UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rodrigo Albuquerque Tavares

Tales no Match: O jogo das retas como ferramenta para o ensino do Teorema de Tales

Campina Grande - PB
Agosto/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rodrigo Albuquerque Tavares

Tales no Match: O jogo das retas como ferramenta para o ensino do Teorema de Tales

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer

Campina Grande - PB
Agosto/2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

T231t Tavares, Rodrigo Albuquerque.

Tales no Match: O jogo das retas como ferramenta para o ensino do Teorema de Tales / Rodrigo Albuquerque Tavares. – 2026.

69 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer".

Referências.

1. Ensino de Matemática. 2. Teorema de Tales. 3. Jogos Matemáticos. I. Nemer, Rodrigo Cohen Mota. II. Título.

UFCG/BC CDU 51:37(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS CRB-15/93

Rodrigo Albuquerque Tavares

Tales no Match: O jogo das retas como ferramenta para o ensino do Teorema de Tales

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 28 de agosto de 2026:

Documento assinado digitalmente
gov.br
RODRIGO COHEN MOTA NEMER
Data: 13/10/2026 15:10:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer
Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUIZ ANTONIO DA SILVA MEDEIROS
Data: 14/10/2026 09:41:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros
Examinador interno - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br
EMANUELA REGIA DE SOUSA COELHO
Data: 13/10/2026 16:46:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. Emanuela Regia de Sousa Coelho
Examinadora Externa - UEPB

Campina Grande - PB
Agosto/2026

Dedico à minha família e amigos que acreditaram que seria possível.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Manuel Tavares e Maria da Glória, pois sem eles minha existência não seria possível. Às minhas irmãs, Isabelle e Isadora, pela admiração, apoio e incentivo ao longo dessa trajetória.

À família Pôrto, que foi a primeira a acreditar na possibilidade que eu era capaz de seguir a carreira acadêmica.

À minha companheira, Daline Cris, pelo apoio incondicional, pela compreensão e pelo incentivo para continuar, mesmo diante da distância e das ausências provocadas pelos dias de aula.

Aos meus amigos da graduação na Universidade Federal Fluminense, Dra. Fernanda Ângelo, Kamilla Liano e Thalita Lima, que estiveram presentes nos momentos mais difíceis, e, em especial, ao meu amigo Me. Ítalo Santos, pela amizade e companheirismo.

Ao professor Dr. Fabiano Souza, por ter me proporcionado a oportunidade de participar do PIBID, experiência fundamental para meu desenvolvimento enquanto professor.

Aos professores do PROFMAT da Universidade Federal de Campina Grande, Dr. José de Arimatéia, Dr. Leomaques Francisco, Dr. Luiz Antônio, Dr. Jaime Alves, Dr. Daniel Cordeiro, Dr. Marcelo Carvalho e Dr. Renan Jackson, pelos ensinamentos compartilhados ao longo dessa caminhada acadêmica. Agradeço, de maneira especial, ao Dr. Rodrigo Cohen, que aceitou a árdua tarefa de me orientar e contribuiu significativamente para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço à Universidade Federal Fluminense e à Universidade Federal de Campina Grande, instituições que transformam a vida de milhares de jovens por meio da educação, da pesquisa que gera oportunidade de crescimento pessoal e profissional.

"A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento é limitado, enquanto a imaginação abraça o mundo inteiro."

(Albert Einstein)

Resumo

O ensino da Matemática enfrenta desafios relacionados ao desinteresse e dificuldades de aprendizagem apresentadas por estudantes da Educação Básica. Nesse contexto, este trabalho apresenta uma proposta pedagógica por meio do jogo *Tales no Match: O jogo das retas*, inspirado no tradicional Jogo do Mico. O jogo foi desenvolvido como ferramenta de apoio à recomposição da aprendizagem e à fixação do Teorema de Tales. Nesta dissertação, são apresentados conceitos de Geometria Plana necessários para a compreensão e demonstração do referido teorema, além de um breve contexto histórico sobre Tales de Mileto. Também é discutida a importância dos jogos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, fundamentada em autores que defendem a utilização de recursos lúdicos como estratégia pedagógica.

Palavras-chave: Jogos matemáticos; Teorema de Tales; Ensino de Matemática.

Abstract

The teaching of mathematics faces challenges related to the disinterest and learning difficulties presented by students in basic education, a scenario intensified by the COVID-19 pandemic. In this context, this work presents a pedagogical proposal through the game *Thales no Match: The Game of Lines*, inspired by the traditional Old Maid game. The game was developed as a tool to support the recomposition of learning and the consolidation of Thales' Theorem. This dissertation presents concepts of Plane Geometry necessary for the understanding and demonstration of the aforementioned theorem, in addition to a brief historical context about Thales of Miletus. The importance of games in the teaching and learning process of mathematics is also discussed, based on authors who advocate the use of playful resources as a pedagogical strategy.

Keywords: Mathematical games; Thales' Theorem; Mathematics teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ponto 17
Figura 2 – Segmento de reta 17
Figura 3 – Reta 17
Figura 4 – Retas Paralelas ($r \parallel s$) 18
Figura 5 – Retas Concorrentes 19
Figura 6 – Abertura entre duas retas 19
Figura 7 – Retas Perpendiculares 20
Figura 8 – Ângulos Opostos pelo Vértice 21
Figura 9 – Ângulos Correspondentes 23
Figura 10 – Ângulos Alternos Internos 24
Figura 11 – Ângulos Alternos Externos 25
Figura 12 – Ângulos Colaterais Internos 26
Figura 13 – Ângulos Colaterais Externos 26
Figura 14 – Caso L.A.L. 27
Figura 15 – Caso A.L.A. 28
Figura 16 – Caso L.L.L. construção 29
Figura 17 – Caso L.L.L. 29
Figura 18 – Teorema do Ângulo Externo 30
Figura 19 – Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo 31
Figura 20 – Caso 1: Lado Ângulo Ângulo Oposto 32
Figura 21 – Caso 2: Lado Ângulo Ângulo Oposto 33
Figura 22 – Caso 3: Lado Ângulo Ângulo Oposto 34
Figura 23 – Tales de Mileto 35
Figura 24 – Localização da antiga cidade de Mileto 36
Figura 25 – Região da Antiga Jônia 36
Figura 26 – Trecho do livro Science Awakening 37
Figura 27 – Base média e mediana de Euler de um trapézio 39
Figura 28 – Feixe de retas paralelas cortadas por transversais 39
Figura 29 – Divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por x 40
Figura 30 – Traçando a reta t_n 41
Figura 31 – Tales no Match: O Jogo das Retas Verso das cartas 48
Figura 32 – Modelo das cartas 48
Figura 33 – no Match 49
Figura 34 – Tales no Match: O Jogo das Retas 56
Figura 35 – Casos de Congruência de Triângulos 56

Figura 36 – Congruência do Triângulo Retângulo 57
Figura 37 – Ângulos Opostos Pelo Vértice 57
Figura 38 – Ângulos Alternos Internos 58
Figura 39 – Retas Concorrentes 58
Figura 40 – Retas Perpendiculares 59
Figura 41 – Retas Paralelas 59
Figura 42 – Pontos Colineares 60
Figura 43 – Três Paralelas Cortadas por uma Transversal 60
Figura 44 – Cinco Paralelas Cortadas por uma Transversal 61
Figura 45 – Divisão em Duas Partes Iguais Construção 61
Figura 46 – Divisão em Duas Partes Iguais Demonstração 62
Figura 47 – Divisão em n + 1 partes 62
Figura 48 – Divisão em n - 1 partes 63
Figura 49 – Divisão em Cinco Partes Solução 63
Figura 50 – Divisão em Cinco partes Imagem 64
Figura 51 – Definição Razão 64
Figura 52 – Teorema de Tales 65
Figura 53 – Afirmação 1 65
Figura 54 – Exercício 1 66
Figura 55 – Exercício 2 66
Figura 56 – Afirmação 2 67
Figura 57 – Exercício 3 67
Figura 58 – Afirmação 3 68
Figura 59 – Exercício 4 68
Figura 60 – Exercício 5 69
Figura 61 – Exercício 6 69
Figura 62 – Exercício 7 70
Figura 63 – no Match 70

Sumário

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 Objetivos 15
1.1.1 Objetivo Geral 15
1.1.2 Objetivos Específicos 15
1.2 Organização 15

2 GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA 16
2.1 Retas 16
2.2 Posição das Retas 18
2.2.1 Retas Paralelas 18
2.2.2 Retas Concorrentes 18
2.2.3 Ângulos 19
2.2.4 Retas Perpendiculares 20
2.3 Ângulos Opostos pelo Vértice 21
2.4 Retas paralelas cortadas por uma transversal 22
2.4.1 Ângulos Correspondentes 23
2.4.2 Ângulos Alternos 23
2.4.2.1 Ângulos Alternos Internos 24
2.4.2.2 Ângulos Alternos Externos 24
2.4.3 Ângulos Colaterais 25
2.4.3.1 Ângulos Colaterais Internos 25
2.4.3.2 Ângulos Colaterais Externos 26
2.5 Congruência de Triângulos 26
2.5.1 Caso: Lado-Ângulo-Lado (L.A.L.) 27
2.5.2 Caso: Ângulo-Lado-Ângulo (A.L.A.) 27
2.5.3 Caso: Lado-Lado-Lado (L.L.L.) 28

3 TEOREMA DE TALES 35
3.1 A História de Tales de Mileto 35
3.2 O Teorema de Tales de Mileto 38

4 TALES NO MATCH: O JOGO DAS RETAS 42
4.1 Fundamentação Teórica 42
4.1.1 Definição de jogo 44
4.1.2 O jogo na educação matemática 45

4.2 Tales no Match: o jogo das retas 47
4.2.1 Regras do jogo 47
4.2.2 Cartas do jogo 48
4.2.3 Conteúdos Trabalhados 49
4.2.4 Sugestão de Plano de Aplicação do Jogo 50

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 52

REFERÊNCIAS 53

ANEXOS 55

ANEXO A – CARTAS DO JOGO 56

1 Introdução

Disciplinas como Matemática, Física e Química geram sentimentos controversos em diversos alunos, que vão desde o interesse e a curiosidade até o desestímulo e a dificuldade de aprendizagem. Nesse contexto, podemos levantar o seguinte questionamento: o que essas disciplinas têm em comum? E a resposta é imediata: Matemática.

Nesse contexto, os jogos podem assumir uma função pedagógica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para além de seu caráter lúdico, ressaltando que durante o corpo desse texto iremos apresentar as definições de jogos.

Dessa forma, o jogo pode constituir-se como um recurso didático capaz de favorecer a retomada e a consolidação de conhecimentos matemáticos, uma vez que sua dinâmica possibilita aos estudantes mobilizar conceitos, elaborar estratégias, tomar decisões e estabelecer relações entre diferentes conhecimentos. Assim, quando planejado de acordo com os objetivos de aprendizagem, o jogo deixa de ser compreendido apenas como uma atividade recreativa e passa complementar as práticas de ensino da Matemática.

Atualmente, o desestímulo e o desinteresse de diversos estudantes em sala de aula, (SOUZA; SILVA, 2024) afirma que isso constituem um desafio recorrente para processo de ensino e aprendizagem, independentemente da matéria lecionada. Nesse contexto, a Matemática frequentemente é apontada como uma das responsáveis por esse cenário segundo (PREDIGER; BERWANGER; MöRS, 2013), em razão da complexidade de seus conteúdos e sobretudo porque ela é base para uma série de disciplinas. A ausência de uma base matemática sólida compromete a compreensão e a consolidação de conceitos fundamentais para o desenvolvimento de outras disciplinas. O relatório referente ao SAEB 2023 aponta que: "*A aprendizagem adequada em Matemática cai ao longo da educação básica: de 43,5% no 5º ano do Ensino Fundamental para 16,5% no 9º ano*" (BRASIL, 2025), corroborando a afirmação do desinteresse dos alunos.

Diante desse cenário, podemos utilizar os jogos como uma alternativa metodológica mais atrativa, aproximando os alunos da matemática e contribuindo para a transformação da realidade. Além disso, o uso de atividades lúdicas pode favorecer o engajamento durante as aulas e atribuir um maior significado ao processo de ensino e aprendizagem.

Ainda segundo (SOUZA; SILVA, 2024), a pandemia de COVID-19 contribuiu significativamente para o agravamento das dificuldades dos alunos em matemática. Durante esse período, os estudantes permaneceram fora da escola por um longo tempo em razão das medidas de isolamento social devido ao alto risco de contaminação o que intensificou a defasagem no aprendizado. Embora os sistemas de ensino tenham disponibilizado aulas remotas como alternativa, o processo de ensino e aprendizado acabou sendo impactado negativamente. Além disso, a recuperação dessas aprendizagens demanda

tempo, planejamento pedagógico e a adoção de estratégias específicas.

Diante o exposto, a recomposição de aprendizado apresenta-se como uma importante estratégia para minimizar os impactos da defasagem e melhorar os índices de desempenho em Matemática, ou seja, trabalhar com conteúdos em que os alunos apresentam uma deficiência no aprendizado e na fixação. Assim, a utilização de jogos pode contribuir significativamente com ensino e aprendizagem de matemática, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo e eficaz.

Neste contexto, foi criado o *Tales no Match: o jogo das retas* inspirado Teorema de Tales e baseado na dinâmica do tradicional jogo do Mico que, por sua vez, trata-se de um jogo de cartas que consiste em formar pares com imagens de animais, enquanto evitam permanecer com a carta Mico ao final da partida. A adaptação busca utilizar uma dinâmica lúdica para favorecer o ensino de conceitos matemáticos para reaver o conhecimento perdido.

A escolha do título para o jogo *Tales no Match* está relacionado ao termo em inglês *match*, que pode ser traduzido como "combinação" ou "correspondência". Tal escolha faz referência à dinâmica do jogo, assim como ocorre no jogo do Mico, a partida termina com uma carta sem par.

O *Tales no Match: o jogo das retas* é composto por 57 cartas, das quais uma não possui correspondência. A definição da quantidade de cartas, bem como os conteúdos abordados, partiu da necessidade de desenvolver uma proposta didática fácil e fluida para a compreensão dos estudantes. Desse modo, buscou-se selecionar conteúdos que contribuíssem para restituição da aprendizagem e para o fortalecimento dos conceitos matemáticos.

Com o desenvolvimento do jogo, foi possível contemplar os seguintes conteúdos voltados à recomposição da aprendizagem dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II:

- Razão e proporção;
- Congruência de triângulos;
- Pontos colineares;
- Posições relativas entre retas (concorrentes, perpendiculares e paralelas).

Além dos conteúdos que visam o restabelecimento de aprendizagem, o jogo também pode ser utilizado como ferramenta de introdução, revisão e consolidação de novos conceitos matemáticos. Especificamente nesse jogo pode-se trabalhar os seguintes conteúdos:

- Retas paralelas cortadas por uma transversal;

- Ângulos opostos pelo vértice;
- Ângulos alternos internos;
- Teorema de Tales.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Apresentar o jogo *Tales no Match: o jogo das retas* voltado para o Teorema de Tales, como ferramenta pedagógica para auxiliar na recomposição da aprendizagem e na introdução e fixação do Teorema de Tales no 9º ano do Ensino Fundamental II, promovendo uma aprendizagem significativa por meio de atividades lúdicas.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar quais conteúdos matemáticos fundamentais para a compreensão do Teorema de Tales em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II;
- Utilizar o lúdico como estratégia facilitadora do processo de ensino e aprendizagem;
- Apresentar uma proposta metodológica para a aplicação do jogo no contexto da recomposição da aprendizagem em Matemática.

1.2 Organização

A produção desta pesquisa esta organizada em 5 capítulos, no capítulo 1 denominado Introdução, apresentamos o escopo do trabalho, sua motivação e relevância, além dos objetivos pretendidos. Já no capítulo 2 de nome Geometria Euclidiana Plana, abordamos a fundamentação matemática que necessitamos para alcançar o Teorema de Tales. No capítulo 3: Teorema de Tales, foi apresentado um breve relato histórico de Tales, como local de nascimento, principais contribuições para a matemática além de apresentar o teorema que leva o seu nome e demonstrá-lo.

Já no capítulo 4 que possui o nome do jogo, *Tales no Match: o jogo das retas*. Nele, tomamos como norte a tese de doutorado de (GRANDO, 2000) e (SMOLE et al., 2007) para a fundamentação teórica na parte de ensino da matemática. Além disso, apresenta-se o jogo e uma sequência didática para à aplicação. Para encerrar chegamos ao capítulo 5 (Conclusão), em que trouxemos as considerações finais do referido trabalho.

2 Geometria Euclidiana Plana

Com o objetivo de compreender o Teorema de Tales e o jogo *Tales no Match: o jogo das retas*, faz-se necessário algumas definições, postulados, teoremas e proposições fundamentais para a percepção do teorema em sua totalidade e por conseguinte para que o jogo faça sentido sobre sua funcionalidade e adaptabilidade.

2.1 Retas

Para apresentarmos o conceito de reta, será utilizaremos a obra *Os Elementos de Euclides*, que foi traduzido pelo ilustre professor Dr. Irineu Bicudo. Nesta obra, Euclides apresenta definições que são o pilar da geometria, que posteriormente ganhou seu nome, Geometria Euclidiana.

> 1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
> 2. E linha é comprimento sem largura.
> 3. E extremidades de uma linha são pontos.
> 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.(EUCLIDES, 2009, p. 97)

Considerando que língua/idioma se modifica com o passar dos tempos e que Euclides viveu por volta de 300 a.C., faz-se necessária uma simplificação das definições para melhor entendimento:

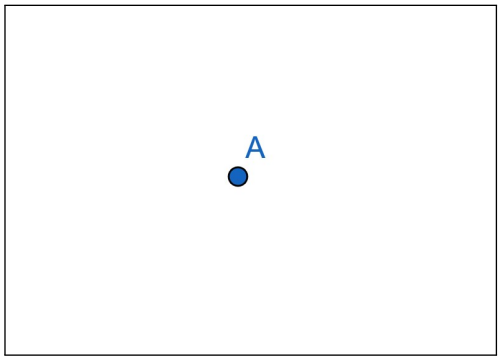
Tópico 1 - “Ponto é aquilo de que nada é parte”, pode-se compreender o ponto como uma entidade abstrata utilizada para representar uma posição no espaço, sem dimensão.

Tópico 2 - “Linha é um comprimento sem largura”, a linha pode ser entendida, ainda no campo da abstração, como o agrupamento contínuo de pontos.

Tópico 3 - “Extremidade de uma linha são pontos”, pode-se imaginar uma linha limitada por dois pontos em suas extremidades.

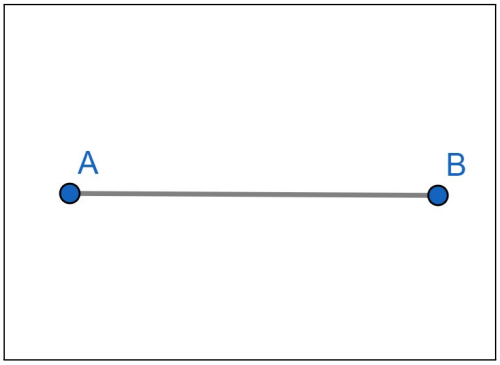
E por fim, o tópico 4 apresenta o que nos interessa de fato, a “linha reta que simplesmente chamaremos de reta”. A seguir, apresenta-se exemplos dessas definições.

Figura 1 – Ponto



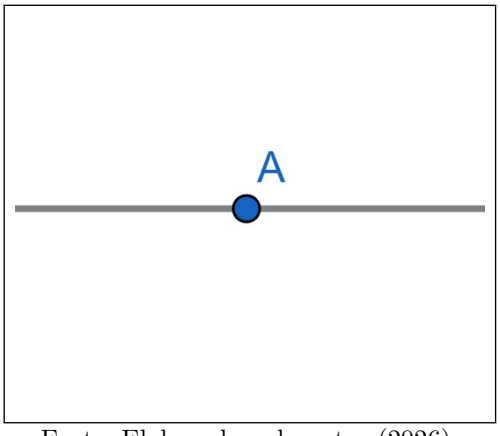
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 2 – Segmento de reta



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 3 – Reta



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Na Figura 3, pode-se observar que a reta não possui extremidades em ambas as direções, direita ou esquerda, norte ou sul, seja qual for a orientação que essa reta esteja localizada. Além disso, destaca-se um postulado da Geometria Euclidiana, isto é, uma afirmação ou fato admitido sem necessidade de demonstração: que por dois

pontos distintos passa uma única reta, esta informação torna-se essencial no momento em que traçaremos as retas que darão imagens ao teorema de Tales.

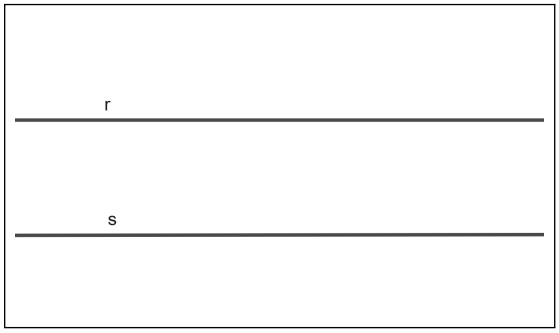
2.2 Posição das Retas

A partir do conceito apresentado de reta, torna-se possível estudar as diferentes posições relativas entre retas e plano. Essas posições recebem as seguintes classificações: retas paralelas, retas concorrentes e retas perpendiculares. Salientando que utilizamos as letras minusculas (r) para nomear as retas.

2.2.1 Retas Paralelas

Diz-se que duas ou mais retas são consideradas paralelas quando não possuem pontos em comum e permanecem equidistantes ao longo de toda sua extensão. Além disso, utilizamos o símbolo $(\|)$ para indicar que duas retas são paralelas. A figura a seguir ilustra essa definição.

Figura 4 – Retas Paralelas $(r \parallel s)$

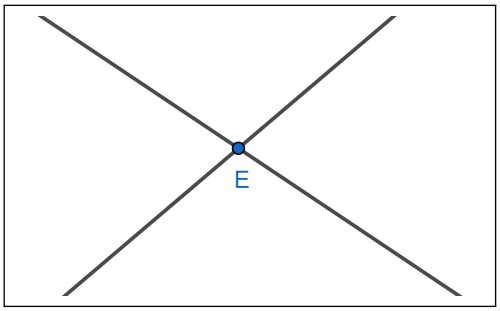


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

2.2.2 Retas Concorrentes

Diz que duas retas são consideradas concorrentes quanto elas possuem um único ponto em comum. Na Figura 5 apresentada abaixo, o ponto E é o ponto comum das duas retas concorrentes abaixo.

Figura 5 – Retas Concorrentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

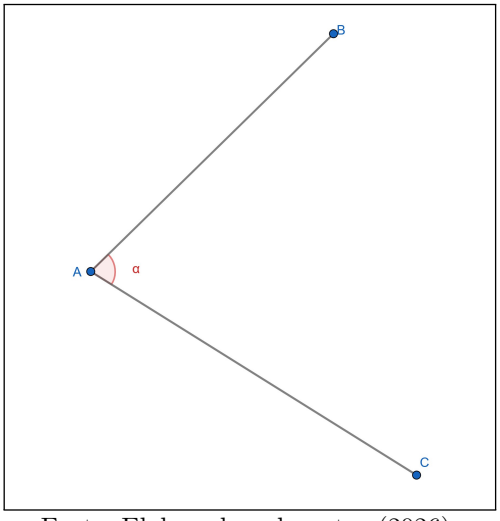
2.2.3 Ângulos

Antes da definição de retas perpendiculares, faz-se necessário a apresentação do conceito de ângulo, uma vez que a perpendicularidade entre retas está associada a uma medida angular específica.

> 8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
> 11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
> 12. E agudo, o menor do que um reto.(EUCLIDES, 2009, p. 97)

Antes de definimos o tópico 8, vamos definir semirretas, esta por sua vez se assemelha com um segmento de reta, porém ela tem inicio mas não tem fim. Assim, podemos entender o tópico 8, da seguinte maneira, ângulo plano como a abertura formada por duas semirretas, que possuem a mesma origem porém, ambas não estão alinhadas sob a mesma reta.

Figura 6 – Abertura entre duas retas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Note que o ângulo foi representado pela letra grega $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa), utilizada para indicar a medida da abertura entre as duas retas e podem ser medidos de duas maneiras:

- Graus = 0° a 360°
- Radianos = 0 a 2π rad

Na Educação Básica, a unidade de medida mais comumente apresentada aos alunos para o cálculo de ângulos é a medida denominada por Grau. Que possui equivalência aos radianos seguindo a seguinte fórmula:

$$\text{Radianos} = \text{Graus} \times \frac{\pi}{180^\circ} \tag{2.1}$$

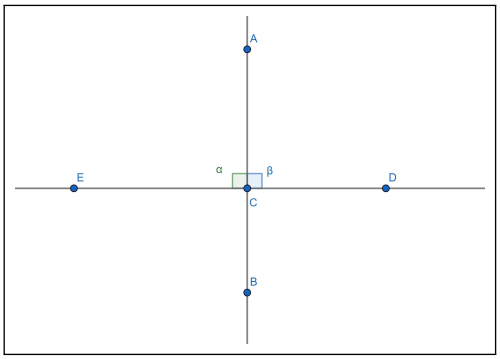
2.2.4 Retas Perpendiculares

Ainda segundo (EUCLIDES, 2009), *"10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou".*

Nesse tópico, Euclides apresenta a definição do que seriam as retas perpendiculares. Em termos atuais, duas retas são perpendiculares quando se intersectam formando um ângulo reto, isto é, ângulos de 90°.

Vale destacar que ângulos adjacentes são ângulos consecutivos que compartilham um mesmo vértice e um lado em comum.

Figura 7 – Retas Perpendiculares



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Considerando que este estudo trata da abertura entre retas, o ângulo reto possui medida igual a 90° (graus), fato que isso facilita na compreensão dos tópicos 11 e 12 apresentados por Euclides.

Tópico 11 - "Ângulo obtuso é o maior do que um reto", ou seja, o ângulo obtuso é aquele que a medida é maior do que 90°.

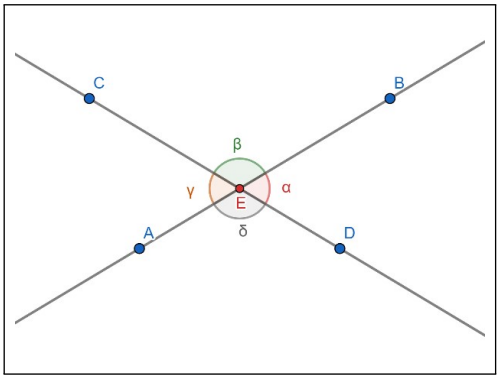
Tópico 12 - “E agudo, o menor do que um reto”, ou seja, um ângulo agudo tem medida menor do que 90°.

2.3 Ângulos Opostos pelo Vértice

Conforme visto na Seção 2.2.2, retas concorrentes intersectam-se em um único ponto, denominado de vértice.

Dando continuidade às definições apresentadas por (EUCLIDES, 2009), tem-se: *“9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo”.* Nesse contexto, o termo *retilíneo* refere-se ao ângulo formado por duas semirretas alinhadas, cuja medida corresponde a 180°. Esse conceito é de suma importância para a demonstração do fato de que os ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida. A figura a seguir auxiliará na visualização dessa demonstração.

Figura 8 – Ângulos Opostos pelo Vértice



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Figura 8 representa um caso genérico: o ponto E representa o vértice das retas concorrentes; os pares de ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$, (alfa, gama, beta, delta), são denominados opostos pelo vértice E.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos a proposição do ângulo oposto pelo vértice, vamos definir congruência segundo (BARBOSA, 2006). Já uma proposição apresentada por (NETO, 2022), afirma que, dois ângulos opostos pelo vértices possuem a mesma medida.

Definição 2.3.1. Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$, ou seja, a medida deles seja a mesma; diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles tem a mesma medida. $AB \equiv BC$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos utilizar a Figura 8 como Exemplo. Observe que α e β estão em cima da mesma reta. Portanto, então $\alpha + \beta$ formam um ângulo retilíneo, isto é, que $\alpha + \beta = 180°$.

Além disso, β e γ estão em cima da mesma reta, logo $\beta + \gamma = 180°$. Desta forma, temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ \beta + \gamma = 180° \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Vamos multiplicar a segunda equação por -1, obtendo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ -\beta - \gamma = -180° \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Somando ambas as equações de (II):

$$\alpha - \gamma = 0$$
$$\alpha = \gamma$$

Portanto, α é congruente a γ.

A demonstração de que $\beta = \delta$ é feita de forma análoga. Observe:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ \alpha + \delta = 180°.(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ -\alpha - \delta = -180°(+) \end{cases}$$

$$\beta - \delta = 0$$
$$\beta = \delta$$

Dessa maneira, β é congruente à δ.

■

Prosseguindo com os estudo das relações angulares, seguimos com a apresentação das definições de, ângulos correspondentes, ângulos alternos (internos e externos) e ângulos colaterais.

2.4 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Foi demonstrado na Seção 2.3 que os ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, ou seja, são ângulos congruentes. Apresenta-se agora a definição de ângulos correspondentes.

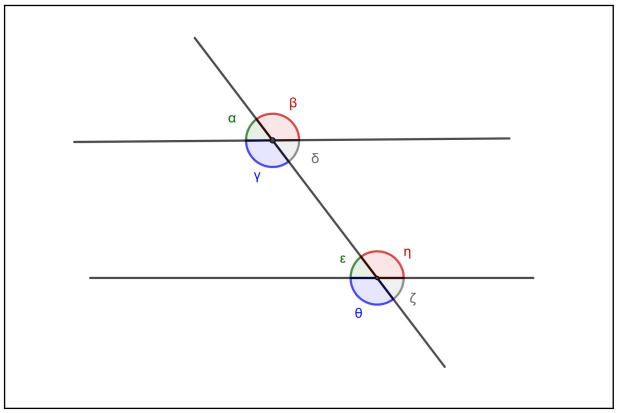
2.4.1 Ângulos Correspondentes

Dadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal, formam-se os seguintes ângulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \eta, \epsilon, \zeta$, conforme a Figura 9. Nesse contexto, introduzem-se também outras letras gregas (θ (teta), η (eta), ϵ (épsilon), ζ (zeta)). As correspondências entre os ângulos são dadas por:

- α corresponde a ϵ;
- β corresponde a η;
- γ corresponde a θ;
- δ corresponde a ζ;

Vale ressaltar que ângulos correspondentes possuem a mesma medida, sendo, portanto, chamados de congruentes. Essa informação esta intrinsecamente ligada ao Postulado 29[1], *"A reta caindo sobre as retas paralelas, faz tando os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos"*. Segundo (EUCLIDES, 2009) no livro *Os Elementos*.

Figura 9 – Ângulos Correspondentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

2.4.2 Ângulos Alternos

Ao observarmos a Figura 9, percebe-se que o plano pode ser dividido em regiões distintas pela disposição das retas paralelas. A região compreendida entre as retas paralelas será denominada região interna, enquanto as regiões localizadas acima e abaixo delas serão denominadas externas. Dessa forma, definem-se os ângulos alternos internos e ângulos alternos externos.

[1] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/propI29.html> clique no link e veja a demonstração desse postulado. Segundo o professor David Edward Joyce da Clark University.

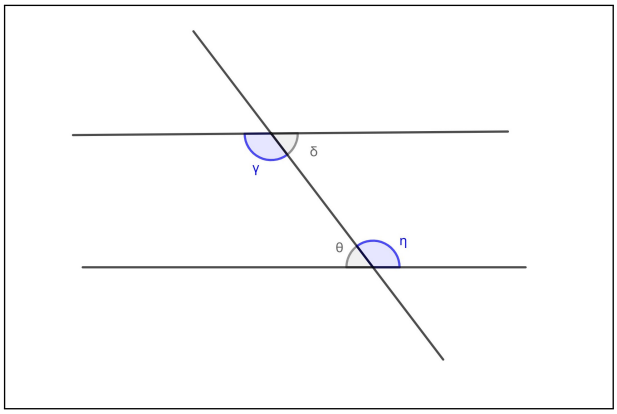
2.4.2.1 Ângulos Alternos Internos

Como o próprio nome sugere estão na parte interna, os ângulos alternos internos são ângulos congruentes localizados na região interna as retas paralelas, em lados opostos da transversal.

Na Figura 10:

- γ corresponde a η;
- δ corresponde a θ;

Figura 10 – Ângulos Alternos Internos



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

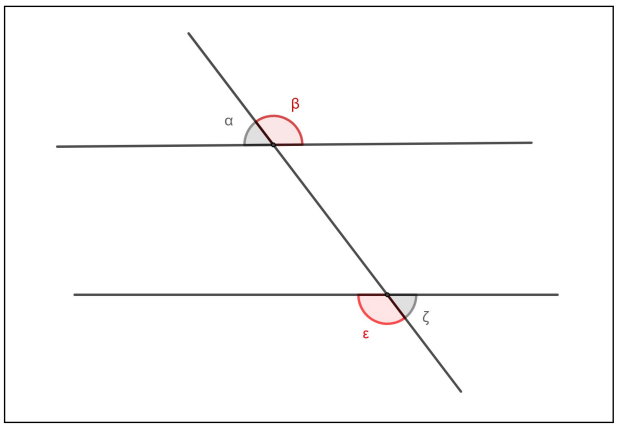
2.4.2.2 Ângulos Alternos Externos

Assim como os ângulos alternos internos, os alternos externos são congruentes. A figura abaixo ilustra a posição dos ângulos alternos externos.

Na Figura 11:

- α corresponde a ζ;
- β corresponde a ϵ;

Figura 11 – Ângulos Alternos Externos



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

2.4.3 Ângulos Colaterais

Na Seção 2.3, referente aos ângulos opostos pelo vértice, foi apresentado o conceito de ângulo retilíneo, também denominado de ângulo raso, cuja a medida é igual a 180°. Dito isso, a definição de ângulos colaterais são pares de ângulos que se localizam do mesmo lado da reta transversal que corta duas retas. Quando essas duas retas são paralelas a soma das medidas desses ângulos é igual a 180°.

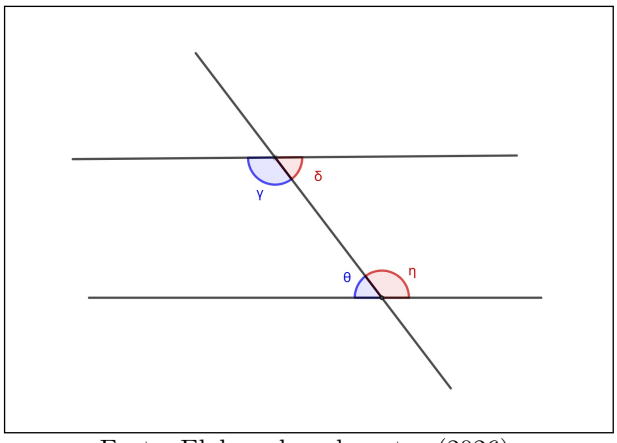
Os ângulos colaterais estão classificados em: colaterais internos e colaterais externos, conforme apresentado a seguir.

2.4.3.1 Ângulos Colaterais Internos

A figura 12 ilustra os ângulos colaterais internos.

- $\gamma + \theta = 180°$, γ e θ.
- $\delta + \eta = 180°$, δ e η.

Figura 12 – Ângulos Colaterais Internos



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

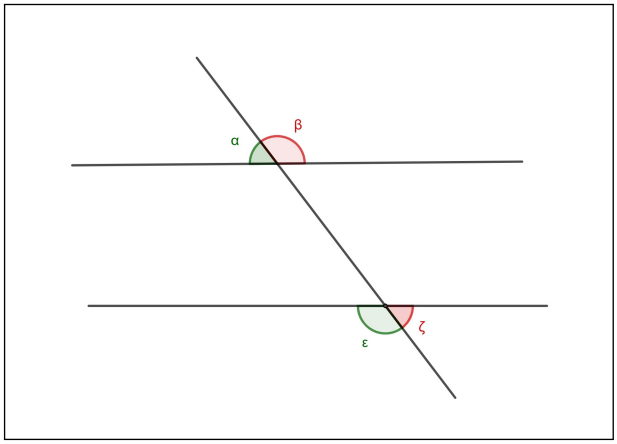
2.4.3.2 Ângulos Colaterais Externos

Assim como os ângulos colaterais internos, os ângulos colaterais externos são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 180°.

Na Figura 13, temos:

- $\alpha + \epsilon = 180°$, α e ϵ.
- $\beta + \zeta = 180°$, β e ζ.

Figura 13 – Ângulos Colaterais Externos



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

2.5 Congruência de Triângulos

Prosseguindo com os pré-requisitos para a compreensão do Teorema de Tales e, consequentemente, do jogo *Tales no Match: o jogo das retas*, recordemos que congruência

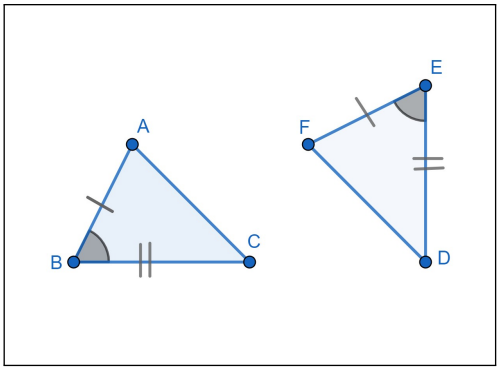
significa “mesma medida”. Assim, dados dois triângulos, que é uma forma geométrica composta por três vide Figura 14, retas concorrentes duas a duas, é necessário verificar se os lados correspondentes possuem a mesma medida e se os ângulos correspondentes também são congruentes. Essa correspondência entre lados e ângulos é indispensável para determinar se os triângulos são ou não congruentes. Além disso utilizaremos o símbolo $\equiv$ para denotar a congruência dos triângulos.

Serão apresentados a seguir os casos de congruências de triângulos: Lado-Ângulo-Lado (L.A.L.), Ângulo-Lado-Ângulo (A.L.A.) e Lado-Lado-Lado (L.L.L.). Para isso, foi utilizado o *axioma IV* apresentado por (BARBOSA, 2006).

2.5.1 Caso: Lado-Ângulo-Lado (L.A.L.)

Axioma 2.5.1. *Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{BA} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{ED}$ e $\hat{B} = \hat{E}$ então $ABC \equiv FED$.*

Figura 14 – Caso L.A.L.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Dados os triângulos ABC e DEF acima.

$$\left.\begin{array}{r} \overline{BA} = \overline{EF} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \overline{BC} = \overline{ED} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{LAL}} \quad ABC \equiv FED$$

2.5.2 Caso: Ângulo-Lado-Ângulo (A.L.A.)

Dado dois triângulos ABC e DEF, se dois ângulos de um triângulo ABC e o lado compreendido entre eles possuem, respectivamente, a mesma medida que dois ângulos correspondentes e o lado compreendido entre eles do triângulo DEF, então esses triângulos são congruentes pelo caso A.L.A..

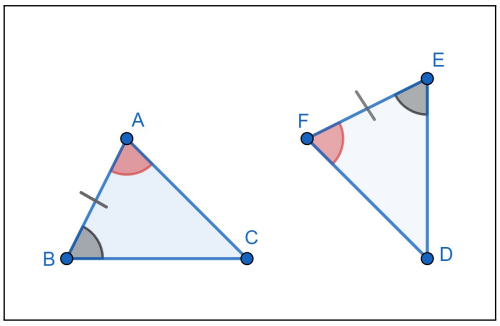
Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e DEF tais que $\overline{AB} = \overline{FE}$, $\hat{A} = \hat{F}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Seja um ponto G pertencente a semirreta $\overrightarrow{AC}$ de tal modo que $\overline{AG} = \overline{FD}$. Como $\overline{AG} = \overline{FD}$, por construção, $\overline{AB} = \overline{FE}$ e $\hat{A} = \hat{F}$ por hipótese.

Tomando o axioma 2.5.1, temos $BAG \equiv EFD$ o por consequência, têm-se que $A\hat{C}B = \widehat{D}$. Por outro lado, temos por hipótese que $\hat{B} = \hat{E}$, logo $A\hat{G}B = A\hat{C}B$.

Consequentemente as semirretas$\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{BC}$ coincidem. Logo o ponto G coincide com o ponto C, e portanto, ABG e ABC também coincidem.

Como $BAG \equiv EFD$, então $ABC \equiv FED$. ■

Figura 15 – Caso A.L.A.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Dados os dois triângulos ABC e DEF, veja:

$$\left.\begin{array}{c}\hat{A} = \hat{F} \\ \overline{AB} = \overline{FE} \\ \hat{B} = \hat{E}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ALA}} ABC \equiv FED$$

2.5.3 Caso: Lado-Lado-Lado (L.L.L.)

Dado dois triângulos ABC e DEF, se os três lados de um triângulo ABC possuem, respectivamente, a mesma medida que os três lados correspondentes de um triângulo DEF, então esses triângulos são congruentes pelo caso L.L.L..

Antes de demonstrarmos esse caso de congruência de triângulos vamos a duas definições:

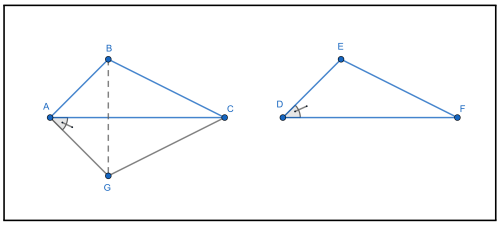
Definição 2.5.1. Sejam r uma reta e A um ponto que não pertence a essa reta. O conjunto de pontos construídos pela reta r e por todos os pontos B que estão do mesmo lado da reta em que A está, é chamado de *semiplano* determinado por r contendo A.

Definição 2.5.2. Um triângulo é definido como *isósceles*, quando ele possui dois lados congruentes.

Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e DEF tais que $\overline{AB} = \overline{FE}$, $\overline{BC} = \overline{ED}$ e $\overline{CB} = \overline{DF}$.

Construindo um triângulo a partir de AB do lado oposto ao ponto C, marcando o ponto G no semiplano que não contém B de modo que $\overline{AG} = \overline{DE}$ com $G\hat{A}C = \widehat{D}$, e ligando G e B, obtendo o triângulo AGB. Conforme a Figura 16.

Figura 16 – Caso L.L.L. construção



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

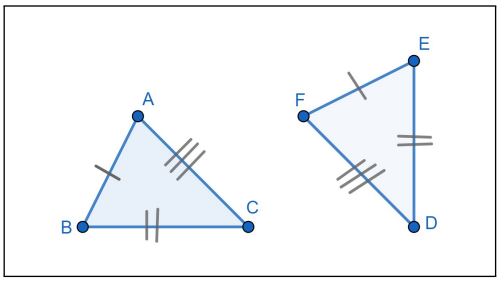
Como temos por hipótese $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $G\hat{A}C = \widehat{D}$ por construção, então $GAC \equiv EDF$, pelo axioma 2.5.1.

Por outro lado, $\overline{AG} = \overline{DE} = \overline{AB}$ e $\overline{GC} = \overline{EF} = \overline{BC}$, então os triângulos AGB e CGB são triângulos isósceles. Consequentemente, $A\hat{G}B = A\hat{B}G$ e $B\hat{G}C = G\hat{B}C$, logo $A\hat{G}C = A\hat{B}C$.

Portanto $AGC \equiv ABC$, logo $ABC \equiv DEF$.

■

Figura 17 – Caso L.L.L.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Dados dois triângulos ABC e DEF, veja:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{FE} \\ \overline{BC} = \overline{ED} \\ \overline{CA} = \overline{DF} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{LLL}} ABC \equiv FED$$

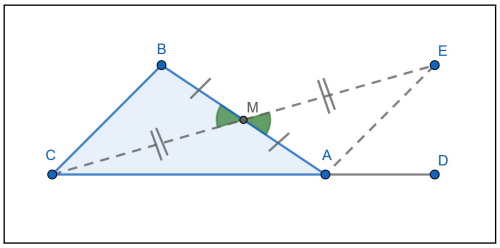
Teorema 2.5.3. *(Teorema do Ângulo Externo) Todo Ângulo Externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Demonstração. Seja um triângulo ABC, tomemos um ponto D de tal modo que A esteja entre C e D. Logo após marquemos o ponto médio M no segmento AB.
Na semirreta $\overrightarrow{CM}$, escolhemos o ponto E de modo que $\overline{CM} = \overline{ME}$, formando os triângulos CMB e EMA, daí:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{CM} = \overline{EM} \\ \hat{B} = \hat{B}(O.P.V) \\ \overline{BM} = \overline{AM} \end{array}\right\} \overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \quad CMB \equiv EMA$$

Dessa forma, pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos $CMB \equiv EMA$, e $C\hat{B}M = E\hat{A}M$.

Figura 18 – Teorema do Ângulo Externo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Portanto, $D\hat{A}B > E\hat{A}B = E\hat{A}M = C\hat{B}M = C\hat{B}A$.

De forma análoga mostraremos que $D\hat{A}B > B\hat{C}A$.

Tomando ainda o triangulo ABC mantendo o ponto D de tal modo que A esteja entre C e D. Marquemos o ponto médio M' no segmento $\overline{BC}$, prolongaremos a semirreta $\overrightarrow{AM'}$ até o ponto E' de modo que $\overline{AM'} = \overline{M'E'}$.

Tomemos os triângulos $AM'C$ e $E'M'B$, daí:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AM'} = \overline{E'M'} \\ \widehat{M'} = \widehat{M'}(O.P.V) \\ \overline{CM'} = \overline{BM'} \end{array}\right\} \overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \quad AM'C \equiv E'M'B$$

Daí, pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos $AM'C \equiv E'M'B$, e $A\widehat{C'}M = E'\widehat{M}B'$.

Portanto, $D\hat{A}B > B\hat{C}A = E'\hat{B}M' = A\hat{C}M' = A\hat{C}B$.

■

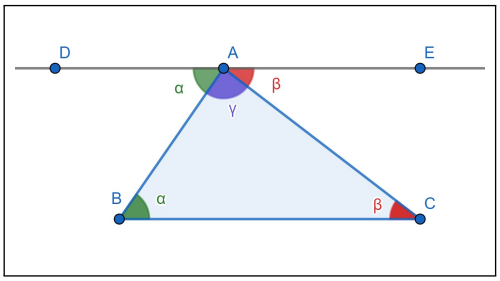
Dessa forma, foi demonstrado que o ângulo externo $D\hat{A}B > E\hat{A}B$ e $D\hat{A}B > B\hat{C}A$.

Proposição 2.5.4. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, no espaço euclidiano, é igual a* 180°.

Demonstração. Seja um triângulo ABC qualquer, e uma reta $\overleftrightarrow{DE}$, (o símbolo $\leftrightarrow$ significa uma reta infinita orientada por DE), passando pelo ponto A e paralela ao lado $\overline{BC}$.

Como $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$, $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$ são transversais, logo podemos usar a definição de ângulos alternos internos. Dessa forma o ângulo $C\hat{B}A$=$D\hat{A}B$ e $B\hat{C}A = E\hat{A}C$, logo $\alpha + \gamma + \beta = 180°$, pois essa soma refere-se a um ângulo raso (180°).

Figura 19 – Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

■

Teorema 2.5.5. *(Congruência de Triângulos Retângulos.) Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:*

1. $\overline{BC} = \overline{EF}$ *e* $\hat{A} = \widehat{D}$;
2. $\overline{AB} = \overline{DE}$ *e* $\overline{BC} = \overline{EF}$;
3. $\overline{AB} = \overline{DE}$ *e* $\hat{A} = \widehat{D}$;

Esses casos podem ser identificados como igualdades entre:

1. Cateto e Ângulo Oposto;
2. Hipotenusa e Cateto;
3. Hipotenusa e Ângulo Agudo;

Demonstração. Caso 1:

Hipóteses: $\widehat{C} = \widehat{F}(reto)$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ *e* $\widehat{A} = \widehat{D}$.

Seja os triângulos ABC e DEF, tomando um ponto G sobre AB de maneira que $\overline{CG} = \overline{FD}$. Os triângulos CGB e FDE são congruentes pelo caso L.A.L..

$$\left.\begin{array}{c} \overline{CG} = \overline{DF} \\ \widehat{C} = \widehat{F} \\ \overline{CB} = \overline{FE} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{LAL}} GCB \equiv DFE$$

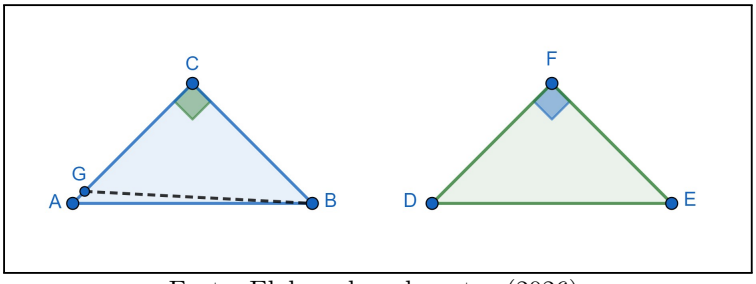
Como os triângulos CGB e FDE são congruentes, consequentemente $\hat{G} = \hat{D} = \hat{A}$ *(hipótese)*, dessa maneira $C\widehat{G}B = C\widehat{A}B$, portanto A e G coincidem. ■

Cabe ressaltar que, a escolha da posição do ponto foi entre AC, mas poderia estar em $\overrightarrow{CA}$ em uma posição além do ponto A, que a demonstração seria de forma análoga.

Note que se A não coincidir com G, estaria em desacordo com o teorema do ângulo externo, veja:

Como $C\widehat{G}B$ é ângulo externo do triângulo AGB, ele teria que ser maior do que o ângulo interno não adjacente e a demonstração trouxe que $C\widehat{G}B = B\widehat{A}C$.

Figura 20 – Caso 1: Lado Ângulo Ângulo Oposto



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Demonstração. Caso 2:

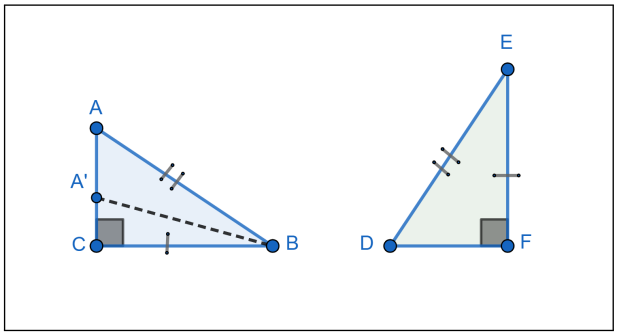
Hipótese: $\widehat{C} = \widehat{F}$*(reto),* $\overline{AB} = \overline{DE}$ *(hipotenusa),* $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Sem perda de generalidade, seja um ponto A' sobre CA de maneira que $\overline{CA'} = \overline{FD}$. Os triângulos $A'CB$ e DFE são congruentes pelo caso L.A.L..

$$\left.\begin{array}{c} \overline{CA'} = \overline{FD} \\ \widehat{C} = \widehat{F} \\ \overline{CB} = \overline{FE} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{LAL}} A'CB \equiv DFE$$

Como os triângulos $A'BC$ e DEF são congruentes, consequentemente, $\hat{A}' = \hat{D}$. Desse modo, A' e A coincidem pelo mesmo motivo do Caso 1, ou seja, se não houver coincidência entra em desacordo com o teorema 2.5.3.
Portanto $ABC \equiv DEF$. ■

Figura 21 – Caso 2: Lado Ângulo Ângulo Oposto



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Demonstração. Caso 3:

Hipótese: $\widehat{C} = \widehat{F}$ *(reto),* $\overline{AB} = \overline{DE}$ *(hipotenusa),* $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Sem perda de generalidade, seja um ponto C' sobre $\overrightarrow{CA}$ de maneira que $\overline{AC'} = \overline{FD}$. Os triângulos ABC' e DEF são congruentes pelo caso L.A.L..

$$\left.\begin{array}{c} \overline{AC'} = \overline{FD} \\ \widehat{A} = \widehat{D} \\ \overline{AB} = \overline{DE} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{LAL}} ABC' \equiv DEF$$

Como os triângulos ABC' e DEF são congruentes, consequentemente $\widehat{C'} = \widehat{F} = \widehat{C}$ (reto), logo C' e C coincidem pelo mesmo motivo do Caso 1.
Portanto $ABC \equiv DEF$. ■

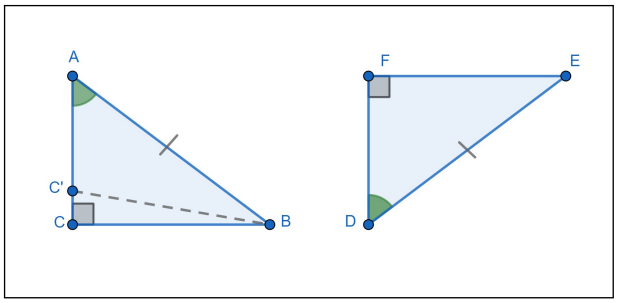


Figura 22 – Caso 3: Lado Ângulo Ângulo Oposto

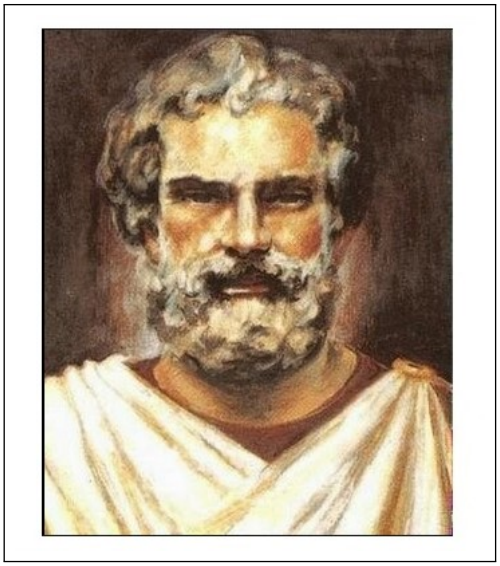
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

3 Teorema de Tales

Neste capítulo, apresentamos o Teorema de Tales, iniciando por um breve levantamento bibliográfico. Antes da discussão do teorema propriamente dito, faz-se necessário reconhecer sua origem histórica e destacar aspectos relevantes da trajetória do realizador do teorema que leva o seu nome.

3.1 A História de Tales de Mileto

Figura 23 – Tales de Mileto



Fonte: CABRAL (s.d.)

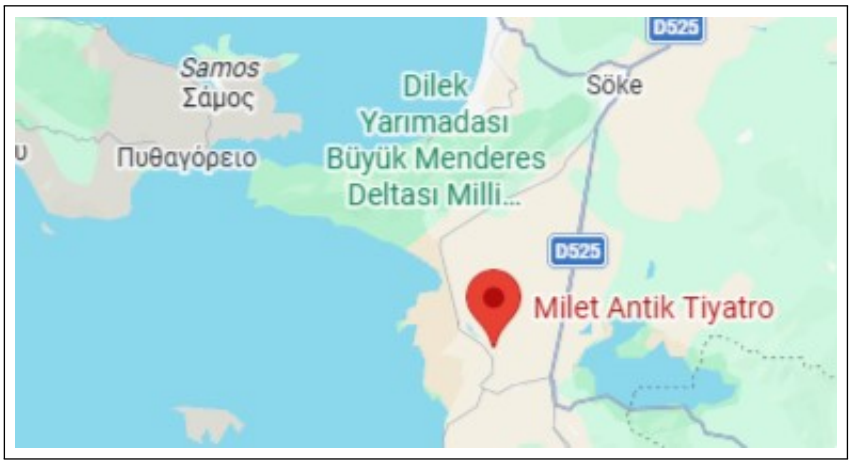
Autores como (ROQUE, 2012) e (EVES, 2011) não estabelecem com precisão o ano de nascimento de Tales. No entanto, (MOL, 2013) afirma que Tales teria nascido por volta de 624 a. E. C. (antes da Era Comum), na cidade de Mileto, localizada em uma região chamada Jônia, pertencente à Grécia antiga e atualmente pertencente ao território da Turquia. A seguir, apresenta-se a localização da antiga cidade de Mileto.

Figura 24 – Localização da antiga cidade de Mileto



Fonte: GOOGLE (2026A)

Figura 25 – Região da Antiga Jônia



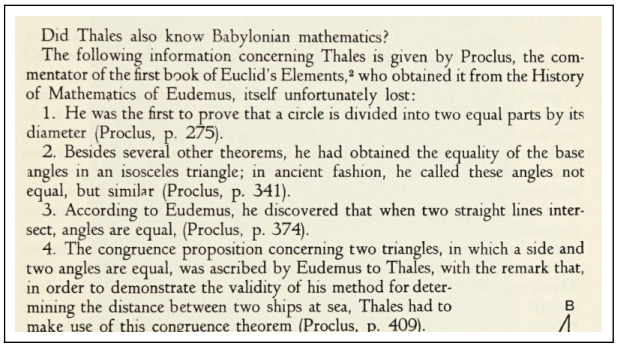
Fonte: GOOGLE (2026B)

Segundo (MOL, 2013), Tales teria sido um comerciante em sua juventude, tendo realizado inúmeras viagens ao Egito e à Mesopotâmia, onde possivelmente teve contato com conhecimentos matemáticos desenvolvidos nessas civilizações. Ainda segundo o autor, Tales também atuou como político e astrônomo.

Dito isso, é relevante destacar que o matemático holandês Dr. Bartel Leendert van der Waerden, (WAERDEN, 1954), em sua obra Science Awakening (O Despertar da Ciência, tradução livre), levanta o seguinte questionamento: *"Did Thales also know Babylonian mathematics?"* (se Thales também conhecia a matemática Babilônica?, tradução livre). Tal questão converge com as discussões apresentadas por (ROQUE, 2012) em sua obra, *História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas*, especialmente nos capítulos 1 e 2, nos quais a autora critica a ideia de que os gregos teriam desenvolvido a matemática de forma isolada, sem influência de outras civilizações.

A seguir, apresenta-se o trecho em que Waerden formula tal questionamento.

Figura 26 – Trecho do livro Science Awakening



Did Thales also know Babylonian mathematics?
The following information concerning Thales is given by Proclus, the commentator of the first book of Euclid's Elements,[2] who obtained it from the History of Mathematics of Eudemus, itself unfortunately lost:
1. He was the first to prove that a circle is divided into two equal parts by its diameter (Proclus, p. 275).
2. Besides several other theorems, he had obtained the equality of the base angles in an isosceles triangle; in ancient fashion, he called these angles not equal, but similar (Proclus, p. 341).
3. According to Eudemus, he discovered that when two straight lines intersect, angles are equal, (Proclus, p. 374).
4. The congruence proposition concerning two triangles, in which a side and two angles are equal, was ascribed by Eudemus to Thales, with the remark that, in order to demonstrate the validity of his method for determining the distance between two ships at sea, Thales had to make use of this congruence theorem (Proclus, p. 409).

Fonte: WAERDEN (1954)

Nesse mesmo contexto,(BOYER; MERZBACH, 2010) cita *Eudemo de Rodes*, que foi considerado um dos primeiros historiadores e era discípulo de Aristóteles. Ainda segundo ele, existiu uma obra intitulada *História da Matemática* escrita por Eudemo, que embora esteja perdida, antes do desaparecimento foi resumida. Então, outro filósofo chamado *Proclus* cita *Eudemo* nos comentários do primeiro livro de *Euclides*. Devido aos comentários de Proclus, leva a crer que Tales foi o primeiro matemático. Tais indícios reforçam as discussões apresentadas por (ROQUE, 2012) acerca da construção da Matemática no que tange a ser uma construção individual.

Contudo, não se pode negar a importância de figuras como Tales de Mileto, Euclides e outros matemáticos europeus para o desenvolvimento e a difusão da matemática, especialmente considerando que a comunicação cientifica, durante séculos, esteve fortemente centrada na produção europeia. Ideia defendida por (JOSEPH, 2011) em sua obra *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics* (A Crista do Pavão: Raízes Não Europeias da Matemática, tradução livre).

Ainda segundo (WAERDEN, 1954), são atribuídas a Tales as seguintes contribuições:

1. Que ele teria sido o primeiro a demonstrar que um círculo é dividido em duas partes iguais pelo seu diâmetro;

2. Entre outros resultados, a ele é atribuído a proposição do triângulo isósceles; à moda antiga, ele chamava esses ângulos não iguais (não existia a definição formal de congruência), mas de semelhantes;

3. Afirma-se ainda que ele teria descoberto que, quando duas linhas retas se intersectam, os ângulos opostos pelo vértice são iguais;

4. A proposição de congruência referente a dois triângulos, nos quais um lado e dois ângulos são iguais (congruentes), foi atribuída por Eudemo a Tales, com a

observação de que, para demonstrar a validade do seu método para determinar a distância entre dois navios no mar, Tales teve que fazer uso desse teorema de congruência;

Ainda sobre o Item 2, a proposição do triângulo isósceles segundo (BARBOSA, 2006), é enunciada da seguinte forma: *"Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes".*

Segundo (MOL, 2013), também pode ser atribuído a Tales que: *"O ângulo inscrito em um semicírculo é reto".*

Retomando a discussão sobre a originalidade das contribuição de Tales serem ou não influenciadas pelas civilizações babilônica ou egípcia, observa-se que esses dois povos utilizavam da matemática de forma predominantemente prática, ou seja, voltada para a resolução de problemas reais do cotidiano daquelas civilizações. Por outro lado, figuras como Tales e Euclides teriam contribuído para o desenvolvimento de uma abordagem mais formal da Matemática. Nesse contexto, Tales de Mileto é tradicionalmente reconhecido como o primeiro personagem histórico ao qual são atribuídas descobertas matemáticas específicas. Além disso, segundo (BOYER; MERZBACH, 2010), Tales é considerado um dos precursores da tradição grega que passou a desenvolver a Geometria com base em argumentos lógicos e demonstrações, embora não haja consenso quanto ao seu papel na origem da Geometria dedutiva.

3.2 O Teorema de Tales de Mileto

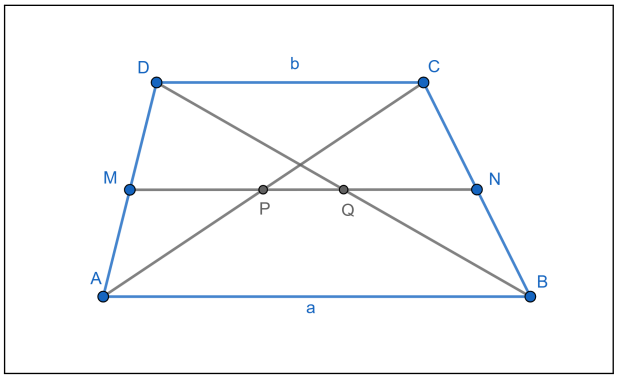
Antes da apresentação e demonstração do Teorema de Tales, será introduzido uma proposição que servirá de base para sua demonstração. Segundo (NETO, 2022):

Proposição 3.2.1. *Considere um trapézio*[1] *de vértices $ABCD$, com bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Sejam ainda M e N os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD. Então:*

1. *M, N, P e Q são colineares $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$*
2. *$\overleftrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{CD})$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{CD}|$*

[1] Um trapézio é um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos. Em que temos um desses lados paralelos chamado de Base Maior e uma Base Menor.

Figura 27 – Base média e mediana de Euler de um trapézio



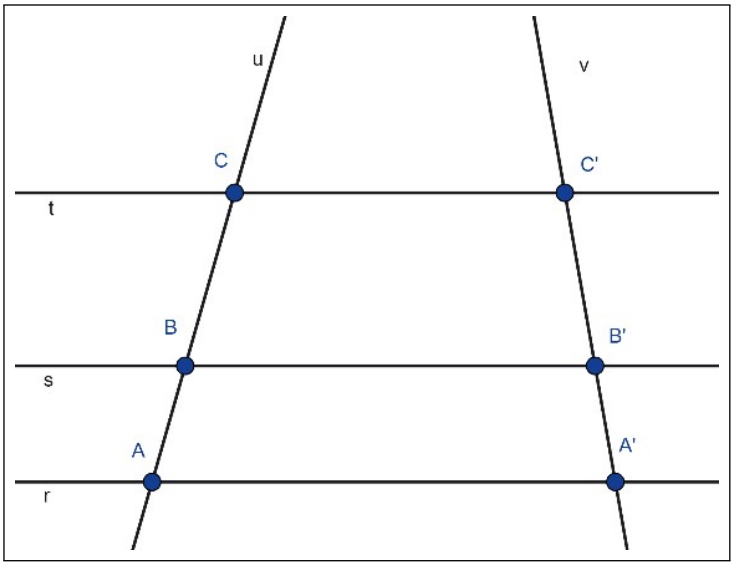
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Teorema 3.2.2. ***(TEOREMA DE TALES)****: Sejam r, s, t retas paralelas, e os pontos $A, A' \in r$,$B, B' \in s$ e $C, C' \in t$ de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}.}$$

Demonstração. Sejam as retas r, s, t, retas paralelas entre si, e duas retas u e v transversais intersectando as retas r, s, t respectivamente nos pontos A, B, C e A', B', C', conforme a imagem abaixo.

Figura 28 – Feixe de retas paralelas cortadas por transversais



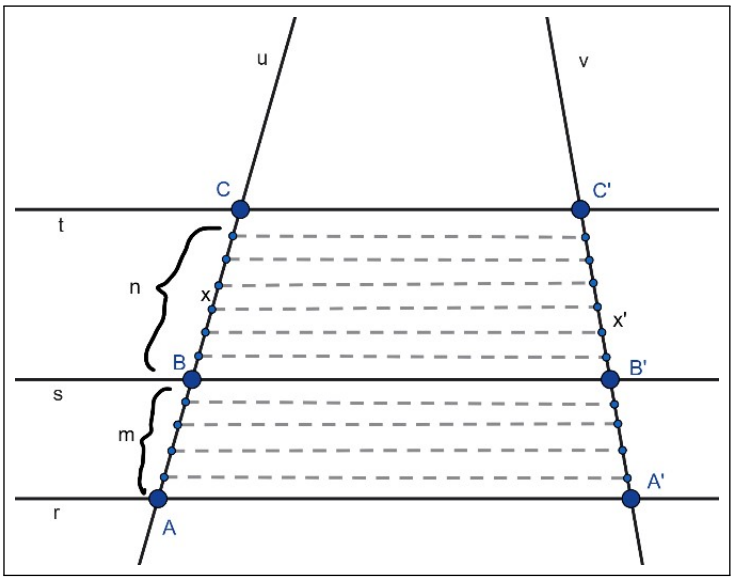
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Se $\overline{AB} = \overline{BC}$ (que não é o caso da imagem acima), haveria um trapézio $ACC'A'$ podendo utilizar o itém 1 da proposição 3.2.1 anterior, e por consequência teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$; logo.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1.$$

Suponhamos que a razão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$, $k \in \mathbb{Q}$, dessa forma essa razão é comensurável existindo um segmento de tamanho x como na figura abaixo:

Figura 29 – Divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por x



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Assim temos $\overline{AB} = mx$ e $\overline{BC} = nx$, logo.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n} = k.$$

Já sobre a reta v, $\overline{A'B'} = mx'$ e $\overline{B'C'} = nx'$, logo.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{mx'}{nx'} = \frac{m}{n} = k.$$

Portanto, $k = \dfrac{m}{n} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

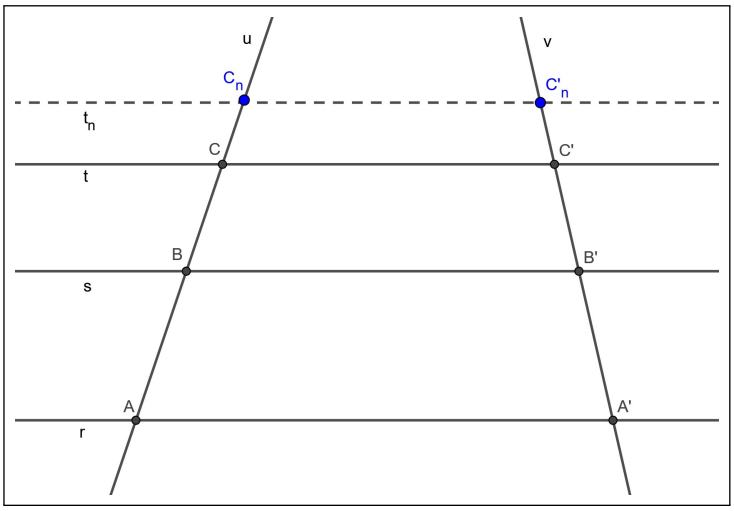
Por outro lado, se k é irracional, a razão passa a ser incomensurável, então não existe um segmento que seja múltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Então, tomaremos o fato de que: dados $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que, $k < a < k + \dfrac{1}{n}$, ou seja, entre dois números reais sempre existe um número racional devido à densidade [2] de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

[2] Quando foi dito que $\mathbb{Q}$ é denso* em $\mathbb{R}$, ou seja, os racionais estão em toda parte entre os reais, é o teorema 4 do livro *Curso de Análise Vol. 1* de (LIMA, 2014).

Suponhamos que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$, e tomemos de uma sequência a_n de racionais positivos de maneira que:

$$k < a_n < k + \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Figura 30 – Traçando a reta t_n



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Marcando o ponto $C_n \in u$ de tal modo que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n$, além disso, $t_n \parallel t, s, r$ traçada por C_n e C'_n nos garante que: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n$, ou seja,

$$k < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < k + \frac{1}{n}\,; k < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < k + \frac{1}{n}$$

Note que, à medida em que n aumenta o ponto C se aproxima de C_n e, consequentemente, como $tn \parallel t$, o ponto C' se aproxima de C'_n. Dessa forma:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{quando } n \to \infty,$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Voltando à questão das sequências. Como o limite de uma sequência de números reais é único, ou seja, ela não pode convergir para dois números reais distintos temos que concluir que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

■

Cabe salientar que a demonstração acima foi inspirada no livro *Geometria* de (NETO, 2022), utilizando a ideia de limite para aproximar as retas t e t_n.

4 Tales no Match: o jogo das retas

Antes da apresentação do jogo, considera-se importante discutir a utilização de jogos como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na educação básica, compreendida entre a educação infantil e o ensino médio.

4.1 Fundamentação Teórica

No contexto da educação brasileira, mais especificamente na Educação Básica, o processo de ensino e aprendizagem é estruturado a partir de currículos elaborados pelo ente responsável por aquele segmento, sejam eles municipais, estaduais ou federal. Contudo, tais currículos não são elaborados de maneira aleatória, mas são orientados por documentos normativos que direcionam a organização das competências, habilidades e conteúdos a serem trabalhados.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constitui um documento de caráter normativo que orienta os sistemas de ensino na elaboração e definição de seus currículos. Esse documento estabelece um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas por todos os alunos ao longo das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), no tópico de nome *"COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL"*, o ensino de Matemática deve promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, a capacidade de solução de problemas e da compreensão das relações entre conceitos e procedimentos presentes nos diferentes campos da Matemática, como Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Outro importante documento que norteia a educação brasileira são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), elaborados pelo Ministério da Educação com a finalidade de orientar os sistemas de ensino e contribuir para uma melhoria na qualidade da Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais,(BRASIL, 1998), apresentam orientações que auxiliam a prática do professor no processo de ensino e aprendizagem. Entre essas orientações, destaca-se a seguinte afirmação: *"Os jogos podem ser muito úteis para explorar e desenvolver noções de proporção, medidas, conceitos físicos, relações geométricas, diferentes possibilidades e relações"*. Essa afirmação fundamenta parte da proposta de elaboração do *Tales no Match: O jogo das retas*.

Sob a perspectiva teórica de (WILDER, 1981) em seu livro *Mathematics as a*

Cultural System, (A Matemática como um Sistema Cultural, tradução livre), a Matemática deve ser entendida como uma construção cultural. Dessa forma, a prática de utilizar jogos no processo de ensino e aprendizagem configura-se como uma estratégia capaz de valorizar práticas sociais e promover uma aprendizagem contextualizada e significativa.

Corroborando com essa discussão, (SMOLE et al., 2007), destaca que *"O jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática"*. Considerando esse contexto, apresenta-se trechos da Base Nacional Comum Curricular e do currículo utilizado pelo estado de Pernambuco no ensino fundamental II, (PERNAMBUCO, 2026), a título de comparação, que reforçam as seguintes informações:

- BNCC - OBJETOS DE CONHECIMENTO: Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais
- BNCC - HABILIDADES - (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Já no currículo do estado de Pernambuco, é apresentado seguinte maneira:

- Currículo de Pernambuco - OBJETOS DE CONHECIMENTO: Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.
- Currículo de Pernambuco - HABILIDADES - (EF09MA14PE) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes

Observa-se que, em ambos os currículos, o texto referente ao tópico *Objetos de Conhecimento* o currículo de Pernambuco é mais enxuto. Já no tópico *Habilidades*, o texto é idêntico.

Entretanto, percebe-se que, na BNCC, o Teorema de Tales não é citado explicitamente. Na versão mais recente do Currículo de Pernambuco, porém, o Teorema de Tales é mencionado de forma explícita. Dessa forma, evidencia-se sua relevância para o desenvolvimento da Geometria e da Matemática de modo geral.

4.1.1 Definição de jogo

A definição formal de um jogo não é uma tarefa fácil, embora o ser humano mantenha contato com diferentes tipos de jogos desde a tenra idade com diversos tipos, por mais simples que eles possam parecer.

Conforme citado anteriormente, a matemática é compreendida como uma construção cultural e segundo (HUIZINGA, 2000) *"O jogo é fato mais antigo que a cultura"*. Dessa forma, nada impede de estabelecermos uma relação entre jogos, cultura com o processo de aprendizagem da matemática. Ainda segundo o autor;

> [...] dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da "vida quotidiana". Assim definida, a noção parece capaz de abranger tudo aquilo a que chamamos "jogo" entre os animais, as crianças e os adultos: jogos de força e de destreza, jogos de sorte, de adivinhação, exibições de todo o gênero. (HUIZINGA, 2000, p. 24)

Como o jogo pode assumir um caráter cultural (GALLO, 2007), logo também pode desempenhar uma função socializadora e, por consequência, educativa. Corroborando com as ideias de (HUIZINGA, 2000) , (SMOLE et al., 2007) afirma que sem a interação social o individuo não desenvolve.

> Podemos mesmo afirmar que, sem a interação social, a lógica de uma pessoa não se desenvolveria plenamente, porque é nas situações interpessoais que ela se sente obrigada a ser coerente. Sozinha poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer e pela contingência do momento, porém em grupo, diante de outras pessoas, sentirá a necessidade de pensar naquilo que dirá, que fará, para que possa ser compreendida. (SMOLE et al., 2007, p. 11)

A Matemática é construída ao longo da história por diferentes povos e civilizações, seus conceitos são continuamente desenvolvidos, aperfeiçoados e ressignificados. Dessa forma, ela pode ser compreendida como uma construção social e cultural. Nessa perspectiva, ao reconhecer o jogo como um elemento anterior à própria cultura, torna-se pertinente apresentar a definição de jogo proposta por (CAILLOIS, 1958).

> 1 - libre: a la cual el jugador no podría obligarse sin que el juego pierda en seguida su naturaleza de diversión atractiva y alegre;
>
> 2 - separada: circunscrita en límites de espacio y tiempo precisos y fijados de antemano;
>
> 3 - incierta: cuyo desarrollo no podría determinarse, ni conocerse previamente el resultado, pues cierta latitud en la necesidad de inventar debe obligatoria¬ mente dejarse a la iniciativa del jugador;
>
> 4 - improductiva: que no crea bienes, ni riqueza, ni elemento nuevo de ninguna clase; y, salvo desplazamiento de propiedad en el seno

> del círculo de jugadores, acaba en una situación idéntica a la del comienzo de la partida;
>
> 5 - reglamentada: sometida a convenciones que suspenden las leyes ordinarias y que instauran momentáneamente una legislación nueva, que es la única que cuenta;
>
> 6 - ficticia: acompañada de una conciencia específica de realidad segunda o de franca irrealidad en relación a la vida corriente.(CAILLOIS, 1958, p. 21-22):

Fazendo uma tradução livre, a definição de jogos apresentada por Callois pode ser resumida nas seguintes características:

1. Livre, ou seja, sem obrigação;
2. Restrito, ou seja, delimitando em espaço e tempo;
3. Incerto, ou seja, sem o resultado conhecido de antemão;
4. Improdutivo, ou seja, e não cria bens;
5. Regulamentada, ou seja, com regras;
6. Fictícia, ou seja, lúdico;

A partir dessas características, podemos compreender o jogo como uma atividade voluntária, delimitada por regras, cujo resultado é incerto no que se refere à definição do vencedor e que apresenta caráter lúdico em seu desenvolvimento. Tais características contribuem para que o jogo possa ser utilizado como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a retomada, a consolidação e a aplicação dos conhecimentos matemáticos.

4.1.2 O jogo na educação matemática

O jogo é um elemento presente desde cedo na sociedade, sendo comum a interação entre crianças e jogos desde a tenra idade. Nesse sentido,

> Ao observarmos o comportamento de uma criança em situações de brincadeira e/ou jogo, percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas. (GRANDO, 2000, p. 19-20)

O processo de ensino e aprendizagem está intrinsecamente relacionado ao ato de questionar, uma vez que, durante o jogo, o estudante é levado a refletir sobre suas próprias jogadas e as de seus oponentes. Esse processo favorece significativamente a compreensão dos conteúdos, além de estimular a formulação de perguntas pertinentes e o desenvolvimento do pensamento crítico.

> É na ação do jogo que o sujeito, mesmo que venha a ser derrotado, pode conhecer-se, estabelecer o limite de sua competência enquanto jogador e reavaliar o que precisa ser trabalhado, desenvolvendo suas potencialidades, para evitar uma próxima derrota. O "saber perder" envolve este tipo de avaliação. (GRANDO, 2000, p. 20)

Dessa forma, a introdução de jogos no processo de apropriação do conhecimento pelos estudantes pode construir um importante mecanismo que auxiliará o professor em toda a preparação e andamento do conteúdo. Tal estratégia mostra-se especialmente relevante diante da realidade vivenciada pelos professores da Educação Básica, que, muitas vezes, dispõem de pouco tempo para aprofundar os conteúdos em sala de aula. Essa situação é consequência da necessidade de cumprir o currículo previsto, participar de projetos e eventos escolares, atender às diversas demandas administrativas e, em muitos casos, atuar simultaneamente em mais de uma instituição de ensino. Nesse contexto, o jogo pode servir como uma ferramenta para oportunizar a apresentação de um novo conteúdo ou como instrumento de recomposição da aprendizado de algum déficit educacional. Segundo ARIZA e SEHN (2017)):

> O jogo não é um recurso para tornar as aulas de matemática mais agradáveis. É antes de tudo uma ponte para o conhecimento. Dessa maneira, pode-se sentir que temos no jogo uma excelente maneira de trabalhar conceitos matemáticos e não apenas o jogo pelo jogo.

Para a criação do *Tales no Match: o jogo das retas*, foi necessário levar em consideração alguns pontos importantes e fundamentais para que o jogo apresentasse sentido pedagógico e tivesse utilidade no processo de aprendizagem da Matemática. Tais aspectos foram apresentados por (SMOLE et al., 2007),

> 1 - O jogo deve ser para dois ou mais jogadores, sendo, portanto uma atividade que os alunos realizam juntos;
> 2 - O jogo deverá ter um objetivo a ser alcançado pelos participantes, ou seja, ao final, haverá um vencedor;
> 3 - O jogo deverá permitir que os alunos assumam papéis interdependentes, opostos e cooperativos, isto é, os jogadores devem perceber a importância de cada um na realização dos objetivos do jogo, na execução das jogadas, e observar que um jogo não se realiza a menos que cada jogador concorde com as regras estabelecidas e coopere, seguindo-as e aceitando suas consequências;
> 4 - O jogo precisa ter regras preestabelecidas que não podem ser modificadas no decorrer de uma jogada, isto é, cada jogador deve perceber que as regras são um contrato aceito pelo grupo e que sua violação representa uma falta, havendo o desejo de fazer alterações, isso deve ser discutido com todo o grupo e, no caso de concordância geral, podem ser impostas ao jogo daí por diante;
> 5 - No jogo deve haver a possibilidade de usar estratégias, estabelecer planos, executar jogadas e avaliar a eficácia desses elementos nos resultados obtidos, isto é, o jogo não dever ser mecânico e desprovido de significado para os jogadores. (SMOLE et al., 2007, p. 11-12)

4.2 Tales no Match: o jogo das retas

Nesta subseção, o jogo *Tales no Match: O jogo das retas* será apresentado, destacando suas regras, estrutura e conteúdos matemáticos presentes no jogo.

O jogo foi desenvolvido com base no tradicional jogo de cartas chamado *Jogo do Mico*, que tem como objetivo a formação pares de cartas correspondentes evitando ficar com a carta Mico, ou seja, a carta que não possui correspondência. Essa escolha deu-se pelo potencial lúdico para promover um maior engajamento no processo de ensino e aprendizagem.

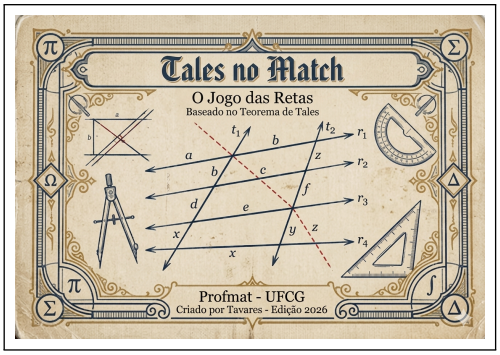
4.2.1 Regras do jogo

Para melhor aproveitamento do jogo *Tales no Match: o jogo das retas*, devem ser observadas as seguintes regras:

- O jogo*Tales no Match* pode ser jogado por **2 a 6 participantes**.
- A partida é iniciada com a distribuição de 57 cartas, previamente embaralhadas, aos jogadores.
- Após a distribuição, cada participante deve verificar se possui pares correspondentes entre suas cartas. Os pares encontrados devem ser colocados sobre a mesa.
- As cartas restantes permanecem nas mãos dos jogadores, que devem mantê-las ocultas dos demais participantes.
- O primeiro jogador inicia a rodada retirando, aleatoriamente, uma carta da mão do participante à sua esquerda.
- Se a carta retirada formar um par com uma carta que já esteja em sua posse, o jogador deverá colocar esse novo par sobre a mesa.
- Caso a carta retirada não forme um par, ela deverá ser incorporada à mão do jogador.
- A vez passa para o jogador seguinte, que repetirá o mesmo procedimento.
- A partida termina quando todos os pares tiverem sido formados e restar apenas a carta *No Match* nas mãos de um dos participantes.
- O jogador que permanecer com a carta *No Match* é considerado o perdedor da partida.

4.2.2 Cartas do jogo

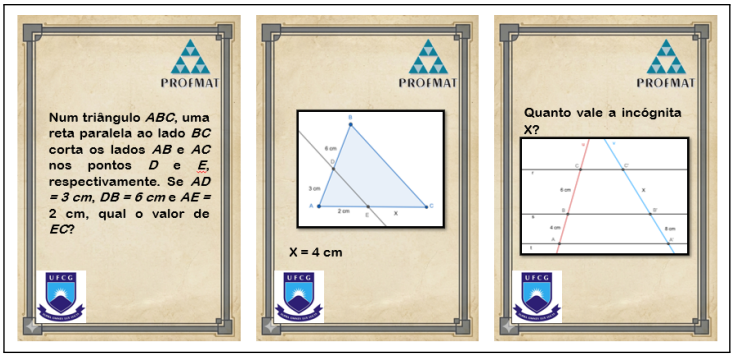
Figura 31 – Tales no Match: O Jogo das Retas
Verso das cartas



Fonte: Elaborado pelo autor com auxilio de I.A.(2026)

Conforme mencionado na subseção anterior, o jogo é composto 57 cartas, organizadas em 28 pares e uma única carta que não possui correspondência, denominada *no Match*; a seguir, veremos um exemplo das cartas do jogo:

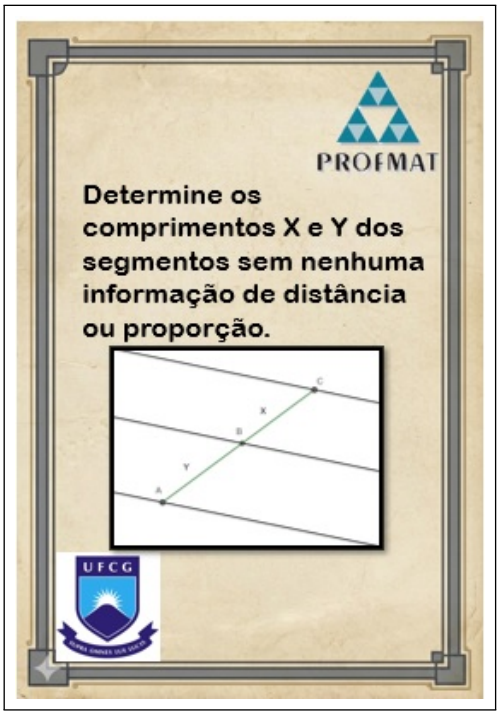
Figura 32 – Modelo das cartas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

As cartas estão dispostas em pares compostos por cartas perguntas e cartas respostas, podendo também relacionar imagens às suas respectivas descrições ou representações matemáticas.

Figura 33 – no Match



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A carta apresentada acima corresponde à única carta sem correspondente, denominada *no Match*. O jogador que permanecer com ela ao final da partida perde o jogo.

O comando presente na carta é o seguinte: *Determine os comprimentos X e Y dos segmentos sem nenhuma informação de distância ou proporção.* Tal situação não pode ser resolvida, pois a aplicação do Teorema de Tales exige informações prévias sobre proporcionalidade entre segmentos e à presença de retas paralelas.

O Teorema de Tales estabelece que, em um feixe de retas paralelas interceptadas por duas transversais, os segmentos correspondentes são proporcionais. Entretanto na carta *no Match*, não há nenhuma informação sobre proporcionalidade e de paralelismo, impossibilitando a resolução do problema indicado na carta.

No anexo encontram-se todas as cartas do que compõem o jogo.

4.2.3 Conteúdos Trabalhados

Segundo o Ministério da Educação, (BRASIL, 2025), *dados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) de 2022 apontaram que 73% dos estudantes brasileiros apresentaram um desempenho insuficiente em matemática.* Diante desse cenário, a recomposição de aprendizado faz-se necessário, e o uso de jogos pode construir

uma importante ferramenta para alcançar esse objetivo.

Nesse contexto, o *Tales no Match: O jogo das retas* foi elaborado contemplando conteúdos considerados essenciais para a recomposição da aprendizagem matemática.

Conteúdos para recomposição de aprendizado:

- Razão e Proporção;
- Congruência de Triângulos;
- Congruência com Triângulos Retângulos;
- Pontos Colineares;
- Posições relativas entre retas (concorrentes, perpendiculares e paralelas).

Além disso, o jogo também aborda conteúdos previstos para o 9º ano do Ensino Fundamental II, entre eles:

- Retas paralelas cortadas por uma transversal;
- Ângulos opostos pelo vértice;
- Ângulos alternos internos;
- Teorema de Tales.

4.2.4 Sugestão de Plano de Aplicação do Jogo

Para a aplicação do *Tales no Match* em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II, propõe-se uma sequência didática composta por cinco aulas, organizada da seguinte forma:

1. *Aula 1*:
    - Congruência de triângulos;
    - Congruência em triângulos retângulos;
    - Posição relativa entre retas;
    - Ângulos opostos pelo vértice.

    Nesta etapa, recomenda-se que os conteúdos sejam abordados de forma introdutória, evitando aprofundamentos excessivos que possam desviar o foco principal da sequência didática, que consiste na compreensão do Teorema de Tales.

2. *Aula 2*:

   - Ângulos Alternos Internos;
   - Retas Paralelas Cortadas por Transversais.

   Recomenda-se que os conceitos sejam apresentados por meio de exemplos e construções geométricas, evidenciando as propriedades das retas paralelas e das relações angulares.

3. *Aula 3:*

   - Pontos Colineares;
   - Razão e Proporção.

   Nesta aula, os estudantes devem ser conduzidos à compreensão das ideias de razão e proporção, ressaltando sua importância para a demonstração e aplicação do Teorema de Tales.

4. *Aula 4:*

   - Teorema de Tales;
   - Apresentação das regras e da dinâmica do jogo *Tales no Match*.

5. *Aula 5*:

   Nesta aula, os estudantes realizarão a execução do jogo forma mais autônoma, colocando em prática os conhecimentos adquiridos ao longo da sequência didática. Ao término da atividade, é recomendado promover uma discussão coletiva, sobre as estratégias utilizadas, as dificuldades encontradas, os erros cometidos e os conhecimentos consolidados durante a atividade.

Sugere-se que essa proposta constitui apenas uma sugestão de aplicação e pode ser adaptada conforme a realidade de cada escola, a carga horária disponível, o nível de conhecimento da turma e o planejamento do professor.

5 Considerações Finais

Dado todo exposto, compreende-se que o ensino da Matemática enfrenta desafios que vão além da simples transmissão de conteúdos, envolvendo aspectos relacionados ao interesse, à motivação e as lacunas de aprendizagem acumuladas ao longo da trajetória escolar, intensificadas após o período da pandemia. Nesse sentindo, a utilização de metodologias ativas e de recursos lúdicos, constitui uma alternativa pedagógica capaz de motivar os estudantes, estimular o raciocínio matemático e promover uma aprendizagem mais significativa. Assim, o jogo *Tales no Match: o jogo das retas* apresenta-se como uma proposta didática que busca contribuir para a compreensão do Teorema de Tales e de conceitos necessários para a aplicação do referido teorema, proporcionando uma abordagem mais dinâmica do conteúdo.

Os pesquisadores citados nessa pesquisa ressaltam que os jogos constituem importantes recursos pedagógicos para o desenvolvimento do raciocínio lógico de crianças e adolescentes. Quando articulados ao ensino da Matemática, os jogos favorecem o desenvolvimento de habilidades como concentração, análise, tomada de decisão, argumentação e atenção, competências essenciais para a aprendizagem Matemática e para a fomação do pensamento critico dos estudantes.

Com a elaboração do *Tales no Match: o jogo das retas*, buscou-se atender ao objetivo principal deste trabalho, que consistiu na criação de um jogo didático capaz de atuar como ferramenta pedagógica tanto na introdução de novos conteúdos quanto no processo de recomposição da aprendizagem. Durante a dinâmica do jogo, os estudantes têm a oportunidade de revisar conteúdos já trabalhados, consolidar conceitos matemáticos e construir novas aprendizagens de maneira mais interativa, colaborativa e significativa.

Por fim, espera-se que este jogo, aliado à proposta de aplicação apresentada, contribua para a motivação de professores e estudantes nas aulas de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental II, podendo também ser utilizado como recurso de apoio em turmas do Ensino Médio, especialmente em atividades voltadas à recomposição da aprendizagem. Acredita-se, ainda, que o uso de jogos pedagógicos favorece um ensino da Matemática mais dinâmico, acessível e significativo, promovendo uma relação mais positiva dos estudantes com a disciplina e contribuindo para a melhoria do desempenho e da participação em sala de aula.

Dessa forma, espera-se que este trabalho possa incentivar o desenvolvimento e a utilização de novos recursos didáticos voltados ao ensino da Matemática, contribuindo para a construção de práticas pedagógicas cada vez mais inovadoras e alinhadas às necessidades dos estudantes da Educação Básica.

Referências

ARIZA, J. F.; SEHN, E. Jogos no ensino da matemática. *Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia*, Medianeira, v. 8, n. 16, 2017. Acesso em: 3 maio 2026. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/recit>. Citado na página 46.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática). Citado 3 vezes nas páginas 21, 27 e 38.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A History of Mathematics*. 3. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470525487. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado na página 42.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Citado na página 42.

BRASIL. *Toda Matemática: Contexto*. 2025. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/toda-matematica/contexto>. Acesso em: 10 mai 2025. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 49.

CABRAL, J. F. P. *Tales de Mileto*. s.d. Acesso em: 3 maio 2026. Disponível em: <https://filosofiapopular.com.br/tales-de-mileto.html>. Citado na página 35.

CAILLOIS, R. *Teoría de los Juegos*. Barcelona: Editorial Seix Barral S.A, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 16, 19, 20, 21 e 23.

EVES, H. *Introdução à Históra da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011. Citado na página 35.

GALLO, S. N. *Jogo como Elemento da Cultura: Aspectos Conteporâneos e as Modificações na Experiência do Jogar*. Tese (Doutorado Comunicação e Semiótica) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Citado na página 44.

GOOGLE. *Milet Antik Kenti*. 2026. Acesso em: 3 maio 2026. Disponível em: <https://www.google.com/maps/place/Milet+Antik+Kenti>. Citado na página 36.

GOOGLE. *Milet Antik Kenti*. 2026. Acesso em: 3 maio 2026. Disponível em: <https://www.google.com/maps/place/Milet+Antik+Kenti/@37.5122354,27.2127326,12z.> Citado na página 36.

GRANDO, R. C. *O Conhecimento e o Uso de Jogos na Sala de Aula*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 15, 45 e 46.

HUIZINGA, J. *Homo ludens: o jogo como elemento da cultura*. 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2000. Citado na página 44.

JOSEPH, G. G. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. 3. ed. Princeton: Princeton University Press, 2011. ISBN 978-0-691-13526-7. Citado na página 37.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1. ISBN 978-85-244-0375-0. Citado na página 40.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.

NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 21, 38 e 41.

PERNAMBUCO. *ORGANIZADOR CURRICULAR TRIMESTRAL MATEMÁTICA ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS*. Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2026. Citado na página 43.

PREDIGER, J.; BERWANGER, L.; MöRS, M. F. Relação entre aluno e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. *Revista Destaques Acadêmicos*, v. 1, n. 4, 2013. Citado na página 13.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 37.

SMOLE, K. S. et al. *Cadernos de Mathema: Jogos de Matemática de 6º a 9º ano*. Belo Horizonte: Artmed, 2007. (Cadernos de Mathema - Ensino Fundamental). Citado 4 vezes nas páginas 15, 43, 44 e 46.

SOUZA, F. K. K. A. d.; SILVA, J. B. Desafios e possibilidades: a perspectiva dos(as) professores(as) de matemática. *Revista Baiana de Educação Matemática*, v. 5, n. 1, p. e202415, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.47207/rbem.v5i1.20699>. Citado na página 13.

WAERDEN, B. L. v. d. *Science awakening*. Groningen: P. Noordhoff, 1954. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

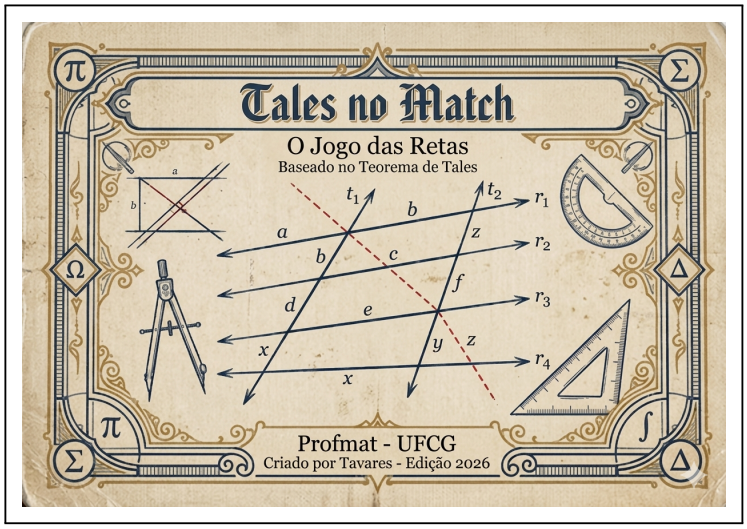
WILDER, R. L. *Mathematics as a Cultural System*. Oxford: Pergamon Press, 1981. Citado na página 42.

Anexos

ANEXO A – Cartas do Jogo

Segue abaixo os pares das cartas do jogo.

Figura 34 – Tales no Match: O Jogo das Retas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 35 – Casos de Congruência de Triângulos



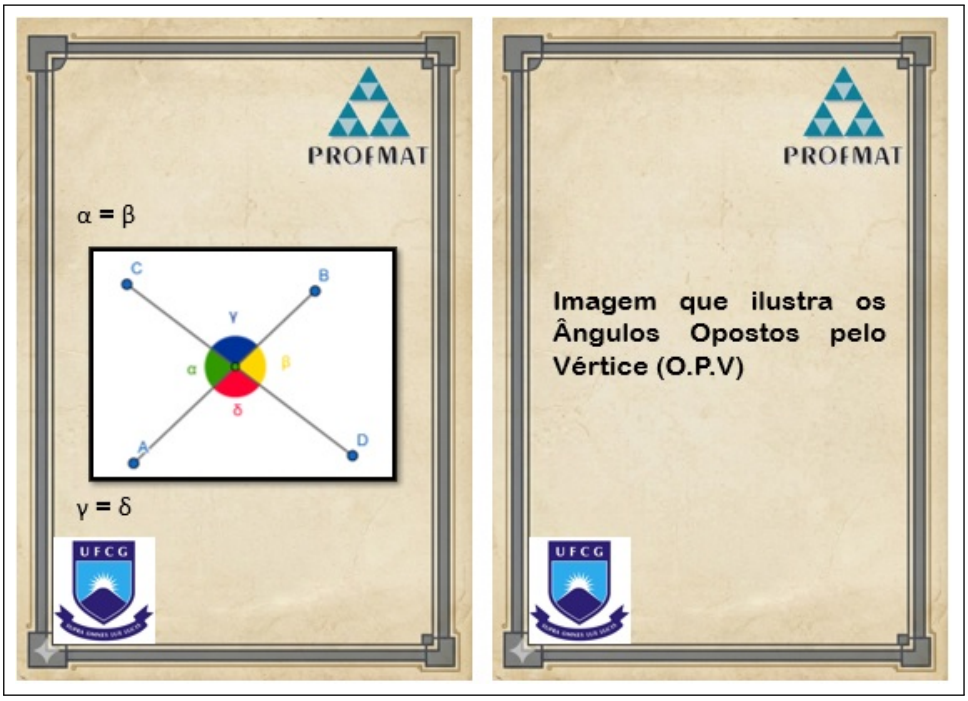
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 36 – Congruência do Triângulo Retângulo



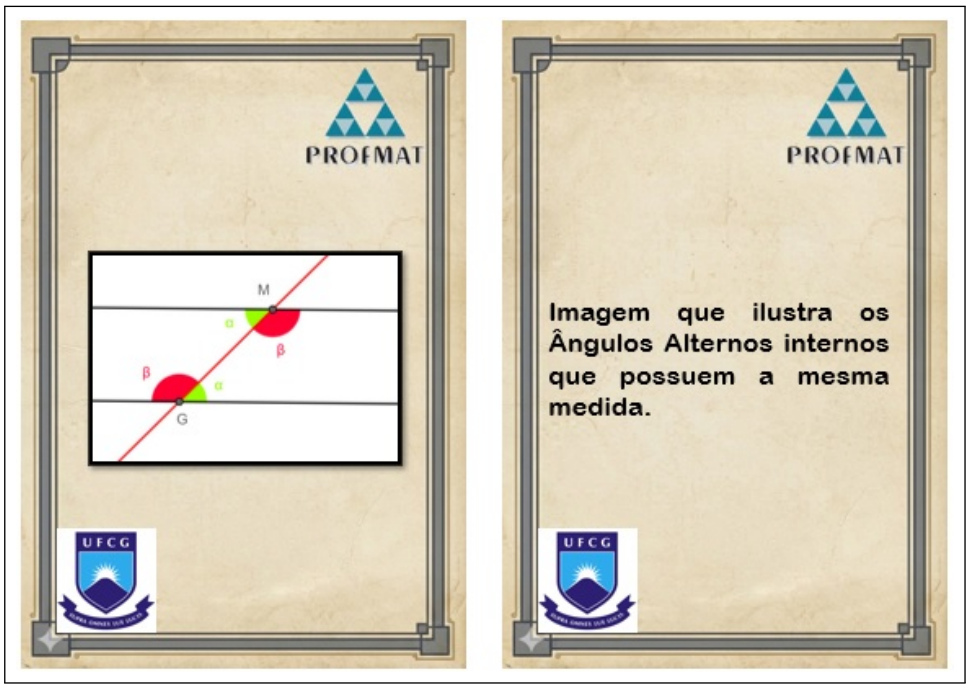
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 37 – Ângulos Opostos Pelo Vértice



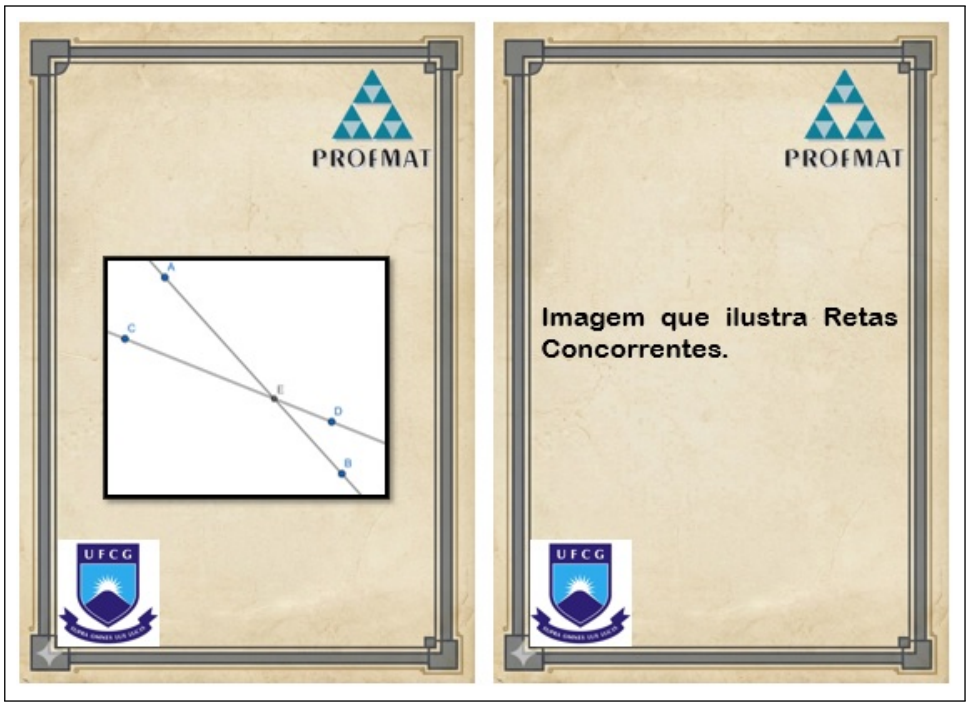
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 38 – Ângulos Alternos Internos



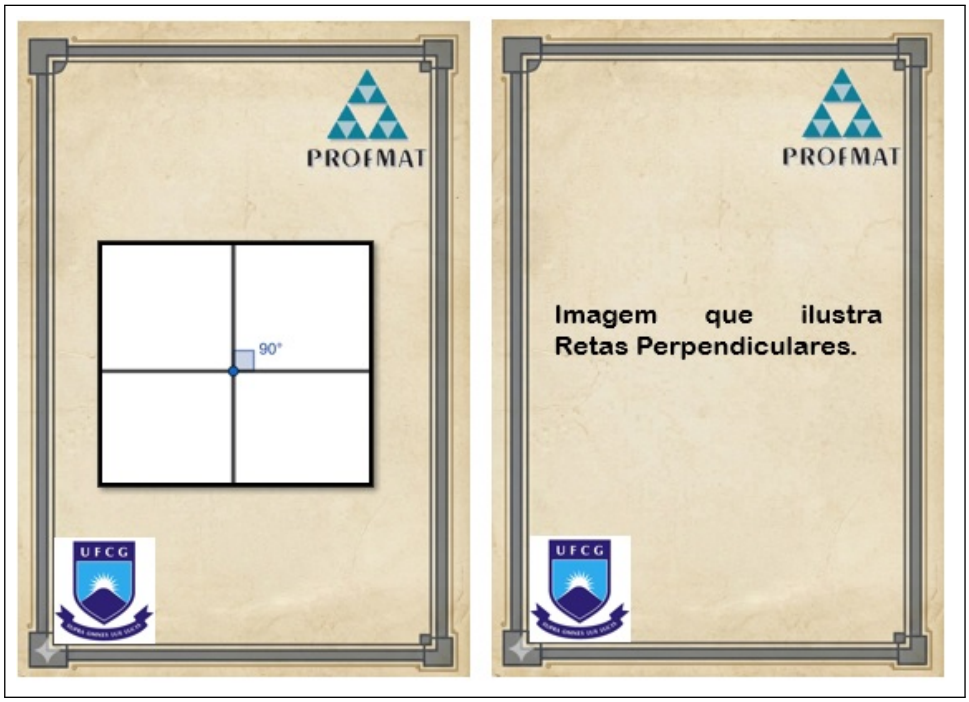
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 39 – Retas Concorrentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 40 – Retas Perpendiculares



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 41 – Retas Paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 42 – Pontos Colineares



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 43 – Três Paralelas Cortadas por uma Transversal



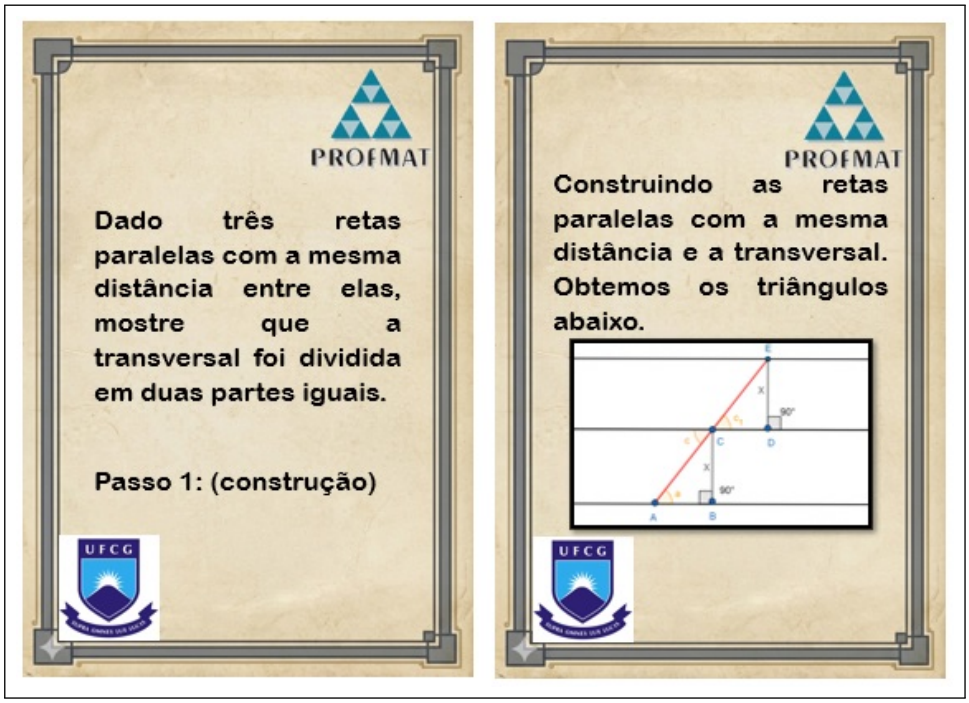
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 44 – Cinco Paralelas Cortadas por uma Transversal



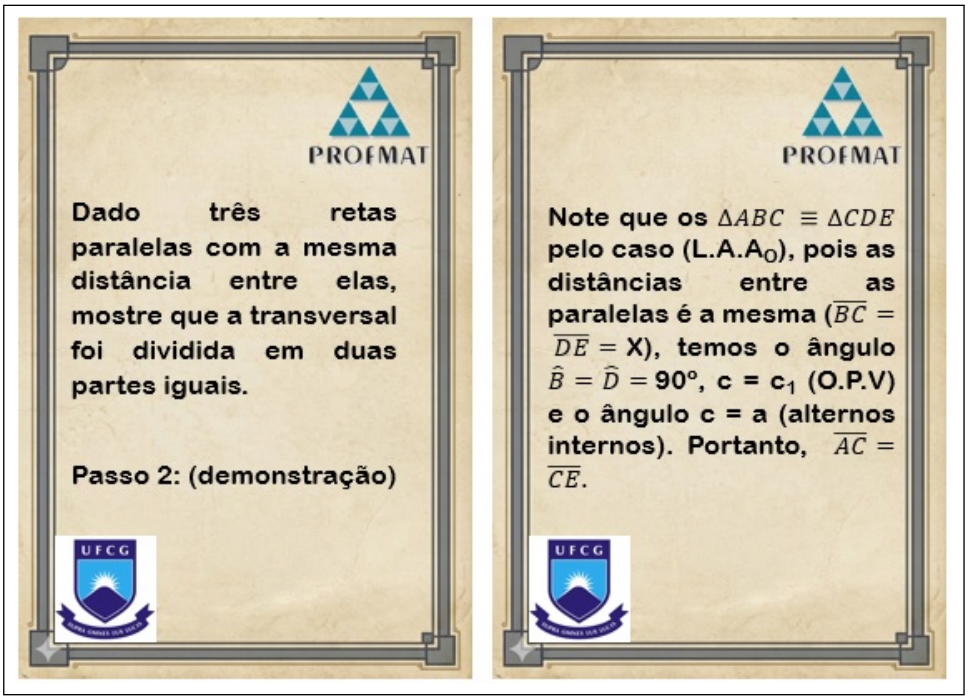
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 45 – Divisão em Duas Partes Iguais Construção



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 46 – Divisão em Duas Partes Iguais Demonstração



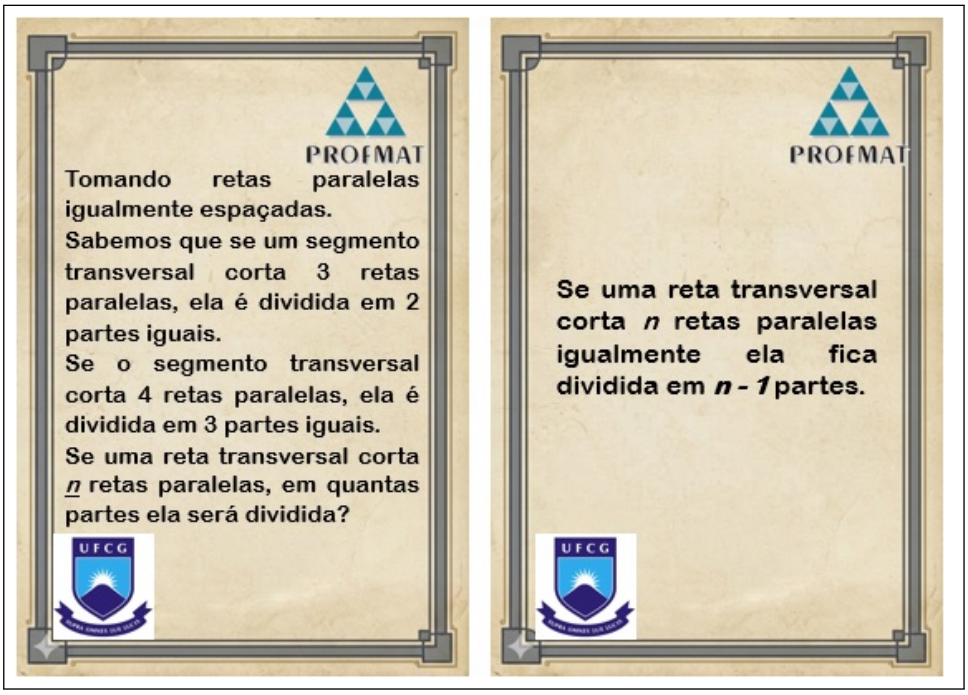
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 47 – Divisão em n + 1 partes



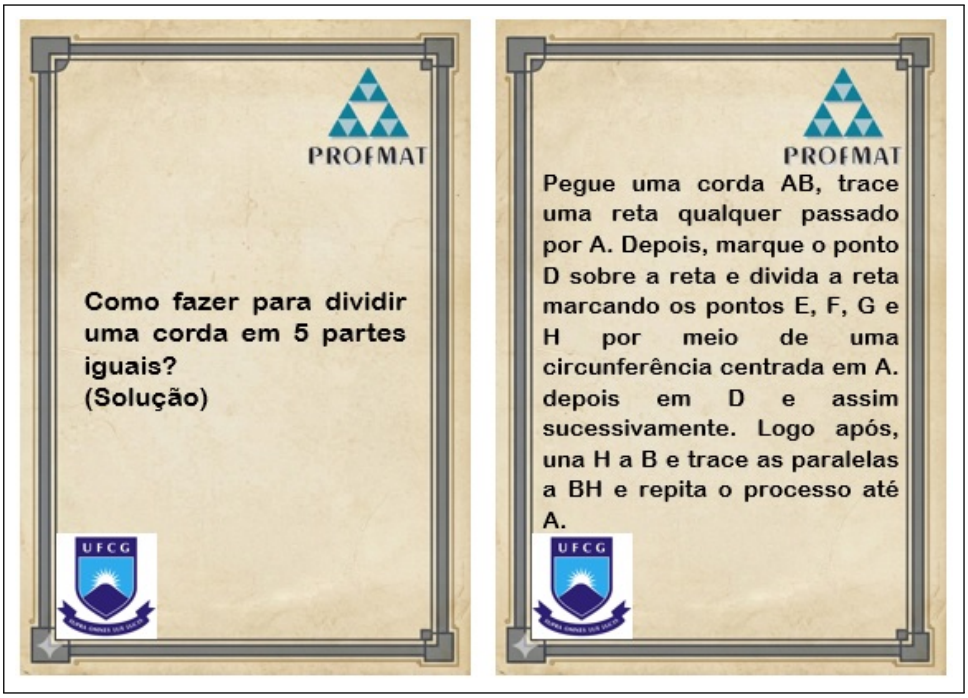
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 48 – Divisão em n - 1 partes



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 49 – Divisão em Cinco Partes Solução



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 50 – Divisão em Cinco partes Imagem



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 51 – Definição Razão



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 52 – Teorema de Tales



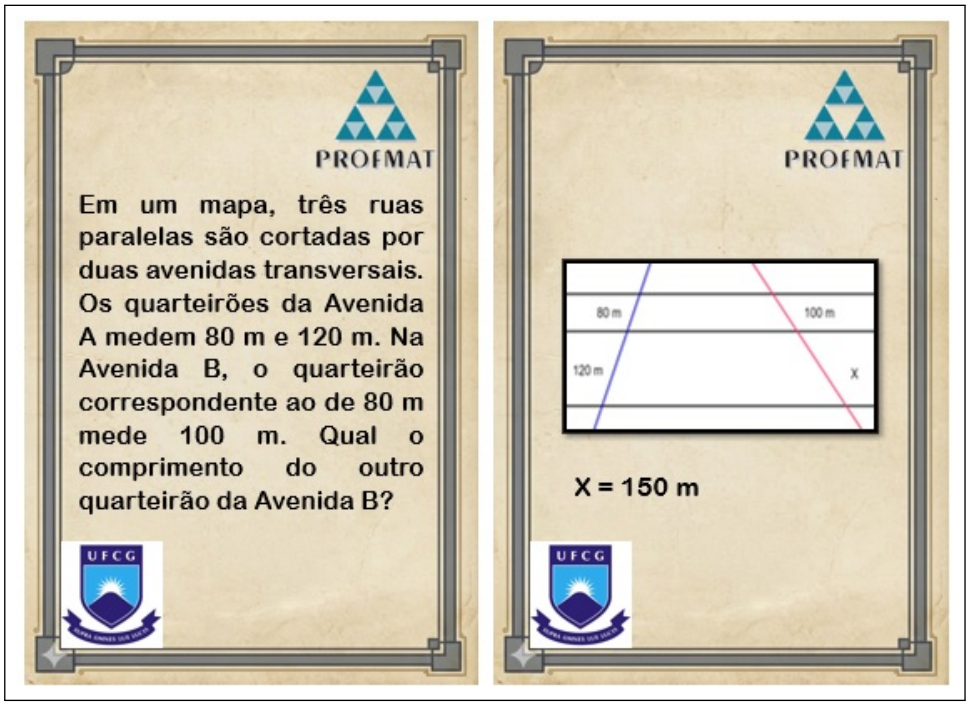
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 53 – Afirmação 1



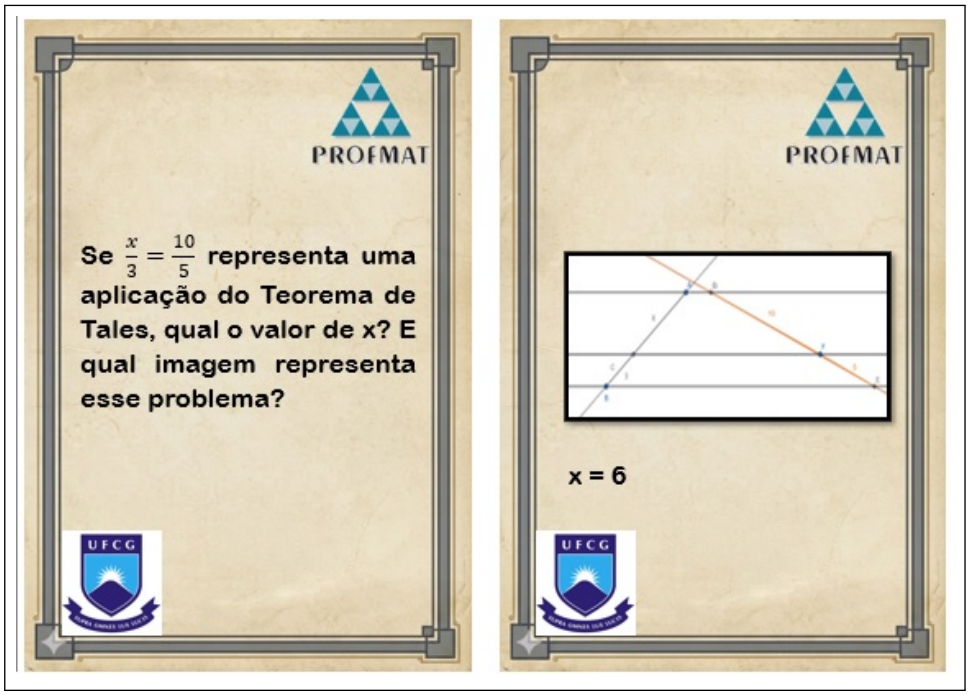
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 54 – Exercício 1



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 55 – Exercício 2



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 56 – Afirmação 2



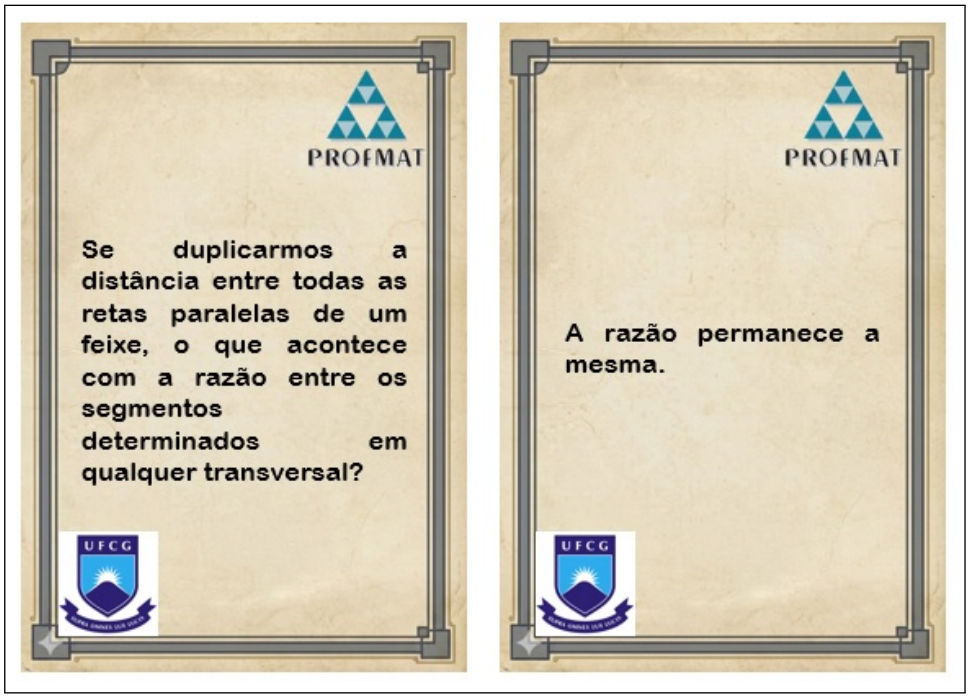
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 57 – Exercício 3



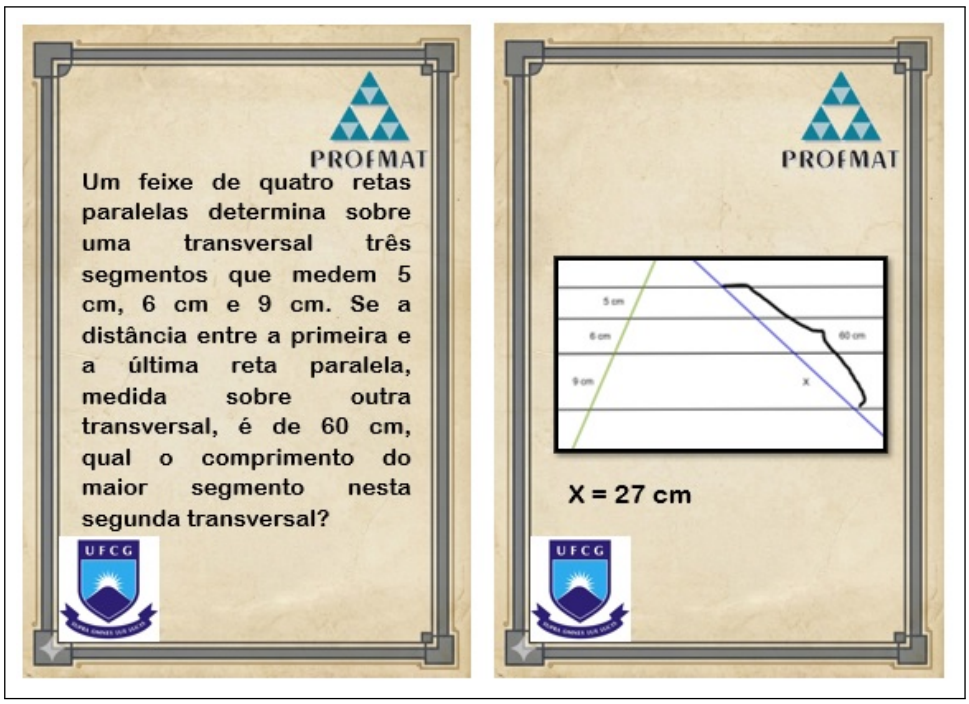
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 58 – Afirmação 3



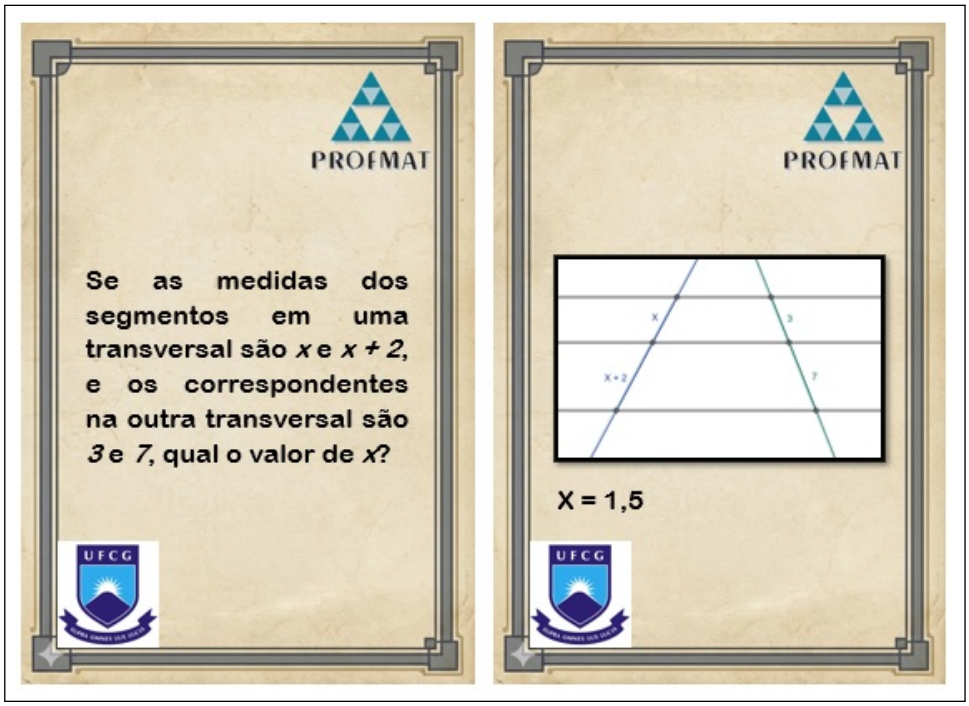
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 59 – Exercício 4



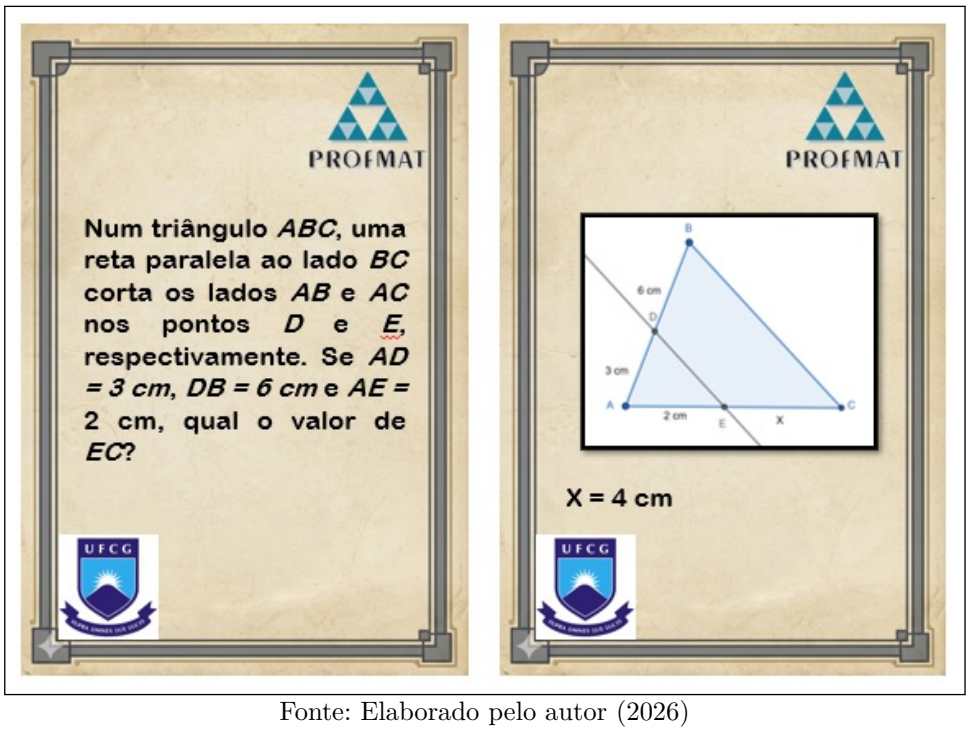
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 60 – Exercício 5



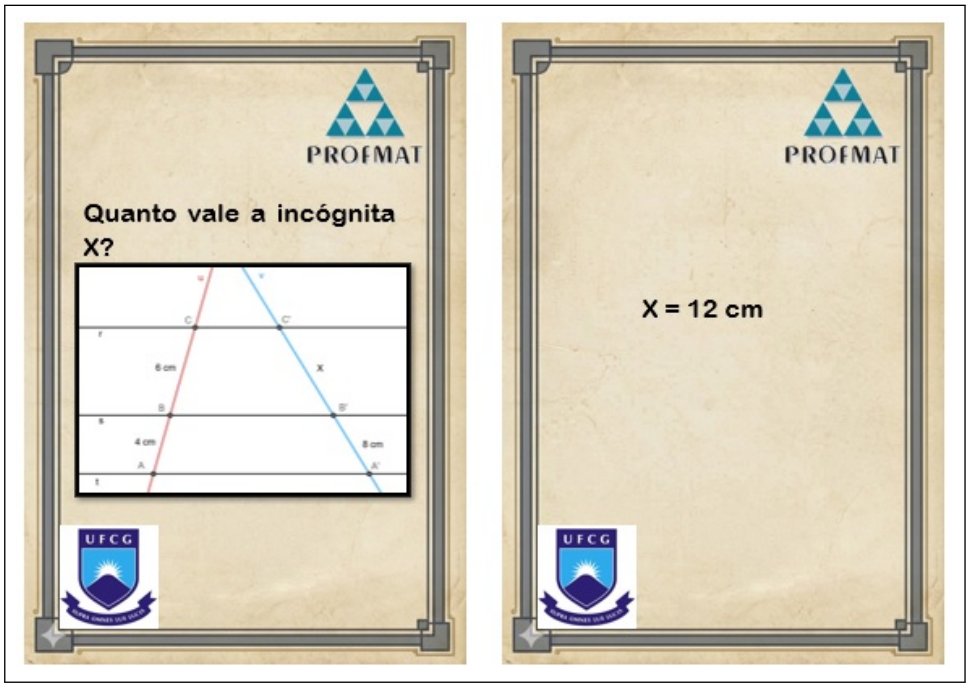
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 61 – Exercício 6



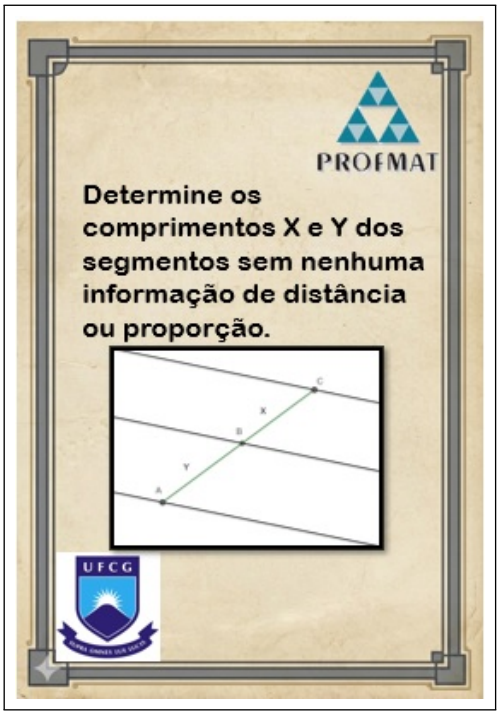
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 62 – Exercício 7



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Figura 63 – no Match



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)