da ideia de que conjuntos infinitos podem ser comparados não apenas pela sua quantidade de elementos, o texto explora como a densidade natural mede a frequência com que os elementos de um conjunto aparecem entre os números naturais. São analisadas as propriedades fundamentais desse conceito, como a monotonicidade, a invariância por translação e o comportamento frente a operações de união e complementação, restringindo-se aos conjuntos que admitem a existência de um limite definido para essa proporção. O estudo contempla exemplos clássicos, como a distribuição de múltiplos de inteiros, números primos e quadrados perfeitos, oferecendo uma base teórica que harmoniza a intuição aritmética com a análise matemática.

Palavras-chave: Densidade Natural. Números Naturais. Teoria Analítica dos Números. Distribuição de Conjuntos

Abstract

This work presents an introductory study on the natural density of subsets of natural numbers, a tool from Analytic Number Theory that allows measuring the proportion of occupancy of a set in relation to the totality of natural numbers. Starting from the idea that infinite sets can be compared not only by their quantity of elements, the text explores how natural density measures the frequency with which the elements of a set appear among the natural numbers. The fundamental properties of this concept are analyzed, such as monotonicity, translation invariance, and behavior toward union and complementation operations, restricting the scope to sets that admit the existence of a defined limit for this proportion. The study covers classic examples, such as the distribution of integer multiples, prime numbers, and perfect squares, offering a theoretical basis that harmonizes arithmetic intuition with mathematical analysis.

Keywords: Natural Density. Natural Numbers. Analytic Number Theory. Set Distribution.

Sumário

1 Introdução **6**

2 Reflexões Sobre a Formação Docente **10**

3 Definições e Resultados Preliminares **14**

4 Densidade Natural **29**

4.1 Exemplos 30

5 Propriedades da Densidade Natural **48**

5.1 Exemplos 63

6 Um Subconjunto Que Não Possui Densidade **74**

7 Resultados Avançados da Densidade Natural **78**

8 Conclusão **85**

1 Introdução

A análise de subconjuntos de números naturais frequentemente inicia-se pela tentativa de comparar o tamanho relativo de diferentes agrupamentos numéricos. No entanto, a comparação entre o conjunto de todos os números naturais e seus subconjuntos infinitos, como o dos números pares, revela uma limitação das abordagens elementares de contagem. Embora ambos possuam infinitos elementos, a percepção intuitiva de que um conjunto ocupa um espaço maior que outro na sequência numérica indica a necessidade de uma medida que quantifique a proporção de ocupação desses elementos.

Essa medida é formalizada por meio do conceito de densidade natural, também denominada densidade assintótica. Diferente das comparações baseadas apenas na existência de correspondências entre conjuntos, a densidade natural avalia a frequência com que os elementos de um subconjunto aparecem entre os primeiros números naturais n à medida que n cresce indefinidamente. Este conceito permite distinguir subconjuntos que, apesar de infinitos, apresentam comportamentos de distribuição significativamente distintos, como os múltiplos de um inteiro e o conjunto dos números primos.

A fundamentação teórica da densidade natural está consolidada no campo da Teoria Analítica dos Números, área dedicada à investigação do comportamento e da distribuição de subconjuntos dos números naturais. Embora obras clássicas de introdução à teoria dos números, como a de (HEFEZ, 2013), foquem estritamente na construção axiomática, propriedades de divisibilidade, congruências e na estrutura dos números naturais e inteiros, sem introduzir o conceito de densidade, que exige ferramentas de limites e análise, o tema possui elevada relevância. Esta se dá não apenas no âmbito teórico, mas também sob a perspectiva probabilística, uma vez que a densidade pode ser interpretada como a probabilidade de um número natural, escolhido ao acaso, pertencer a um determinado conjunto. Apesar de sua importância para a compreensão da estrutura dos números naturais e de ser um conceito com definições fundamentais estabelecidas, a literatura técnica em língua portuguesa sobre este tema específico ainda é considerada escassa. Nota-se que, na maioria das produções nacionais, o assunto não constitui o tema

central de investigação, sendo frequentemente abordado de forma pontual ou secundária.

Como exceção a esse panorama, destaca-se a densidade natural, termo empregado para nomear uma ferramenta construída para uma análise probabilística de como os elementos de um determinado conjunto de números se distribuem ao longo do conjunto dos números naturais. De maneira intuitiva, essa noção permite avaliar o quanto um subconjunto está presente em relação a $\mathbb{N}$, oferecendo uma perspectiva quantitativa sobre sua distribuição.

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Daqui em diante, entendemos por *densidade natural* de A, e denotamos por $\delta(A)$, o seguinte limite:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n},$$

onde $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $|A \cap I_n|$ denota a cardinalidade da interseção de A com I_n, sempre que tal limite existir. A formalização rigorosa dessa definição, bem como o aprofundamento de suas propriedades e os resultados necessários ao desenvolvimento deste trabalho, serão apresentados nos Capítulos 4 e 5.

Essa abordagem permite formalizar a análise da distribuição de subconjuntos dos números naturais, servindo como base para discussões posteriores envolvendo propriedades aritméticas. Complementarmente, (SILVA, 2023) emprega essa medida em contextos específicos da aritmética, analisando problemas relacionados às conjecturas e questões propostas pelo matemático alemão Kurt Mahler (1903–1988), reforçando a relevância da densidade natural como ferramenta de investigação matemática.

Além da escassez de referências em língua portuguesa, observa-se que, mesmo na literatura clássica em língua inglesa, a densidade natural costuma ser abordado de maneira relativamente breve e técnica. Em obras tradicionais de Teoria Analítica dos Números, como as de (BATEMAN; DIAMOND, 2004), (NATHANSON, 2013) e (IWANIEC; KOWALSKI, 2021), a densidade aparece frequentemente inserida no desenvolvimento de outros resultados, com pouca ênfase em aspectos introdutórios ou pedagógicos.

Nas obras mencionadas anteriormente, observa-se também que propriedades elementares relacionadas à densidade natural são, apenas utilizadas implicitamente, sem formulações explícitas ou demonstrações detalhadas, assumindo um grau de familiaridade

prévia do leitor. Tal abordagem, embora natural em textos especializados, pode dificultar a aprendizagem de estudantes que entram em contato inicial com o tema. Nesse contexto, destaca-se a tese de doutorado de (PEKARA, 1972), que apresenta um estudo mais amplo e sistemático sobre densidades assintóticas, explorando propriedades e resultados frequentemente omitidos ou apenas mencionados superficialmente na literatura clássica.

O estudo de densidades em subconjuntos dos números naturais também possui significativa relevância histórica no desenvolvimento da Teoria Analítica dos Números e da Teoria Aditiva dos Números. Diversos matemáticos de destaque contribuíram direta ou indiretamente para o avanço desse tema, entre eles Edmund Landau, G. H. Hardy, Paul Erdős, Lev Schnirelmann e, mais recentemente, Terence Tao. As ideias relacionadas à densidade desempenham papel fundamental em problemas envolvendo distribuição de números primos, propriedades aditivas de subconjuntos dos naturais e resultados assintóticos em Teoria dos Números. Esse contexto evidencia que a densidade natural não constitui apenas uma ferramenta técnica auxiliar, mas um conceito amplamente conectado a questões centrais da Matemática Moderna.

Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns exemplos básicos e uma análise sistemática das principais propriedades da densidade natural. Para isso, discutiremos a densidade natural de alguns subconjuntos clássicos de $\mathbb{N}$, tais como o conjunto dos números primos, múltiplos de inteiros e conjuntos definidos por propriedades aritméticas específicas. Serão examinados os critérios para a existência da densidade. Além disso, exploraremos propriedades fundamentais como a invariância sob translações, a preservação de ordem com relação a inclusão de conjuntos e o comportamento da densidade em operações de união ou exclusão de elementos.

Esta dissertação teve como ponto de partida o manuscrito Breve Discussão Sobre Densidade Assintótica de Conjuntos de Números Naturais, de autoria de (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2026), atualmente submetido para publicação. A partir das ideias centrais desse trabalho, buscou-se construir uma apresentação introdutória, gradual e autônoma do tema, articulando definições, exemplos e resultados fundamentais sobre densidade natural com reflexões sobre suas possíveis contribuições para o ensino de Matemática.

Por conseguinte, a dissertação apresenta alguns resultados mais avançados envolvendo densidade natural e distribuição de subconjuntos dos números naturais, com o

objetivo de ilustrar que o tema transcende o caráter introdutório desenvolvido ao longo do texto. Esses resultados evidenciam que o estudo de densidades está conectado a problemas modernos da Teoria dos Números e frequentemente requer ferramentas analíticas sofisticadas, cujo desenvolvimento completo ultrapassa o escopo da presente dissertaçã e do produto educacional proposto, o qual foca em um roteiro didático para o Ensino Médio. Com o intuito de aplicar os conceitos teóricos desenvolvidos ao longo do trabalho e atender às premissas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), esta dissertação traz como um de seus pilares a elaboração de um Produto Educacional. Intitulado "Onde os Números se Escondem? Da Probabilidade Clássica ao Infinito e à Densidade Natural", o produto consiste em um roteiro didático estruturado para ser aplicado na Educação Básica, em especial no Ensino Médio. A motivação pedagógica para o desenvolvimento desse material surge da constatação de que o ensino tradicional de probabilidade costuma restringir-se a espaços amostrais finitos e estáticos. O produto educacional visa preencher essa lacuna ao construir uma transição intuitiva entre a probabilidade em intervalos finitos e a densidade natural quando o universo se estende ao infinito. A proposta faz uso de atividades investigativas para aproximar os estudantes de noções avançadas da Teoria dos Números. Estruturado em seis módulos sequenciais (totalizando 13 horas-aula), o roteiro orienta o docente desde a formalização da probabilidade em subconjuntos finitos até a análise do comportamento de subconjuntos infinitos. Dessa forma, o produto educacional consolida-se como um instrumento de formação continuada de professores, promovendo o desenvolvimento e a interdisciplinaridade entre a Álgebra, a Probabilidade e a Teoria dos Números. Registra-se, por fim, o uso subsidiário de ferramentas de inteligência artificial exclusivamente para a otimização da escrita e correção linguística, sem qualquer interferência na fundamentação matemática ou no rigor conceitual da pesquisa.

2 Reflexões Sobre a Formação Docente

O desenvolvimento dos conjuntos numéricos é uma construção lógica e histórica, intrinsecamente ligada às necessidades pragmáticas da humanidade ao longo da evolução humana, buscando solucionar problemas que se manifestavam nas mais diversas civilizações. Essa trajetória é meticulosamente detalhada em (EVES, 2004), quando considera a matemática como resultado dos esforços do homem ao sistematizar os conceitos de grandezas, formas e números. Desse modo, a edificação de toda a estrutura numérica teve como alicerce fundamental o conjunto dos números naturais, o qual teve um desenvolvimento largamente conjectural. Assim, compreender como os demais conjuntos numéricos se relacionam com esse conjunto primordial tornou-se essencial para que os estudantes da educação básica dominem conceitos e resultados da Teoria dos Conjuntos.

> O programa de Matemática da primeira série do ensino médio tem como central as funções reais de uma variável real, estudadas sob o ponto de vista elementar, isto é, sem o uso do Cálculo Infinitesimal. Como preliminar a este estudo e preparação para as séries subsequentes, são apresentadas noções sobre conjuntos. A ideia geral de função e as diferentes categorias de números (naturais, inteiros, racionais e principalmente reais).(LIMA et al., 2013, p. 9)

Ampliar esta construção de conhecimento que é oferecido aos referidos discentes, incluindo as relações existentes nos conjuntos infinitos representa um avanço significativo ao estudo dos temas que compõem a Teoria dos Conjuntos. Com isso, faz-se necessária a utilização de novas ferramentas de cálculos que estudam relações que podem ser tratadas entre subconjuntos de conjuntos infinitos. Com esse intuito, a proposta central deste trabalho reside em apresentar a densidade natural como uma ferramenta de cálculos associados aos subconjuntos do conjunto dos números naturais em uma visão analítica.

Com base na perspectiva de (NUNES et al., 2009), certos objetos, apesar de sua natureza não-concreta, atuam como ferramentas culturais que potencializam as habilidades cognitivas humanas, sendo os números um exemplo disso. Nessa linha de raciocínio, o conceito de infinito pode ser visto como um desses instrumentos simbólicos. Isso se deve

tanto à sua forte conexão com os conjuntos numéricos quanto ao seu papel como uma entidade matemática fundamental.

Quando se trabalha com um conjunto finito, as análises relacionadas aos seus subconjuntos tendem a ser intuitivas considerando que apesar de conter uma quantidade de elementos distintos, diversos subconjuntos obedecem à mesma regra de composição, apresentando resultados bem definidos e padronizados, independentemente dos diferentes problemas ou sequências didáticas exploradas nos diversos caminhos resolutivos. Assim, ao se debruçar sobre o seguinte problema: Qual a probabilidade de se escolher um número par, isto é, da forma $2\mathbb{N}$, no conjunto A=$\{1,2,3,4\}$? Os estudantes consideram que, na forma $2\mathbb{N}$, existem os elementos 2 e 4 do conjunto, metade dos elementos, e desse modo concluem que a probabilidade, estabelecida pela relação

$$P = \frac{\text{Elementos da Forma } 2\mathbb{N}}{\text{Todos os Elementos}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Diante do exposto ao ser proposto um novo problema com características idênticas, por exemplo: Qual a probabilidade de se escolher um número par, isto é, da forma $2\mathbb{N}$, no conjunto A =$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$? De forma intuitiva a probabilidade é dada por

$$P = \frac{\text{Metade dos elementos do conjunto}}{\text{Todos os Elementos}}.$$

Logo $P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Essa percepção inicial, embora correta no contexto, muitas vezes induz os alunos a não explorarem outras formas de raciocínio matemático, limitando a reflexão sobre diferentes estratégias de resolução para esse e outros problemas com características semelhantes, além de deixar em aberto a resposta para o seguinte questionamento: será que a probabilidade de escolher um número par, isto é, na forma $2\mathbb{N}$ para qualquer conjunto com n elementos é dado por $P = \frac{1}{2}$? Tal postura pode dificultar o aprofundamento da compreensão matemática e limitar o desenvolvimento de um pensamento crítico mais elaborado.

> Embora o conhecimento matemático seja fruto de um processo, o ensino da matemática está, geralmente, baseado em informações sobre resultados formalizados (definições, procedimentos de

> cálculos, regras e fórmulas), através das quais são propostas resoluções para problemas e atividades muitas vezes desvinculadas dos significados conceituais que originam a aplicação das práticas propostas (GIRON; SOARES, 2020, p. 3)

Ao ampliar essa percepção para conjuntos infinitos, a intuição, especialmente para aqueles que não possuem formação matemática mais avançada, deixa de oferecer respostas claras ou soluções imediatamente formuláveis. Nesses contextos, a ausência de limites bem definidos impede que estratégias intuitivas, adequadas em conjuntos finitos, continuem sendo válidas.

Torna-se, portanto, essencial recorrer a procedimentos formais de cálculo, definições rigorosas, a regras estabelecidas e a formulações específicas que orientem a construção de soluções. É nesse cenário que ferramentas como a densidade natural, mencionada anteriormente, assumem papel fundamental, fornecendo critérios precisos para analisar propriedades numéricas em conjuntos infinitos.

A abordagem da densidade natural no catálogo acadêmico nacional é notoriamente escassa, sendo, muitas vezes, mencionada apenas como indagações superficiais em resoluções de problemas que investigam o comportamento de subconjuntos ao longo de $\mathbb{N}$. Segundo (SILVA, 2023), conforme abordado pontualmente no primeiro capítulo de sua tese, a densidade natural associa subconjuntos que possuem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$ ao conjunto infinito dos números naturais. Essa associação, segundo o autor, não apenas fornece resultados probabilísticos, mas fundamenta problemas que frequentemente exibem alta complexidade em suas demonstrações, como por exemplo: determinar a densidade natural do conjunto $2\mathbb{N}$, dos números pares positivos em $\mathbb{N}$. Tais conceitos fundamentam a prática pedagógica de docentes da educação básica ao ampliar o domínio de métodos resolutivos aplicados ao conjunto $\mathbb{N}$. A formalização dessas estratégias permite que o professor identifique e sistematize processos heurísticos que, embora presentes em sua prática intuitiva, careciam de rigor teórico.

> [. . .] o professor, no jogo do processo educativo, é o elemento que detém o conhecimento mais elaborado sobre a prática social e, por isso, possui autoridade pedagógica. Deve, portanto, servir de elemento mediador da cultura elaborada em relação aos alunos, de tal forma que estes deem um salto, da interpretação cotidiana

> para a compreensão elaborada da realidade. (LUCKESI, 1990, p. 206)

Desse modo, enriquecer seus conhecimentos torna o docente instrumento aperfeiçoado na educação básica, mediador base de conhecimento suprindo necessidades de metodologias de ensino para abordagem de problemas presentes no universo escolar, fundamentando e direcionando métodos eficazes na resolução de problemas.

3 Definições e Resultados Preliminares

A evolução da história da Teoria dos Números é marcada pela consolidação de resultados e definições, frequentemente derivados de conjecturas que exigiram séculos de investigação e rigorosa prova matemática. A seguir, apresentamos conceitos, definições, teoremas e proposições que serviram de base para comprovarmos a veracidade da aplicação da densidade natural em problemas apresentados ao longo deste trabalho.

É importante ressaltar que o objetivo do nosso trabalho não é demonstrar resultados preliminares. Por outro lado, faz-se necessário enfatizar e fundamentar a densidade natural, que surge para mensurar a probabilidade de se escolher aleatoriamente um elemento pertencente a um dado subconjunto dos números naturais. Para o interesse do leitor, a exposição detalhada dos tópicos abordados neste capítulo encontra-se em (HEFEZ, 2013) e (LIMA, 2013). Adicionalmente, para um aprofundamento em Teoria dos Números, sugerimos as obras de (SANTOS, 2001) e (VIEIRA, 2026). No que tange aos fundamentos de Análise, destacamos os textos clássicos da literatura nacional de (LIMA, 2017b) e (ÁVILA, 2006), além das consolidadas contribuições internacionais de (BATEMAN; DIAMOND, 2004), (ABBOTT, 2015) e (BARTLE; SHERBERT, 2011), no contexto analítico da Teoria dos Números.

Denotaremos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por I_n o conjunto

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Se $A \subset \mathbb{N}$ é um conjunto finito denotamos por $|A|$ sua cardinalidade, isto é, a quantidade de elementos de A.

Definição 3.1. *Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma função bijetiva $f : X \to Y$, ou seja, uma regra que associa a cada elemento de X um elemento de Y de modo que cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X. Isto equivale a dizer que f é uma função simultaneamente injetiva e sobrejetiva.*

Essa noção de correspondência biunívoca é fundamental para a sistematização da contagem e para a compreensão da estrutura dos conjuntos. Ao utilizarmos o conceito de bijeção apresentado na Definição 3.1, podemos formalizar o que significa um conjunto possuir uma quantidade finita de elementos.

Definição 3.2. *Seja X um conjunto. Dizemos que X é finito se existe um número natural $n \in \mathbb{N}$ e uma aplicação bijetiva*

$$f : I_n \to X.$$

Nesse caso, o número natural n é chamado de cardinal de X, e escreve-se

$$|X| = n.$$

O teorema a seguir, apresentado por (LIMA, 2017a), estabelece as propriedades fundamentais da finitude e da cardinalidade.

Teorema 3.3. *(Finitude e Cardinalidade)*

a) *Seja X um conjunto finito. O número cardinal de X, denotado por $|X|$, é invariante em relação ao processo de contagem. Formalmente, se existirem bijeções $f : I_n \to X$ e $g : I_m \to X$, então $m = n$.*

b) *Seja X um conjunto finito e $Y \subseteq X$ um subconjunto de X. Então:*

b.1 *Y é necessariamente finito;*

b.2 *$|Y| \leq |X|$;*

b.3 *A igualdade $|Y| = |X|$ implica que $Y = X$.*

As definições e conceitos explorados nesta seção fundamentam-se nas obras de (LIMA, 2017b; LIMA, 2017a; HEFEZ, 2013; LIMA, 2013). Tais referências são utilizadas para estabelecer o rigor axiomático necessário ao estudo da Análise Real e da Aritmética, especificamente no que tange às propriedades fundamentais dos números reais e à estrutura dos conjuntos numéricos. Para uma exposição das demonstrações e teoremas auxiliares, remete-se ao volume 1 do Curso de Análise de (LIMA, 2017b).

Dando continuidade à formalização das estruturas fundamentais da Análise, as próximas definições estabelecem o critério de cardinalidade, fundamentando a análise da distribuição de elementos e de suas probabilidades para além dos conjuntos finitos.

Definição 3.4. *(Cardinalidade) Dizemos que dois conjuntos X e Y possuem a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e Y. Isto é, existe uma função bijetiva $f : X \to Y$,*

> É claro que a definição acima faz sentido para conjuntos finitos: conjuntos finitos de mesma cardinalidade são aqueles que têm o mesmo número de elementos, ou seja, podem ser postos em correspondência biunívoca com o mesmo $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Mas ela também se aplica a conjuntos infinitos. (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 11)

Neste contexto, busca-se estabelecer um olhar sistemático sobre o comportamento probabilístico e a proporção dos subconjuntos de $\mathbb{N}$, bem como de suas sequências e subsequências correlatas. Devemos então ponderar definições que estabelecem regras a esse universo no que se trata dessas sequências e subsequências.

Definição 3.5. *(Sequência) Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que, a cada número natural n, associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência. Neste caso, a sequência é denotada por $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, ou simplesmente por (x_n).*

Definição 3.6. *(Subsequência) Dada uma sequência (x_n) de números reais, uma subsequência de (x_n) é a restrição da função x que define (x_n) a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots\}$. Denotamos a subsequência por $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_{n_k}).*

Com base em (LIMA, 2017b), destacam-se três resultados fundamentais para o estudo da convergência de sequências reais. O primeiro estabelece a definição formal do limite de uma sequência. O segundo, conhecido como Teorema do Confronto, permite determinar o limite de uma sequência a partir de outras duas sequências convergentes. Por fim, o terceiro trata da relação entre sequências e suas subsequências, demonstrando que

a convergência de uma sequência implica a convergência de todas as suas subsequências para o mesmo limite. Esses resultados são essenciais para os desenvolvimentos posteriores.

Teorema 3.7. *(Limite de Sequências) Sejam (x_n) uma sequência de números reais e l um número real. Dizemos que (x_n) converge para l, ou é convergente, e escreve-se*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

quando, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - l| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Teorema 3.8. *(Teorema do Confronto) Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências de números reais tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L$, então a sequência (y_n) também converge e $\lim_{n\to\infty} y_n = L$.*

Teorema 3.9. *(Subsequências) Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, e seja (x_{n_i}) uma subsequência qualquer de (x_n), então $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = l$*

Apresentadas as definições fundamentais sobre o comportamento das sequências, estabelecemos a seguir os lemas que sustentam as propriedades operatórias e estruturais dessas sequências. Tais resultados, expostos em (LIMA, 2013, cap. II), são essenciais para garantir a consistência do cálculo de limites e a análise da convergência, abordando desde a unicidade do valor limite até o comportamento de subsequências e operações aritméticas entre sequências convergentes.

Lema 3.10. *(Unicidade) Se existir um número real l tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, então ele é único.*

Lema 3.11. *(Sequência Monótona) Toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona, isto é, existe (x_{n_i}) tal que*

$$x_{n_i} \leq x_{n_{i+1}} \quad ou \quad x_{n_i} \geq x_{n_{i+1}}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Lema 3.12. *(Limite da Soma) Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = k$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = l + k.$$

Lema 3.13. *(Limite do Produto) Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = k$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = lk.$$

Lema 3.14. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências convergentes. Se existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \geq n_0$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Lema 3.15. *Seja* (x_n) *uma sequência real e sejam* $A_1, A_2, \ldots, A_m \subset \mathbb{N}$ *conjuntos dois a dois disjuntos tais que*

$$\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m.$$

Suponha que, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$*, a subsequência formada pelos termos* $(x_n)_{n\in A_j}$ *converge para o mesmo limite* L*. Então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

Para o aprofundamento do estudo da Análise aplicada à Teoria dos Números, é de extrema importância discorrer sobre outras definições e teoremas fundamentais. Reitera-se que o objetivo deste trabalho não é demonstrar formalmente todos os resultados apresentados; para os leitores interessados, as demonstrações sobre essas outras definições e teoremas fundamentais encontram-se expostas em (MARTINEZ et al., 2024).

Para a formulação do próximo teorema, será necessário recorrer à função contagem de números primos, (MARTINEZ et al., 2024) afirmam que o Teorema dos Números Primos tratado a seguir dá uma estimativa de quantos primos existem até um inteiro x, usualmente denotada por $\pi(x)$ o número de primos p com $2 \leq p \leq x$. (RIBENBOIM, 2011) retrata que a função contagem de números primos surgiu no contexto dos estudos sobre a distribuição dos números primos, especialmente a partir das investigações desenvolvidas por Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) no século XIX acerca de como

os primos se distribuem entre os números naturais. Como ilustração da função $\pi(x)$, apresentamos alguns exemplos simples:

- Para $x = 2$, tem-se $\pi(2) = 1$, pois o único primo menor ou igual a 2 é o próprio 2;
- Para $x = 4$, os primos são 2 e 3, logo $\pi(4) = 2$;
- Para $x = 10$, os primos são $2, 3, 5$ e 7, de modo que $\pi(10) = 4$;
- Por fim, para $x = 20$, os primos são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ e 19, portanto $\pi(20) = 8$.

Com o objetivo de descrever quantitativamente como esses números se distribuem ao longo da reta real positiva, (VIEIRA, 2023) traz em sua dissertação de mestrado como introduziu-se a função $\pi(x)$, definida para $x \geq 0$ como o número de primos menores ou iguais a x. Em particular, para $n \in \mathbb{N}$, o valor $\pi(n)$ fornece exatamente a quantidade de números primos não superiores a n, constituindo, assim, um instrumento fundamental na formulação de resultados assintóticos sobre a distribuição dos primos e elementar para composição deste teorema.

Essa função desempenha papel fundamental na Teoria dos Números, especialmente no estudo da distribuição dos números primos ao longo dos números naturais. A função $\pi(n)$ pode ser calculada, para valores finitos de n, por meio do Crivo de Eratóstenes, cujo fundamento teórico baseia-se no seguinte resultado

Teorema 3.16. *Se $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ é um número composto, então n possui pelo menos um divisor primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$.*

Com base no Teorema 3.16 de (HEFEZ, 2013), o Crivo de Eratóstenes consiste em listar os números naturais de 2 até n e eliminar, de forma sistemática, os múltiplos dos números primos $p \leq \sqrt{n}$. Inicialmente, considera-se o número 2 e eliminam-se todos os seus múltiplos. Em seguida, passa-se ao próximo número não eliminado, repetindo o processo até $\sqrt{n}$. Os números restantes são exatamente os primos menores ou iguais a n. Vamos calcular o valor de $\pi(20)$ utilizando o Crivo de Eratóstenes. Primeiramente, listamos os números de 2 até 20:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

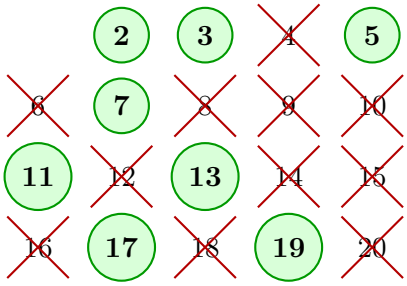
Mantendo o número 2 e eliminando seus múltiplos, obtemos

$$2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.$$

Em seguida, mantendo o 3 e eliminando seus múltiplos, temos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.$$

Figura 3.1: Representação esquemática da aplicação do Crivo de Eratóstenes para $n = 20$, destacando os números primos e eliminando os múltiplos compostos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Prosseguindo com esse processo, verificamos que os números restantes são os primos menores ou iguais a 20. Logo, $\pi(20) = 8$. De modo geral, a função $\pi(n)$ pode ser representada como

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \chi(k),$$

em que $\chi(k)$ é a função característica definida por:

$$\chi(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função $\pi(n)$, definida como o somatório da função característica $\chi(k)$ para o intervalo $[2, n]$, quantifica de forma exata a distribuição desses elementos no conjunto dos números naturais. No entanto, à medida que n assume valores arbitrariamente grandes, a análise da contagem individual torna-se menos tratável, dando lugar ao estudo de seu comportamento assintótico, isto é, da sua aproximação por funções contínuas quando $x \to$

∞. Nesse contexto, o Teorema dos Números Primos estabelece uma ponte fundamental entre a contagem exata e a análise contínua, determinando que a densidade dos números primos decresce logaritmicamente.

Teorema 3.17. *(Teorema dos Números Primos) Seja $\pi(x)$ a função de contagem de números primos. Então vale o limite:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Em particular, o número de primos menores ou iguais a n é aproximadamente $n/\ln(n)$.

A compreensão da distribuição dos números primos, conforme estabelecida pelo teorema acima, provado na referência clássica (RIBENBOIM, 2011) e na disseração de mestrado (OLIVEIRA, 2013), fundamenta a análise sobre a densidade natural desses elementos no conjunto dos naturais. Contudo, antes de aprofundar a análise sobre a densidade natural desses conjuntos, convém delimitar as categorias que compõem o conjunto dos naturais. Distaquemos, portanto, os números primos, cujas propriedades de distribuição e densidade natural desse conjunto difere de outros subconjuntos dos naturais considerando sua estrutura aritmética.

Todo número natural $n > 1$ classifica-se como primo ou composto. Os quadrados perfeitos possuem raiz quadrada inteira, ao passo que a raiz quadrada dos demais números naturais resulta em um valor real não inteiro. Para associar qualquer número real ao maior inteiro menor ou igual a ele, utiliza-se a definição de (HEFEZ, 2013) para a função maior inteiro, também conhecida como função piso.

Definição 3.18. *(Função Parte Inteira) Dado um número real x, a função parte inteira, denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, é definida como o único número inteiro n tal que:*

$$n \leq x < n + 1.$$

Equivalentemente, $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro que é menor ou igual a x (ou seja, que não supera x).

Uma propriedade fundamental que decorre diretamente dessa definição é a seguinte desigualdade:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.18.1. *A aplicação da Definição 3.18 aos números* $4,8$, $-1,2$ *e* $\sqrt{7}$ *conduz aos seguintes resultados.*

- *Para um número racional não inteiro positivo, tem-se*

$$\lfloor 4{,}8 \rfloor = 4, \quad \textit{pois} \quad 4 \leq 4{,}8 < 5.$$

- *Para um número real negativo, a definição assegura que*

$$\lfloor -1{,}2 \rfloor = -2, \quad \textit{visto que} \quad -2 \leq -1{,}2 < -1.$$

Para o caso do número irracional $\sqrt{7}$*, sabendo que* $4 < 7 < 9$*, aplica-se a monotonicidade da raiz quadrada para obter* $2 < \sqrt{7} < 3$*. Dessa forma, deduz-se que*

$$\lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2, \quad \textit{uma vez que} \quad 2 \leq \sqrt{7} < 3,$$

identificando 2 *como o maior inteiro que não supera* $\sqrt{7}$*.*

No contexto da Teoria dos Números, essa definição é fundamental para determinar, por exemplo, a quantidade de múltiplos de um natural em um intervalo ou para aproximar a raiz quadrada de um número que não seja um quadrado perfeito, permitindo-nos identificar o maior inteiro k tal que k^2 ainda respeita a cota superior estabelecida pelo número analisado. Desse modo:

Definição 3.19. *Seja* $n \in \mathbb{N}$*. Definimos a função* $Q(n)$ *como a quantidade de quadrados perfeitos no intervalo* $[1, n]$*. Equivalentemente, essa quantidade é dada pela parte inteira da raiz quadrada de* n*, isto é,*

$$Q(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

Levando em consideração que esta função respeita a igualdade $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n}$, e desse modo, segue que n é um quadrado perfeito, isto posto, temos que $n = k^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.19.1. *Tomemos o número natural $n = 38$. Ao calcularmos sua raiz quadrada, obtemos um valor não inteiro:*

$$\sqrt{38} \approx 6,164414002.$$

Para determinar o maior quadrado perfeito k^2 sujeita a cota superior $n = 38$, aplica-se a função parte inteira $f(x) = \lfloor x \rfloor$:

$$k = \lfloor\sqrt{38}\rfloor = 6.$$

Logo $k^2 = 36$ é o maior quadrado perfeito tal que $k^2 \leq 38$. Em contrapartida, considerando o número $n = 49$, temos

$$k = \lfloor\sqrt{49}\rfloor = 7.$$

Portanto n é um quadrado perfeito.

A análise sobre a quantidade de quadrados perfeitos e a distribuição de elementos no conjunto dos números naturais exige o estudo detalhado das propriedades estruturais e multiplicativas dos inteiros. Para fundamentar os resultados subsequentes relativos à contagem de elementos e densidade natural, faz-se necessário formalizar os conceitos de divisibilidade e de números coprimos presentes em (HEFEZ, 2013, cap. 1 e cap. 2).

Definição 3.20. *(Divisibilidade) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Dizemos que b divide a (ou que a é múltiplo de b), e escrevemos $b \mid a$, se existir um inteiro q tal que $a = b \cdot q$.*

Com base na noção de divisibilidade e no máximo divisor comum, estabelece-se a seguinte definição referente a elementos sem fatores primos em comum.

Definição 3.21. *(Números Coprimos) Dois números inteiros a e b são ditos coprimos (ou primos entre si) se o seu máximo divisor comum, denotado por $\text{mdc}(a, b)$ ou simplesmente (a, b), for igual a 1, isto é,*

$$(a, b) = 1.$$

A caracterização de propriedades aritméticas fundamentais entre números inteiros pressupõe o estudo de sua estrutura multiplicativa. Para tanto, formaliza-se inicialmente o conceito de divisores positivos de um número, conforme estabelecido a seguir.

Definição 3.22. *(Divisibilidade) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Dizemos que b divide a (ou que a é múltiplo de b), e escrevemos $b \mid a$, se existir um inteiro q tal que*

$$a = b \cdot q.$$

Caso contrário, dizemos que b não divide a e escrevemos $b \nmid a$.

Definição 3.23. *Para cada número inteiro positivo n, denotaremos por $D(n)$ o conjunto de todos os seus divisores positivos, ou seja,*

$$D(n) = \{d \in \mathbb{Z}^+ : d \mid n\}.$$

Essa sistematização permite que o estudo do Máximo Divisor Comum (*mdc*) seja compreendido a partir da totalidade dos componentes que integram a estrutura dos números em análise, fornecendo o suporte necessário para as demonstrações subsequentes.

Exemplo 3.23.1. *Consideremos os inteiros $a = 15$ e $b = 28$. Embora ambos sejam números compostos, pois $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$ e $D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, a relação entre eles é definida pela interseção de seus conjuntos de divisores. Ao comparar esses conjuntos, observa-se que o único divisor comum a ambos os números é 1, ou seja:*

$$D(15) \cap D(28) = \{1\}.$$

Essa relação de coprimalidade também pode ser confirmada pela decomposição em fatores primos ($15 = 3 \cdot 5$ e $28 = 2^2 \cdot 7$). Como os números não compartilham nenhum fator primo em comum, conclui-se imediatamente que o seu máximo divisor comum é a unidade, isto é

$$(15, 28) = 1.$$

Contudo, ainda sobre as características que compõem os números primos, (MARTINEZ et al., 2024) destacam que, enquanto os números quadrados perfeitos seguem uma

lei de formação simples e direta ao longo de $\mathbb{N}$, os números primos possuem um comportamento de espaçamento mais irregular, o que impede uma fórmula de geração imediata. Após a análise desenvolvida, de acordo com (HEFEZ, 2013, cap. 2) segue que:

Teorema 3.24. *Se n é um número natural maior que 4, então no intervalo fechado de 1 a n, existem mais números primos do que números que são quadrados perfeitos.*

Por outro lado, é importante ressaltar que os subconjuntos dos números naturais possuem propriedades bem definidas. Nesse contexto, (HEFEZ, 2013, cap. 2) apresentam-se alguns resultados fundamentais da Teoria dos Números que servirão de base para este trabalho.

Teorema 3.25. *Para quaisquer dois números inteiros a e b, com $b > 0$, existem únicos inteiros q (quociente) e r (resto) tais que*

$$a = b \cdot q + r, \quad \text{em que } 0 \leq r < b.$$

Como consequência, podemos caracterizar de maneira precisa a noção de divisibilidade em $\mathbb{Z}$. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$. Pelo Teorema 3.25, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

No caso particular em que $r = 0$, a igualdade reduz-se a $a = bq$. De acordo com a Definição 3.22, isto evidencia que $b \mid a$. Reciprocamente, se $b \mid a$, a unicidade do resto no algoritmo da divisão implica necessariamente que $r = 0$. Assim, a condição de b dividir a é equivalente a afirmar que o resto da divisão euclidiana de a por b é nulo.

Além disso, também podemos destacar uma das ferramentas mais elegantes da Teoria dos Números a relação de congruência, introduzida por Carl Friedrich Gauss em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* contido em (HEFEZ, 2013). Essencialmente, a congruência permite agrupar números inteiros que possuem o mesmo comportamento em relação a um divisor comum, denominado módulo. Esta relação não apenas simplifica cálculos envolvendo restos de divisões, mas também estabelece uma estrutura aritmética sobre o conjunto dos restos, sendo fundamental para o estudo de propriedades de subconjuntos dos inteiros, como a densidade natural que exploraremos adiante.

Definição 3.26. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e m um inteiro positivo. Dizemos que a é congruente a b módulo m se eles deixam o mesmo resto quando dividido por m, e escrevemos*

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Equivalentemente, existe um inteiro k tal que $a = b + km$ e podemos reescrever da forma

$$a - b = km.$$

Exemplo 3.26.1. *Consideremos os inteiros $a = 17$ e $b = 5$ sob o módulo $m = 6$. Ao aplicarmos a Definição 3.26, observamos que a diferença $a - b = 17 - 5 = 12$ é um múltiplo de 6. Portanto, como $6|12$, concluímos que $17 \equiv 5 \pmod{6}$. A luz do Algoritmo da Divisão (Teorema 3.25), Ambos os números deixam resto 5 quando divididos por 6, o que corrobora a relação de congruência estabelecida.*

A fim de estender os conceitos discutidos, apresenta-se a seguir uma nova definição seguida de exemplos ilustrativos.

Definição 3.27. *O número inteiro positivo n é dito perfeito se n for igual à soma de todos os seus divisores positivos o que pode ser formalizado utilizando a função soma dos divisores $\sigma(n)$, excluindo o próprio n.*

A soma dos divisores positivos de um número inteiro n, cada um deles menor ou igual de que n, é dada por

$$\sigma(n)$$

. Assim, a condição n é perfeito equivale a pedir que $\sigma(n) - n = n$, ou, equivalentemente, que

$$\sigma(n) = 2n.$$

Exemplo 3.27.1. *Considere o inteiro $n = 28$. O conjunto de divisores de 28 é*

$$D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}.$$

Ao calcularmos a soma de seus divisores próprios, obtemos:

$$1 + 2 + 7 + 14 = 28.$$

Dando continuidade à caracterização das propriedades estruturais dos números perfeitos, apresenta-se a seguir um dos resultados mais emblemáticos da teoria dos números elementar. De (HEFEZ, 2013, Cap. 3) o Teorema de Euclides-Euler estabelece uma condição necessária e suficiente para que um número inteiro positivo par seja classificado como perfeito, vinculando diretamente a existência desses números à ocorrência dos chamados primos de Mersenne.

Este teorema não apenas consolida a construção geométrica proposta originalmente por Euclides, mas também encerra a busca por números perfeitos pares ao definir sua forma algébrica única, conforme enunciado abaixo:

Teorema 3.28. *(Euclides-Euler) Um inteiro positivo n é perfeito se, e somente se, ele pode ser expresso na forma*

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

com $(2^p - 1)$ primo.
Os primos na forma $M_p = 2^p - 1$ são chamados de primos de Mersenne. Se $M_p = 2^p - 1$ é primo de Mersenne o número perfeito pode ser associado e é dado por $2^{p-1}M_p$.

Com base nesse resultado, observa-se que a busca por números perfeitos pares em um determinado intervalo restringe-se inteiramente à identificação dos primos de Mersenne correspondentes. Dessa forma, desde que se conheçam todos os primos de Mersenne cujos valores de $2^{p-1}(2^p - 1)$ pertençam a esse intervalo, é possível determinar com exatidão a quantidade de números perfeitos pares ali existentes. Cabe ressaltar, contudo, que a existência de números perfeitos ímpares permanece como um dos problemas em aberto mais antigos da Teoria dos Números. Esse resultado foi iniciado por Euclides quando apresenta uma formulação sobre números perfeitos em sua obra, Elementos, traduzido em (EUCLIDES, 2009) que provou que essa fórmula gera números perfeitos quando $(2^p - 1)$ é primo e completado por Euller conforme discutido por (LIMA, 2017b) que demonstrou que todo número perfeito par tem exatamente essa forma.

Outros subconjuntos apresentam estruturas não convencionais que, embora imponham considerável complexidade de manipulação analítica, constituem ferramentas fundamentais no desenvolvimento da análise matemática e da teoria dos números. Com efeito, a existência de classes numéricas dotadas de propriedades estruturais idiossincráticas tem se tornado, historicamente, objeto de estudo e fascínio de diversos matemáticos. A investigação acerca da distribuição, da densidade e do comportamento assintótico dessas estruturas particulares não apenas enriquece o panorama teórico clássico, mas também encerra as construções fundamentais deste capítulo, estabelecendo o arcabouço necessário para o desenvolvimento das aplicações que serão apresentadas na sequência deste trabalho.

Com isso, encerram-se as construções fundamentais deste capítulo, estabelecendo a base necessária para o desenvolvimento das aplicações que serão apresentadas na sequência deste trabalho.

A consolidação desses resultados organiza os conceitos de divisibilidade, congruências e propriedades aritméticas que sustentam o estudo da densidade natural. Essa transição prepara o leitor para o próximo capítulo, no qual essas ferramentas teóricas serão aplicadas diretamente na resolução de problemas e no estudo do comportamento dos conjuntos numéricos.

Assim, o rigor no tratamento dos teoremas e definições garante a consistência das demonstrações apresentadas. Com esse embasamento, a teoria aqui exposta serve de apoio direto tanto para o aprofundamento acadêmico quanto para sua reflexão no ensino da matemática.

4 Densidade Natural

Embora existam diversas discussões sobre problemas em Teoria dos Números, pouco se explora, no contexto da formação matemática, o comportamento de subconjuntos dos números naturais sob uma perspectiva de distribuição. Nesse sentido, a densidade natural surge como uma ferramenta importante para investigar, de maneira mais rigorosa, a frequência com que os elementos de um subconjunto aparecem no conjunto $\mathbb{N}$. Cabe ressaltar que a densidade natural apresenta-se como um conceito fundamental a ser explorado mediante os problemas apresentados posteriormente, revelando propriedades importantes para este estudo.

Sendo A subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, está bem definido o conjunto $A \cap I_n$, e $|A \cap I_n|$ denota a cardinalidade desta interseção. Temos a seguinte definição:

Definição 4.1. *Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{N}$, o limite*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n}$$

diz-se a densidade natural de A, ou simplesmente densidade de A, desde que o limite exista.

Antes de prosseguirmos para os exemplos práticos, vale destacar uma consequência imediata dessa definição. Considerando que a quantidade de elementos de A em I_n nunca excede o total n, a densidade natural de um conjunto, quando existe, permanece restrita ao intervalo

$$0 \leq \delta(A) \leq 1.$$

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, ao denotemos por $A(n) = |A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$ a quantidade de elementos de A que são menores ou iguais a n. Como o conjunto $A \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ é um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$, a sua cardinalidade está limitada inferiormente pelo conjunto vazio e superiormente pelo total de elementos de 1 a n. Portanto, para todo $n \geq 1$, vale a seguinte desigualdade

$$0 \leq |A \cap \{1, 2, \ldots, n\}| \leq n.$$

Dividindo todos os termos da desigualdade por n, obtemos

$$0 \leq \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} \leq 1.$$

Visto que, por hipótese, a densidade natural $\delta(A)$ existe e é dada pelo limite da sequência acima quando n tende ao infinito, aplicamos o Teorema 3.8. Desse modo, ao passar o limite para $n \to \infty$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} 1,$$

o que implica em

$$0 \leq \delta(A) \leq 1.$$

4.1 Exemplos

Com o objetivo de consolidar os conceitos e as definições apresentados anteriormente, esta subseção é dedicada à exposição e à análise de exemplos fundamentais. Por meio dessas construções iniciais, busca-se explicitar a dinâmica e os métodos associados ao cálculo da densidade assintótica, estabelecendo uma transição direta entre as propriedades abstratas da Teoria dos Números e a aplicação prática em subconjuntos dos números inteiros positivos.

O estudo inicial de exemplos básicos é fundamental para ilustrar o comportamento do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n},$$

que define a densidade natural de um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$. A análise desses casos particulares fornece a base para demonstrar propriedades mais gerais e aplicar técnicas analíticas a conjuntos de estrutura mais complexa.

Exemplo 4.1.1. *Seja $I_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$, ou seja, $I_k \subset \mathbb{N}$, finito e não vazio. A densidade do conjunto I_k é $\delta(I_k) = 0$. De fato, para todo $n > k$ tem-se*

$|I_k \cap I_n| = |I_k| = k$. *Ou seja, a quantidade de elementos que existe na interseção do conjunto* I_k *com* I_n *é justamente a quantidade de elementos que existem em* I_k. *Desse modo*

$$\delta(I_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{|I_k \cap I_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|I_k|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0.$$

Portanto, $\delta(I_k) = 0$.

Este é um caso particular de um resultado mais amplo. De modo geral, qualquer subconjunto finito de $\mathbb{N}$ possui densidade nula, generalizando esse comportamento para qualquer conjunto finito, temos:

Exemplo 4.1.2. *Seja* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *um subconjunto finito de* $\mathbb{N}$ *com* k *elementos. Seja* m *o maior elemento desse conjunto. Para qualquer* $n > m$, *a interseção de* A *com o intervalo* I_n *contém exatamente todos os elementos de* A, *pois todos eles são menores ou iguais a* m, *e* $m < n$. *Logo*

$$|A \cap I_n| = |A| = m.$$

Substituindo na definição de densidade

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Como m *é uma constante fixa (maior elemento de* A*) e* n *tende ao infinito, temos que o limite é zero, ou seja,* $\delta(A) = 0$.

Além disso, devemos considerar que, se um conjunto A possui k elementos, então o número total de subconjuntos possíveis de A é 2^k. Cada subconjunto $B \subset A$ é também finito, com $|B| \leq k$. Aplicando o resultado anterior, segue que todo subconjunto de A tem densidade natural igual a zero. Por exemplo, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.3. *Seja* $B = \{1, 2, 3\}$, *o número total de subconjuntos possíveis de* B *é* $2^3 = 8$. *Cada subconjunto* $C \subset B$ *satisfaz* $|C| \leq |B| = 3$, *sendo, portanto, também um conjunto finito e pelos exemplos anteriores temos que a densidade natural é zero.*

Embora a análise de conjuntos finitos implique necessariamente densidade natural nula, esse comportamento não se estende aos conjuntos infinitos. No contexto de subcon-

juntos infinitos de $\mathbb{N}$, a densidade natural pode assumir diferentes valores no intervalo $[0, 1]$, dependendo da distribuição dos elementos do conjunto nos números naturais.

Em particular, o próprio conjunto $\mathbb{N}$ possui densidade natural igual a 1. Assim, a densidade natural não apenas apresenta valores diferentes quando consideramos conjuntos finitos e infinitos, mas na maneira como os elementos de cada subconjunto se distribuem ao longo dos números naturais.

Exemplo 4.1.4. *A densidade do conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais é igual a 1. Com efeito, como para cada* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se* $|\mathbb{N} \cap I_n| = n$, *e então,*

$$\delta(\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathbb{N} \cap I_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Enquanto o conjunto $\mathbb{N}$ ocupa a totalidade do espaço, apresentando densidade unitária, subconjuntos próprios podem exibir densidades inferiores, funcionando como amostras que, embora infinitas, possuem uma frequência assintótica definida dentro da estrutura maior. O exemplo a seguir ilustra essa aplicação ao considerar o conjunto dos números pares, cuja distribuição regular permite a obtenção de uma densidade precisa, revelando como subesequências infinitas podem ocupar frações específicas do total.

Exemplo 4.1.5. *A densidade natural do conjunto* $2\mathbb{N}$ *dos números pares positivos é* $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$. *De fato, primeiramente devemos considerar que:*

- *Se* n *é par, então*

$$|2\mathbb{N} \cap I_n| = \frac{n}{2}.$$

Vejamos alguns casos particulares. Para $n = 4$, *o conjunto referência é* $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. *Os elementos de* $2\mathbb{N}$ *contidos em* I_4 *são* $\{2, 4\}$, *o que resulta em*

$$|2\mathbb{N} \cap I_4| = \frac{4}{2} = 2.$$

Já para $n = 6$, *temos* $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Os elementos de* $2\mathbb{N}$ *contidos em* I_6 *são* $\{2, 4, 6\}$, *temos*

$$|2\mathbb{N} \cap I_6| = \frac{6}{2} = 3.$$

Analogamente, $n = 10$*, obtemos* $I_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$*. Os elementos de* $2\mathbb{N}$ *contidos em* I_{10} *são* $\{2, 4, 6, 8, 10\}$*. Logo*

$$|\mathbb{B} \cap I_{10}| = \frac{10}{2} = 5.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para $n = 20$*,* $I_{20} = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$*. Os elementos de* $2\mathbb{N}$ *contidos em* I_{20} *são* $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$*. Desse modo,*

$$|2\mathbb{N} \cap I_{20}| = \frac{20}{2} = 10.$$

Daí, se $(n_k) = (2k)$*, então*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|2\mathbb{N} \cap I_{n_k}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k}{2}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{2} \cdot \frac{1}{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

- *Se* n *é ímpar, então*

$$|2\mathbb{N} \cap I_n| = \frac{n-1}{2}.$$

Vejamos alguns casos particulares. Para $n = 5$*, o conjunto de referência é* $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, cujos elementos pertencentes a* $2\mathbb{N}$ *são* $\{2, 4\}$*, o que resulta em*

$$|2\mathbb{N} \cap I_5| = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Já para $n = 7$*, temos* $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, com elementos em* $2\mathbb{N}$ *dados por* $\{2, 4, 6\}$*, logo,*

$$|2\mathbb{N} \cap I_7| = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Analogamente, para $n = 11$*, obtemos* $I_{11} = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$*, em que os elementos de* $2\mathbb{N}$ *são* $\{2, 4, 6, 8, 10\}$*, donde*

$$|2\mathbb{N} \cap I_{11}| = \frac{11-1}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para $n = 21$*, segue que* $I_{21} = \{1, 2, 3, \ldots, 21\}$*, listando*

os elementos de $2\mathbb{N}$ *como* $\{2, 4, 6, \ldots, 20\}$*, o que nos dá*

$$|2\mathbb{N} \cap I_{21}| = \frac{21-1}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Daí, obtemos em particular que

$$\frac{|2\mathbb{N} \cap I_5|}{5} = \frac{2}{5} = 0,4, \qquad \frac{|2\mathbb{N} \cap I_7|}{7} = \frac{3}{7} = 0,4285\ldots,$$

$$\frac{|2\mathbb{N} \cap I_{11}|}{11} = \frac{5}{11} = 0,454\ldots, \qquad \frac{|2\mathbb{N} \cap I_{21}|}{21} = \frac{10}{21} = 0,4761\ldots$$

Observa-se que para $n = 5$*, a proporção de elementos pertencentes a* $2\mathbb{N}$ *é de* 40%*. À medida que o intervalo se expande para* $n = 21$*, essa densidade eleva-se para aproximadamente* $47,6\%$*. Esse comportamento sugere que a densidade assintótica do conjunto pode estar convergindo para um valor específico, próximo a* 50% *que equivale à fração* $\frac{1}{2}$*. Assim, para* $n_k = 2k - 1$*,*

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|2\mathbb{N} \cap I_{n_k}|}{n_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k-1}{2}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k - 1}{2n_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n_k}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto, de (4.1)*,* (4.2) *e do Lema* 3.15*, podemos concluir que* $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$*.*

Visto que os índices pares e ímpares cobrem todos os números naturais e os limites das subsequências correspondentes $n = 2k$ e $n = 2k - 1$ satisfazem

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|2\mathbb{N} \cap I_{2k}|}{2k} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|2\mathbb{N} \cap I_{2k-1}|}{2k-1} = \frac{1}{2},$$

o Lema 3.15 garante que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2\mathbb{N} \cap I_n|}{n} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a densidade natural do conjunto dos números pares é $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.1.6. *A densidade do conjunto* $\mathbb{I} = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$ *dos números ímpares é* $\delta(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}$*. De fato, pelo exemplo anterior,*

- *Se n é par, então*

$$|\mathbb{I} \cap I_n| = \frac{n}{2}.$$

Vejamos alguns casos particulares. Para $n = 4$, o conjunto de referência é $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, cujos elementos pertencentes a $\mathbb{I}$ são $\{1, 3\}$, o que resulta em

$$|\mathbb{I} \cap I_4| = \frac{4}{2} = 2.$$

Já para $n = 6$, temos $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com elementos em $\mathbb{I}$ dados por $\{1, 3, 5\}$, logo,

$$|\mathbb{I} \cap I_6| = \frac{6}{2} = 3.$$

Analogamente, para $n = 10$, obtemos $I_{10} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, onde os elementos de $\mathbb{I}$ são $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, em que

$$|\mathbb{I} \cap I_{10}| = \frac{10}{2} = 5.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para $n = 20$, temos $I_{20} = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, listando os elementos de $\mathbb{I}$ como $\{1, 3, 5, \ldots, 19\}$, o que nos dá

$$|\mathbb{I} \cap I_{20}| = \frac{20}{2} = 10.$$

Daí, se $(n_k) = (2k)$, então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\mathbb{I} \cap I_{n_k}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k}{2}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{2} \cdot \frac{1}{n_k} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{4.3}$$

- *Se n é ímpar, então*

$$|\mathbb{I} \cap I_n| = \frac{n+1}{2}.$$

Vejamos alguns casos particulares. Para $n = 5$, o conjunto de referência é $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, cujos elementos pertencentes a $\mathbb{I}$ são $\{1, 3, 5\}$, o que resulta em

$$|\mathbb{I} \cap I_5| = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Já para $n = 7$, temos $I_7 = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$, com elementos em $\mathbb{I}$ dados por $\{1, 3, 5, 7\}$.

Logo,

$$|\mathbb{I} \cap I_7| = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Analogamente, para $n = 11$*, obtemos* $I_{11} = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$*, em que os elementos de* $\mathbb{I}$ *são* $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$*, donde*

$$|\mathbb{I} \cap I_{11}| = \frac{11+1}{2} = 6.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, para $n = 21$*, segue que* $I_{21} = \{1, 2, 3, \ldots, 21\}$*, listando os elementos de* $\mathbb{I}$ *como* $\{1, 3, 5, \ldots, 21\}$*, o que nos dá*

$$|\mathbb{I} \cap I_{21}| = \frac{21+1}{2} = 11.$$

Daí,

$$\frac{|\mathbb{I} \cap I_5|}{5} = \frac{3}{5} = 0,6 \qquad \frac{|\mathbb{I} \cap I_{21}|}{21} = \frac{11}{21} \approx 0,5238...$$

Observa-se que para $n = 5$*, a proporção é de 60%. À medida que o intervalo se expande, essa densidade decresce para próximo de 0,5.*

Assim, para $n_k = 2k - 1$*,*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{|\mathbb{I} \cap I_{n_k}|}{n_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k+1}{2}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k+1}{2} \cdot \frac{1}{n_k} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k+1}{2n_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{2n_k} + \frac{1}{2n_k} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{2n_k} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2n_k} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Portanto, de (4.3)*,* (4.4) *e do Lema 3.15, podemos concluir que* $\delta(\mathbb{B}) = \frac{1}{2}$*.*

Exemplo 4.1.7. *A densidade do conjunto* $3\mathbb{N}$*, dos números naturais múltiplos de* 3*,* é $\delta(3\mathbb{N}) = \frac{1}{3}$*. Inicialmente devemos considerar que do Teorema 3.25 temos que o resto da divisão de qualquer número natural* n *deve satisfazer* $0 \leq r < 3$*. Desse modo, dizemos que* n *pertence a uma das três classes de congruência:*

$$n \equiv 0, \quad n \equiv 1 \quad ou \quad n \equiv 2.$$

- *Se n é múltiplo de 3, então*

$$|3\mathbb{N} \cap I_n| = \frac{n}{3}.$$

Vejamos alguns exemplos. Para $n = 3$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, e o unico elemento de $3\mathbb{N}$ em I_3 é $\{3\}$. Logo, $|3\mathbb{N} \cap I_3| = 1$. Para $n = 6$, $I_6 = \{1, \ldots, 6\}$, e os elementos são $\{3, 6\}$. Logo, $|3\mathbb{N} \cap I_6| = 2$. Em geral, se $(n_k) = (3k)$, com $k \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|3\mathbb{N} \cap I_{n_k}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k}{3}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{3} \cdot \frac{1}{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \tag{4.5}$$

- *Se $n = 3k + 1$, então*

$$|3\mathbb{N} \cap I_n| = \frac{n-1}{3}.$$

Observe que, para $n = 4$, tem-se $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, e o elemento de $3\mathbb{N}$ é $\{3\}$, portanto $|3\mathbb{N} \cap I_4| = \frac{4-1}{3} = 1$. Para $n = 7$, tem-se $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, e os elementos de $3\mathbb{N}$ em I_7 são $\{3, 6\}$, portanto $|3\mathbb{N} \cap I_7| = \frac{7-1}{3} = 2$. Verifica-se também que, no caso $n = 10$, tem-se $I_{10} = \{1, \ldots, 10\}$, e os elementos de $3\mathbb{N}$ em I_{10} são $\{3, 6, 9\}$, portanto, $|3\mathbb{N} \cap I_{10}| = \frac{10-1}{3} = 3$. De modo geral, se $(n_k) = (3k + 1)$, em que $k \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|3\mathbb{N} \cap I_{n_k}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k-1}{3}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k - 1}{3n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{3n_k} - \frac{1}{3n_k}\right) = \frac{1}{3}. \tag{4.6}$$

- *Se $n = 3k + 2$, então*

$$|3\mathbb{N} \cap I_n| = \frac{n-2}{3}.$$

Em particular, no caso $n = 5$, verifica-se que $I_5 = \{1, \ldots, 5\}$, o elemento de $3\mathbb{N}$ é $\{3\}$, portanto $|3\mathbb{N} \cap I_5| = \frac{5-2}{3} = 1$. Analogamente, para $n = 8$, tem-se $I_8 = \{1, \ldots, 8\}$, e os elementos de $3\mathbb{N}$ em I_8 são $\{3, 6\}$; portanto, $|3\mathbb{N} \cap I_8| = \frac{8-2}{3} = 2$. Verifica-se também que, no caso $n = 11$, tem-se $I_{11} = \{1, \ldots, 11\}$, e os elementos de $3\mathbb{N}$ em I_{11} são $\{3, 6, 9\}$, portanto, $|3\mathbb{N} \cap I_{11}| = \frac{11-2}{3} = 3$. De modo geral, se $(n_k) = (3k + 2)$, tal que $k \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|M_3 \cap I_{n_k}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n_k-2}{3}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k - 2}{3n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n_k}{3n_k} - \frac{2}{3n_k}\right) = \frac{1}{3}. \tag{4.7}$$

Como mostrado anteriormente, as subsequências correspondentes 4.5, 4.6 e 4.7 convergem para o mesmo limite $L = \frac{1}{3}$. Portanto, pelo lema 3.15, a sequência original também converge para este limite, o que conclui que

$$\delta(3\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|3\mathbb{N} \cap I_n|}{n} = \frac{1}{3}.$$

Pode-se considerar, analogamente, que o método de cálculo da densidade natural para os exemplos anteriores podem ser aplicados para os conjuntos $4\mathbb{N}$ dos múltiplos de 4 e para $5\mathbb{N}$ dos múltiplos de 5. De forma mais geral, também é aplicado para o conjuntos $m\mathbb{N}$ dos múltiplos de $m \in \mathbb{N}$. Tal similaridade decorre da natureza aritmética comum a esses subconjuntos dos naturais. Observa-se que a estrutura da demonstração permanece invariante para todos os casos, o comportamento e a partição do conjunto em classes de congruência seguem a mesma regra aplicada anteriormente.De modo geral, a determinação da densidade do conjunto dos múltiplos de um inteiro qualquer não requer a análise individualizada de casos por congruência. Conforme apresentado a seguir, o método pode ser generalizado de forma direta para qualquer $m \in \mathbb{N}$ ao expressar a função de contagem por meio da Definição 3.18 e aplicar o Teorema 3.8.

Exemplo 4.1.1. *Seja (m) um número natural fixado e considere o conjunto dos seus múltiplos dados por $m\mathbb{N} = \{m \cdot k : k \in \mathbb{N}\}$. A densidade natural desse conjunto é dada por:*

$$\delta(m\mathbb{N}) = \frac{1}{m}.$$

Com efeito, o número de elementos de $m\mathbb{N}$ menores ou iguais a n é dado precisamente pela função $\lfloor n/m \rfloor$, ou seja, $|m\mathbb{N} \cap I_n| = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$.
Da Definição 3.18, vale a seguinte desigualdade para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{m} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \leq \frac{n}{m}.$$

Dividindo todos os termos por n, obtemos a estimativa para a razão de contagem:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{|m\mathbb{N} \cap I_n|}{n} \leq \frac{1}{m}.$$

Aplicando o Teorema 3.8 quando $n \to \infty$, notamos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m} \quad e \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}=\frac{1}{m}.$$

Portanto, a sequência do termo intermediário converge para o mesmo limite, concluindo-se que:

$$\delta(m\mathbb{N})=\lim_{n\to\infty}\frac{|m\mathbb{N}\cap I_n|}{n}=\frac{1}{m}.$$

Consideremos agora outros casos particulares de subconjuntos dos Naturais $\mathbb{N}$ que compõe-se de particularidades únicas e específicas.

Exemplo 4.1.8. *A densidade do conjunto $\mathbb{P}$ dos números primos positivos é $\delta(\mathbb{P})=0$. Do Teorema 3.17 temos que $|\mathbb{P}\cap I_n|=\pi(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, daí deduzimos que:*

$$\delta(\mathbb{P})=\lim_{n\to\infty}\frac{|\mathbb{P}\cap I_n|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{\ln(n)}}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)=0,$$

pois $(\ln(n))$ é uma sequência crescente e ilimitada de números reais. Portanto $\delta(\mathbb{P})=0$.

A determinação da densidade natural em subconjuntos de $\mathbb{N}$, que apresentam diferentes propriedades aritméticas como o conjunto dos números primos, dos múltiplos e dos quadrados perfeitos, é fundamental para a Teoria Analítica dos Números. Ao contrário dos conjuntos finitos, nos quais a proporção entre o número de elementos é obtida por contagem direta, a densidade natural estabelece a proporção relativa de subconjuntos infinitos no limite quando $n \to \infty$

Exemplo 4.1.9. *A densidade do conjunto $\mathcal{Q}=\{b^2 : b\in\mathbb{N}$ dos números quadrados perfeitos é $\delta(\mathcal{Q})=0$. De fato, para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Notemos que*

$$b^2\leq n \iff b\leq\sqrt{n}.$$

Logo, os valores possíveis de b são $b=1,2,\ldots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, o que implica

$$|\mathcal{Q}\cap I_n|=\lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Assim,

$$\delta(\mathcal{Q}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{Q} \cap I_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}.$$

Observando que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n}$*, temos*

$$0 \leq \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Como $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ *quando* $n \to \infty$*, então pelo Teorema 3.8,*

$$\delta(\mathcal{Q}) = 0.$$

Fixado um inteiro $m > 1$, considere o conjunto das potências de ordem m, dado por $\{b^m \mid b \in \mathbb{N}\}$, onde a base b é um número natural. Esse conjunto apresenta uma distribuição em $\mathbb{N}$. Isso se deve ao fato de que, ao contar quantos desses números são menores ou iguais a um dado valor x, obtém-se aproximadamente $x^{1/m}$, o que caracteriza um crescimento mais lento em comparação com x. Além disso, à medida que o valor de m aumenta, os números da forma b^m tornam-se progressivamente mais raros no conjunto dos números naturais. Consequentemente, ao considerar intervalos cada vez maiores, a proporção desses números em relação ao total de naturais tende a zero. Esse comportamento será formalizado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.10. *Seja* $\mathcal{K}(m) = \{c \in \mathbb{N} \mid c = b^m,\ b \in \mathbb{N}\}$*. Então, a densidade natural de* $\mathcal{K}(m)$ *é nula, isto é,* $\delta(\mathcal{K}(m)) = 0$*. Seja* $A(n)$ *a função de contagem de* $\mathcal{K}(m)$*, definida por*

$$A(n) = |\mathcal{K}(m) \cap I_n|.$$

Um número $c \leq n$ *pertence a* $\mathcal{K}(m)$ *se, e somente se,* $c = b^m$ *para algum* $b \in \mathbb{N}$ *tal que* $b^m \leq n \iff b \leq n^{1/m}$*. Logo,* $A(n) = \lfloor n^{1/m}\rfloor$*. Da definição de parte inteira, temos*

$$\lfloor n^{1/m}\rfloor \leq n^{1/m},$$

e, portanto,

$$\frac{A(n)}{n} \leq \frac{n^{1/m}}{n} = n^{\frac{1}{m}-1}.$$

Como $m > 1$, *segue que* $\frac{1}{m} - 1 < 0$. *Assim, podemos reescrever*

$$n^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{n^{1-\frac{1}{m}}},$$

em que $1 - \frac{1}{m} > 0$. *Logo,*

$$\lim_{m\to\infty} n^{\frac{1}{m}-1} = 0.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{A(n)}{n} \leq n^{\frac{1}{m}-1}.$$

Assim, do Teorema 3.8,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = 0.$$

Consequentemente $\delta(\mathcal{K}(m)) = 0$.

A partir dos conjuntos abordados nos Exemplos 4.1.8, 4.1.9 e 4.1.10, é possível construir novos subconjuntos de $\mathbb{N}$ da forma

$$P_d = \{p \in \mathbb{P} \mid p + d \in \mathbb{P}\},$$

para um inteiro par $d \geq 2$ fixado (representando, por exemplo, os primos gêmeos para $d = 2$ ou os primos sexies para $d = 6$). Como $P_d \subset \mathbb{P}$, cuja densidade natural é nula ($\delta(\mathbb{P}) = 0$), a determinação de suas densidades fundamenta-se na propriedade da densidade natural

$$\text{se } A \subseteq B, \quad \text{então } \delta(A) \leq \delta(B).$$

A demonstração rigorosa e o detalhamento dessa propriedade será abordado no próximo capítulo. Por conseguinte, conclui-se que a densidade natural de cada um desses subconjuntos também é igual a zero.

Historicamente, o estudo da Teoria dos Números e da Análise Combinatória impulsionou a investigação de subconjuntos de $\mathbb{N}$ definidos por propriedades aritméticas específicas. Nesse contexto, o interesse em categorizar esses subconjuntos a partir de suas características estruturais permitiu o desenvolvimento de conceitos fundamentais, tais como o estudo das sequências de inteiros, das potências perfeitas e dos números

primos. Essa análise estrutural possibilita a caracterização do comportamento limite de subconjuntos dos naturais por meio de funções de contagem e da densidade natural.

(BURTON, 2009) destaca que "na maioria das ciências, uma geração derruba o que outra construiu e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura". Sob essa perspectiva, o padre francês Marin Mersenne (1588–1648), filho de um agricultor modesto, desenvolveu o estudo dos números primos de Mersenne. Como esses números foram detalhados no Capítulo 3 Teorema 3.28, o cálculo da densidade natural pode ser aplicado diretamente a esse conjunto, bem como ao conjunto dos números perfeitos.

Exemplo 4.1.11. *A densidade natural do conjunto* $\mathcal{W} = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = 2n\}$ *dos números perfeitos positivos é* $\delta(\mathcal{W}) = 0$. *De fato, denotando por* $\mathcal{W}_p$ *o subconjunto dos números perfeitos pares, o Teorema 3.27 garante que todo* $N \in \mathcal{W}_p$ *é da forma* $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, *em que* $2^p - 1$ *é um primo de Mersenne. Dado que* $N \geq 2^{p-1}$, *a condição* $N \leq n$ *implica* $2^{p-1} \leq n$, *de modo que* $p \leq 1 + \log_2 n$. *Logo, a função de contagem* $V_p(n) = |\mathcal{W}_p \cap I_n|$ *satisfaz*

$$V_p(n) \leq 1 + \log_2 n,$$

o que fornece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_p(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \log_2 n}{n} = 0.$$

Por outro lado, a existência de números perfeitos ímpares permanece como um problema aberto clássico na Teoria dos Números (HEFEZ, 2013). Contudo, independentemente de sua existência ou infinitude, resultados analíticos rigorosos estabelecem limitantes superiores estritos para a função de contagem total de números perfeitos $V(n) = |\mathcal{W} \cap I_n|$. *Conforme documentado por (RIBENBOIM, 1996), Wirsing demonstrou que existe uma constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $n \geq 3$

$$V(n) \leq n^{\frac{C}{\ln \ln n}}.$$

Dessa forma, ao avaliarmos o limite do quociente, reescrevemos a limitação na base exponencial natural:

$$\frac{V(n)}{n} \leq n^{-\frac{c}{\ln \ln n}} = \exp\left(-\frac{c \ln n}{\ln \ln n}\right).$$

Visto que $c > 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \ln n} = +\infty$, *temos* $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{c \ln n}{\ln \ln n}\right) = -\infty$. *Desse modo,*

$$\delta(\mathcal{W}) = \lim_{n\to\infty} \frac{V(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{c \ln n}{\ln \ln n}\right) = 0.$$

Portanto, o conjunto de todos os números perfeitos tem densidade natural nula.

Em suma, a densidade natural estabelece-se como um instrumento fundamental para a análise de subconjuntos na Teoria dos Números. Sua principal característica reside na capacidade de quantificar a proporção de elementos de um subconjunto em relação a $\mathbb{N}$, permitindo obter conclusões sobre o comportamento de sequências mesmo quando suas propriedades estruturais envolvem conjecturas não demonstradas. Para ilustrar tais conceitos, apresentam-se alguns exemplos elementares

Exemplo 4.1.12. *Consideremos o conjunto* $\mathcal{S}_k$ *das potências de base* k, *com* $k \in \mathbb{N}$ *e* $k \geq 2$. *Definimos o conjunto como*

$$\mathcal{S}_k = \{k^m : m \in \mathbb{N}\} = \{k^1, k^2, k^3, \dots\}$$

Para determinar a densidade natural de $\mathcal{S}_k$, *primeiramente definimos a função de contagem* $A(n)$, *que representa o número de elementos de* $\mathcal{S}_k$ *que não excedem um número real* $n > 0$

$$A(n) = |S_k \cap I_n|.$$

A condição $k^m \leq n$ *pode ser reescrita utilizando o logaritmo na base* k *(que é uma função crescente)*

$$m \leq \log_k n.$$

Como m *deve ser um inteiro positivo, o maior valor possível para* m *é dado pela parte inteira do logaritmo de* n. *Portanto*

$$A(n) = \lfloor \log_k n \rfloor.$$

Pela definição, a densidade natural $\delta(\mathcal{S}_k)$ *é o limite da razão entre a função de contagem*

e o valor n, quando n tende ao infinito

$$\delta(\mathcal{S}_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \log_k n \rfloor}{n}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\lfloor \log_k n \rfloor}{n} \leq \frac{\log_k n}{n}.$$

Pela mudança de base para o logaritmo natural, reescrevemos a razão na forma

$$\frac{\log_k n}{n} = \frac{1}{\ln k} \cdot \frac{\ln n}{n}. \tag{4.8}$$

Para determinar o limite de $\frac{\ln n}{n}$ quando $n \to \infty$, considera-se a função real associada $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Sendo uma indeterminação do tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, aplica-se a Regra de L'Hôpital (GUIDORIZZI, 2001):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \tag{4.9}$$

Substituindo a Equação (4.9) em (4.8), obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_k n}{n} = \frac{1}{\ln k} \cdot 0 = 0.$$

Dado que a função de contagem satisfaz a limitação $0 \leq \frac{A(n)}{n} \leq \frac{\log_k n}{n}$ para todo $n \geq 1$, a aplicação do Teorema do Confronto estabelece diretamente que

$$\delta(\mathcal{S}_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = 0.$$

O resultado $\delta(\mathcal{S}_k) = 0$ indica que, apesar de o conjunto das potências de k ser infinito, ele possui uma medida nula dentro do conjunto dos números naturais. Em termos intuitivos, a probabilidade de um número natural escolhido aleatoriamente no intervalo $[1, n]$ ser uma potência de k tende a zero conforme n cresce indefinidamente.

Exemplo 4.1.13. *Seja S o subconjunto dos números naturais definido pela progressão aritmética de razão 3 e termo inicial 2. Formalmente, descrevemos S como o conjunto*

de todos os inteiros que são congruentes com 2 módulo 3, ou seja,

$$S = \{m \in \mathbb{N} \mid m \equiv 2 \pmod 3\} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$. A função de contagem $A(n)$ define o número de elementos de S no intervalo $(0, n]$. Os elementos de S são da forma $m = 3k+2$, em que $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Então $m \leq n$, e assim,

$$3k + 2 \leq n \implies 3k \leq n - 2 \implies k \leq \frac{n-2}{3}.$$

Como $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a função de contagem de elementos até n é dada por

$$A(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor + 1.$$

Assim, a densidade natural de $\mathcal{S}$ é definida por

$$\delta(\mathcal{S}) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor + 1}{n}.$$

Pela Definição 3.18, $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Para $y = \frac{n-2}{3}$, temos

$$\frac{n-2}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor \leq \frac{n-2}{3},$$

o que fornece

$$\frac{n-2}{3} < A(n) \leq \frac{n+1}{3}.$$

Como $n > 0$, dividindo todos os membros por n, obtemos

$$\frac{n-2}{3n} < \frac{A(n)}{n} \leq \frac{n+1}{3n}.$$

Decompondo as frações em somas cujos termos dependentes de n tendem a zero quando $n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) = \frac{1}{3} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Pelo Teorema 3.8, conclui-se que o limite do termo central converge para o mesmo valor,

ou seja,

$$\delta(\mathcal{S}) = \frac{1}{3}.$$

A generalização do conceito apresentado no Exemplo 4.1.13 baseia-se na transição de uma progressão aritmética simples para a análise de subconjuntos dos números naturais, utilizando as ferramentas da Teoria Analítica dos Números. Enquanto o exemplo foca em um conjunto com densidade constante e periodicidade definida ($m \equiv a \pmod{b}$), a generalização busca determinar a densidade natural de conjuntos cujas propriedades de crescimento não são linear à medida que $n \to \infty$, como o conjunto dos números primos ou quadrados perfeitos.

Exemplo 4.1.14. *Seja S um conjunto definido por uma progressão aritmética de razão b e termo inicial a, em que $0 \leq a < b$. Em termos de aritmética modular,*

$$S = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv a \pmod{b}\}.$$

Para uma progressão do tipo $m = bk + a$, a contagem de elementos até n é aproximadamente n/b. Mais precisamente,

$$A(n) = \left\lfloor \frac{n-a}{b} \right\rfloor + 1,$$

a densidade natural é:

$$\delta(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n-a}{b} \right\rfloor + 1\right) = \frac{1}{b}.$$

Em vez de analisar isoladamente a pertinência de cada elemento, essa abordagem descreve a proporção assintótica de elementos que satisfazem determinada propriedade. Nesse contexto, ao demonstrar que um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ possui densidade natural $\delta(A) = L$, com $L \in [0, 1]$, obtém-se a razão limite de seus elementos em intervalos iniciais $\{1, 2, \ldots, n\}$ quando $n \to \infty$.Nos casos em que o limite da sequência $\frac{A(n)}{n}$ não existe, definem-se a densidade natural inferior e a densidade natural superior de A, respectivamente, por

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \quad \text{e} \quad \overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}.$$

Evidentemente, a densidade natural $\delta(A)$ existe se, e somente se, $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = L$. Para uma discussão aprofundada sobre conjuntos nos quais $\underline{\delta}(A) < \overline{\delta}(A)$, remete-se a (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2026) que oferecem uma contribuição valiosa sobre a inexistência do limite, enriquecida por exemplos que ilustram com clareza a complexidade desse cenário.

5 Propriedades da Densidade Natural

Embora conjuntos infinitos como o conjunto dos números primos $\mathbb{P}$ e o conjunto dos números pares $2\mathbb{N}$ possuam a mesma cardinalidade no sentido de Cantor conforme Teorema 3.3, a densidade natural permite diferenciar o comportamento assintótico de suas distribuições em $\mathbb{N}$. Nesta seção, apresentam-se as propriedades fundamentais da densidade natural, incluindo a subaditividade e a invariância da densidade natural por translação. Essas propriedades permitem analisar o comportamento de subconjuntos de $\mathbb{N}$ e serão utilizadas nos resultados e exemplos desenvolvidos posteriormente.

A formalização dessas propriedades estabelece uma estrutura analítica que simplifica o cálculo de densidades naturais. A aplicação de tais resultados permite a manipulação algébrica das funções de contagem e a redução de problemas complexos a formas conhecidas, viabilizando o estudo da estrutura de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Por fim, adotaremos a convenção de que A e B denotam subconjuntos não vazios de $\mathbb{N}$ para os quais as densidades naturais $\delta(A)$ e $\delta(B)$ existem e estão bem definidas.

Proposição 5.1. *Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto que possui densidade natural $\delta(X)$. Se X for particionado em uma quantidade finita de conjuntos disjuntos, $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$, em que $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e se $k-1$ desses subconjuntos possuírem densidade natural, então todos os subconjuntos possuem densidade natural e vale a relação*

$$\delta(X) = \sum_{i=1}^{k} \delta(X_i).$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $X(n) = X \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ e $X_i(n) = X_i \cap \{1, 2, \ldots, n\}$. Como os conjuntos são disjuntos e sua união é X, temos a igualdade exata para as funções de contagem,

$$|X(n)| = |X_1(n)| + |X_2(n)| + \cdots + |X_k(n)|.$$

Dividindo ambos os lados por n,

$$\frac{|X(n)|}{n} = \frac{|X_1(n)|}{n} + \frac{|X_2(n)|}{n} + \cdots + \frac{|X_k(n)|}{n}.$$

Se as densidades de X e de $k-1$ subconjuntos existem, aplicando o limite quando $n \to \infty$ e utilizando os Lemas 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, o limite do subconjunto restante necessariamente existirá, e a igualdade se mantém,

$$\delta(X) = \delta(X_1) + \delta(X_2) + \cdots + \delta(X_k).$$

□

Proposição 5.2. *Se $B \subset A$, então $\delta(B) \leq \delta(A)$.*

Demonstração: Por definição,

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} \quad \text{e} \quad \delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap I_n|}{n},$$

em que $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Como $B \subset A$, segue imediatamente do Teorema 3.3 que $|B \cap I_n| \leq |A \cap I_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dividindo ambos os lados por n, obtemos

$$\frac{|B \cap I_n|}{n} \leq \frac{|A \cap I_n|}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ e utilizando a definição de densidade, resulta do Lema 3.14

$$\delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap I_n|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} = \delta(A),$$

o que conclui o resultado.

Proposição 5.3. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Se $|B| < |A|$ e ambos são conjuntos finitos, então $\delta(B) = \delta(A) = 0$. No entanto, para conjuntos infinitos, a igualdade de cardinalidade $|A| = |B|$ não implica a igualdade de suas densidades assintóticas $\delta(A) = \delta(B)$.*

Demonstração. Por definição, as densidades são dadas por

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} \quad \text{e} \quad \delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap I_n|}{n}$$

em que $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Embora conjuntos infinitos enumeráveis possuam a mesma cardinalidade, a distribuição de seus elementos em I_n pode variar drasticamente. Para ilustrar que a cardinalidade não preserva a densidade, consideremos os conjuntos $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ e $\mathbb{B} = 2\mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.3, sabemos que ambos possuem a mesma cardinalidade, ou seja, $|\mathbb{B}| = |\mathbb{A}|$. Contudo, dos exemplos 4.1.4 e 4.1.5 segue que $\delta(\mathbb{A}) = 1$ e $\delta(\mathbb{B}) = \frac{1}{2}$. Portanto, conjuntos com a mesma cardinalidade podem apresentar densidades distintas. Assim, a igualdade de cardinalidade não garante a igualdade de densidade. □

Proposição 5.4. *Sejam $A, B \subset \mathbb{N}$ tais que existem as densidades $\delta(A)$ e $\delta(B)$. Então, a densidade $\delta(A \cap B)$ existe se, e somente se, $\delta(A \cup B)$ existe. Nesse caso, vale a igualdade*

$$\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B), \tag{5.1}$$

sendo que $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$ se, e somente se, $\delta(A \cap B) = 0$ ou $A \cap B = \emptyset$.

Demonstração. Pela propriedade distributiva da interseção em relação à união, temos $(A \cup B) \cap I_n = (A \cap I_n) \cup (B \cap I_n)$. Aplicando o Princípio da Inclusão-Exclusão para a cardinalidade de conjuntos finitos apresentado na Definição 3.2, para todo $n \in \mathbb{N}$"

$$|(A \cup B) \cap I_n| = |A \cap I_n| + |B \cap I_n| - |(A \cap B) \cap I_n|.$$

Dividindo ambos os termos por n, obtemos

$$\frac{|(A \cup B) \cap I_n|}{n} = \frac{|A \cap I_n|}{n} + \frac{|B \cap I_n|}{n} - \frac{|(A \cap B) \cap I_n|}{n}. \tag{5.2}$$

Por hipótese, existem os limites $\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n}$ e $\delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap I_n|}{n}$. Isolando o termo referente à interseção na equação (5.2), temos

$$\frac{|(A \cap B) \cap I_n|}{n} = \frac{|A \cap I_n|}{n} + \frac{|B \cap I_n|}{n} - \frac{|(A \cup B) \cap I_n|}{n}.$$

Pelos Lemas 3.15, 3.14, 3.13 e 3.12, a sequência $\left(\frac{|(A \cap B) \cap I_n|}{n}\right)$ converge se, e somente se, a sequência $\left(\frac{|(A \cup B) \cap I_n|}{n}\right)$ converge. Em caso afirmativo, aplicando o limite quando $n \to \infty$ em ambos os lados da equação (5.2), deduzimos a fórmula (5.1). Por outro lado, note que se $A \cap B = \emptyset$, então $|(A \cap B) \cap I_n| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica $\delta(A \cap B) = 0$.

Logo, por (5.1), temos $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$.
Agora, suponha que $A \cap B \neq \emptyset$ e que a igualdade $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$ seja válida. Substituindo esta relação na equação (5.1), temos:

$$\delta(A) + \delta(B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B).$$

Subtraindo $\delta(A) + \delta(B)$ de ambos os lados, resulta necessariamente em $-\delta(A \cap B) = 0 \implies \delta(A \cap B) = 0$, concluindo a prova. □

A abordagem adotada para a consolidação desse resultado geral fundamenta-se na extensão da propriedade aditiva da densidade natural sob uma hipótese de famílias de conjuntos quase disjuntos. Em vez de restringir a análise à independência assintótica de apenas dois elementos, o escopo estende-se para uma família finita de subconjuntos de números naturais, exigindo que cada par distinto da coleção possua uma intersecção de densidade nula. Sob a perspectiva analítica, a demonstração dessa generalização contorna a complexidade do cálculo simultâneo de múltiplos limites na definição de densidade ao fundamentar-se no comportamento aditivo finito da função de contagem elementar.

A Proposição 5.4 estabeleceu que a densidade da união de dois conjuntos quase disjuntos equivale à soma de suas densidades individuais. O resultado a seguir generaliza esse comportamento aditivo por indução matemática para qualquer família finita de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que sejam mutuamente disjuntos.

Teorema 5.1. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{N}$ conjuntos tais que as densidades naturais $\delta(A_i)$ existem para todo $i = 1, \ldots, n$. Suponha que, para quaisquer $i \neq j$,*

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

Então, a densidade natural de

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

existe e satisfaz

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta(A_i).$$

Demonstração. Procederemos por indução matemática sobre o número de conjuntos n.

Caso Base: Para $n = 1$, o resultado é imediato, pois $\delta(A_1) = \delta(A_1)$. Para $n = 2$, o resultado foi demonstrado anteriormente, onde provou-se que se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ou $\delta(A_1 \cap A_2) = 0$, então $\delta(A_1 \cup A_2) = \delta(A_1) + \delta(A_2)$.

Hipótese de Indução: Suponhamos que o resultado seja válido para um determinado $k \geq 2$ conjuntos. Isto é, se para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$ tivermos $A_i \cap A_j = \emptyset$ ou $\delta(A_i \cap A_j) = 0$, então a densidade da união existe e vale:

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \delta(A_i). \tag{5.3}$$

Passo Indutivo: Queremos mostrar que a propriedade é válida para $k + 1$ conjuntos. Considere a união de $k + 1$ conjuntos escrita como a união de dois blocos:

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}.$$

Definamos o conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Pela hipótese de indução, a densidade $\delta(B)$ existe e é dada pela equação (5.3). Para aplicar o caso base ($n = 2$) para os conjuntos B e A_{k+1}, precisamos analisar a intersecção $B \cap A_{k+1}$:

$$B \cap A_{k+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1}).$$

Por hipótese, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, temos $A_i \cap A_{k+1} = \emptyset$. Como a união finita de conjuntos vazios também é vazia,

$$\delta(B \cap A_{k+1}) = 0.$$

Dessa forma, aplicando o caso base para os dois conjuntos B e A_{k+1}, obtemos

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \delta(B \cup A_{k+1}) = \delta(B) + \delta(A_{k+1}).$$

Substituindo o valor de $\delta(B)$ obtido pela hipótese de indução (5.3), resulta em

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \delta(A_i) + \delta(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \delta(A_i).$$

Isto conclui o passo indutivo e, portanto, a demonstração do teorema. □

Proposição 5.5. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{N}$ subconjuntos que admitem densidade natural. Então, a densidade da união satisfaz*

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B).$$

Demonstração. Consideremos as funções contagem para os conjuntos A e B restritas ao intervalo $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pela subaditividade da cardinalidade sobre os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, Teorema 3.3, temos:

$$|(A \cup B) \cap I_n| \leq |A \cap I_n| + |B \cap I_n|.$$

Ao normalizarmos a expressão dividindo-a por n, obtemos a relação entre as razões de contagem

$$\frac{|(A \cup B) \cap I_n|}{n} \leq \frac{|A \cap I_n|}{n} + \frac{|B \cap I_n|}{n}.$$

Aplicando o limite para $n \to \infty$ em ambos os membros da desigualdade e utilizando a linearidade do limite para sequências convergentes, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(A \cup B) \cap I_n|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap I_n|}{n},$$

o que resulta em

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B).$$

□

Proposição 5.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e considere os conjuntos de seus múltiplos dados por $a\mathbb{N}$ e $b\mathbb{N}$. Se a e b são primos entre si ($mdc(a, b) = 1$), então a densidade da interseção*

satisfaz

$$\delta(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = \delta(a\mathbb{N}) \cdot \delta(b\mathbb{N}). \tag{5.4}$$

Demonstração. Considere os conjuntos de múltiplos $a\mathbb{N}$ e $b\mathbb{N}$, definidos com base na relação de divisibilidade apresentado na Definição 3.20. A interseção $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais que são múltiplos simultâneos de a e b.
Pela propriedade do mínimo múltiplo comum em Teoria dos Números apresentado por (HEFEZ, 2013), a interseção dos conjuntos de múltiplos é dada por:

$$a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} = \text{mmc}(a,b)\mathbb{N} = \{k \cdot \text{mmc}(a,b) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Segue da Definição 3.21 que a e b são coprimos, isto é, $\text{mdc}(a,b) = 1$, o menor múltiplo comum coincide com o produto dos números, de modo que $\text{mmc}(a,b) = ab$. Assim, obtemos

$$a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} = ab\mathbb{N} = \{k \cdot (ab) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Do Exemplo 4.1.1, onde $\delta(m\mathbb{N}) = \frac{1}{m}$, temos $\delta(a\mathbb{N}) = \frac{1}{a}$ e $\delta(b\mathbb{N}) = \frac{1}{b}$. Segue que

$$\delta(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = \delta(ab\mathbb{N}) = \frac{1}{ab}.$$

Separando os termos da fração,

$$\delta(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \delta(a\mathbb{N}) \cdot \delta(b\mathbb{N}),$$

o que completa a demonstração. □

Proposição 5.7. *Seja $A^c = \mathbb{N} - A$ o complementar de A em relação a $\mathbb{N}$. Então, $\delta(A^c)$ existe e vale a relação*

$$\delta(A^c) = 1 - \delta(A).$$

Demonstração. Como $A \cup A^c = \mathbb{N}$ e $A \cap A^c = \emptyset$, estão pela proposição anterior,

$$1 = \delta(\mathbb{N}) = \delta(A \cup A^c) = \delta(A) + \delta(A^c).$$

Logo, $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$, concluindo a prova. □

Proposição 5.8. *Seja $\mathbb{X} \subset A$ um subconjunto finito. Então, $\delta(A - \mathbb{X})$ existe e vale a igualdade*

$$\delta(A) = \delta(A - \mathbb{X}).$$

Demonstração. Consideremos que $\mathbb{X}$ e $A - \mathbb{X}$ são disjuntos e satisfazem $A = \mathbb{X} \cup (A - \mathbb{X})$. Assim, pela Proposição 5.4, existe $\delta(A - \mathbb{X})$ e

$$\delta(A) = \delta(\mathbb{X}) + \delta(A - \mathbb{X}).$$

Por outro lado, como $\mathbb{X}$ é finito, $\delta(\mathbb{X}) = 0$. Logo, $\delta(A) = \delta(A - \mathbb{X})$. □

Proposição 5.9. *Seja $A \subset \mathbb{N}$ não vazio. Para todo $k \in \mathbb{N}$, considere o conjunto*

$$A_k = \{a + k \mid a \in A\}.$$

Então, $\delta(A_k)$ existe e vale a igualdade $\delta(A) = \delta(A_k)$.

Demonstração. Por definição, um elemento x pertence a $A_k \cap I_n$ se, e somente se, existe um $a \in A$ tal que $x = a + k$ e $1 \leq x \leq n$. Decorre dessa condição que

$$1 \leq a + k \leq n \implies 1 - k \leq a \leq n - k,$$

considerando que, $A \subset \mathbb{N}$, os elementos a são positivos. Assim, para $n > k$, o número de elementos de A_k no intervalo $[1, n]$ é exatamente igual ao número de elementos de A no intervalo $[1, n - k]$, isto é

$$|A_k \cap I_n| = |A \cap I_{n-k}|.$$

Substituindo a igualdade acima na definição de $\delta(A_k)$,

$$\delta(A_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_{n-k}|}{n}.$$

Para relacionar esta expressão com a densidade de A, reescrevemos o termo geral da sequência para $n > k$ como

$$\frac{|A \cap I_{n-k}|}{n} = \frac{|A \cap I_{n-k}|}{n-k} \cdot \frac{n-k}{n},$$

considerando o Teorema 3.9 e os lemas 3.12, 3.13 e 3.14 e pela existência da densidade natural $\delta(A)$, sabendo que $\lim_{m\to\infty} \frac{|A\cap I_m|}{m} = \delta(A)$, fazemos a mudança de índice $m = n-k$. Como k é fixo, temos que $m \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_{n-k}|}{n-k} = \lim_{m\to\infty} \frac{|A \cap I_m|}{m} = \delta(A).$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-k}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1.$$

Como as sequências $\left(\frac{|A\cap I_{n-k}|}{n-k}\right)_{n>k}$ e $\left(\frac{n-k}{n}\right)_{n>k}$ são convergentes, pelo Lema 3.13, o limite do produto é o produto dos limites, ou seja,

$$\delta(A_k) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_{n-k}|}{n-k}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n-k}{n}\right) = \delta(A) \cdot 1 = \delta(A).$$

Portanto, a densidade $\delta(A_k)$ existe e satisfaz $\delta(A_k) = \delta(A)$. □

Proposição 5.10. *Seja $A \subset \mathbb{N}$ e $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais estritamente crescente satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} = L \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = 1.$$

Então a densidade natural $\delta(A)$ existe e vale $\delta(A) = L$.

Demonstração. Uma vez que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente, para cada $n \geq n_1$ existe k tal que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$. Agora pela monotonicidade da aplicação $n \to |A \cap I_n|$ obtemos

$$\frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_{k+1}} \leq \frac{|A \cap I_n|}{n} \leq \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_k}.$$

Escrevendo

$$\frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_{k+1}} = \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}}, \quad \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_k} = \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k}.$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$ nas extremidades da desigualdade e utilizando as hipóteses $\lim_{k\to\infty} \frac{|A\cap I_{n_k}|}{n_k} = L$ e $\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = 1$, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} \right) = L \cdot 1 = L$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k} \right) = L \cdot 1 = L.$$

Pelo Teorema 3.8,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} = L,$$

ou seja, $\delta(A) = L$. □

Exemplo 5.10.1. *Seja $D \subset \{0, 1, \ldots, 9\}$ com $d := |D| \geq 1$. Consideremos o seguinte conjunto*

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \textit{o último dígito de } n \textit{ pertence a } D\}.$$

Observe que, em cada bloco consecutivo da forma $\{10k + 1, 10k + 2, \ldots, 10k + 10\}$, com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, exatamente d números pertencem a A. Assim, para $n_k = 10k$ temos

$$\frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} = \frac{kd}{10k} = \frac{d}{10} \quad e \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} = \frac{k+1}{k}.$$

Portanto, pela Proposição 5.10, $\delta(A) = d/10$.

Proposição 5.11. *Seja $A \subset \mathbb{N}$ e $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais estritamente crescente se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} = 0$$

e existe $C > 0$ tal que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \leq C$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então $\delta(A) = 0$.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{N}$ e $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente de números naturais tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} = 0,$$

em que $I_{n_k} = \{1, 2, \ldots, n_k\}$. Suponhamos que exista uma constante $C > 0$ satisfazendo $\frac{n_{k+1}}{n_k} \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja n um número natural. Por hipótese, existe um índice k tal que $n_k \leq n < n_{k+1}$. Pela monotonicidade da função de contagem, temos a desigualdade

$$|A \cap \{1, \ldots, n_k\}| \leq |A \cap \{1, \ldots, n\}| \leq |A \cap \{1, \ldots, n_{k+1}\}|.$$

Dividindo os termos da desigualdade por n, e considerando que $n_k \leq n < n_{k+1}$, obtemos

$$\frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_{k+1}} < \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} \leq \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_k}.$$

Para analisar o comportamento assintótico, reescrevemos os extremos da desigualdade em função dos limites conhecidos

$$\frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} < \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} \leq \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k}.$$

Utilizando a hipótese de que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \leq C$, e observando que $\frac{n_k}{n_{k+1}} \geq \frac{1}{C}$, segue que

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} < \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} \leq C \cdot \frac{|A \cap I_{n_{k+1}}|}{n_{k+1}}.$$

Como, por hipótese, $\lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} = 0$, o Teorema 3.8 garante que o limite da sequência central também converge para zero quando $k \to \infty$ (e consequentemente quando $n \to \infty$). Portanto,

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} = 0.$$

□

Teorema 5.2. *Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ um subconjunto de satisfazendo $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = L$ existe, então a densidade assintótica $\delta(A)$ existe e é dada por*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

Demonstração. Por definição, a densidade assintótica de um conjunto A é dada pelo limite (quando este existe)

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n},$$

em que $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nosso objetivo é provar que a sequência de contagem $x_n = \frac{|A \cap I_n|}{n}$ converge para L quando $n \to \infty$. Como os elementos de A estão dispostos em ordem estritamente crescente ($a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$), para qualquer número natural $n \geq a_1$, podemos encontrar de forma única um índice $k \in \mathbb{N}$ tal que n está compreendido entre dois termos consecutivos de A, isto é,

$$a_k \leq n < a_{k+1}. \tag{5.5}$$

A desigualdade (5.5) indica que os únicos elementos de A que são menores ou iguais a n são, precisamente, os elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Portanto, a quantidade de elementos na interseção de A com o intervalo inicial I_n é exatamente k, ou seja,

$$|A \cap I_n| = k.$$

Substituindo essa igualdade na expressão da densidade, passamos a analisar a razão

$$\frac{|A \cap I_n|}{n} = \frac{k}{n}.$$

Agora, utilizaremos a desigualdade (5.5) e invertendo os termos da desigualdade, obtemos

$$\frac{1}{a_{k+1}} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{a_k}.$$

Multiplicando todos os membros por k (que é um valor positivo), resulta em

$$\frac{k}{a_{k+1}} < \frac{k}{n} \leq \frac{k}{a_k}. \tag{5.6}$$

Para aplicar o Teorema 3.8 na desigualdade (5.6), precisamos avaliar o comportamento dos dois extremos quando $n \to \infty$. Notemos que, como $n < a_{k+1}$ e $n \to \infty$, o índice k também diverge para o infinito ($k \to \infty$). Análise do limite do lado direito de (5.6): Por hipótese do enunciado, sabemos que $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{a_k} = L$. Análise do limite do lado esquerdo de (5.6), podemos reescrever a fração $\frac{k}{a_{k+1}}$ multiplicando e dividindo por $k+1$, da seguinte

forma

$$\frac{k}{a_{k+1}} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{a_{k+1}}.$$

Aplicando o limite quando $k \to \infty$ nesta decomposição e utilizando as propriedades operatórias dos limites, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{a_{k+1}} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\right) \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{a_{k+1}}\right).$$

Sabemos que $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$. Além disso, a expressão $\frac{k+1}{a_{k+1}}$ é apenas a mesma sequência da hipótese deslocada por um índice, o que não altera o seu ponto de convergência. Portanto, $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{a_{k+1}} = L$. Desse modo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{a_{k+1}} = 1 \cdot L = L.$$

Como ambos os extremos da desigualdade (5.6) convergem exatamente para o mesmo valor L quando $k \to \infty$ (e consequentemente quando $n \to \infty$), pelo Teorema 3.8 conclui-se que o termo central obrigatoriamente converge para L:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = L \implies \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} = L.$$

Logo, a densidade assintótica $\delta(A)$ existe e é igual a L. □

Vale ressaltar que, embora o escopo desta dissertação evite deliberadamente o uso e o aprofundamento no formalismo matemático dos limites inferior e superior (lim inf e lim sup), o resultado estabelecido por este teorema mostra-se fundamental. Ele atua como uma ferramenta analítica indispensável para simplificar e compreender a estrutura de diversos subconjuntos de $\mathbb{N}$, permitindo determinar suas densidades assintóticas de maneira direta e intuitiva através de limites convencionais.

Exemplo 5.2.1. *Seja A uma progressão aritmética infinita com termo inicial b e razão $r \in \mathbb{Z}$ com $r \geq 1$, ou seja, $a_n = b + (n-1)r$. Avaliando o limite da razão:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{b + nr - r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{b}{n} + r - \frac{r}{n}} = \frac{1}{r}.$$

Portanto, pelo Teorema 5.2, a densidade de qualquer PA de razão r é $\delta(A) = \frac{1}{r}$.

Exemplo 5.2.2. *Seja $Q = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$ o conjunto dos quadrados perfeitos. O termo geral é $a_n = n^2$. Aplicando o limite do teorema*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Como o limite converge para zero, pelo Teorema 5.2, o conjunto possui densidade assintótica nula ($\delta(Q) = 0$).

Exemplo 5.2.3. *Seja $\mathbb{F}$ o conjunto de todos os números fatoriais positivos. Podemos ordenar os seus elementos de forma estritamente crescente, isto é,*

$$\mathbb{F} = \{1!, 2!, 3!, 4!, \ldots\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\},$$

em que n-ésimo termo da sequência que define o conjunto F é dado por $a_n = n!$ Como $a_n = n!$, temos claramente que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, visto que $n! < (n+1)!$ para todo número natural. O Teorema 5.2 estabelece que, se o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$ existir, a densidade assintótica $\delta(F)$ também existirá e será igual a este limite e é dado por

$$\delta(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n!}$$

Expandindo o fatorial no denominador para $n \geq 1$, obtemos $n! = n \cdot (n-1)!$. Substituindo na expressão do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot (n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 0$$

Como o limite existe e é igual a 0, as hipóteses do teorema estão satisfeitas. Portanto, a densidade assintótica do conjunto F existe e é dada por

$$\delta(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{|F \cap I_n|}{n} = 0$$

Uma característica fundamental da densidade natural é não se alterar por modificações finitas nos conjuntos estudados. Enquanto a cardinalidade de um conjunto

é estritamente alterada pela adição ou remoção de elementos, a densidade assintótica permanece invariante frente a modificações em uma quantidade finita de termos. Este fenômeno é uma consequência direta da definição de limite e da propriedade de que qualquer subconjunto finito possui densidade nula. A seguir é ilustrado como essa propriedade permite simplificar o cálculo de densidades em conjuntos 'quase' idênticos a progressões aritméticas conhecidas.

Proposição 5.12. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ que possui densidade natural $\delta(A)$. Se $F \subset \mathbb{N}$ é um conjunto finito, então o conjunto $A \cup F$ também possui densidade natural e*

$$\delta(A \cup F) = \delta(A).$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $X(n) = |X \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$ a função de contagem de um conjunto X até n. Por definição de união de conjuntos, podemos escrever $A \cup F$ como a união disjunta

$$A \cup F = A \cup (F \setminus A)$$

Como a união $A \cup F$ pode ser escrita de forma disjunta como $A \cup (F \setminus A)$, segue diretamente da Proposição 5.4 que

$$\delta(A \cup F) = \delta(A) + \delta(F \setminus A).$$

Por hipótese, F é um conjunto finito. Como $F \setminus A \subset F$, o conjunto diferença $F \setminus A$ também é finito, o que implica que sua densidade natural é nula, isto é, $\delta(F \setminus A) = 0$. Portanto, conclui-se que

$$\delta(A \cup F) = \delta(A).$$

□

Exemplo 5.12.1. *Considere $2\mathbb{N}$ o conjunto dos números pares, cuja segue de 4.1.5 densidade natural é $\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$. Definamos um conjunto finito de números ímpares $F = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. O conjunto modificado $2\mathbb{N} \cup F$ passa a conter os primeiros números ímpares, estabilizando sua estrutura para valores grandes de n. Com efeito, para todo $n \geq 9$, a função de contagem do novo conjunto é dada por*

$$(2\mathbb{N} \cup F)(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 5.$$

Ao calcularmos a densidade assintótica de $2\mathbb{N} \cup F$*, obtemos*

$$\delta(2\mathbb{N} \cup F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 5}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Este exemplo ilustra de forma prática que a inclusão de uma quantidade finita de elementos altera a cardinalidade imediata do conjunto, mas seu peso relativo dilui-se completamente quando o horizonte analítico n tende ao infinito, preservando a densidade original.

As propriedades apresentadas fornecem a base teórica para o cálculo da densidade natural de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Esses resultados permitem tratar tais problemas de maneira rigorosa, substituindo argumentos puramente intuitivos por procedimentos matematicamente fundamentados. Além disso, essas ferramentas serão utilizadas na análise de exemplos nas próximas seções.

5.1 Exemplos

Uma vez estabelecidas as propriedades que regem o comportamento da densidade natural, torna-se oportuno aplicar tais resultados em casos concretos. Nesta seção, calcularemos a densidade de alguns conjuntos, ilustrando como o comportamento de um conjunto pode ser inferido através de relações de inclusão, operações de complemento ou convergência de subsequências. Esta transição da teoria para a prática visa validar a eficácia analítica dos métodos anteriormente discutidos.

Além das propriedades de aditividade, a densidade natural também satisfaz a propriedade de monotonicidade. Em particular, se $A \subset B$, então $\delta(A) \leq \delta(B)$, sempre que as densidades existirem. Essa propriedade é útil na análise de subconjuntos cuja densidade não pode ser determinada diretamente, permitindo comparações com conjuntos cujas densidades já são conhecidas.

Exemplo 5.1.1. *Seja* P_g *o conjunto dos números primos gêmeos, definidos como os elementos* $p \in \mathbb{N}$ *tais que* p *e* $p+2$ *são ambos primos. A densidade natural de* P_g *existe e é dada por* $\delta(P_g) = 0$*. Pela própria definição do conjunto, observa-se que todo elemento de* P_g *é necessariamente um número primo. Portanto, denotando por* P *o conjunto de*

todos os números primos, temos a relação de inclusão

$$P_g \subseteq P,$$

a Proposição 5.2 estabelece que, para quaisquer subconjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$, se $A \subseteq B$, então $\delta(A) \leq \delta(B)$, desde que ambas as densidades existam. Aplicando este resultado ao caso em análise temos que

$$\delta(P_g) \leq \delta(P).$$

Considerando o resultado clássico derivado do Teorema dos Números Primos, discutido anteriormente no Exemplo 4.1.8, sabe-se que a densidade do conjunto dos primos é nula, isto é, $\delta(P) = 0$. Assim

$$0 \leq \delta(P_g) \leq 0.$$

Pelo Teorema 3.8, conclui-se que $\delta(P_g) = 0$.

Este exemplo ilustra o uso da monotonicidade: embora a infinitude dos primos gêmeos permaneça em aberto, prova-se com rigor que sua densidade natural é zero, o que mostra sua esparsidade em $\mathbb{N}$. Estabelecidas as propriedades da densidade natural, analisa-se agora a interação entre múltiplos subconjuntos de $\mathbb{N}$. As propriedades 5.4 e 5.7 permitem determinar a densidade de conjuntos definidos por múltiplas condições de divisibilidade. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento ao calcular a densidade natural de elementos que evitam, simultaneamente, duas progressões aritméticas.

Exemplo 5.1.2. *A Densidade do conjunto E de números não divisíveis por 2 nem por 3, existe e é $\delta(E) = \frac{1}{3}$. Seja E o subconjunto de $\mathbb{N}$ composto pelos elementos que não são múltiplos de 2 e, simultaneamente, não são múltiplos de 3. O objetivo é determinar a densidade natural $\delta(E)$ utilizando as propriedades de aditividade e complementaridade discutidas anteriormente. Para a formalização do problema, definimos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$:*

- $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 0 \pmod 2\}$, *representando o conjunto dos números pares;*
- $3\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 0 \pmod 3\}$, *representando o conjunto dos múltiplos de 3.*

Conforme resultado do Exemplo 4.1.14, a densidade de um conjunto da forma $\{m \in \mathbb{N} : m \equiv 0 \pmod{b}\}$ *é dada por* $1/b$. *Portanto, temos*

$$\delta(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2} \quad e \quad \delta(3\mathbb{N}) = \frac{1}{3}.$$

Considerando o conjunto interseção $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$, *este consiste nos elementos que são múltiplos comuns de 2 e 3. Pela aritmética modular, sabe-se que* $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = 6\mathbb{N}$ *(múltiplos de 6), cuja densidade é*

$$\delta(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}) = \delta(6\mathbb{N}) = \frac{1}{6}.$$

Para determinar a densidade da união desses conjuntos, segue da Proposição 5.4 que

$$\delta(2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}) = \delta(2\mathbb{N}) + \delta(3\mathbb{N}) - \delta(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}).$$

ubstituindo os valores obtidos, deduzimos que

$$\delta(2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Finalmente, o conjunto E *de interesse é o complementar da união em relação a* $\mathbb{N}$, *ou seja,* $E = (2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N})^c$. *Pela Propriedade 5.7, a densidade de* E *é obtida por*

$$\delta(E) = 1 - \delta(2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Conclui-se que a densidade natural do conjunto de números que não são divisíveis por 2 nem por 3 é $1/3$.

Este resultado ratifica que, embora o conjunto seja infinito, a sua densidade natural indica que ele ocupa uma proporção limite de um terço dos números naturais.

A impossibilidade de aplicar a Propriedade 5.4 a subconjuntos com interseção não vazia, devido a dificuldades no cálculo exato ou à ausência de dados sobre o termo $\delta(A \cap B)$, limita a determinação exata de $\delta(A \cup B)$. Nesses cenários, a desigualdade fundamental $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$ viabiliza a obtenção de limitantes para a densidade do conjunto união. O exemplo a seguir aplica formalmente esse limitante ao cálculo da densidade de conjuntos determinados simultaneamente por múltiplas condições de divisibilidade.

Exemplo 5.1.3. *Consideremos o problema de determinar a densidade natural do conjunto S, definido pela união de dois conjuntos de múltiplos:* $4\mathbb{N}$ *e* $6\mathbb{N}$. *Pelo resultado estabelecido no Exemplo 4.1.7, as densidades assintóticas individuais dessas progressões aritméticas são dadas por:*

$$\delta(4\mathbb{N}) = \frac{1}{4} \quad e \quad \delta(6\mathbb{N}) = \frac{1}{6}.$$

A determinação exata da densidade da união $\delta(4\mathbb{N} \cup 6\mathbb{N})$ *requer a aplicação da Proposição 5.4 que garante a relação*

$$\delta(4\mathbb{N} \cup 6\mathbb{N}) = \delta(4\mathbb{N}) + \delta(6\mathbb{N}) - \delta(4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N}).$$

Visto que a interseção $4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N}$ *corresponde ao conjunto dos múltiplos comuns de* 4 *e* 6, *tem-se que* $4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N} = 12\mathbb{N}$. *Conforme Teorema 5.1, a densidade desse conjunto de interseção é*

$$\delta(4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N}) = \frac{1}{12}.$$

Substituindo os valores correspondentes na relação aditiva, obtém-se:

$$\delta(S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3+2-1}{12} = \frac{1}{3}.$$

A estimativa obtida pela simples soma das densidades dos conjuntos $4\mathbb{N}$ e $6\mathbb{N}$ serve para determinar um valor de referência inicial quando não se leva em consideração os elementos contados em duplicidade. Dessa forma, desconsiderando a interseção entre os conjuntos, o cálculo da soma das densidades individuais é dado por:

$$\delta(4\mathbb{N}) + \delta(6\mathbb{N}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}.$$

Como a interseção $4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N} = 12\mathbb{N}$ não é vazia, subtrai-se a sua densidade $\delta(12\mathbb{N}) = \frac{1}{12}$, obtendo o valor exato:

$$\delta(S) = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Como $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$, confirma-se que a densidade exata de S é estritamente menor do que a simples soma das densidades.

Na análise de densidades natural de subconjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), a

precisão na utilização dos conectivos lógicos é de fundamental importância, visto que eles determinam diretamente a operação de conjuntos correspondente e, por conseguinte, o cálculo dos limites envolvidos. No âmbito da Teoria dos Conjuntos e da Lógica Matemática, o conectivo de conjunção "e"($\wedge$) traduz-se formalmente na operação de interseção ($\cap$). Analogamente, o conectivo de disjunção "ou"($\vee$) mapeia-se na operação de união ($\cup$). Assim, $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A \wedge x \in B\}$ e $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A \vee x \in B\}$. Ao definir o objeto de estudo S sob a condição de que seus elementos devem ser múltiplos de 4 e múltiplos de 6 simultaneamente, a semântica matemática impõe que U seja o conjunto interseção ($A \cap B$). Desse modo, o comportamento de U fica restrito aos múltiplos comuns de ambos os números, o que reduz o problema à determinação da densidade dos múltiplos do mínimo múltiplo comum (mmc) entre os valores fornecidos. Diferente do cenário de união ($A \cup B$), onde se faz necessária a aplicação da Propriedade 5.4 e Lemas 3.12, a análise por interseção em estruturas de múltiplos preserva o cálculo direto sobre o período do $\text{mmc}(4, 6) = 12$. Apresentamos, a seguir, o desenvolvimento para a determinação da densidade natural $\delta(U)$ sob a correta interpretação da conjunção lógica utilizada.

Exemplo 5.1.4. *Considere o conjunto $U \subset \mathbb{N}$ formado pelos números que são múltiplos de 4 e múltiplos de 6. Desejamos determinar a densidade assintótica $\delta(U)$ e analisar o comportamento do limite sob a ótica da subaditividade. Sejam os conjuntos componentes que definem as propriedades dos múltiplos*

$$A = 4\mathbb{N} \quad \textit{(Múltiplos de 4)}$$
$$B = 6\mathbb{N} \quad \textit{(Múltiplos de 6).}$$

*Como o conjunto U é formado pelos números que são múltiplos de 4 **e** múltiplos de 6 simultaneamente, determinamos U através da interseção de A e B*

$$U = A \cap B.$$

Dado que um número é múltiplo comum de 4 e 6 se, e somente se, for múltiplo do Mínimo Múltiplo Comum (mmc) entre eles, temos que $\text{mmc}(4, 6) = 12$. Dessa forma, o conjunto

simplificado é escrito como

$$U = \{12k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

A quantidade de elementos de U menores ou iguais a um número natural n é dada por $U(n) = \lfloor n/12 \rfloor$. Assim, a densidade assintótica $\delta(U)$ é calculada pelo limite

$$\delta(U) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n/12 \rfloor}{n}.$$

Considerando a propriedade 3.18, estabelecemos a seguinte desigualdade

$$\frac{n}{12} - 1 < \lfloor n/12 \rfloor \leq \frac{n}{12}.$$

Dividindo todos os termos por n (para $n > 0$):

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n/12 \rfloor}{n} \leq \frac{1}{12}.$$

Ao aplicar o limite quando $n \to \infty$, o Teorema 3.8 nos garante que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{12} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Conclui-se, portanto, de forma exata que a densidade do conjunto é

$$\delta(U) = \frac{1}{12}.$$

No contexto da Teoria Analítica dos Números, essa rigorosa correspondência entre conectivos lógicos e operações de conjuntos estende-se naturalmente para outras situações clássicas no estudo da densidade assintótica. Se subconjuntos de $\mathbb{N}$ possuem densidade nula, sua união finita também preserva essa propriedade. O exemplo a seguir ilustra como a união de conjuntos com ordens de crescimento distintas, porém sublineares, resulta em um novo conjunto de densidade nula.

Exemplo 5.1.5. *Seja $K = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos cubos perfeitos em $\mathbb{N}$. Temos que $\delta(K) = 0$. Mediante a aplicação da Proposição 5.11, utilizando a subsequência de referência $n_k = 2^k$. Primeiramente, observa-se que a sequência (n_k) possui uma razão*

entre termos consecutivos constante e, portanto, limitada

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} = \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2 \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

em que $C = 2$. *Esta condição satisfaz o requisito de crescimento controlado da Proposição 5.11. Prosseguindo com a análise da densidade relativa ao longo da subsequência, utilizamos a função contagem* $K(n) = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|K \cap I_{n_k}|}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lfloor 2^{k/3} \rfloor}{2^k},$$

considerando que $\lfloor 2^{k/3} \rfloor \leq 2^{k/3}$, *o limite da expressão é dado por:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k/3}}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2k/3}} = 0.$$

Uma vez que o limite da densidade relativa na subsequência é nulo e a razão entre termos sucessivos da mesma é limitada, a Proposição 5.11 implica que a densidade natural do conjunto K *existe e é nula*

$$\delta(K) = 0.$$

Esse exemplo ilustra a eficácia da Proposição 5.11 no tratamento de conjuntos com propriedades de esparsidade. Demonstra-se que, sob condições de crescimento controlado da subsequência de referência, a nulidade da densidade relativa local implica a nulidade da densidade natural do conjunto K em $\mathbb{N}$.

Exemplo 5.1.6. *A densidade da união de quadrados perfeitos e cubos perfeitos existe e é nula. Aspira-se determinar a densidade do conjunto* $S = \mathcal{Q} \cup K$, *onde* $\mathcal{Q} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ *representa os quadrados perfeitos e* $K = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$ *representa os cubos perfeitos. Conforme demonstrado anteriormente no Exemplo 4.1.9 para conjuntos de potências, as densidades individuais de* $\mathcal{Q}$ *e* K *são nulas, visto que suas funções contagem crescem a taxas de* $n^{1/2}$ *e* $n^{1/3}$, *respectivamente*

$$\delta(\mathcal{Q}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n^{1/2} \rfloor}{n} = 0 \quad e \quad \delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n^{1/3} \rfloor}{n} = 0,$$

pela Proposição 5.5, a densidade da união de dois conjuntos é limitada pela soma de suas

densidades:

$$0 \leq \delta(\mathcal{Q} \cup K) \leq \delta(\mathcal{Q}) + \delta(K),$$

substituindo os limites obtidos e considerando o Teorema 3.8

$$0 \leq \delta(\mathcal{Q} \cup K) \leq 0 + 0 \implies \delta(\mathcal{Q} \cup K) = 0.$$

Este resultado ilustra uma propriedade fundamental da união finita de conjuntos com densidade natural nula resulta, equivalentemente, em um conjunto de densidade nula. Essa conclusão corrobora a interpretação de que a densidade natural identifica subconjuntos cuja proporção de seus elementos é assintoticamente desprezível em relação ao conjunto dos números naturais. A compreensão de que conjuntos de densidade nula possuem essa característica assintótica permite determinar, por complementaridade, o comportamento de seus complementares. Portanto, a análise da densidade de um subconjunto frequentemente decorre da verificação de que seu complementar possui densidade nula, estabelecendo uma relação de dualidade. Esse princípio é ilustrado a seguir, em que se analisa o comportamento do conjunto dos números compostos.

Exemplo 5.1.7. *A densidade do conjunto* $\mathbb{K} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \mathbb{P}\}$ *conjunto dos números compostos é* $\delta(\mathbb{K}) = 1$. *Notemos que* $\mathbb{K} = \mathbb{N} - \mathbb{P}$ *é o conjunto complementar de* $\mathbb{P}$, *com isso segue da Proposição 5.7 que*

$$\delta(\mathbb{K}) = 1 - \delta(\mathbb{P}),$$

do Exemplo 4.1.8, $\delta(\mathbb{P}) = 0$. *Logo*

$$\delta(\mathbb{K}) = 1 - 0 = 1.$$

Portanto $\delta(\mathbb{K}) = 1$.

O conjunto dos números naturais admite partições sob diferentes critérios estruturais. Enquanto o Teorema Fundamental da Aritmética (SANTOS, 2001) estabelece uma partição multiplicativa entre a unidade ($\{1\}$), os números primos e os compostos, funções aritméticas como a soma dos divisores, $\sigma(n)$, induzem partições de natureza aditiva.

Sob este último critério, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ divide-se nas classes dos números deficientes, perfeitos e abundantes. No âmbito da densidade assintótica, essas classes exibem comportamentos distintos: as densidades dos números abundantes e deficientes são estritamente positivas, ao passo que a dos números perfeitos é nula. Os exemplos a seguir ilustram essas distribuições.

Exemplo 5.1.8. *Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números abundantes, isto é, dos números naturais cuja soma de seus divisores próprios (excluindo o próprio número) é estritamente maior que o próprio número. Não se conhece, até o presente momento, uma expressão capaz de determinar exatamente a quantidade de números abundantes menores ou iguais a um dado inteiro n. Ainda assim, a literatura apresenta resultados assintóticos e propriedades relevantes acerca da distribuição desses números. sabe-se que a densidade desse conjunto é positiva, o que implica que tais números tornam-se progressivamente mais frequentes à medida que $n \to \infty$. Os matemáticos provaram que os números abundantes possuem uma densidade natural. Isso significa que, se você olhar para um intervalo muito grande de números, a porcentagem de números abundantes tende a um valor fixo. No artigo "Sur la densité des nombres abondants",* (DELÉGLISE, 1989) *provou a existência da densidade assintótica dos números abundantes e obteve o intervalo*

$$0,2474 < \delta(\mathcal{A}) < 0,2480.$$

Aos interessando segue em (DELÉGLISE, 1989) a prova e conclusão do cálculo da densidade dos números abundantes. No que tange à classificação dos números naturais, é fundamental considerar a partição de $\mathbb{N}$ em três conjuntos disjuntos, definidos pela soma de seus divisores próprios: o conjunto dos números abundantes ($\mathcal{A}$), o dos deficientes ($\mathcal{D}$) e o dos perfeitos ($\mathcal{W}$). Por definição, tem-se que:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{W} = \mathbb{N}$$

Sabendo que a densidade de $\mathbb{N}$ é trivialmente igual a 1 ($\delta(\mathbb{N}) = 1$) e que os conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{W}$ são mutuamente disjuntos e possuem densidade natural bem definida, decorre

diretamente da Proposição 5.1 que a soma de suas densidades naturais respeita a relação:

$$\delta(\mathcal{A}) + \delta(\mathcal{D}) + \delta(\mathcal{W}) = 1$$

Conforme demonstrado na literatura clássica da Teoria dos Números, embora a cardinalidade do conjunto dos números perfeitos seja objeto de estudos contemporâneos (restando ainda lacunas quanto à existência de números perfeitos ímpares ou à infinitude do conjunto), segue do Exemplo 4.1.11 que sua densidade natural é nula, ou seja, $\delta(\mathcal{W}) = 0$. Dessa forma, a densidade do conjunto dos números deficientes de corre da Proposição 5.7 e pode ser expressa em função da densidade dos números abundantes, ou seja.

Exemplo 5.1.9. *A densidade natural de $\mathcal{D}$, conjunto dos números deficientes, existe e é dada por:*

$$\delta(\mathcal{D}) = 1 - \delta(\mathcal{A}).$$

Pelo exemplo anterior, temos a seguinte estimativa para a densidade de $\mathcal{D}$

$$0,7520 < \delta(\mathcal{D}) < 0,7526.$$

Vale ressaltar que a determinação exata da quantidade de números deficientes em um intervalo $\{1, \ldots, n\}$, isto é, a função de contagem $\mathcal{D}$ dependeria do conhecimento preciso sobre a distribuição dos números perfeitos até n. Como a existência de infinitos números perfeitos e a própria existência de números perfeitos ímpares constituem conjecturas ainda não resolvidas na literatura matemática, a obtenção de uma fórmula explícita para $D(n)$ permanece fora do alcance atual da teoria.

A fim de consolidar a relação entre a operação de interseção e o comportamento assintótico de conjuntos, reapresenta-se a seguir um exemplo prático focado em progressões aritméticas. Neste cenário, a análise adquire uma relevância particular devido à coprimatidade das razões das sequências envolvidas. Sob o ponto de vista analítico, o fato de os geradores serem primos entre si estabelece uma condição de independência aritmética. Esse fenômeno simplifica o cálculo da densidade da interseção, permitindo que ela seja determinada diretamente pelo produto das densidades individuais, sem a necessidade de correções estruturais, como se observa no modelo abaixo.

Exemplo 5.2.4. *Considerem-se as progressões aritméticas* $M_3, M_5 \subset \mathbb{N}$ *de razões* 3 *e* 5*, cujas densidades naturais são* $\delta(M_3) = 1/3$ *e* $\delta(M_5) = 1/5$*. Seja* $\mathcal{U} = M_3 \cap M_5$*. Como* $mdc(3, 5) = 1$*, as condições de divisibilidade são independentes. Pela Proposição* **??***, a densidade da interseção é dada pelo produto das densidades*

$$\delta(\mathcal{U}) = \delta(M_3 \cap M_5) = \delta(M_3) \cdot \delta(M_5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Alternativamente, pela ótica da Teoria dos Números, $M_3 \cap M_5$ *equivale ao conjunto dos múltiplos de* 15*, ou seja,* $M_{15} = \{15n : n \in \mathbb{N}\}$*. Como a densidade de qualquer progressão aritmética de razão* k *é* $1/k$*, verifica-se a consistência do resultado* $\delta(M_{15}) = 1/15$*.*

Com isso devemos considerar que o universo dos subconjuntos dos naturais abraçam as mais diversas característica de formação numérica, isto posto devemos então compreender que a densidade natural continua sendo um instrumento fundamental para resolução de problemas em suas mais diversas particularidades sendo incorporada e aplicada em conjuntos deversos, vejamos:

Conclui-se que a aplicabilidade da densidade assintótica natural é condicionada à existência do limite da sequência das densidades relativas associada à função contagem do conjunto. A existência de subconjuntos $A \subseteq \mathbb{N}$ para os quais a sequência $|A \cap I_n|$ é divergente evidencia a limitação dessa definição para o mapeamento global de subconjuntos quaisquer. Esta limitação analítica encerra o presente capítulo e estabelece o fundamento para o desenvolvimento do capítulo a seguir, no qual o escopo teórico será estendido por meio dos conceitos de limite superior e limite inferior. Essas ferramentas viabilizarão a definição das densidades assintóticas superior e inferior, estendendo o tratamento formal a conjuntos cujas sequências de densidades relativas não convergem.

6 Um Subconjunto Que Não Possui Densidade

A insuficiência analítica da densidade assintótica natural reside no fato de que a propriedade de possuir densidade não é preservada pelas operações usuais de união e interseção de conjuntos. Isso decorre da divergência da sequência $|A \cap I_n|$. A existência de conjuntos para os quais o limite da densidade natural é indefinido motiva o uso das densidades assintóticas superior e inferior, estendendo o tratamento formal a subconjuntos cujas funções contagem geram sequências divergentes por oscilação, conforme exemplificado a seguir.

Diante da divergência da sequência, recorre-se aos conceitos de limite superior e limite inferior de sequências reais limitadas. Visto que a sequência $|A \cap I_n|$ está contida no intervalo $[0, 1]$, a garantia de existência dos operadores $\limsup$ e $\liminf$ na topologia da reta real permite associar, a cada subconjunto de $\mathbb{N}$, dois valores limites bem definidos. Esses operadores dão origem, respectivamente, às densidades assintóticas superior e inferior, estendendo o arcabouço teórico e assegurando uma caracterização analítica regular mesmo quando a densidade natural convencional é inexistente.

Exemplo 6.0.1. *Consideremos o conjunto $A \subset \mathbb{N}$ definido como o conjunto de todos os números naturais que possuem um número ímpar de algarismos na base 10,*

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{n \in \mathbb{N} : 10^{2k} \leq n < 10^{2k+1}\}$$

Para verificar a existência da densidade natural $\delta(A)$, analisamos o limite da sequência das densidades relativas $d_n(A) = \frac{A(n)}{n}$, onde $A(n) = |A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$. Consideremos inicialmente os valores de n da forma $n_k = 10^{2k} - 1$. Estes pontos precedem o início de cada novo bloco de elementos pertencentes a A. Nestes índices, a contagem de elementos

de A é dada pela soma das amplitudes dos blocos anteriores

$$A(n_k) = \sum_{j=0}^{k-1}(10^{2j+1} - 10^{2j}) = \sum_{j=0}^{k-1} 9 \cdot 10^{2j}.$$

Utilizando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, obtemos

$$A(n_k) = 9 \cdot \frac{10^{2k} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2k} - 1}{11}.$$

Logo, a densidade relativa nestes pontos é

$$d_{n_k}(A) = \frac{10^{2k} - 1}{11(10^{2k} - 1)} = \frac{1}{11}.$$

Por outro lado, consideremos os valores de n da forma $m_k = 10^{2k+1} - 1$, que representam o término de cada bloco pertencente a A. Nestes pontos, a contagem de elementos inclui o bloco recém-finalizado, resultando em

$$A(m_k) = A(n_k) + (10^{2k+1} - 10^{2k}) = \frac{10^{2k} - 1}{11} + 9 \cdot 10^{2k}.$$

Simplificando a expressão, obtemos

$$A(m_k) = \frac{10^{2k} - 1 + 99 \cdot 10^{2k}}{11} = \frac{100 \cdot 10^{2k} - 1}{11} = \frac{10^{2k+2} - 1}{11}.$$

A densidade relativa nestes picos é

$$d_{m_k}(A) = \frac{10^{2k+2} - 1}{11(10^{2k+1} - 1)} = \frac{10 \cdot 10^{2k+1} - 1}{11(10^{2k+1} - 1)}.$$

Ao aplicarmos o limite quando $k \to \infty$, observamos que $d_{m_k}(A) \to \frac{10}{11}$. Desde que a sequência $d_n(A)$ possui duas subsequências distintas que convergem para valores distintos, a saber, $d_{n_k} \to \frac{1}{11}$ e $d_{m_k} \to \frac{10}{11}$, concluímos que a sequência (d_n) não pode ser convergente. Portanto, a densidade de A não existe, ou seja, o valor $\delta(A)$ não existe.

Este cenário impõe a necessidade de recorrer às densidades assintóticas inferior e superior, denotadas respectivamente por $\delta_1(A)$ e $\delta_2(A)$, que fornecem os limites de

acumulação da frequência relativa dos elementos do conjunto em $\mathbb{N}$.

Tendo em vista a necessidade de analisar o comportamento assintótico de subconjuntos em $\mathbb{N}$ cujos limites convencionais de frequência relativa podem não convergir, torna-se indispensável formalizar os limites de acumulação dessa frequência. Para tanto, introduzimos a seguir as definições formais de densidade assintótica inferior e superior, que funcionam como limitadores para esses casos de oscilação.

Definição 6.1. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. A densidade assintótica inferior $\delta_1(A)$ de A é definida por*

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n},$$

e a densidade assintótica superior $\delta_2(A)$ de A é definida por

$$\delta_2(A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n}.$$

Para maiores detalhes e fundamentação teórica destas definições, remetemos o leitor a (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2025). Aplicações e desdobramentos recentes dessas propriedades podem ser consultados em (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2026).

A partir dessas definições, decorre imediatamente das propriedades de limites inferior e superior que a desigualdade $0 \leq \delta_1(A) \leq \delta_2(A) \leq 1$ é sempre válida para qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{N}$. Adicionalmente, a igualdade entre esses dois parâmetros caracteriza formalmente a existência da densidade natural clássica. É a partir desse cenário de convergência ou oscilação que delimitamos o escopo deste trabalho. Com efeito, o foco desta análise restringe-se às propriedades estruturais de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que possuem densidade assintótica natural definida. Por conseguinte, a inclusão de subconjuntos com comportamento oscilatório cumpre estritamente a função de estabelecer os limites de aplicabilidade da definição clássica e fundamentar a necessidade de extensões conceituais. Para construções de conjuntos analiticamente mais sofisticados que não possuem densidade natural definida, adota-se a abordagem proposta por (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2026).

A existência de subconjuntos para os quais a sequência das densidades relativas é divergente demonstra que a convergência do quociente $\frac{A(n)}{n}$ não constitui uma propriedade geral de qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$. Dado que o estudo de sequências divergentes não é

o objeto de investigação deste trabalho, tais conjuntos atuam estritamente como contra-exemplos que delimitam o domínio de aplicabilidade da densidade assintótica natural.

7 Resultados Avançados da Densidade Natural

No capítulo 5, foram apresentadas definições e propriedades básicas da densidade natural. Entretanto, existem resultados mais avançados nesse contexto cujas demonstrações exigem ferramentas analíticas mais sofisticadas, fugindo ao escopo desta dissertação. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar alguns desses resultados e destacar aplicações da densidade natural no estudo de subconjuntos dos números naturais definidos por propriedades aritméticas.

Os resultados apresentados a seguir ilustram como a densidade natural pode ser utilizada no estudo da distribuição de subconjuntos dos números naturais definidos por propriedades aritméticas.

Na formalização do conceito de densidade assintótica natural reflete historicamente a transição de métodos puramente enumerativos para o emprego de ferramentas da Análise Real na Teoria dos Números. Inicialmente, a investigação de propriedades estruturais em $\mathbb{N}$ baseava-se na observação local e direta de frequências em segmentos iniciais finitos. O desenvolvimento desse formalismo revelou que, para conjuntos definidos por critérios elementares de divisibilidade, o quociente entre a função contagem ordinária e o total de inteiros converge quando o limite assintótico é estendido ao infinito. Esse processo de associação analítica culminou no trabalho de (GEGENBAUER, 1885), que superou as limitações dos métodos enumerativos vigentes ao aplicar técnicas de somação aritmética para determinar formalmente a distribuição e a densidade dos inteiros livres de quadrados em $\mathbb{N}$.

Teorema 7.1 (Gegenbauer, 1885)**.** *Seja* $\mathcal{Q} = \{n \in \mathbb{N} : d^2 \mid n \implies d = 1\}$ *o conjunto dos números inteiros livres de quadrados em* $\mathbb{N}$*. A densidade assintótica natural de* $\mathcal{Q}$ *existe e é dada por*

$$\delta(\mathcal{Q}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{Q}(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}.$$

A demonstração original estabelecida por (GEGENBAUER, 1885) fundamenta-se

na estimativa da função contagem de inteiros livres de quadrados

$$\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

Posteriormente, os desenvolvimentos na Teoria dos Números expandiram esse estudo para valores de $\sigma(n)$. Nesse contexto, (ERDŐS, 1934) demonstrou a existência da densidade natural dos conjuntos de números abundantes e deficientes, cujas estimativas foram refinadas por (DELÉGLISE, 1998) por meio de algoritmos aplicados a funções multiplicativas. A classificação de números em abundantes, deficientes ou perfeitos baseia-se em $\sigma(n)$. A análise da densidade natural do conjunto dos números abundantes, $A = \{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) > 2n\}$, exige o estudo da razão $\frac{\sigma(n)}{n}$.

Teorema 7.2. *(Erdős). A densidade natural do conjunto de números abundantes, denotada por $\delta(A)$ existe.*

De acordo com os refinamentos de (DELÉGLISE, 1998), o valor desta densidade satisfaz

$$0,2474 < \delta(A) < 0,2480$$

Este teorema garante a existência da densidade natural do conjunto dos números abundantes, fornecendo uma medida assintótica para sua distribuição entre os inteiros positivos. O resultado obtido desempenha papel central na compreensão das propriedades distributivas desses números.

O Teorema de Szemerédi formaliza a intuição de que conjuntos "grandes"(em termos de densidade) não podem ser totalmente aleatórios.

Teorema 7.3. *Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\delta(A) > 0$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $a, r \in \mathbb{N}$ com $r \geq 1$ tais que*

$$\{a + ir \mid 0 \leq i \leq k-1\} \subseteq A.$$

Formalmente, a afirmação garante que existem $a, r \in \mathbb{N}(r > 0)$ tal que $\{a + ir \mid 0 \leq i,\ \text{e}\ i \leq k-1\}$ Como o teorema afirma que isso é válido para todo inteiro positivo k, a consequência direta do Teorema de Szemerédi é que se um subconjunto dos números naturais possui densidade superior (ou natural) positiva, ele obrigatoriamente contém

progressões aritméticas arbitrariamente longas (ou seja, de qualquer tamanho finito que se deseje escolher).

Este produto é um marco por provar que a densidade é suficiente para garantir a existência de subestruturas aritméticas complexas. Esta consequência demonstrada por (SZEMERÉDI, 1975) não apenas resolveu uma conjectura histórica de Erdős e Turán, como também forneceu o alicerce para o desenvolvimento do Teorema de Green-Tao, que demonstrou que os números primos, apesar de possuírem densidade nula, contêm progressões aritméticas de qualquer comprimento.

Teorema 7.4 (Green–Tao)**.** *O conjunto dos números primos contém progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente grande. Em outras palavras, para todo inteiro positivo k, existem números primos*

$$p,\ p+r,\ p+2r,\ \ldots,\ p+(k-1)r,$$

com $r > 0$, formando uma progressão aritmética de comprimento k.

O Teorema de Green–Tao, demonstrado em 2004 por (GREEN; TAO, 2008), representa um marco na interação na Teoria dos Números. Sua origem remonta ao Teorema 7.3, que estabelece a existência de progressões aritméticas arbitrariamente longas em subconjuntos dos números naturais com densidade positiva. Entretanto, o conjunto dos números primos possui densidade natural nula, o que impede a aplicação direta do Teorema 7.3. A principal contribuição de Green e Tao consistiu em desenvolver métodos que permitem transferir resultados combinatórios típicos de conjuntos densos para determinados conjuntos, entre eles o conjunto dos números primos.

Como consequência, demonstrou-se que, apesar de sua densidade assintótica ser igual a zero, os números primos preservam uma rica estrutura aditiva, contendo progressões aritméticas de qualquer comprimento finito. Esse resultado ampliou significativamente o alcance das técnicas da Combinatória Aditiva e consolidou uma profunda conexão entre propriedades de densidade e a distribuição dos números primos.

Na Teoria Analítica dos Números, a densidade assintótica determina a distribuição assintótica de subconjuntos de números naturais $\mathbb{N}$. Diante desse entendimento já apresentado e detalhado nesse trabalho, (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2025) apresentam três

resultados teóricos estruturais para o cálculo da densidade assintótica de subconjuntos de números naturais. O Artigo em questão estabelece três metodologias para o cálculo e a comparação dessas densidades o controle por sequências limitantes, a modelagem funcional por bijeções e a extensão diferenciável de sequências indexadoras.

Inicialmente (ISNERI; SILVA; VIEIRA, 2025) traz um teorema principal que estabelece uma cota superior para a diferença entre as densidades assintóticas superiores de dois subconjuntos infinitos quaisquer de $\mathbb{N}$, cujos elementos estão ordenados de forma estritamente crescente, com base na taxa de crescimento da distância posicional de seus termos.

Teorema 7.5. *Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tais que $a_n < a_{n+1}$ e $b_n < b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma sequência real não-decrescente $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaça $|a_n - b_n| \leq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$|\delta_2(B) - \delta_2(A)| \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}.$$

Onde δ_2 denota a densidade assintótica superior. Se a sequência limitante satisfizer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$ (crescimento sublinear), conclui-se que as densidades assintóticas superiores de ambos os conjuntos são iguais, isto é, $\delta_2(A) = \delta_2(B)$.

Outro resultado importante trata sobre o critério das funções inversas e mapeamentos de densidades. Este resultado reformula o cálculo da densidade assintótica, substituindo a contagem discreta cardinal $|A \cap I_n|$ pelo comportamento limite do quociente de uma extensão funcional da sequência indexadora no domínio real. Vejamos.

Teorema 7.6. *Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ com $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe uma função bijetora $f : X \to \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N} \subseteq X \subset (0, +\infty)$, tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e cuja função inversa f^{-1} é estritamente crescente. Sob estas condições, as densidades assintóticas inferior (δ_1) e superior (δ_2) de A cumprem*

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n} \quad e \quad \delta_2(A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n}.$$

A densidade assintótica natural $\delta(A)$ existe se, e somente se, o limite ordinário $\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n}$ existir.

Este teorema relaciona a existência da densidade natural à convergência da derivada de uma função diferenciável que estende a sequência que indexa o conjunto de números naturais.

Para analisar o comportamento da densidade natural por meio de ferramentas do cálculo diferencial, é necessário estender o domínio discreto das sequências que indexam os subconjuntos de números naturais para o ambiente contínuo. A definição a seguir introduz a classe de funções diferenciáveis utilizadas para essa interpolação, estabelecendo as condições necessárias para a caracterização de uma parametrização regular.

Definição 7.7. *Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto infinito de números naturais ordenados de forma estritamente crescente. Dizemos que uma função $f : [1, +\infty) \to [a_1, +\infty)$ é uma parametrização regular de A se as seguintes condições forem satisfeitas*

1. *f é diferenciável em $[1, +\infty)$;*
2. *$f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*
3. *f é estritamente crescente, isto é, $f'(x) > 0$ para todo $x \in [1, +\infty)$;*
4. *Existe o limite $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$, com $L \in [1, +\infty \cup \{+\infty\}]$.*

Uma vez estabelecidas as condições analíticas que caracterizam uma parametrização regular, torna-se possível aplicar esse formalismo para determinar a densidade assintótica de subconjuntos dos números naturais. O teorema a seguir demonstra como o limite da derivada da função interpoladora determina o valor dessa densidade.

Teorema 7.8. *Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto que admite uma parametrização regular através de uma função diferenciável $f : [1, +\infty) \to [a_1, +\infty)$ de modo que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$, onde $L \in [1, +\infty]$, então a densidade assintótica natural $\delta(A)$ existe e é calculada por*

$$\delta(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)}.$$

(Adota-se a convenção algébrica $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Além dos três teoremas principais apresentados, o artigo desenvolve outros resultados e desdobramentos importantes que expandem a teoria da densidade assintótica.

Um desses componentes merece destaque rigoroso, consolidando-se como uma ferramenta analítica de grande relevância para esta dissertação por eximir a necessidade de computar limites de somatórios complexos de funções indicadoras, substituindo-os pelo comportamento assintótico de razões funcionais simples. Esse avanço é formalizado pelo teorema a seguir:

Teorema 7.9 (Teorema de L'Hôpital aplicado à Densidade)**.** *Seja $A \subset \mathbb{N}$ um subconjunto que admite uma parametrização regular através de uma função f diferenciável. Então, a densidade assintótica natural de A, denotada por $\delta(A)$, pode ser calculada pelo limite do inverso da primeira derivada da função de extensão no infinito*

$$\delta(A) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f'(x)}.$$

Determinando uma relevância teórica própria, pois permite que ferramentas de análise real sejam aplicadas diretamente na determinação de propriedades de subconjuntos de números naturais.

A relevância do estudo da densidade natural fundamenta-se na sua capacidade de fornecer uma métrica assintótica para subconjuntos dos números inteiros nos quais a enumeração cardinal direta é inviável. Ao longo deste capítulo, constatou-se que a densidade assintótica atua não apenas como um índice descritivo de esparsidade, mas como um instrumento rigoroso de demonstração matemática. O conceito permite inferir propriedades estruturais de um conjunto global a partir do comportamento assintótico de seus subconjuntos, estabelecendo condições sob as quais a validade de uma propriedade em uma subclasse de densidade unitária caracteriza o comportamento genérico do conjunto.

Ademais, a densidade natural constitui uma ferramenta essencial na investigação de problemas em aberto na Teoria dos Números. Diversas conjecturas contemporâneas requerem a demonstração de que determinados subconjuntos possuem densidade superior positiva para assegurar a existência de subestruturas específicas, tais como progressões aritméticas arbitrariamente longas. Desse modo, a análise quantitativa da distribuição desses conjuntos fundamenta as abordagens probabilísticas e analíticas necessárias para a resolução de problemas clássicos da aritmética aditiva e combinatória.

Em suma, a densidade assintótica estabelece uma conexão formal entre as pro-

priedades aritméticas elementares e os métodos da análise matemática. A aplicação desse conceito como método de demonstração reitera que a análise da distribuição dos números naturais permite identificar regularidades em sistemas cuja ordenação não é imediatamente evidente por métodos algébricos diretos. Consequentemente, este trabalho sistematiza os resultados teóricos fundamentais e consolida a base matemática necessária para o desenvolvimento de futuras pesquisas na Teoria Analítica dos Números.

8 Conclusão

Esta dissertação apresentou uma análise matemática acerca do conceito de densidade natural aplicado a subconjuntos do conjunto dos números naturais. O desenvolvimento deste trabalho permitiu quantificar e comparar a distribuição de subconjuntos infinitos, superando a limitação da cardinalidade de Cantor, que atribui a mesma cardinalidade a todo subconjunto infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ por meio de bijeções, tornando-a incapaz de medir a proporção dos seus elementos em $\mathbb{N}$. Com base na Teoria dos Números, a pesquisa delimitou as propriedades estruturais, o alcance operacional e as restrições formais dessa medida.

A fundamentação teórica construída ao longo do texto consolidou as propriedades operatórias essenciais da densidade natural, tais como a monotonicidade, a invariância por translação finita e o comportamento sob as operações de união, interseção e complementação de conjuntos discretos. Com base nesse aparato, determinou-se de forma analítica a densidade de subconjuntos aritméticos clássicos. Demonstrou-se que qualquer progressão aritmética de razão b e termo inicial a possui densidade exata igual a $\frac{1}{b}$. Inversamente, subconjuntos de crescimento não linear e esparso, como o conjunto dos quadrados perfeitos, resultaram em densidade natural nula. De igual modo, mediante a aplicação do Teorema 3.17, função contagem dos números primos, verificou-se que o conjunto dos números primos possui densidade assintótica zero, o que implica, por complementaridade direta, que o conjunto dos números compostos detém densidade igual a 1.

Além do estudo de conjuntos com padrão periódico, como pares, ímpares e múltiplos, esta dissertação estabeleceu os limites analíticos da densidade natural convencional. Provou-se que a aplicação das propriedades finitas falham quando analisamos subconjuntos de variação irregular, cujos elementos oscilam sem uma regra fixa. Especificamente, a análise de subconjuntos com comportamento oscilatório em suas ordens de magnitude na base 10 evidenciou a existência de conjuntos que não possuem densidade natural definida, justificando a introdução e o emprego dos operadores de limite superior e inferior. Os resultados expostos no Capítulo 7 estenderam o escopo da pesquisa ao conectar a teoria da

densidade a ferramentas do Cálculo Diferencial, investigando critérios de parametrização regular e teoremas de comportamento assintótico funcional, ampliando as possibilidades de abjetivos que podem compor o estudo para galgar conclusões futurase até servir de base para solucionar problemas que a muitos anos ainda contunuam sem solução no estudo da matemática.

Atendendo aos objetivos acadêmicos e profissionais que regem o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), esta dissertação vinculou a pesquisa à prática por meio do desenvolvimento do produto educacional voltado para a formação do docente. Como instrumento de conclusão de curso, foi elaborado um material de apoio didático destinado para professores da Educação Básica, focado no ensino de probabilidade. Esse recurso foi estruturado de forma a utilizar os conceitos de densidade assintótica e comportamento limite para fundamentar rigorosamente as noções de espaços amostrais infinitos, transpondo formalmente o conteúdo abstrato abordado na dissertação para sequências didáticas aplicáveis em sala de aula.

Por fim, o referencial normativo estabelecido nesta pesquisa, em conjunto com o recurso educacional desenvolvido, fornece ao professor o embasamento analítico para complementar os conceituais recorrentes nos Ensinos Fundamental e Médio. A demonstração formal de que um conjunto pode ser infinito e, simultaneamente, possuir densidade nula dentro de $\mathbb{N}$ constitui um contraexemplo objetivo para discussões sobre o infinito. Conclui-se que o estudo da densidade natural e de suas extensões assintóticas cumpre as exigências de rigor do programa, resultando em um produto educacional que contribui diretamente para a fundamentação de currículos estruturados e para o aperfeiçoamento do ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

ABBOTT, S. **Understanding Analysis**. New York: Springer, 2015. v. 2.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. ISBN 9788521203957.

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. **Introduction to Real Analysis**. 4. ed. Hoboken: Wiley, 2011.

BATEMAN, P. T.; DIAMOND, H. G. **Analytic Number Theory: An Introductory Course**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2004. v. 1.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics: An Introduction**. 6. ed. New York: McGraw-Hill, 2009. ISBN 978-0073383156.

DELÉGLISE, M. Sur la densité des nombres abondants. **Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux**, v. 1, n. 1, p. 1–12, 1989.

DELÉGLISE, M. Bounds for the density of abundant numbers. **Experimental Mathematics**, v. 7, n. 2, p. 137–143, 1998.

ERDŐS, P. On the density of the abundant numbers. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 9, n. 4, p. 278–282, 1934.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009. 600 p. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. ISBN 9788571399358.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

GEGENBAUER, L. Asymptotische gesetze der zahlentheorie. **Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften**, Wien, v. 49, n. 1, p. 37–80, 1885.

GIRON, G. R.; SOARES, E. M. d. S. Nicho de aprendizagem matemática: uma experiência de ensinar e aprender matemática em convivência. **Horizontes**, v. 38, n. 1, p. e020053, 2020.

GREEN, B.; TAO, T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. **Annals of Mathematics**, v. 167, n. 2, p. 481–547, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1. ISBN 978-8521612599.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013. (Coleção PROFMAT).

ISNERI, R. J. S.; SILVA, M. A. d.; VIEIRA, V. L. Some results on the asymptotic density of sets of natural numbers. **The Ramanujan Journal**, v. 68, n. 116, p. 1–25, 2025. ISSN 1572-9303.

ISNERI, R. J. S.; SILVA, M. A. d.; VIEIRA, V. L. **Breve Discussão sobre Densidade Assintótica de Conjuntos de Números Naturais**. Manuscrito submetido para publicação, 2026.

IWANIEC, H.; KOWALSKI, E. **Analytic Number Theory**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2021. v. 53. (Colloquium Publications, v. 53).

LIMA, E. L. **Análise Real - Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. **Aritmética**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Curso de Análise: Volume 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Projeto Euclides).

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 1990. 206 p.

MARTINEZ, F. B. et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: SBM, 2024. (Coleção Textos Universitários).

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

NATHANSON, M. B. **Additive Number Theory: The Classical Bases**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 164. (Graduate Texts in Mathematics, v. 164).

NUNES, T. et al. **Educação Matemática: números e operações numéricas**. 2. ed. São Paulo: Cortex Editora, 2009.

OLIVEIRA, W. D. **Zeros da Função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2013.

PEKARA, G. C. **Asymptotic densities of sets of integers**. Tese (Doutorado) — Purdue University, West Lafayette, 1972.

RIBENBOIM, P. **The New Book of Prime Number Records**. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 1996. (Graduate Texts in Mathematics, 165). ISBN 978-0-387-94457-9.

RIBENBOIM, P. **Números primos: velhos mistérios, novos recordes**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

SANTOS, J. P. d. O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

SILVA, R. F. d. **Sobre versões assintóticas dos problemas A e C de Mahler**. 64 p. Tese (Doutorado em Matemática) — Universidade de Brasília, Brasília, 2023.

SZEMERÉDI, E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. **Acta Arithmetica**, v. 27, n. 1, p. 199–245, 1975.

VIEIRA, M. O. **O teorema dos números primos**. 99 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2023.

VIEIRA, V. L. **Um Curso Básico em Teoria dos Números**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2026.