UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Ewerton Deyvson José do Nascimento

Transposição Didática do conceito de Interpolação Polinomial e Funções Spline: Uma Abordagem Dinâmica com o GeoGebra para o Ensino de Funções na Educação Básica.

Campina Grande - PB

Agosto/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Ewerton Deyvson José do Nascimento

Transposição Didática do conceito de Interpolação Polinomial e Funções Spline: Uma Abordagem Dinâmica com o GeoGebra para o Ensino de Funções na Educação Básica.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Agosto/2026

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
Sistema de Bibliotecas - SISTEMOTECA
Catalogação de Publicação na Fonte. UFCG - Biblioteca Central

N244t Nascimento, Ewerton Deyvson Jose do.

Transposição didática do conceito de interpolação polinomial e funções Spline: uma abordagem dinâmica com o GeoGebra para o ensino de funções na educação básica / Ewerton Deyvson Jose do Nascimento. – 2026.

82 f. : il. color.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".

Referências.

1. Matemática. 2. Conceito de Função. 3. Métodos de Lagrange e Newton. 4. Fenômeno de Runge. 5. Funções Spline. 6. Transposição Didática. 7. GeoGebra. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Ewerton Deyvson José do Nascimento

Transposição Didática do conceito de Interpolação Polinomial e Funções Spline: Uma Abordagem Dinâmica com o GeoGebra para o Ensino de Funções na Educação Básica.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática – CCT – UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 28 de Agosto de 2026.

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUIZ ANTONIO DA SILVA MEDEIROS
Data: 15/09/2026 17:03:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUCIANA ROZE DE FREITAS
Data: 15/09/2026 16:19:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. Luciana Roze de Freitas

Examinador externo(a) – UEPB

Documento assinado digitalmente
gov.br
JACQUELINE FELIX DE BRITO DINIZ
Data: 15/09/2026 16:49:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. Jacqueline Félix de Brito Diniz

Examinador interno - UFCG

Campina Grande - PB

Agosto de 2026

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a **Deus**, pela dádiva da vida, por ser a minha fortaleza, meu guia e a fonte inesgotável de fé, sabedoria e coragem para superar os desafios ao longo de toda esta jornada.

À minha querida filha, **Maria Laura**, por ser a luz dos meus dias, a minha maior motivação e a razão pela qual busquei me superar a cada instante. Seu carinho e seu sorriso foram o combustível essencial para o alcance desta conquista.

À minha **família**, pelo apoio incondicional, amor, paciência e compreensão nos momentos de ausência e dedicação aos estudos. Obrigado por acreditarem em mim e por serem a minha base segura. Esta conquista também é de vocês.

Ao meu orientador, **Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros**, pela excelente orientação, paciência, ensinamentos valiosos e pela confiança depositada em mim na elaboração deste trabalho. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para a concretização deste feito.

Aos **demais professores**, pela generosidade em compartilhar seus conhecimentos, pela dedicação ao ensino e por contribuírem de forma significativa para a minha formação acadêmica e profissional.

A todos os colegas de curso, amigos e a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram com incentivos, palavras de apoio ou colaboração para a realização deste feito, o meu mais sincero e profundo agradecimento.

"Deus criou todas as coisas em número, peso e medida."

— **Isaac Newton**

Resumo

O ensino da Matemática encontra frequentemente com o desafio de ligar conceitos teóricos e abstratos à resolução de problemas práticos, especialmente no que diz respeito à modelação de dados. Neste contexto, este trabalho tem como objetivo central realizar a transposição didática do conceito de interpolação polinomial e de funções spline para educação básica, propondo uma sequência didática, por meio de construções dinâmica no GeoGebra. Embora os métodos clássicos de interpolação, como as fórmulas de Lagrange e de Newton, constituam ferramentas fundamentais para criar funções a partir de conjuntos de pontos, o uso de polinômios de grau elevado gerado por essas abordagens resulta, muitas vezes, em instabilidades numéricas e oscilações indesejadas nas extremidades do intervalo, conhecidas como Fenômeno de Runge. Perante este cenário, propõe-se um estudo sobre a Interpolação por Funções Spline, um método que utiliza polinômios por partes para garantir aproximações precisas e curvas geometricamente suaves. Com o intuito de transpor este conteúdo para a realidade escolar da Educação Básica, o trabalho apoia-se no referencial teórico da Transposição Didática, de Yves Chevallard. Evidenciando que esse processo de reconstrução do saber científico desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do conhecimento sobre o conceito de função, pois permite que o estudante supere a visão estática e puramente algébrica, compreendendo as funções como modelos dinâmicos, contínuos e aplicados. Para viabilizar essa abordagem, a pesquisa utiliza o software de geometria, o GeoGebra para o desenvolvimento de construções práticas e interativas. Estas ferramentas visuais ajudarão a compreender o comportamento das curvas de forma dinâmica, constituindo uma excelente estratégia para explorar o estudo de funções, de polinômios e da matemática aplicada diretamente com os estudantes, em conjunto com as fases da Engenharia Didática e as reflexões da Abordagem Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS).

Palavras-chave: Conceito de Função. Métodos de Lagrange e Newton. Fenômeno de Runge. Funções Spline. Transposição Didática. GeoGebra.

Abstract

Mathematics teaching often faces the challenge of connecting theoretical and abstract concepts to practical problem-solving, especially regarding data modeling. In this context, the main objective of this work is to promote the development of knowledge about the concept of function and to facilitate the learning of polynomials. Although classical interpolation methods, such as Lagrange and Newton formulations, constitute fundamental tools for creating functions from sets of points, the use of high-degree polynomials generated by these approaches often results in numerical instabilities and undesired oscillations at the ends of the interval, known as the Runge Phenomenon. In view of this scenario, this study proposes a detailed investigation into Interpolation by Spline Functions, a method that uses piecewise polynomials to ensure accurate approximations and geometrically smooth curves. With the purpose of transposing this content to the school reality of basic education, the work relies on the theoretical framework of Didactic Transposition, by Yves Chevallard. It highlights that this process of reconstructing scientific knowledge plays a fundamental role in developing knowledge about the concept of function, as it allows students to overcome a static and purely algebraic view, understanding functions as dynamic, continuous, and applied models. To enable this approach, the research utilizes the dynamic geometry software GeoGebra for the development of practical and interactive constructions. These visual tools will help comprehend the behavior of curves dynamically, constituting an excellent strategy to explore the study of functions, polynomials, and applied mathematics directly with students, in conjunction with the phases of Didactic Engineering and the reflections of the Science, Technology, and Society (STS) approach.

Keywords: Function Concept. Lagrange and Newton Methods. Runge Phenomenon. Spline Functions. Didactic Transposition. GeoGebra.

Sumário

1 Introdução **10**

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA I: PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA INTERPOLAÇÃO **12**

2.1 A Característica da Aproximação Polinomial 12

2.2 Definição Formal do Problema de Interpolação 13

2.3 O Problema do Mal Condicionamento Numérico 15

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA II: A FORMA DE LAGRANGE **18**

3.1 Contexto Histórico 18

3.2 Análise do Erro na Interpolação 21

3.3 Vantagens e Limitações Teóricas da Forma de Lagrange 23

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA III: A FORMA DE NEWTON **24**

4.1 Contexto Histórico 24

4.2 O Método de Newton 25

5 Comparação entre os métodos de interpolação de Lagrange e Newton **32**

6 INTERPOLAÇÃO SEGMENTADA (SPLINES) **37**

6.1 Um pouco de história: a Revolução das Curvas de Bézier 37

6.2 Funções Spline 39

6.3 Interpolação por Spline Cúbica 44

7 FUNDAMENTAÇÃO DIDÁTICA E METODOLOGIA DA PROPOSTA DE ENSINO **51**

7.1 Fatores Histórico e Filosofia do GeoGebra 51

7.2 A Transposição Didática 53

7.3 O Saber Ensinado, o Conhecimento em Sala de Aula 55

7.3.1 A Materialização do Saber Ensinado nesta Pesquisa 57

7.4 A Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa e Validação 58

7.4.1 Fase 1: Análises Prévias (O Diagnóstico Epistemológico, Cognitivo e Didático) . . . 59
7.4.2 Fase 2: Concepção e Análise a Priori (O Planejamento e o Controle de Variáveis) . . . 59
7.4.3 Fase 3: Experimentação (A Aplicação Prática e a Coleta de Dados) 60
7.4.4 Fase 4: Análise a Posteriori e Validação (O Confronto e a Comprovação) . . . 61

8 Plano Educacional 63
8.1 Introdução ao Produto Educacional . . . 63
8.2 Da Rigidez de Newton à Suavidade das Splines, Uma Jornada de Modelagem Matemática. . . . 65
8.2.1 Aula 1: O Poder da Previsão, Interpolação e o Método de Newton . 66
8.2.2 Aula 2: Quando a Matemática "Falha", O Fenômeno de Runge . . 68
8.2.3 Aula 3: A Revolução Digital, Demonstração do GeoGebra e Splines 70
8.2.4 Aula 4: O Desafio do Designer, Modelagem Prática, Mão na Massa 71
8.2.5 Aula 5: O Fechamento de Ouro, Sistematização e Reflexão CTS . . 76
8.3 Sugestão de Atividade 2: O Design Aerodinâmico de um Veículo Elétrico . 77
8.4 Sugestão de Atividade 3: Engenharia de Infraestrutura. O Traçado Vertical de uma Rodovia Segura. . . . 78

9 Considerações Finais 79

Lista de Figuras

2.1 Ilustração do Processo de Interpolação. 14

5.1 Ilustração Fenômeno de Runge 36

6.1 Spline Linear de grau 1 sobre 5 pontos, exibindo quinas nos nós. 40
6.2 Behaviour of scheme 2 of quadratic interpolation when applied to the Runge function data points 43
6.3 Spline Quadrática de grau 2 sobre 5 pontos, exibindo transição suave. . . . 44
6.4 Representação de Splines Linear (vermelho) e Cúbica (azul) 49
6.5 Representação geométrica da Spline Cúbica, sobre 5 nós de controle. A transição entre os intervalos apresenta classe de suavidade C^2. 50

7.1 Triângulo Pedagógico 57
7.2 59
7.3 Ilustração Engenharia Didática 62
7.4 Ilustração da CTS 62

8.1 Professor, escaneie o código abaixo para acessar o cenário base desta aula diretamente no GeoGebra 72
8.2 73
8.3 O carrinho da montanha-russa sobreviveria a essa quina? 73
8.4 74
8.5 A suavidade das curvas 74
8.6 74
8.7 Professor, escaneie o código abaixo para acessar o cenário base desta aula diretamente no GeoGebra 75
8.8 75

Lista de Tabelas

2.1 Número de condição (norma 2) da matriz de Vandermonde para diferentes graus do polinômio, considerando os nós $x_i = 1 + i$. 16
2.2 Número de condição (norma 2) da matriz de Vandermonde para diferentes graus do polinômio, considerando os nós $x_i = 1 + i$. 17

3.1 Pontos conhecidos da função 20

4.1 Tabela de Diferenças Divididas de Newton 27
4.2 Dados Coletados de Intenção de Voto da Chapa Inovação 29
4.3 Tabela de Diferenças Divididas de Newton (Cenário de Desaceleração) . . . 30

5.1 Comparação entre os métodos de Lagrange e Newton 34
5.2 Comparação entre os métodos de interpolação de Lagrange e Newton . . . 34

8.1 Parâmetros e Estrutura de Aplicação da Sequência Didática 64
8.2 Dados do Censo IBGE nos anos de referência (Exemplo para o quadro). . . 67

Capítulo 1

Introdução

Um dos principais desafios do ensino de matemática é vincular a teoria abstrata à resolução de problemas práticos, especialmente na modelagem de dados. No estudo de funções e polinômios, é comum que as aulas fiquem presas a manipulações algébricas tradicionais, sem uma ligação direta com a geometria. Apesar de fundamentais na aproximação de funções por dados discretos, métodos clássicos como as fórmulas de Lagrange e Newton apresentam limitações em ordens elevadas. Nesses casos, surgem oscilações acentuadas nas extremidades do intervalo, limitação conhecida como Fenômeno de Runge. Perante este cenário, a Interpolação por Funções Spline e o conhecimento das Curvas de Bézier surgem como excelentes alternativas, utilizando polinômios por partes para garantir aproximações precisas, controle geométrico e curvas geometricamente suaves.

Com o objetivo de dar sustentação a este estudo, a pesquisa baseou-se em um levantamento bibliográfico detalhado. Foram analisadas dissertações defendidas na plataforma do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), além de artigos científicos e livros de referência sobre Cálculo Numérico, Interpolação de Dados e Modelagem Geométrica, ademais Educação Matemática. Essa busca documental permitiu compreender o panorama atual do tema e confirmou a importância de criar propostas práticas que aproximem os conceitos da matemática aplicada da realidade escolar da Educação Básica.

Para viabilizar essa transição do conteúdo para a sala de aula, o trabalho apoia-se no referencial teórico da Transposição Didática, de Yves Chevallard. A reconstrução do saber científico é determinante na apreensão do conceito de função, pois possibilita a superação de uma concepção estática e puramente algébrica. Com isso, o estudante passa a conceber as funções como modelos dinâmicos, contínuos e aplicáveis. Complementarmente, a sequência didática propõe atividades estruturadas de acordo com as fases da Engenharia Didática, de Michèle Artigue, e ganha um sentido prático e social por meio das reflexões da Abordagem Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS).

Por fim, a pesquisa utiliza o software de geometria dinâmica GeoGebra como a ferramenta essencial para o desenvolvimento de construções práticas e interativas. O uso dessa

tecnologia visual ajudará os estudantes a compreender o comportamento das curvas de forma dinâmica, transformando a rigidez dos métodos de Newton e Lagrange, a suavidade das splines e das curvas de Bézier em objetos fáceis de manipular e visualizar. Assim, esta introdução define o itinerário pedagógico deste trabalho, focado em unir o rigor da matemática ao desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA I: PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA INTERPOLAÇÃO

Nesse capítulo discorreremos sobre os métodos de Lagrange e Newton, que envolvem primeiramente o conceito de uma base sólida sobre a teoria da aproximação de funções e as propriedades algébricas dos polinômios. Além disso, mostraremos os problemas da interpolação, demonstrando a existência da unicidade de soluções por meio da Matriz de Vandermonde, observando as limitações numéricas que incluímos à resolução direta de sistemas lineares.

2.1 A Característica da Aproximação Polinomial

Em problemas de engenharia e física, muitas vezes encontramos funções cuja forma analítica é desconhecida ou apresenta complicações para serem manipuladas sejam elas, integrada ou diferenciada. Dessa forma, surge a necessidade de substituir a função por uma função ϕ que seja mais simples, mas que represente a função dada, digamos f, com precisão suficiente dentro de um intervalo de interesse.

Entre as diversas classes de funções aproximantes, os polinômios são sempre a primeira opção. A razão para isso é que os polinômios apresentam propriedades analíticas interessantes, sendo caracterizadas como funções infinitamente diferenciáveis (C^∞) em todo o domínio real, apresentando derivadas e integrais, que também são polinômios, o que tornam os cálculos mais fácil. Assim, eles podem ser calculados de forma mais rápida, usando operações aritméticas simples como adição e multiplicação. A razão teórica para utilizar os polinômios, também é sustentada pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass a seguir.

Teorema 2.1. *[Teorema Weierstrass].* Suponhamos que f seja uma função contínua, definida pelo intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$, existe um polinômio $P(x)$ tal que:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Esse teorema é muito importante porque, em teoria, qualquer função que seja contínua pode ser aproximada por um polinômio com a precisão que desejar, desde que o grau do polinômio seja alto o bastante. A interpolação é uma das maneiras de se achar esse polinômio(BURDEN; FAIRES, 2016).

2.2 Definição Formal do Problema de Interpolação

O problema da interpolação polinomial pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja um conjunto de $n + 1$ pontos distintos, denominados nós de interpolação, dados por $x_0, x_1, \ldots, x_n$, e um conjunto correspondente de valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Procuramos um polinômio $P_n(x)$ de grau, no máximo, n, que satisfaça as condições de interpolação:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Geometricamente, isso significa que o gráfico do polinômio $P_n(x)$ passa exatamente por todos os pontos do conjunto de dados conforme ilustração abaixo.

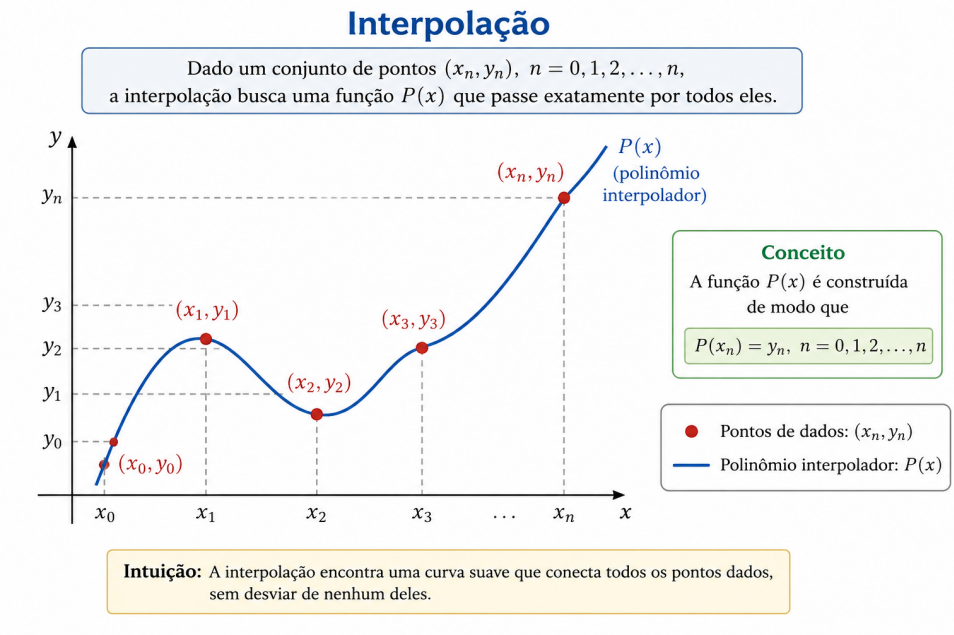
Em Matemática, somos instigados a responder duas perguntas essenciais para esse tipo de problema: 1- o problema tem solução, isto é, existe um Polinômio P que interpola todos os pontos dados, o que implica que V é invertível e, consequentemente o sistema VA=Y possui solução única; 2- Esse polinômio é único? A resposta para as duas perguntas é **sim** e sua demonstração reside na Álgebra Linear. Vejamos os argumentos:

Seja $P_n(x)$ um polinômio genérico de grau n escrito na forma canônica (base monomial):

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Como exemplificado acima, podemos perceber que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ representam os coeficientes desconhecidos que precisa ser identificados. Ao aplicar essas condições de interpolação $P_n(x_i) = y_i$ para cada ponto i, chegamos a um sistema de $n + 1$ equações lineares:

Figura 2.1: Ilustração do Processo de Interpolação.



Fonte: Elaborado com auxílio do ChatGPT (OpenAI, 2026). OPENAI. ChatGPT. Disponível em: https://chatgpt.com. Acesso em: 3 jul. 2026.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Esse sistema pode ser representado matricialmente na forma $V\mathbf{A} = \mathbf{Y}$, onde:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes V é conhecida como Matriz de Vandermonde. Para que o sistema tenha uma solução única para o vetor $\mathbf{A}$, o determinante de V deve ser diferente de zero ($\det(V) \neq 0$). Pode-se demonstrar por indução que o determinante da matriz de Vandermonde é dado pelo produto das diferenças entre os pontos:

$$\det(V) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Analisando a equação acima, observa-se que o determinante só será nulo se existir algum par $x_i = x_j$ com $i \neq j$. Como, por definição, os pontos de interpolação $x_0, \ldots, x_n$

são distintos, segue que $(x_i - x_j) \neq 0$ para todos os pares. Portanto, $\det(V) \neq 0$. Isso prova o teorema da existência e unicidade, o que implica que V é invertível e, consequentemente o sistema VA=Y possui solução única.

2.3 O Problema do Mal Condicionamento Numérico

Na resolução de sistemas lineares e na interpolação polinomial, a viabilidade de um método vai muito além de sua fundamentação teórica; ela depende drasticamente da sua estabilidade numérica (BURDEN; FAIRES, 2016). Ao trabalharmos com matrizes, como a matriz de Vandermonde, precisamos entender o quão sensíveis nossas equações são a pequenas falhas computacionais. É para medir essa sensibilidade que utilizamos o número de condição. O que é o número de condição? O número de condição de uma matriz é uma métrica matemática que avalia o quanto a solução de um sistema linear pode variar em resposta a pequenas alterações nos dados de entrada, como ruídos ou erros de arredondamento inerentes aos computadores. Matematicamente, o número de condição de uma matriz A é representado por:

$$\kappa(V) = ||V||_2 \cdot ||V^{-1}||_2 = \frac{\sigma_{max}(V)}{\sigma_{min}(V)}$$

,

em que $\sigma_{max}(V)$ e $\sigma_{min}(V)$ são, respectivamente, o maior e o menor valor singular da matriz V. Na Análise Numérica e na Álgebra Linear, a norma dois, também conhecida como norma euclidiana ou norma L_2 é, em essência, a medida do "tamanho", "comprimento"ou "energia"de um elemento matemático, seja ele um vetor ou uma função. Esse número atua como um fator de amplificação: se uma matriz tem $\kappa(A) = 10^6$, um erro minúsculo nos dados iniciais pode ser amplificado de tal forma que comprometa totalmente a precisão do resultado final. O que é ser uma matriz mal condicionada? Dizemos que uma matriz é mal condicionada quando o seu número de condição é excessivamente alto. Na prática, isso significa que o sistema é extremamente instável do ponto de vista computacional. Pequenas imprecisões em ponto flutuante durante os cálculos (como na Eliminação de Gauss) são amplificadas a ponto de gerar coeficientes completamente incorretos. Esse é exatamente o problema da matriz de Vandermonde: sua instabilidade motiva o uso de métodos alternativos, como os de Lagrange e Newton, que evitam a inversão dessa matriz. Para ilustrar quão drástico é esse problema na matriz de Vandermonde, a tabela a seguir demonstra como o seu número de condição cresce de forma exponencial à medida que a dimensão da matriz e o grau do polinômio (n) aumentam:

Se há um único polinômio que resolve o sistema linear $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$, qual é a razão para utilizar os métodos de Lagrange e Newton? Por que não usar a Eliminação de Gauss na matriz de Vandermonde? A resposta se encontra na Estabilidade Numérica. A matriz de

Tabela 2.1: Número de condição (norma 2) da matriz de Vandermonde para diferentes graus do polinômio, considerando os nós $x_i = 1 + i$.

Grau n	**Ordem da matriz**	**Número de condição** $\kappa_2(V)$
2	3×3	$7,09 \times 10^1$
3	4×4	$1,17 \times 10^3$
4	5×5	$2,62 \times 10^4$
5	6×6	$7,31 \times 10^5$
6	7×7	$2,45 \times 10^7$
7	8×8	$9,52 \times 10^8$
8	9×9	$4,23 \times 10^{10}$
9	10×10	$2,11 \times 10^{12}$
10	11×11	$1,16 \times 10^{14}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Vandermonde é tradicionalmente mal condicionada, particularmente para valores altos de n.

Mais especificamente, o número de condição de uma matriz constitui uma medida da sensibilidade da solução de um sistema linear em relação a pequenas perturbações nos dados de entrada. Considere o sistema linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

em que A é uma matriz quadrada e inversível. Se o vetor dos termos independentes sofre uma pequena perturbação $\Delta\mathbf{B}$, a solução correspondente também sofrerá uma perturbação $\Delta\mathbf{X}$. Nesse caso, vale a estimativa

$$\frac{|\Delta\mathbf{X}|}{|\mathbf{X}|} \leq \kappa(A)\frac{|\Delta\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|},$$

Essa desigualdade mostra que o erro relativo na solução pode ser amplificado por um fator igual ao número de condição da matriz. Assim, quanto maior for $\kappa(A)$, maior será a sensibilidade da solução a erros de arredondamento ou pequenas imprecisões nos dados do problema.

Por exemplo, se $\kappa(A) = 5$, um erro relativo de aproximadamente 1% no vetor $\mathbf{B}$ poderá resultar em um erro relativo de até 5% na solução. Por outro lado, se $\kappa(A) = 10^6$, um erro relativo da ordem de 10^{-8} poderá ser amplificado para cerca de 10^{-2}, comprometendo significativamente a precisão dos resultados numéricos.

Dessa forma, o número de condição de uma matriz avalia o quanto a solução de um sistema linear varia em resposta a pequenas mudanças nos dados de entrada como erros de arredondamento ou ruído nos dados. Para a matriz de Vandermonde, $\kappa(V)$ aumenta de forma exponencial à medida que n cresce.

Para ilustrar esse fato, considere a matriz de Vandermonde com $x_0 = 1$ e $x_i = x_0 + 1$, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, os nós são

$$1, 2, \ldots, n + 1.$$

A Tabela abaixo apresenta o número de condição da matriz de Vandermonde de dimensão n.

Tabela 2.2: Número de condição (norma 2) da matriz de Vandermonde para diferentes graus do polinômio, considerando os nós $x_i = 1 + i$.

Grau n	**Ordem da matriz**	**Número de condição** $\kappa_2(V)$
2	3×3	$7,09 \times 10^1$
3	4×4	$1,17 \times 10^3$
4	5×5	$2,62 \times 10^4$
5	6×6	$7,31 \times 10^5$
6	7×7	$2,45 \times 10^7$
7	8×8	$9,52 \times 10^8$
8	9×9	$4,23 \times 10^{10}$
9	10×10	$2,11 \times 10^{12}$
10	11×11	$1,16 \times 10^{14}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observe que o crescimento do número de condição é extremamente rápido: de $n = 2$ para $n = 5$, aumenta de aproximadamente 10, já de $n = 2$ para $n = 10$ a diferença chega à ordem de 10.

Isso quer dizer que ao tentar resolver o sistema $V\mathbf{A} = \mathbf{Y}$ computacionalmente, pequenos erros em ponto flutuante podem levar a coeficientes a_k totalmente errados resultando num polinômio que não se ajusta aos dados.

Conclui-se, então, que embora a base monomial $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ seja teoricamente válida, ela é computacionalmente instável. Isso motiva a busca por outras bases polinomiais que representem o mesmo polinômio único, mas de formas mais estáveis e eficientes de calcular. É neste contexto que surgem as bases dos métodos de Lagrange e de Newton, especificados adiante. Como veremos, tais métodos evitam a necessidade da inversão da mariz de Vandermonde, consequentemente, proporcionando mais estabilidade.

Capítulo 3

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA II: A FORMA DE LAGRANGE

Com a discussão sobre a existência e a unicidade do polinômio interpolador superada e com as dificuldades numéricas associadas à abordagem monomial (Matriz de Vandermonde), este capítulo é dedicado ao estudo da primeira forma alternativa eficiente de representação: a Interpolação de Lagrange. Adotamos a abordagem de Lagrange em sua forma clássica devido à sua simetria e clareza conceitual. O problema da interpolação é reformulado como um problema de combinação linear de polinômios de base ortogonais considerando os nós de interpolação.(BURDEN; FAIRES, 2016)

3.1 Contexto Histórico

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) foi um matemático de nacionalidade ítalo-francesa que teve um papel essencial na criação do cálculo variacional e da mecânica analítica. Embora a fórmula de interpolação que leva seu nome tenha sido publicada pela primeira vez em 1779 por Edward Waring e redescoberta depois por Euler em 1783. Entretanto, foi Lagrange que promoveu os estudos de Euler na École Normale em 1795. A ideia por trás do Método de Lagrange é muito diferente da solução de sistemas lineares porque, em vez de calcular números a_k para potências de x, Lagrange sugere construir o polinômio direto usando funções especiais, mais tarde verificando ser funções racionais, que têm uma qualidade de chaveamento (ou filtragem) nos pontos importantes. (LAGRANGE, 1795)(BOYER, 2012).

Mais precisamente, considere o problema de interpolar o conjunto de pontos distintos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$.

Lagrange considera o polinômio $P_n(x)$ como uma soma ponderada:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{3.1}$$

Para essa equação satisfazer a condição de interpolação $P_n(x_i) = y_i$, os polinômios $L_k(x)$, chamados de Polinômios de Base de Lagrange ou polinômios cardinais, devem obedecer à propriedade do Delta de Kronecker:

$$L_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

Esta propriedade impõe duas condições estruturais sobre cada $L_k(x)$.

Assim, para garantir que $L_k(x_i) = 0$ para todo $i \neq k$, o polinômio $L_k(x)$ deve ter raízes em todos os nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$, exceto em x_k. Logo, o numerador deve conter o produto dos termos lineares $(x - x_j)$.

Desta forma, para garantir que $L_k(x_k) = 1$, devemos dividir o numerador pelo seu valor avaliado em x_k.

Matematicamente, o polinômio de base $L_k(x)$ é construído por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Assim, a definição formal é obtida por meio da notação compacta de produtório:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Note-se que cada $L_k(x)$ é um polinômio de grau n, pois é o produto de n termos lineares. Consequentemente, a combinação linear $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$ também será um polinômio de grau máximo n, satisfazendo as condições do problema.

Observando os casos mais simples, para exemplificar a construção referente a interpolação linear entre os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), utilizando a fórmula de Lagrange, necessita-se de dois polinômios fundamentais, $L_0(x)$ e $L_1(x)$.

Para $L_0(x)$, o índice j assumido para todos os valores, exceto o zero (ou seja, $j = 1$)

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

E, para $L_1(x)$, o índice j assume todos os valores, exceto 1 (ou seja, $j = 0$)

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Agrupando os termos, obtemos o polinômio interpolador de Lagrange $P_1(x)$, de grau 1, dado por:

$$P_1(x) = y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) + y_1 \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right).$$

Observa-se que essa é exatamente a equação da reta que passa por dois pontos, co-

mumente ensinada em geometria analítica, mas deduzida aqui através da teoria geral de operadores de Lagrange.

De forma similar obtermos o polinômio de Lagrange de grau 2 $P_2(x)$ que interpola os pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2) dado por:

$$P_2(x) = y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\cdot\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right) + y_1 \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\cdot\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) + y_2 \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\cdot\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right).$$

Exemplo 1. *A seguir, apresentamos um exemplo prático para consolidar a teoria exposta. Para tanto, considere que conhecemos os valores de uma função $f(x)$ em três pontos distintos, conforme a Tabela 3.1.*

Tabela 3.1: Pontos conhecidos da função

x	$f(x)$
1	2
2	3
4	1

O problema consiste em determinar um polinômio interpolador $P(x)$, de grau menor ou igual a 2, que passe exatamente por esses pontos.

Solução: O polinômio interpolador de Lagrange é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

onde os polinômios base de Lagrange são definidos por:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Para os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, temos:

Polinômio base $L_0(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}.$$

Polinômio base $L_1(x)$:

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2}.$$

Polinômio base $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

Substituindo os valores de $f(x)$ na expressão (3.1), obtemos:

$$P(x) = 2L_0(x) + 3L_1(x) + 1L_2(x),$$

ou seja,

$$P(x) = \frac{2(x-2)(x-4)}{3} - \frac{3(x-1)(x-4)}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{6}.$$

Verifica-se facilmente que qsse polinômio satisfaz:

$$P(1) = 2, \quad P(2) = 3, \quad P(4) = 1.,$$

Portanto, o método de Lagrange possibilita a construção direta do polinômio interpolador sem a necessidade de resolver sistemas lineares, empregando funções base que têm a característica de assumir o valor 1 em seu ponto correspondente e 0 nos outros pontos de interpolação. Como nem tudo são flores, abaixo seguimos com alguns comentários sobre o polinômio interpolador de Lagrange, o que motiva a formulação do modelo de Newton e posteriormente apresentar a teoria de nosso interesse, interpolação por Splines.

3.2 Análise do Erro na Interpolação

Levando em consideração que $P_n(x)$ é apenas uma aproximação de uma função real $f(x)$, existe um erro associado $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ que pode ser mensurado se a função f for suficiente suave.

Seja $f \in C^{n+1}[a,b]$, isto é, f é uma função que possui derivadas contínuas até a ordem $n+1$, e $P_n(x)$ o polinômio que interpola f nos pontos distintos $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$. Então, para cada $x \in [a,b]$, existe um número $\xi(x)$ (dependente de x) no intervalo (a,b) tal que:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{3.2}$$

Essa fórmula é notoriamente parecida com o termo de resto da série de Taylor ($R_n(x)$). Nessa série, o termo de resto pode ser descrito como um erro de apoximação.

Assim, é necessário elucidar que o termo de resto (ou simplesmente resto de Taylor) é, de forma bem direta, a margem de erro de uma aproximação (STEWART, 2016). Quando usamos a Série de Taylor, a ideia é pegar uma função complexa, como $\sin(x)$, e^x ou $\ln(x)$, e transformá-la em um polinômio, que é muito mais fácil de calcular. Porém, como um

polinômio tem um número finito de termos e a série completa é infinita, ao "cortar"a série em um determinado ponto, nós cometemos um pequeno erro de precisão. Esse erro é o resto.

A diferença principal, ao compararmos as abordagens de Taylor e de Lagrange, é que, uma vez que Taylor foca a aproximação em um único ponto x_0 (utilizando $(x - x_0)^{n+1}$), a interpolação espalha o erro ao longo dos nós $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

A análise dessa equação mostra dois fatores que afetam a magnitude do erro, o comportamento da função. Primeiro, o termo $f^{(n+1)}(\xi)$ sugere que funções com derivadas de alta ordem que oscilam rapidamente, são difíceis de interpolar. Segundo, a expressão do erro contém o produtório $\prod(x - x_i)$, que depende apenas da seleção dos pontos x_i. Esse segundo aspecto nos conduz à discussão sobre a seleção adequada dos nós de interpolação.

Isto posto, é válido afirmar que os nós de Chebyshev podem ser utilizados para minimizar o erro de interpolação polinomial de Lagrange exibido na fórmula anterior. Tal fórmula funciona como o "equivalente global"do resto de Taylor quando espalhamos a aproximação por vários pontos (STEWART, 2016)(BURDEN; FAIRES, 2016).

Dessa forma, destaca-se como os nós de Chebshev minimizam o erro, pois, se consideramos a equação 3.2, vemos que o erro de aproximação depende diretamente de duas partes:

O comportamento das derivadas da função:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \tag{3.3}$$

Observa-se que não podemos controlar as derivadas, uma vez que essa parte depende da função dada.

Além disso, devemos considerar o produtório dos nós:

$$\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{3.4}$$

Esse é um aspecto que podemos controlar escolhendo onde colocar os pontos x_i.

Considerando os dados apresentados, se escolhermos pontos igualmente espaçados (como $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$), esse produtório assume valores extremamente altos perto das extremidades do intervalo. Isso faz com que o erro da aproximação expluda nas bordas, um fenômeno perverso conhecido como Fenômeno de Runge. Para resolver isso, os Nós de Chebyshev entram em ação de três formas:

I. Distribuição geométrica estratégica: em vez de espalhar os pontos de forma uniforme, os nós de Chebyshev concentram mais pontos perto das bordas do intervalo $[a, b]$ e menos pontos no centro (STEWART, 2016)(BURDEN; FAIRES, 2016). Matematicamente, eles são as raízes dos Polinômios de Chebyshev e são obtidos projetando pontos igualmente espaçados de uma semicircunferência de volta para o eixo x. Para o intervalo $[-1, 1]$, a

fórmula de cada nó x_i é:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n$$

II. O Princípio do Minimax (achatamento do erro): para demonstrar que o grande trunfo dos nós de Chebyshev é que eles resolvem um problema de otimização. Assim, eles são a escolha única de pontos que garante que o valor máximo absoluto do produtório (STEWART, 2016)(BURDEN; FAIRES, 2016). $|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$ seja o menor possível em todo o intervalo. Enquanto em pontos equivalentes o erro oscila como uma corda solta (quase zero no centro e gigante nas pontas), Chebyshev "achata"essas oscilações, distribuindo o erro de forma homogênea (Burden; Faires, 2016; Stewart, 2016). No intervalo $[-1, 1]$, o valor máximo desse produtório cai para impressionantes:

$$\frac{1}{2^n}$$

III. Comparação entre Taylor e Chebyshev, um ganho prático: enquanto a abordagem de Taylor cria uma aproximação perfeita apenas perto de um único ponto (e vai decaindo cruelmente conforme você se afasta dele), a interpolação com os nós de Chebyshev cria uma aproximação democrática: o erro é controlado e minimizado uniformemente ao longo de todo o intervalo $[a, b]$.

Diante do exposto, é crucial perceber quais são os pontos a considerar na Forma de Lagrange, aspecto que abordaremos a seguir.

3.3 Vantagens e Limitações Teóricas da Forma de Lagrange

A contribuição de Lagrange que mais se destaca é de natureza teórica. Ela possibilita realizar operações algébricas sobre o polinômio sem precisar determinar os coeficientes de forma explícita na base canônica. Do ponto de vista computacional, o método possui uma desvantagem estrutural significativa, a ausência de permanência, levando em consideração que $P_n(x)$ foi calculado para um conjunto de dados. Caso uma nova medição (x_{n+1}, y_{n+1}) seja disponibilizada, atualiza-se o modelo para um polinômio $P_{n+1}(x)$.

Na forma de Lagrange, a inclusão de mais um nó x_{n+1} modifica tanto o denominador quanto o numerador de todos os polinômios de base $L_k(x)$ anteriores. Dessa forma, força o algoritmo a eliminar os cálculos anteriores e começar o processo do zero, resultando em um custo computacional $O(n^2)$ para cada atualização. Essa limitação motiva o estudo do método abordado no próximo capítulo: O Polinômio Interpolador de Newton, que contorna a dificuldade acima menciosana.

Capítulo 4

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA III: A FORMA DE NEWTON

A fórmula de Lagrange, embora bonita por sua simetria e clareza teórica, tem uma fragilidade prática quando lidamos com problemas de acrescentar mais pontos. Mais precisamente, a cada novo ponto adicionado no conjunto de dados, as funções de base do método de Lagrange precisam ser recalculadas, feitas de forma global e interdependente. Como se a cada nova informação precisássemos ter que reescrever o texto todo sem poder usar os parágrafos já escritos.

O Método de Newton, ou interpolação por diferenças divididas, oferece-nos uma resolução para esse problema, com uma mudança de base algébrica, que nos permite acrescentar novos pontos sem ter que recalcular todo o polinômio interpolador. Assim, a cada ponto adicionado, o Método de Newton usa as informações do polinômio interpolador de grau n para formar o novo polinômio interpolador de grau $n+1$, evitando todo o processo de recálculo como no método de Lagrange.

Podemos comparar a expressão do polinômio interpolador dado pelo método de Newton com a Série de Taylor de uma função em torno de um ponto, uma vez que ambas fazem aproximações sucessivas, mas enquanto a série de Taylor truncada, com $n+1$ parcelas, determina um polinômio de grau n em torno de um ponto fixo e necessita da expressão da função, no modelo de Newton, ao invés de usar as derivadas de uma função, utiliza-se as diferenças divididas haja vista que o interessse está em interpolar todos os pontos do conjunto de dados.

4.1 Contexto Histórico

A teoria da interpolação de Isaac Newton (1643-1727) foi desenvolvida na segunda metade do século XVII, especialmente entre 1665 e 1675, período em que ele fez importantes contribuições para a matemática (BOYER, 2012). Para Newton, a interpolação não era

apenas uma fórmula, mas parte de um projeto maior de construção de uma "mecânica geral" para produzir curvas que passassem por pontos dados, o que hoje chamamos de interpolação polinomial.

Essas décadas coincidem também com a saída de Newton da Universidade de Cambridge, momento esse chamado de, *annus mirabilis*, ou anos milagrosos, que leva em conta o que ele desenvolveu, novas ideias centrais do cálculo, na ótica e da matemática algébrica.

Antes de Newton, já se conhecia a interpolação, usada há muito tempo em Astronomia e Tabulação. Por exemplo, Harriot e Briggs usavam essa técnica, mas ela só fazia sentido quando os dados estavam igualmente espaçados. Newton, ao contrário, queria algo muito mais geral e que funcionasse com qualquer conjunto de pontos, mesmo que esses fossem medidos de forma irregular. Em 1675, Newton escreveu para John Smith, um próspero negociante londrino e grande entusiasta da matemática. Então, naquele ano, Jonh estava empenhado em uma tarefa para criar uma tabela que listasse as raízes quadradas, cúbicas e quárticas de todos os números inteiros de 1 a 10.000.

Newton sugeriu que fossem calculadas somente as raízes dos números múltiplos de 100, e que a interpolação fosse usada para preencher os demais dados com mais precisão (NEWTON, 1711)(BOYER, 2012).

Naquelas cartas, foi possível observar, pela primeira vez o que viria a ser a fórmula de Newton com diferenças divididas, permitindo interpolar qualquer função a partir de poucos pontos calculados (BOYER, 2012).

4.2 O Método de Newton

No Capítulo 2, observamos que o polinômio interpolador $P_n(x)$ pode ser expresso na base monomial $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Contudo, para evitar os problemas de mal condicionamento associados a essa formulação, naquela ocasião, foi utilizada a base de Lagrange $\{L_0(x), \ldots, L_n(x)\}$. No método de Newton, porém, será utilizada uma nova base, denotada por Π_n, composta pelos seguintes polinômios:

$$
\begin{aligned}
N_0(x) &= 1 \\
N_1(x) &= (x - x_0) \\
N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
N_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)
\end{aligned}
$$

Desse modo, o polinômio interpolador será escrito como uma combinação linear desses elementos, ou seja:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ são os coeficientes a serem determinados.

A estrutura triangular obtida pelas condições de interpolação $P_n(x_j) = y_j, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, permite que esse sistema de cálculo dos coeficientes seja feito de forma recursiva, sem a necessidade de inversão matricial direta.

Considerando a referida estrutura triangular, é essencial apresentar o sistema triangular que determina os coeficientes do polinômio interpolador. Dessa forma, temos o sistema triangular no Método de Newton (RUGGIERO; LOPES, 2007). Diferente da abordagem tradicional que gera matrizes cheias e de difícil resolução computacional (como a Matriz de Vandermonde), o Método de Newton introduz uma base de polinômios que simplifica o problema de interpolação. Para um conjunto de pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, o polinômio interpolador de Newton é escrito na forma:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Ao impor a condição de que o polinômio deve passar exatamente por todos os pontos dados ($P_n(x_i) = y_i$), as equações resultantes para determinar os coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ assumem uma estrutura perfeitamente triangular inferior:

$$\begin{cases} c_0 = y_0 \\ c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ \vdots \\ c_0 + c_1(x_n - x_0) + \cdots + c_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) = y_n \end{cases}$$

Em notação matricial, o sistema linear triangular que determina os coeficientes é expresso por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \ldots & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Os coeficientes a_k que compõem a forma de Newton são determinados computacionalmente por meio das diferenças divididas. Ao contrário das diferenças finitas usadas em pontos equidistantes, as diferenças divididas consideram a variação não uniforme dos nós x_i.

É possível definir a diferença dividida de ordem k sobre os pontos $x_i, \ldots, x_{i+k}$, denotada por $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$, através da seguinte relação recursiva:

Ordem 0 (valor da função): $f[x_i] = y_i$.

Ordem 1 (Taxa de variação média):

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Ordem k (Definição Recursiva):

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

A tabela abaixo sugere uma forma de representar o cálculo das diferenças divididas, pelo menos até a ordem 2. Mas, a idéia é a mesma para uma ordem k qualquer.

Tabela 4.1: Tabela de Diferenças Divididas de Newton

Dados (x_i)	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Observa-se que a diferença dividida de ordem k depende apenas das diferenças de ordem $k-1$. O denominador é sempre a diferença entre os extremos do intervalo de pontos considerados no numerador. Com essa definição, demonstra-se que o coeficiente k-ésimo do polinômio de Newton é exatamente a diferença dividida de ordem k que inicia em x_0:

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Assim, a fórmula geral de Newton torna-se:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Exemplo 2. *Considere os seguintes pontos conhecidos de uma função $f(x)$:*

x	$f(x)$
1	*2*
2	*3*
4	*1*

Deseja-se construir o polinômio interpolador de Newton de grau menor ou igual a 2.

Solução: O polinômio interpolador de Newton é dado por:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Os coeficientes a_k são obtidos por meio das diferenças divididas, onde

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

e os valores iniciais, que consistem das diferenças divididas de ordem zero, são:

$$f[x_0] = 2, \quad f[x_1] = 3, \quad f[x_2] = 1$$

Aplicando a fórmula de diferenças divididas de primeira ordem, obtemos:

$$f[x_0, x_1] = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1$$

e

$$f[x_1, x_2] = \frac{1 - 3}{4 - 2} = -1$$

Por sua vez, a diferença de segunda ordem: é

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 1}{4 - 1} = -\frac{2}{3}$$

Portanto, os coeficientes que compõe o polinômio interpolador dos dados fornecidos são:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{2}{3},$$

o polinômio interpolador de Newton:

$$P_2(x) = 2 + 1(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2).$$

Pode-se vericar através de um cálculo direto que

$$P(1) = 2, \quad P(2) = 3, \quad P(4) = 1.$$

Logo, o polinômio passa exatamente pelos pontos fornecidos.

O método de Newton permite a construção incremental do polinômio interpolador, facilitando a inclusão de novos pontos sem a necessidade de recomputar todo o polinômio, diferentemente do método de Lagrange. Vejamos um exemplo prático.

Exemplo 3. *Na reta final de uma eleição para o grêmio estudantil da escola, a chapa Inovação começou a ganhar muitos seguidores. O comitê anotou a porcentagem de intenção de votos em apenas três dias da semana:*

Tabela 4.2: Dados Coletados de Intenção de Voto da Chapa Inovação

Dia da Campanha (x)	**Intenção de Votos ($f(x)$)**
Dia 1 (x_0)	10%
Dia 3 (x_1)	18%
Dia 5 (x_2)	22%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

O Desafio: O comitê quer estimar qual era a intenção de votos no Dia 4, usando o polinômio de Newton de 2^o grau.

Solução: Vamos calcular os elementos da Tabela de Diferenças Divididas. Primeiro, vamos ver o crescimento entre os dias individuais (Ordem 1), e depois a "aceleração" geral da campanha (Ordem 2).

Ordem 1 (Crescimento entre Dia 1 e Dia 3): Com 3 pontos, nós calculamos duas "camadas"de crescimento.

$$f[x_0, x_1] = \frac{18-10}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

Cresceu rápido: 4

Ordem 1 (Crescimento entre Dia 3 e Dia 5):

$$f[x_1, x_2] = \frac{22-18}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$$

Perdeu força: cresceu apenas 2

Ordem 2 (A Desaceleração Geral entre o Dia 1 e o Dia 5): Para isso, pegamos os resultados anteriores (2 e 4) e dividimos pelo tempo total:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-4}{5-1} = \frac{-2}{4} = -0,5.$$

Observação: Aquele -0,5 negativo é a prova matemática de que a campanha está freando. A curva da nossa parábola terá a concavidade voltada para baixo.

Tabela 4.3: Tabela de Diferenças Divididas de Newton (Cenário de Desaceleração)

Dias (x_i)	**Ordem 0** ($f[x_i]$)	**Ordem 1**	**Ordem 2**
1	**10**		
		4	
3	18		$\mathbf{-0,5}$
		2	
5	22		

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Resumo dos coeficientes que vamos usar:

- O valor inicial: 10
- O primeiro crescimento: 4
- A desaceleração: -0,5

Passo 2: Montando a Fórmula.

O Polinômio de Newton a fórmula estrutural do polinômio de grau 2 é a soma desses ritmos:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Colocando os nossos coeficientes e os dias iniciais ($x_0 = 1$ e $x_1 = 3$):

$$P_2(x) = 10 + 4(x - 1) - 0,5(x - 1)(x - 3)$$

Passo 3: Descobrindo o Dia 4.

Agora, para descobrir a porcentagem de votos no Dia 4, basta substituir o x por 4 na nossa fórmula:

$$P_2(4) = 10 + 4(4 - 1) - 0,5(4 - 1)(4 - 3)$$

$$P_2(4) = 10 + 4(3) - 0,5(3)(1)$$

$$P_2(4) = 10 + 12 - 0,5(3)$$

$$P_2(4) = 10 + 12 - 1,5$$

$$P_2(4) = 22 - 1,5$$

$$P_2(4) = 20,5$$

Resposta Final: Através da Interpolação de Newton, estimamos que no Dia 4 a chapa tinha 20,5% das intenções de voto.

Capítulo 5

Comparação entre os métodos de interpolação de Lagrange e Newton

Este capítulo destina-se a alguns comentários sobre os métodos de interpolação polinomial de Lagrange e de Newton, que utilizam duas formas clássicas para a construção do polinômio interpolador associado a um conjunto de dados. Desde que um polinômio de grau n é unicamente determinado por $n+1$ pontos distintos, os dois métodos obtém o mesmo polinômio interpolador, entretanto suas formas de construção, propriedades computacionais e potencialidades pedagógicas têm diferenças que podem ser observadas. Vejamos algumas.

Equivalência Teórica dos Métodos

Do ponto de vista matemático, os métodos de Lagrange e Newton são equivalentes, no sentido de que ambos produzem o único polinômio $P_n \in \mathbb{P}_n$, que interpola os $n+1$ pontos dados (x_i, y_i), com x_i distintos.

Essa equivalência decorre diretamente do teorema de existência e unicidade do polinômio interpolador. Sendo assim, quaisquer diferenças observadas entre os métodos não estão relacionadas ao resultado final, mas sim à forma de construção e representação do polinômio.

Forma de Construção do Polinômio

A abordagem de Lagrange é aplicada para extrair os coeficientes do polinômio interpolador na forma de uma combinação linear dos polinômios fundamentais $L_i(x)$. A construção de Lagrange é direta e é fácil ver como cada ponto contribui para a interpolação.

Por outro lado, o método de Newton utiliza o conceito de diferenças divididas e constrói o polinômio de forma incremental. Desse modo, cada novo termo acrescentado ao polinômio depende apenas do novo ponto inserido, preservando os valores já interpolados anteriormente. Essa característica confere ao método de Newton maior flexibilidade em situações nas quais os dados são incorporados progressivamente.

Do ponto de vista computacional, o método de Newton apresenta grandes vantagens em relação ao método de Lagrange. A construção desse método evita a necessidade de recalcular todo o polinômio quando novos pontos são adicionados, o que torna o método mais eficiente para grandes conjuntos de dados.

Além disso, a avaliação do polinômio na forma de Newton pode ser realizada de maneira mais eficiente, tendo em vista que pode ser associada ao esquema de Horner. Este esquema é fundamental no raciocínio apresentado pois reduz drasticamente o número de operações aritméticas necessárias para a computação do polinômio, transformando potências sucessivas em multiplicações e somas simples; essa eficiência estrutural não apenas acelera o processamento, mas também minimiza a propagação de erros numéricos que comprometem a precisão do método (RUGGIERO; LOPES, 2007). Em contradição, a forma de Lagrange envolve produtos e divisões que podem amplificar erros de arredondamento, particularmente para valores elevados de n. Para pequenas quantidades de pontos dentro do conjunto, o método de Lagrange continua sendo viável e simples para interpolar.

Análise do Erro

Em relação ao erro de interpolação, ambos os métodos de Lagrange e Newnton compartilham a mesma expressão teórica:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

para algum ξ no intervalo considerado. Portanto, o erro não depende do método utilizado, mas sim da regularidade da função interpolada e da escolha dos nós de interpolação.

Interpretação Didática dos Métodos.

De acordo com os conceitos do ensino de Matemática, os métodos de Lagrange e Newton desempenham papéis didáticos distintos e complementares.

Ao analisar o método de Lagrange que se destaca por sua clareza conceitual, sendo adequado para introduzir a ideia de interpolação polinomial, funções interpoladoras e unicidade do polinômio. Com estrutura clara, que auxilia na compreensão teórica, mesmo que possua limitações práticas.

Observando o método de Newton, percebe-se que esse método é favorável para exploração de conceitos como recursos, construção incremental e organização algorítmica. Neste modelo, encontramos um contexto apropriado para atividades que envolvem tecnologia digital, aplicado em planilhas eletrônicas e softwares de matemática dinâmica.

Síntese Comparativa

A Tabela **??** representa uma síntese das principais diferenças entre os métodos de Lagrange e Newton, enquanto a Tabela 5.2 apresenta com mais detalhes essas diferenças.

Tabela 5.1: Comparação entre os métodos de Lagrange e Newton

Aspecto	**Lagrange**	**Newton**
Forma de construção	Explícita	Incremental
Atualização com novos pontos	Recalcula todo o polinômio	Acrescenta novo termo
Eficiência computacional	Menor	Maior
Estabilidade numérica	Limitada para n grande	Superior
Potencial didático	Conceitual	Algorítmico

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Tabela 5.2: Comparação entre os métodos de interpolação de Lagrange e Newton

Critério	**Método de Lagrange**	**Método de Newton**
Forma do polinômio	Expressão explícita baseada nos polinômios fundamentais de Lagrange	Forma incremental baseada em diferenças divididas
Construção	Construído de uma só vez a partir de todos os pontos	Construído passo a passo, com possibilidade de extensão
Inclusão de novos pontos	Exige o recálculo completo do polinômio	Permite acrescentar novos termos sem alterar os anteriores
Custo computacional	Maior para conjuntos grandes de dados	Menor, especialmente em situações incrementais
Estabilidade numérica	Pode apresentar instabilidades para grau elevado	Mais estável, sobretudo quando avaliado com esquema de Horner
Erro de interpolação	Depende da escolha dos nós, não do método	Idêntico ao de Lagrange (dependente dos nós)
Facilidade conceitual	Alta: forma direta e intuitiva	Média: exige compreensão de diferenças divididas
Potencial didático	Introdução teórica à interpolação	Exploração algorítmica e computacional
Adequação ao uso computacional	Limitada	Alta
Equivalência teórica	Ambos produzem o mesmo polinômio interpolador único	

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Diante do exposto, percebemos que, embora tenham uma base matemática semelhante, os métodos de Newton e de Lagrange são indicados para objetivos educacinoais diferentes. O método de Lagrange é mais útil para introduções teóricas, no entanto o método de Newton oferece vantagens na prática e na performance computacional.

Ao analisar ambos os métodos juntos, pode-se obter uma ótima estratégia para apresentar o tema na Educação Básica. É possível unir o rigor matemático, a eficiência nos cálculos e sua aplicação no ensino com problemas práticos e contextualizados em finanças, calculo de temperatura, censos populacionais ou políticos, etc. Desta forma, é importante abordar ambos de forma conjunta no ensino da interpolação polinomial, reforçando seu valor pedagógico e prático. Entretanto, como será demonstrado adiante, surge uma limitação ao se interpolar conjuntos mais extensos de dados. Esse problema surge devido a um fenômeno de instabilidade que ocorre nas extremidades do intervalo analisado.

O Fenômeno de Runge e a Limitação dos Polinômios de Alto Grau

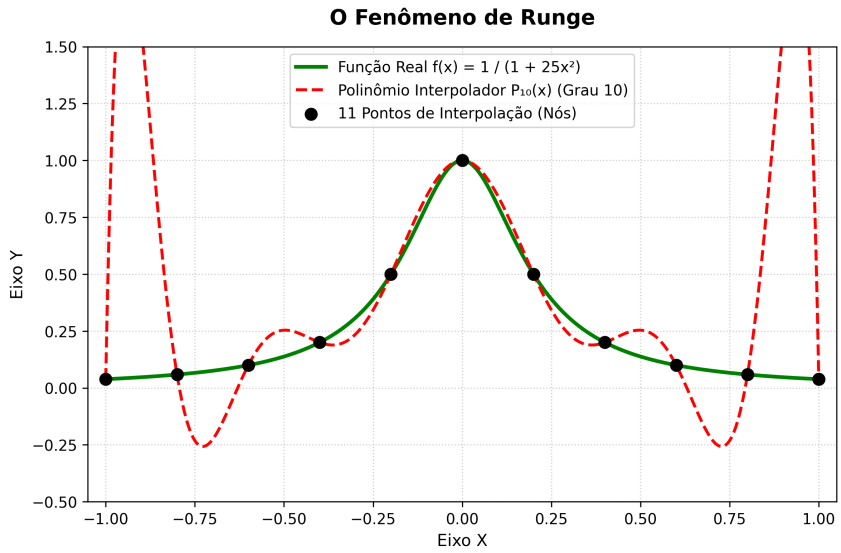
Ao se deparar com o problema de interpolar um grande número de pontos (nós) num plano cartesiano, a intuição matemática inicial, é muitas vezes a única ensinada na Educação Básica, ao qual sugere que basta aumentar o grau do polinômio interpolador. Pelo Teorema de existência e unicidade do polinômio interpolador, sabemos que por $n+1$ pontos distintos passa um único polinômio de grau menor ou igual a n. Logo, para projetar uma pista com 15 pontos de controle, poderíamos supor que um polinômio de grau 14 resolveria o problema perfeitamente.

Contudo, na prática da Matemática Aplicada, essa abordagem revela-se desastrosa devido ao Fenômeno de Runge, descoberto pelo matemático alemão Carl David Tolmé Runge em 1901.

Runge demonstrou que, ao interpolar certas funções utilizando polinômios de grau muito elevado com nós igualmente espaçados, o polinômio resultante sofre de oscilações violentas e severas nas extremidades do intervalo. Em vez de a curva se ajustar suavemente aos dados, o erro de interpolação tende ao infinito à medida que o grau do polinômio aumenta. O exemplo clássico utilizado por Runge para demonstrar essa anomalia é a função:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Figura 5.1: Ilustração Fenômeno de Runge



Fonte: Elaborado com auxílio do ChatGPT (OpenAI, 2026). OPENAI. ChatGPT. Disponível em: https://chatgpt.com. Acesso em: 10 jul. 2026.

Ao tentar interpolar esta função no intervalo $[-1, 1]$ usando um polinômio de grau elevado, a curva resultante comporta-se bem no centro do gráfico, mas diverge drasticamente nas bordas.

o Fenômeno de Runge invibilizaria que utilizássemos um polinômio de grau 15 para desenhar o trajeto completo, o carrinho sofreria oscilações extremas e incontroláveis nas primeiras e nas últimas quedas, tornando o projeto fisicamente inviável e perigoso.

É exatamente esta limitação geométrica e computacional dos polinômios de alto grau que justifica a introdução da interpolação segmentada, as chamadas Splines. Em vez de forçar um único polinômio de grau elevado a passar por 15 pontos, a matemática moderna divide o problema, utilizando vários polinômios de baixo grau, como funções afins, quadráticas ou cúbicas, conectados suavemente entre si. Assim, garantindo a continuidade e a suavidade da curva, eliminando completamente as oscilações indesejadas de Runge. Este será o objeto do próximo capítulo.

Capítulo 6

INTERPOLAÇÃO SEGMENTADA (SPLINES)

Como demonstrado nos capítulos anteriores, a interpolação polinomial, através dos métodos de Lagrange e Newton torna-se instável à medida que o número de pontos no conjunto de dados a ser interpolado aumenta. A tentativa de ajustar uma curva suave única a uma grande quantidade de dados frequentemente resulta em oscilações que podem prejudicar a utilização do polinômio interpolador para prever resultado nos extremos dos pontos interpolados, conhecidas como o Fenômeno de Runge.

Para solucionar este problema, adota-se a estratégia de dividir para conquistar. Em vez de buscar um único polinômio de alto grau para todo o domínio $[x_0, x_n]$, divide-se o domínio em n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ e constrói-se um polinômio de baixo grau geralmente 1°, 2° ou 3° para cada segmento. Surgem então as funções Splines. O termo deriva das réguas flexíveis usadas por desenhistas navais, chamadas splines que eram curvadas e fixadas por pesos, chamados ducks para traçar curvas suaves em projetos de cascos de navios (BOOR, 2001).

6.1 Um pouco de história: a Revolução das Curvas de Bézier

A necessidade de transpor o desenho físico para o ambiente computacional ganhou força em meados do século XX, impulsionada pela indústria automobilística francesa. Até a década de 1950, o design de automóveis dependia de modeladores mecânicos e desenhistas que utilizavam réguas flexíveis de madeira ou metal, as splines físicas moldadas por pesos de chumbo, os "patos", para criar as curvas aerodinâmicas das carroçarias. Este processo manual gerava inconsistências quando os projetos precisavam ser repassados para a linha de fabricação, pois a medição física era suscetível a falhas humanas (FARIN, 2002). A revolução matemática que resolveu este problema ocorreu de forma paralela e indepen-

dente dentro de duas gigantes automobilísticas concorrentes, a Citroën e a Renault. No final da década de 1950, o matemático e físico Paul de Casteljau, trabalhando na Citroën, foi o pioneiro na formulação de um método para avaliar curvas paramétricas baseadas em interpolação linear repetida. O seu método, hoje conhecido como Algoritmo de Casteljau, era geometricamente intuitivo e computacionalmente estável. Contudo, por questões de segredo industrial, a Citroën proibiu Casteljau de publicar as suas descobertas, mantendo o algoritmo restrito aos cofres da empresa (SALOMON, 2006).

Poucos anos depois, no início da década de 1960, o engenheiro Pierre Bézier, trabalhando na Renault, deparou-se com o mesmo problema ao tentar automatizar as máquinas de fresagem da montadora. De forma independente, Bézier desenvolveu um sistema matemático para descrever curvas, que ele batizou de sistema UNISURF (BÉZIER, 1974)(Bézier, 1974).

Ao contrário da Citroën, a Renault compreendeu o valor científico da descoberta e incentivou Bézier a publicar o seu trabalho. Por ter sido o primeiro a divulgar o método publicamente, estas curvas passaram a ser universalmente conhecidas como Curvas de Bézier (KHAN ACADEMY,).

Matematicamente, Pierre Bézier baseou o seu trabalho numa família de polinômios que já havia sido descrita em 1912 pelo matemático russo Sergei Natanovich Bernstein, conhecidos como Polinômios de Bernstein. A equação geral de uma Curva de Bézier de grau n é dada por uma combinação linear dos pontos de controle P_i ponderados pelos polinômios de Bernstein:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

O brilhantismo da abordagem de Bézier e de Casteljau foi criar uma relação visual direta entre a geometria dos "pontos de controle", que formam um polígono de controle, e o formato final da curva matemática. O projetista não precisava entender a equação polinomial acima, ele precisava apenas arrastar os pontos P_i numa tela, e o computador garantia que a curva resultante seria suave e contínua dentro do polígono delimitador.

Esta descoberta marcou o nascimento do Computer-Aided Geometric Design (CAGD - Design Geométrico Assistido por Computador). Hoje, o mesmo princípio matemático formulado para fabricar portas do Renault é a tecnologia central por trás de fontes de texto vetoriais (TrueType), da linguagem PostScript de impressoras e de softwares modernos de vetorização, ilustrando perfeitamente como problemas concretos moldam ferramentas matemáticas abstratas que, posteriormente, transformam a sociedade.

Hoje, as Curvas de Bézier, que são um tipo específico de Spline paramétrica, geralmente polinômios de grau 3, são a ferramenta principal de qualquer software de edição visual, como Adobe Photoshop, Illustrator, CorelDRAW e ferramentas de modelagem 3D.

Quando um designer utiliza a famosa “Ferramenta Canet” (Pen Tool) nesses progra-

mas, ele está, na verdade, manipulando os pontos de controle de um polinômio do 3º grau. Os "puxadores" (handles) que o usuário arrasta na tela alteram visualmente as tangentes, derivadas da curva nos pontos de encontro, garantindo a suavidade, (C^1 : curvas com tangentes contínuas), sem que o designer precise escrever uma única linha de sistema linear matricial.

6.2 Funções Spline

Dada uma malha de nós $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, uma função spline $S(x)$ de grau k é uma função que satisfaz duas propriedades fundamentais:

1. Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $S(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a k.
2. $S(x)$ e suas derivadas até a ordem $k-1$ são contínuas em todo o intervalo, especialmente nos nós internos x_i. Ou seja, $S(x) \in C^{k-1}[x_0, x_n]$.

A forma mais elementar de interpolação segmentada é a Spline Linear ou Spline de grau 1. Ela consiste simplesmente em conectar os pontos consecutivos por segmentos de retas. Para cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (onde $i = 0, \ldots, n-1$), definimos a função $S_i(x)$ como podemos observar:

$$S_i(x) = y_i + m_i(x - x_i).$$

Em que m_i é a inclinação da reta no intervalo:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Mesmo resolvendo os problemas das oscilações de Runge, a Spline Linear possui uma limitação estética e física grave, a derivada primeira $S'(x)$ não é contínua nos pontos de junção, a função apresenta "quina" ou ângulos abruptos. Dizemos que a Spline Linear é de classe C^0 (contínua), mas não C^1 (suave, que não formam bicos). Para aplicações de engenharia que envolvem velocidade ou fluxo, essa descontinuidade na derivada não é apropriada.

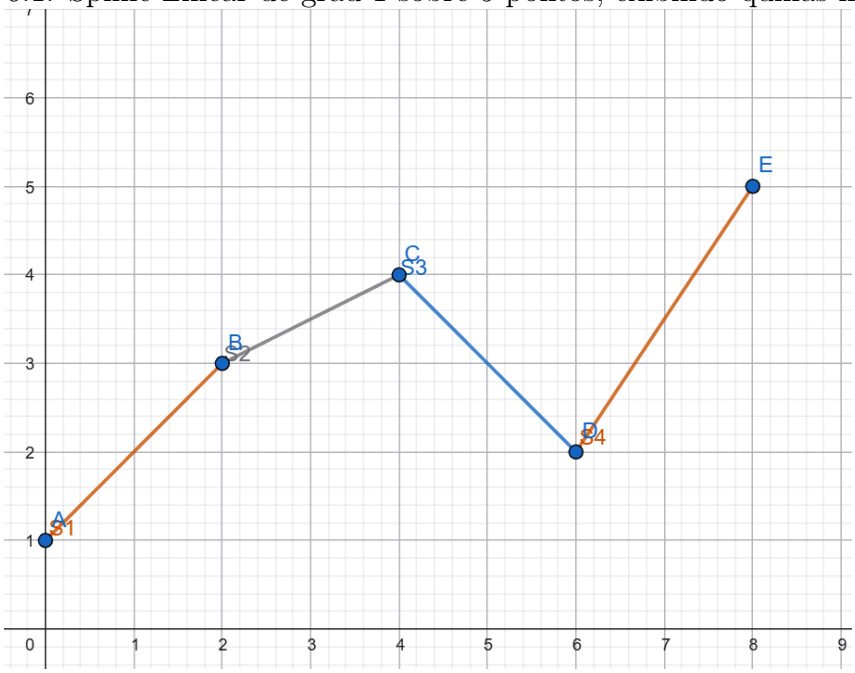
Para ilustrar de forma prática, geométrica e analítica entre os graus de interpolação, propõe-se a aplicação das Splines Linear (grau 1) sobre um conjunto de 5 pontos ordenados com coordenadas predefinidas:

$$P_0(0,1), \quad P_1(2,3), \quad P_2(4,4), \quad P_3(6,2), \quad P_4(8,5)$$

Como dispomos de 5 pontos, o domínio total da interpolação $[0, 8]$ é subdividido em $n = 4$ intervalos: $I_1 = [0, 2]$, $I_2 = [2, 4]$, $I_3 = [4, 6]$ e $I_4 = [6, 8]$.

A representação geométrica deste modelo, gerada no software GeoGebra, pode ser observada na Figura 6.1.

Figura 6.1: Spline Linear de grau 1 sobre 5 pontos, exibindo quinas nos nós.



Fonte:O Autor 2026.

Para obter uma curva visualmente suave, necessitamos que a primeira derivada (a inclinação da tangente) seja contínua ao passar de um segmento para outro. Para isso, elevamos o grau dos polinômios para 2. Assumimos que em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, a função é dada por um polinômio quadrático:

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Para um conjunto de $n+1$ pontos, temos n intervalos. Como cada polinômio quadrático possui 3 coeficientes a determinar, as incógnitas, (a_i, b_i, c_i), temos um total de $3n$ incógnitas para determinar.

Para encontrar esses valores, precisamos montar um sistema com $3n$ equações baseadas nas restrições de interpolação e suavidade. Vamos deduzir estas equações passo a passo.

Passo 1. Condições de Interpolação (Passar pelos pontos).

A spline deve passar pelos pontos que delimitam cada intervalo. Para cada um dos n intervalos, a curva deve tocar o ponto esquerdo (x_i):

$$S_i(x_i) = y_i \quad \text{para } i = 0, \ldots, n-1$$

(Isso gera n equações)

Para cada um dos n intervalos, a curva deve tocar o ponto direito (x_{i+1}):

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \text{para } i = 0, \ldots, n-1$$

(Isso gera mais n equações)

Até aqui, temos $2n$ equações. Faltam n para atingir as $3n$ necessárias.

Passo 2. Condições de Suavidade (Continuidade da Derivada)

Para evitar "quinas", a derivada do segmento anterior S_{i-1} deve ser igual à derivada do segmento atual S_i no ponto de encontro x_i.

Aplicamos esta condição aos nós internos ($x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Não aplicamos às pontas (x_0 e x_n) pois elas não têm vizinhos para conectar.

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$$

Substituindo pela expressão da derivada:

$$2a_{i-1}x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1$$

(Isso gera $n-1$ equações)

O Dilema da Equação Faltante, somando as equações:

$$2n \text{ (interpolação)} + (n-1) \text{ (suavidade)} = 3n - 1 \text{ equações}$$

Temos $3n$ incógnitas, mas apenas $3n-1$ equações. O sistema é indeterminado; possui infinitas soluções. Para torná-lo determinado (solução única), precisamos de 1 escolha arbitrária ou condição de contorno adicional. Uma escolha comum é assumir que o primeiro segmento é linear, ou seja, que ele não tem curvatura ($a_0 = 0$).

$$a_0 = 0$$

Passo 3. Algoritmo de Resolução

Com $a_0 = 0$, podemos resolver o sistema sequencialmente (um intervalo após o outro), sem precisar inverter uma matriz gigante.

Vejamos: sabemos que $a_0 = 0$. Assim, o Spline no primeiro intervalo $[x_0, x_1]$ vem a ser

$$S_0(x) = b_0 x + c_0.$$

Agora, usando as condições de interpolação, obtemos o sistema

$$\begin{cases} b_0 x_0 + c_0 &= S(x_0) = y_0 \\ b_0 x_1 + c_0 &= S(x_1) = y_1 \end{cases}$$

que nos dá condições de encontrar as incógnitas b_0 e c_0.

Uma vez conhecidos $a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}$, podemos achar a_i, b_i, c_i usando as relações de continuidade. Da condição de continuidade da derivada em x_i:

$$2a_{i-1}x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n-1$$

Isolando b_i, obtemos:

$$b_i = 2a_{i-1}x_i + b_{i-1} - 2a_i x_i, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{6.1}$$

Das condições de interpolação no ponto esquerdo do intervalo atual (x_i):

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Isolando c_i, obtemos:

$$c_i = y_i - a_i x_i^2 - b_i x_i, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{6.2}$$

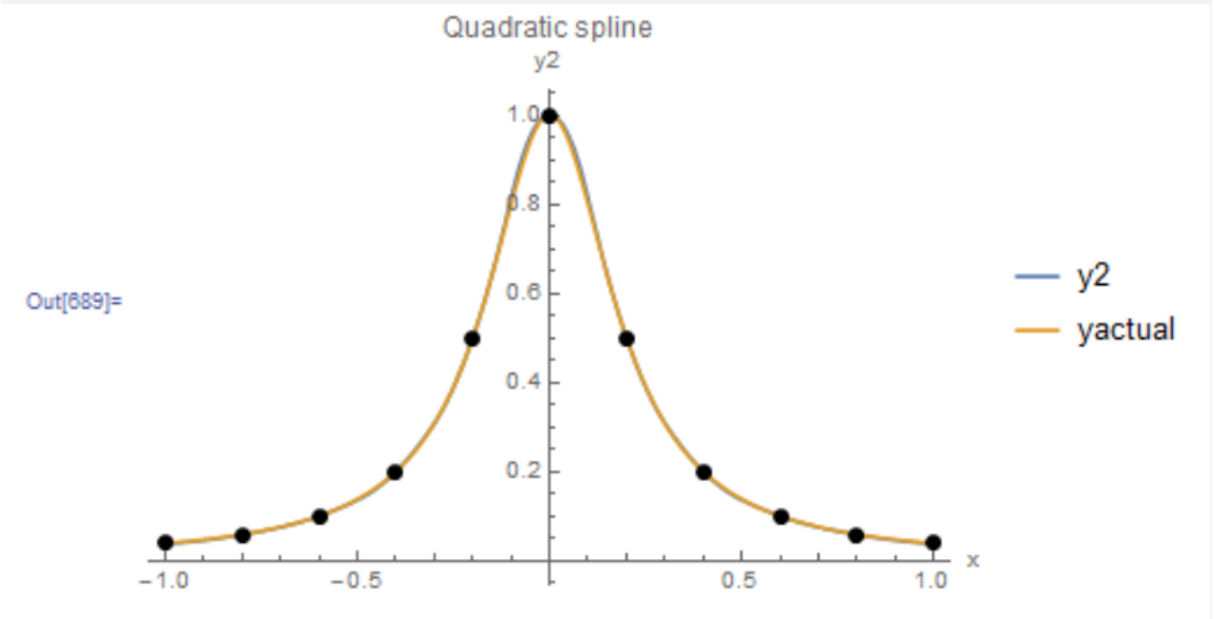
Finalmente, das condições de interpolação nos extremos superiores de cada intervalo (x_{i+1}), temos:

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}. \tag{6.3}$$

Substituindo as expressões de (6.1) e (6.2) em (6.3), obtemos uma equação onde a única incógnita é a_i.

Após álgebra extensiva (que omitiremos aqui por brevidade, mas que o computador realiza instantaneamente), determinamos a_i. Com a_i em mãos, voltamos e achamos b_i e c_i. Repetimos este processo até o intervalo $n-1$.

Figura 6.2: Behaviour of scheme 2 of quadratic interpolation when applied to the Runge function data points



Autor: (ADEEB et al., 2020)

Finalizamos esta seção com um comentário sobre as limitações da Spline Quadrática. A saber: apesar de ser superior à Spline Linear e resolver as oscilações de Runge, a Spline Quadrática raramente é a primeira escolha em aplicações industriais. Existem dois motivos principais:

Suavidade Insuficiente: A Spline Quadrática é de classe C^1 (derivada contínua), mas não C^2 (segunda derivada contínua). A segunda derivada de uma função quadrática $ax^2 + bx + c$ é a constante $2a$. Isso significa que a aceleração ou curvatura da linha muda abruptamente de um valor constante para outro ao cruzar um nó. Esse método visual, não pode ser compreendido, mas em design de superfícies, como capôs de carros ou engenharia de ferrovias, mudanças abruptas na força centrípeta são inaceitáveis.

Efeito de Propagação: Como o algoritmo depende de uma escolha inicial arbitrária ($a_0 = 0$), um erro ou uma má escolha nessa condição propaga-se e acumula-se até o último intervalo. Se a função real tiver alta curvatura no primeiro intervalo, assumir $a_0 = 0$ isso gera grandes erros nos intervalos subsequentes. Por estas razões, o padrão ouro da interpolação segmentada é a Spline Cúbica, que garante continuidade C^2 e distribui o erro de forma mais equilibrada, conforme veremos.

A fim de ilustrar, de maneira prática, geométricas e analíticas os diferentes graus de interpolação, propõe-se a aplicação quadrática (grau 2) sobre um conjunto predefinido de 5 pontos ordenados:

$$P_0(0,1), \quad P_1(2,3), \quad P_2(4,4), \quad P_3(6,2)e \quad P_4(8,5)$$

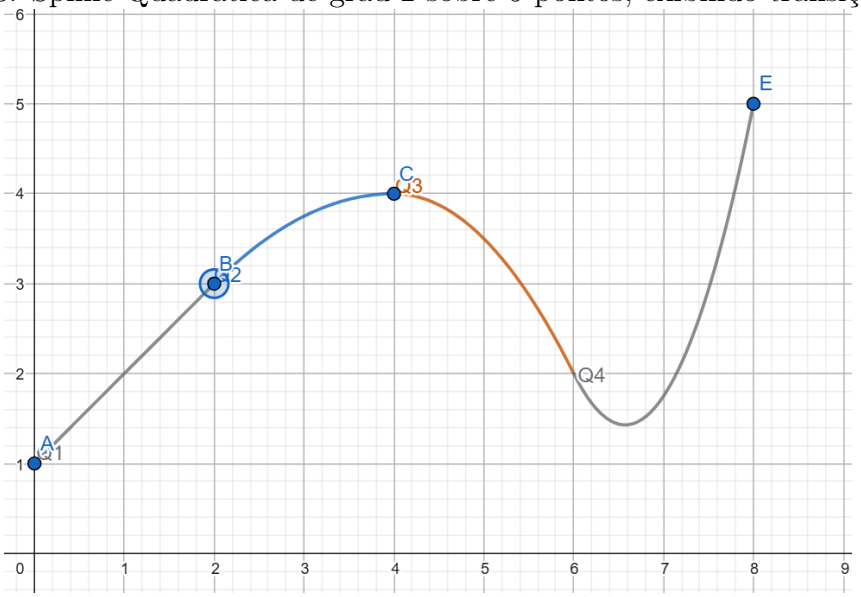
Tendo em vista que dispomos de 5 pontos ($n+1 = 5$), o domínio global da interpolação,

delimitado pelo intervalo $[0, 8]$, é subdividido em $n = 4$ subintervalos adjacentes:

$I_1 = [0, 2]$, $I_2 = [2, 4]$, $I_3 = [4, 6]$ e $I_4 = [6, 8]$.

A representação geométrica deste modelo, gerada no software GeoGebra, pode ser observada na Figura 6.3.

Figura 6.3: Spline Quadrática de grau 2 sobre 5 pontos, exibindo transição suave.



Fonte: O Autor 2026.

6.3 Interpolação por Spline Cúbica

A Spline Cúbica é considerada o "padrão ouro" na interpolação de funções suaves unidimensionais. Sua popularidade se deve a uma propriedade física notável, matematicamente, a Spline Cúbica aproxima a forma que uma régua elástica fina (a spline física original) assumiria se fosse forçada a passar pelos pontos de dados, minimizando a curvatura total. Para garantir que a curva não tenha apenas tangentes contínuas (como na quadrática), mas também curvatura contínua, elevamos o grau dos polinômios para 3.

Para que isto aconteça, em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, definimos:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i.$$

Para n intervalos, temos 4 coeficientes por intervalo, totalizando $4n$ incógnitas. Para determinar estes coeficientes de forma única, precisamos de $4n$ equações linearmente independentes. Vejamos como proceder:

As condições impostas para a construção da Spline Cúbica são:

Condição 1: Condição de Interpolação nos nós da malha (Passar pelos pontos):

$$S_i(x_i) = y_i \quad \text{e} \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad \text{para } i = 0, \ldots, n-1.$$

Com isso temos $2n$ equações.

Condição 2: Unicidade das retas tangentes nos nós internos da malha, ou sejam continuidade da primeira derivada (C^1 - Suavidade de Tangente):

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1.$$

Com isso, temos mais $n-1$ equações.

Condição 3: Continuidade da segunda derivada (C^2) garantindo a suavidade da curvatura da Spline nos nós internos da malha:

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1$$

Isso define mais $n-1$ condições.

Juntas, temos um total $2n + (n-1) + (n-1) = 4n-2$ restrições. Restando dois graus de liberdade, que serão definidos pelas Condições de Borda (nas extremidades x_0 e x_n).

Dedução pelo Método dos Momentos

Tentar resolver o sistema para os coeficientes a, b, c, d diretamente resulta em uma matriz esparsa complexa. Uma abordagem muito mais elegante e compacta é resolver o problema em termos das segundas derivadas nos nós.

Definimos o "momento" M_i como a segunda derivada da spline no nó x_i:

$$M_i = S''_i(x_i).$$

Como $S_i(x)$ é um polinômio cúbico, sua segunda derivada $S''_i(x)$ deve ser necessariamente um polinômio linear (grau 1). Sabendo que a função linear é determinada por dois pontos, podemos expressar $S''_i(x)$ no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ interpolando linearmente entre M_i e M_{i+1}:

$$S''_i(x) = M_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) + M_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right),$$

onde $h_i = x_{i+1} - x_i$ é o tamanho do passo.

Agora, realizamos o processo de integração para recuperar $S_i(x)$. Integrando $S''_i(x)$ em relação a x :

$$S'_i(x) = \int S''_i(x)dx = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + C_1.$$

Integrando novamente para obter a função cúbica:

$$S_i(x) = \int S_i'(x)dx = M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + C_1(x-x_i) + C_2.$$

Nota: Reescrevemos a constante de integração de forma conveniente como $C_1(x-x_i)+C_2$ para facilitar a álgebra subsequente.

Agora, precisamos determinar as constantes de integração C_1 e C_2 usando as condições de interpolação: $S_i(x_i) = y_i$ e $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

Aplicando $x = x_i$, temos:

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= M_i\frac{h_i^3}{6h_i} + 0 + 0 + C_2 \implies \\ y_i &= M_i\frac{h_i^2}{6} + C_2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$C_2 = y_i - M_i\frac{h_i^2}{6}.$$

Aplicando agora $x = x_{i+1}$ e substituindo o valor de C_2, obtemos

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= 0 + M_{i+1}\left(\frac{h_i^3}{6h_i}\right) + C_1h_i + C_2 \implies \\ y_{i+1} &= M_{i+1}\left(\frac{h_i^3}{6h_i}\right) + C_1h_i + C_2 \implies \\ y_{i+1} &= M_{i+1}\left(\frac{h_i^2}{6}\right) + C_1h_i + \left(y_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right). \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$C_1 = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i).$$

Substituindo C_1 e C_2 na equação integral original, obtemos a Equação Canônica da Spline Cúbica em função dos momentos M:

$$S_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_ih_i}{6}\right)(x_{i+1}-x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}\right)(x-x_i)$$

Esta equação descreve a spline em qualquer intervalo, mas ainda não sabemos os valores de M_i. Para encontrar os valores desconhecidos de M_i, invocamos a última condição não utilizada: a continuidade da primeira derivada nos nós internos ($S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$).

Primeiro, calculamos $S_i'(x)$ derivando a Equação Canônica acima:

$$S_i'(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

Agora, avaliamos esta derivada no ponto x_i (início do intervalo i):

$$S_i'(x_i) = -\frac{M_i h_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

Por fim, avaliamos a derivada do intervalo anterior $(i-1)$ no ponto x_i (fim do intervalo $i-1$):

$$S_{i-1}'(x_i) = \frac{M_i h_{i-1}}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}(M_i - M_{i-1}).$$

Igualando $S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$ e reorganizando os termos para agrupar M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, chegamos à Equação Fundamental da Spline Cúbica:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_i M_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right).$$

Note que o termo da direita é proporcional às diferenças divididas de segunda ordem. Podemos reescrever simplificadamente como:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_i M_{i+1} = 6(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]).$$

Esta equação é válida para todos os nós internos $i = 1, \ldots, n-1$.

Matriz Tridiagonal

Aplicando a equação fundamental para todos os nós internos, obtemos um sistema linear da forma $A\mathbf{M} = \mathbf{b}$. A matriz A dos coeficientes do sistema é Tridiagonal, ou seja, apenas a diagonal principal e as diagonais imediatamente adjacentes são não nulas. Assim, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \ldots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \vdots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

O sistema acima tem $n-1$ equações para $n+1$ incógnitas (M_0 a M_n). Precisamos definir M_0 e M_n (as curvaturas nas pontas) para fechar o sistema. Existem duas abordagens principais:

A primeira é conhecida como **Spline Cúbica Natural**. Aqui, assume-se que a curvatura nas extremidades é nula. A spline torna-se uma linha reta fora do intervalo de dados.

$$M_0 = 0 \quad \text{e} \quad M_n = 0.$$

Esta é a condição mais comum quando não se tem informações sobre as derivadas nas pontas.

A segunda abordagem é conhecida como Spline Cúbica Fixada (Clamped Spline). Nessa estratégia, quando se conhecem as derivadas exatas da função nas bordas externas, isto é, $S'_0(x_0) = v_A$ e $S'_{n-1}(x_n) = v_B$, essas informações são incorporadas para deduzir analiticamente as equações adicionais para M_0 e M_n. Para a extremidade inicial x_0, avalia-se a primeira derivada no início do primeiro intervalo ($i = 0$):

$$S'_0(x_0) = -\frac{M_0 h_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(M_1 - M_0) = v_A$$

Isolando os momentos conhecidos e desconhecidos, obtém-se a primeira equação condicional:

$$2h_0 M_0 + h_0 M_1 = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - v_A\right)$$

De maneira análoga, para a extremidade final x_n, avalia-se a derivada no término do último intervalo ($i = n - 1$):

$$S'_{n-1}(x_n) = \frac{M_{n-1} h_{n-1}}{2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(M_{n-1} - M_{n-2}) = v_B$$

O que resulta na última equação necessária para o fechamento do sistema:

$$h_{n-1} M_{n-1} + 2h_{n-1} M_n = 6\left(v_B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

Diferente do caso Natural (onde a matriz permanece de tamanho $(n-1) \times (n-1)$ visto que $M_0 = 0$ e $M_n = 0$), a imposição da Spline Fixada expande o sistema linear para uma estrutura de ordem $(n+1) \times (n+1)$, onde todas as curvaturas são acopladas em uma matriz estritamente tridiagonal:

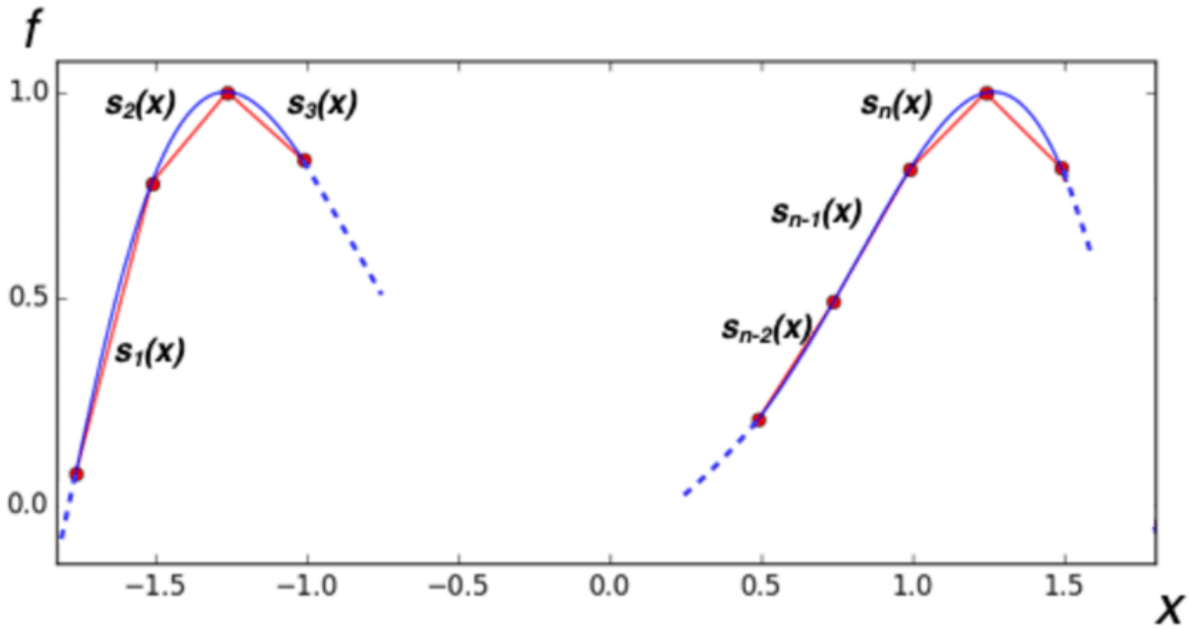
$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(hn - 2 + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6\left(\frac{y_1-y_0}{h_0} - v_A\right) \\ 6(f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]) \\ 6(f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]) \\ \vdots \\ 6(f[x_{n-1},x_n] - f[x_{n-2},x_{n-1}]) \\ 6\left(v_B - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \end{pmatrix}$$

Essa abordagem atribui uma aproximação muito mais precisa e suave nas bordas quando o comportamento físico do fluxo ou da velocidade nas extremidades é previamente conhecido. No entanto, para esse feito, se faz necessário requerer dados extras das derivadas que nem sempre estão disponíveis na prática experimental.

Na Figura 6.4 apresentamos um spline ajustado onde destacamos a representação de Splines Linear, em vermelho, e Cúbica, em azul. Na ilustração, fica evidente a formação de "bicos" quando se utiliza splines lineares, ao passo que a interpolação por splines cúbicas resulta em uma curva suave e sem descontinuidades.

Figura 6.4: Representação de Splines Linear (vermelho) e Cúbica (azul)



Fonte: O autor; adaptado de (RUGGIERO; LOPES, 2007)

A consolidar a teoria desenvolvida e permitir uma comparação direta com os métodos de graus inferiores (Linear e Quadrática), propõe-se a construção de uma Spline Cúbica Natural sobre o mesmo conjunto de 5 pontos ordenados:

$$P_0(0,1), \quad P_1(2,3), \quad P_2(4,4), \quad P_3(6,2)e \quad P_4(8,5).$$

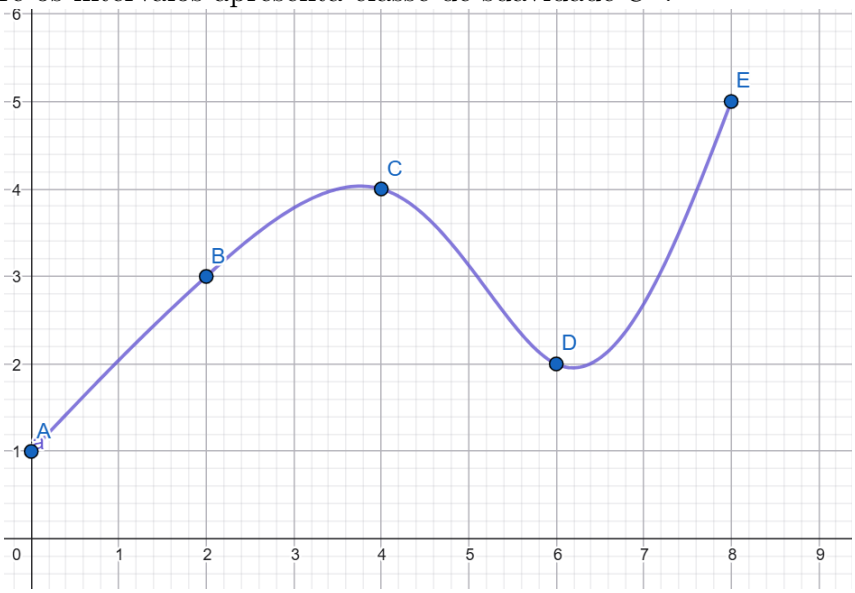
Com $n = 4$ subintervalos de tamanho constante $h = 2$, o objetivo é determinar os polinômios de grau 3 para cada trecho. Optando-se pela condição de fronteira Natural, impõe-se que as curvaturas nas extremidades sejam nulas, ou seja, $M_0 = 0$ e $M_4 = 0$. Para encontrar os momentos internos (M_1, M_2 e M_3), aplica-se a Equação Fundamental da Spline Cúbica, gerando um sistema linear tridiagonal de ordem 3×3.

Substituindo os valores de $h = 2$ e das coordenadas y dos pontos, o sistema matricial assume a seguinte forma analítica:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(4 - 2(3) + 1) \\ 3(2 - 2(4) + 3) \\ 3(5 - 2(2) + 4) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

A resolução computacional deste sistema fornece os momentos exatos nos nós internos. Com esses valores em mãos, substitui-se os momentos na Equação, revelando as quatro funções polinomiais cúbicas $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$ e $S_3(x)$ que compõem a curva global $S(x)$. A representação geométrica dessa interpolação, gerada com o auxílio do software GeoGebra, atesta o comportamento da curva.

Figura 6.5: Representação geométrica da Spline Cúbica, sobre 5 nós de controle. A transição entre os intervalos apresenta classe de suavidade C^2.



Fonte: O Autor 2026.

Capítulo 7

FUNDAMENTAÇÃO DIDÁTICA E METODOLOGIA DA PROPOSTA DE ENSINO

7.1 Fatores Histórico e Filosofia do GeoGebra

Para compreender a importância do GeoGebra no ensino da matemática, é fundamental conhecer as suas origens. O software foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter como parte da sua dissertação de mestrado em Educação Matemática e Informática na Universidade de Salzburg, na Áustria, tendo o seu desenvolvimento continuado durante o seu doutoramento (HOHENWARTER; JOSILOWSKI, 2007).

A motivação principal de Hohenwarter surgiu da observação de uma dicotomia histórica nas salas de aula e nos laboratórios de informática, a separação rígida entre a Álgebra e a Geometria. Naquela época, os professores dispunham de softwares para Geometria Dinâmica, como o Cabri Géomètre ou o Sketchpad, onde podiam desenhar pontos e retas, de Sistemas de Computação Algébrica complexos como o Mathematica ou Derive, focados puramente em equações e cálculos abstratos. Contudo, não existia uma ponte acessível entre esses dois mundos para alunos da Educação Básica.

O GeoGebra nasceu exatamente para ser essa ponte, daí o seu nome, uma aglutinação de Geometria e Álgebra. A sua filosofia central se baseia na ideia de que cada objeto matemático deve ter múltiplas representações interligadas, uma representação gráfica visual e uma representação algébrica, numérica ou simbólica.

Com o avanço das tecnologias digitais e a ampliação do acesso à internet ao longo dos anos, o projeto transcendeu as fronteiras da Áustria. Devido à sua natureza de código aberto (open-source) e à tradução para dezenas de idiomas por voluntários, o GeoGebra se transformou numa comunidade global. Atualmente, ele é suportado pelo International GeoGebra Institute (IGI) e expandiu as suas capacidades para incluir gráficos 3D, plani-

lhas de estatística e realidade aumentada, se tornando uma das plataformas educacionais mais utilizadas no mundo.

No contexto educacional, o software representa uma mudança de paradigma, a matemática deixa de ser apenas manipulada simbolicamente e passa a ser dinâmica. A interligação entre representações gráficas, algébricas e numéricas favorece a construção significativa do conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL. Ministério da Educação, 2018) enfatiza o uso de tecnologias digitais como ferramentas de investigação e modelagem, tornando o GeoGebra um recurso alinhado às demandas contemporâneas da educação matemática. A incorporação desse software na sequência didática proposta justifica-se pela necessidade de desenvolver nos estudantes a capacidade de olhar para um mesmo conceito matemático por meio de diferentes perspectivas, permitindo o entendimento completo das propriedades que o definem.

Nesse sentido, o trabalho responde diretamente à Competência Específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC. Esta competência aborda a importância de compreender e utilizar, diferentes registros de representação matemática, como o algébrico, o geométrico e o computacional, para buscar soluções e comunicar resultados de problemas. No ambiente do GeoGebra, essa dinâmica acontece, o aluno modifica a posição geométrica dos pontos na tela e observa imediatamente a alteração nas equações algébricas das Splines, integrando esses conhecimentos de forma completa.

Além disso, essa prática pedagógica alinha-se à habilidade EM13MAT402, que orienta as transformações entre representações algébricas e geométricas de funções polinomiais, bem como a identificação dos efeitos da variação de seus parâmetros. Ao manipular os recursos do software para ajustar a junção dos polinômios, os estudantes superam a visão estática das funções e compreendem como cada coeficiente influencia diretamente a curvatura e a suavidade do gráfico.

O foco em problemas práticos atende à habilidade EM13MAT302, articulando-se diretamente com a Competência Específica 3 da BNCC, a qual valoriza o uso da matemática para a tomada de decisões fundamentadas no mundo do trabalho e na tecnologia. Nesse sentido, a contribuição desta sequência didática ocorre ao permitir que o aluno vá além do cálculo mecânico. Ao analisar as limitações dos métodos de Newton e Lagrange diante do Fenômeno de Runge e adotar as Splines como solução otimizada de engenharia e design, os estudantes utilizam a modelagem como uma autêntica ferramenta de intervenção crítica e aplicada às demandas da sociedade.

No contexto deste plano educacional sobre Splines, a filosofia original de Hohenwarter se faz presente (HOHENWARTER; JOSILOWSKI, 2007). Sem o GeoGebra, ensinar o conceito de interpolação no Ensino Médio seria um exercício árduo e abstrato de álgebra. Com o software, a complexidade algébrica das matrizes e das derivadas de segunda ordem atua nos bastidores, permitindo que o aluno interaja diretamente com o aspecto

geométrico e visual do problema, a suavidade da curva, unindo assim, o cálculo computacional à intuição geométrica, sem que seja necessário o conhecimento prévio do conceito de derivada.

7.2 A Transposição Didática

A inserção de um tópico avançado como a Interpolação por Splines no Ensino Médio requer um cuidado metodológico especial. Não se pode simplesmente apresentar aos alunos do ensino básico a resolução de sistemas de matrizes tridiagonais ou as deduções de derivadas de segunda ordem. É neste ponto que se faz necessária a Transposição Didática, conceito fundamental cunhado pelo pesquisador francês Yves Chevallard na década de 1980.

Segundo Chevallard (1991)(CHEVALLARD, 1991), a Transposição Didática é o processo pelo qual o conhecimento científico, o "saber sábio", produzido nas universidades e centros de pesquisa, sofre transformações adaptativas para se tornar um conhecimento apto a ser ensinado nas escolas, o "saber ensinado".

O **Saber Sábio** é o saber bruto, formal e rigoroso, produzido e validado pela comunidade científica, matemáticos, engenheiros, físicos e pesquisadores acadêmicos. Portanto, trata-se do conhecimento erudito, que na teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard (CHEVALLARD, 1991)(1991), consiste do ponto de partida de todo o processo educacional.

No contexto da matemática pura e aplicada, podemos citar como exemplos do Saber Sábio a demonstração do Fenômeno de Runge, as limitações dos polinômios de Lagrange e Newton, as condições de continuidade C^1 e C^2 e a resolução algorítmica de Splines Cúbicas. Este é o conhecimento no seu estado mais rigoroso e abstrato.

A principal característica do Saber Sábio é que ele não possui, em sua origem, uma finalidade didática voltada para a Educação Básica. Ele é construído para resolver problemas complexos da ciência, da indústria ou para expandir as fronteiras da própria matemática. A sua linguagem é hermética, estruturada em teoremas, axiomas, demonstrações exaustivas e formalismos algébricos que pressupõem um leitor já altamente especializado.

No escopo desta pesquisa, o Saber Sábio é representado pelo vasto e complexo campo do Cálculo Numérico e da Análise Matemática Avançada. Ele engloba a teoria de interpolação polinomial, o estudo das matrizes e sistemas lineares de grande porte, os polinômios e o rigoroso equacionamento das Curvas de Bézier e das Splines cúbicas.

Historicamente, como vimos, a gênese deste saber específico ocorreu fora dos muros escolares, impulsionada pelas necessidades tecnológicas e de espionagem industrial das montadoras de automóveis francesas (Renault e Citroën) nas décadas de 1950 e 1960. O objetivo de Pierre Bézier não era criar uma aula para adolescentes, mas sim desenvolver um modelo matemático infalível para automatizar máquinas de fresagem e modelar carrocerias

aerodinâmicas de forma computacional.

Adicionalmente, o Saber Sábio aqui inclui as descobertas sobre as limitações teóricas da própria matemática, como o Fenômeno de Runge. A constatação de que polinômios de grau muito elevado geram oscilações caóticas nas extremidades de um intervalo interpolado é uma discussão de altíssimo nível acadêmico, típica dos cursos de graduação e pós-graduação em Ciências Exatas.

Compreender a natureza do Saber Sábio é fundamental para justificar a pesquisa em Educação Matemática. É epistemologicamente impossível e pedagogicamente desastroso, tentar inserir o Cálculo Numérico puro e as equações originais das Splines diretamente em uma sala de aula do Ensino Médio. A distância cognitiva entre a formulação acadêmica de uma Spline Cúbica, com suas derivadas parciais e condições de contorno e a estrutura mental de um adolescente é intransponível sem mediação.

Portanto, o Saber Sábio precisa sofrer uma desconstrução. Ele deve ser retirado do seu "habitat natural", a academia e a indústria, despojado do seu rigor excessivo e preparado para entrar na Noosfera, a noosfera é definida por (CHEVALLARD, 1991) como a instância intermediária encarregada de selecionar os conteúdos científicos e transformá-los em saberes escolares, garantindo a legitimidade e a atualização do conhecimento ensinado nas instituições de ensino, onde será lapidado até se transformar no **Saber a Ensinar**. É exatamente esse distanciamento entre o laboratório do matemático e a sala de aula que torna a Transposição Didática e a Engenharia Didática propostas nesta dissertação não apenas relevantes, mas essenciais.

Trata-se do saber a ensinar, isto é, o conhecimento prescrito por documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Embora a BNCC não mencione explicitamente o tópico de splines, o estudo de funções, a análise gráfica, a modelagem matemática e o uso de tecnologias digitais, são elementos fundamentais no estudo das splines e são amplamente preconizados para a resolução de problemas do cotidiano.

A segunda etapa da Transposição Didática de Yves Chevallard ocorre quando o "Saber Sábio", o conhecimento científico e universitário puro, é selecionado, filtrado e modificado para compor os documentos oficiais de ensino. Este novo estágio do conhecimento é denominado **Saber a Ensinar**.

Nesta fase, o conhecimento deixa de pertencer exclusivamente à comunidade científica, matemáticos e pesquisadores, passando a ser regido pela chamada Noosfera, a esfera onde pensam e debatem os formuladores de políticas públicas, os autores de livros didáticos, os especialistas em educação e as diretrizes governamentais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os currículos estaduais.

Para que o Saber Sábio se transforme no Saber a Ensinar, a Noosfera submete o conhecimento a processos de descontextualização e recontextualização. O rigor extremo, as demonstrações exaustivas e as linguagens acadêmicas complexas são atenuados para dar lugar a uma sequência didática lógica, organizada por anos escolares e níveis de dificuldade

cognitiva.

No contexto específico deste trabalho, o Saber Sábio abrange teorias avançadas de Cálculo Numérico, como o Fenômeno de Runge, matrizes complexas e as equações originais das Curvas de Bézier e das Splines. É evidente que esse nível de abstração matemática não pode ser transferido diretamente para um aluno da Educação Básica.

Portanto, a Noosfera traduz esse corpo de conhecimento avançado no Saber a Ensinar, que, no Ensino Médio, manifesta-se através do estudo das Funções e dos Polinômios. De acordo com a BNCC, o currículo oficial de Matemática e suas Tecnologias não exige que o aluno programe algoritmos de interpolação complexos, mas prescreve habilidades e competências específicas, tais como:

- Compreender o comportamento de funções afins, quadráticas e polinomiais;
- Analisar gráficos e identificar raízes, interceptos, domínio e imagem;
- Resolver sistemas de equações lineares para encontrar coeficientes desconhecidos;
- Utilizar softwares de geometria dinâmica (como o GeoGebra) para modelar fenômenos e resolver problemas do mundo real (HOHENWARTER et al.,).

Além da simplificação algébrica, o Saber a Ensinar moderno exige a contextualização. A atual prescrição curricular demanda que o ensino de polinômios não seja apenas um treinamento algorítmico, como o uso mecânico do dispositivo de Briot-Ruffini, mas sim uma ferramenta de leitura de mundo.

Ao propormos o ensino de polinômios através do design e da suavização de curvas digitais (Splines), estamos em total alinhamento com as diretrizes do Saber a Ensinar contemporâneo. Atendemos à exigência curricular de conectar a abstração matemática (Ciência) com as ferramentas de software (Tecnologia) e a resolução de problemas práticos que impactam a segurança e o cotidiano (Sociedade) (SANTOS; AULER, 2011).

Dessa forma, o Saber a Ensinar funciona como uma ponte indispensável, ele pega a Matemática Aplicada das universidades e das indústrias automotivas e a codifica em objetivos de aprendizagem claros e exequíveis para a realidade da sala de aula do Ensino Médio.

7.3 O Saber Ensinado, o Conhecimento em Sala de Aula

O estágio final do processo de Transposição Didática delineado por Chevallard (1991) culmina no Saber Ensinado. Trata-se do conhecimento real que efetivamente circula, é negociado e é construído no ambiente da sala de aula. Neste ponto, o conhecimento deixa

as prescrições formais dos documentos curriculares oficiais (Saber a Ensinar) e ganha vida através da mediação do professor e da interação com os alunos.

Esta fase é frequentemente chamada de **Transposição Didática Interna**. É o momento em que o professor, atuando como o principal agente desta transformação curricular, interpreta as diretrizes da Noosfera e toma decisões pedagógicas autônomas. Ele escolhe a metodologia, a linguagem, o ritmo e os instrumentos, para tornar o conteúdo verdadeiramente acessível e significativo para a estrutura cognitiva de seus estudantes.

Aqui, o "Saber Sábio" foi completamente transposto. O aluno não precisa calcular uma matriz para entender o conceito. Através do GeoGebra, que atua como o principal agente mediador dessa transposição, o aluno compreende o comportamento da matemática, a limitação dos polinômios, que interpolam um conjunto de dados é vivenciada visualmente quando as curvas são representadas geometricamente.

Desta forma, a Transposição Didática garante que a essência do método numérico, a busca por uma curva suave e estável dividida em partes, seja compreendida e assimilada pelos estudantes, promovendo uma aprendizagem significativa que conecta a matemática escolar ao conhecimento científico.

Historicamente, o ensino de polinômios na Educação Básica, sobretudo no 3º ano do Ensino Médio, tem sido marcado por uma abordagem excessivamente algébrica e descontextualizada. O "Saber Ensinado"(CHEVALLARD, 1991)(Chevallard, 1991) cristalizou-se em torno de algoritmos e manipulações simbólicas, como o Teorema do Resto, o dispositivo prático de Briot-Ruffini e a pesquisa exaustiva por raízes. Embora essas ferramentas possuam o seu valor intra-matemático, elas frequentemente falham em responder à indagação natural do estudante.

Para que serve um polinômio de grau 3 ou superior?

É neste vazio de significado que a Transposição Didática do Cálculo Numérico, especificamente através da técnica de Splines, revela o seu maior potencial para fortalecer a Educação Básica. Ao transpor o conceito de interpolação para a sala de aula, operamos uma profunda mudança de paradigma didático, os polinômios deixam de ser expressões estáticas cujo único objetivo é encontrar a raiz $P(x) = 0$, e passam a ser ferramentas dinâmicas de design e modelagem geométrica.

Através dessa nova lente pedagógica, o ensino de polinômios é ressignificado sob três pilares fundamentais, a transição do Global para o Local:

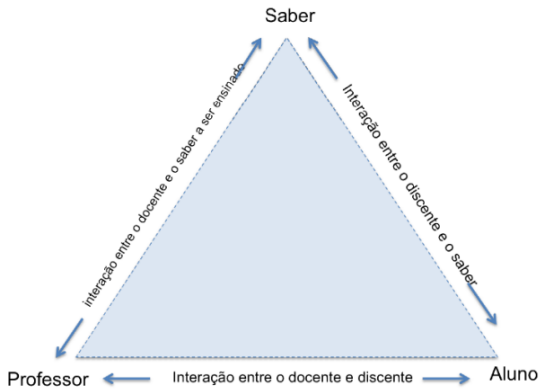
- No currículo tradicional, o aluno estuda funções de domínio global (válidas de $-\infty$ a $+\infty$). A abordagem por Splines introduz o conceito de funções definidas por partes, mostrando aos estudantes que a matemática do mundo real, como o traçado de uma rodovia ou a modelagem de um objeto 3D, é feita dividindo um problema complexo em pequenos domínios menores, onde cada intervalo é governado por um polinômio diferente.

- O Significado Geométrico dos Coeficientes, ao tentar encaixar uma curva entre dois pontos no GeoGebra, o aluno compreende ativamente o papel dos coeficientes. Ele percebe que o termo de maior grau (como o ax^3) é o responsável pela, flexibilidade da curva, permitindo pontos de inflexão, enquanto polinômios de graus menores, como a reta $ax + b$ são rígidos.

- A Conexão com os Sistemas Lineares, o estudo de polinômios passa a dar sentido a outro grande bloco da matemática escolar, a Álgebra Linear. Para descobrir a equação de um polinômio que passa por determinados pontos, interpolação, o aluno percebe que precisará resolver um sistema de equações lineares. Assim, conteúdos que antes eram ensinados em caixas isoladas, sistemas no 2º ano e Polinômios no 3º ano, integram-se num único problema de modelagem.

Desta forma, a transposição didática operada neste trabalho não visa ensinar o Cálculo Numérico universitário precocemente, mas sim utilizar a essência lógica das Splines para devolver o sentido geométrico e utilitário aos polinômios. O aluno descobre que polinômios não são apenas contas longas no quadro, mas sim a base matemática que os computadores utilizam para desenhar o mundo digital contínuo e suave que eles acessam diariamente em suas telas.

Figura 7.1: Triângulo Pedagógico



Fonte:(Houssaye, 1992)

7.3.1 A Materialização do Saber Ensinado nesta Pesquisa

No contexto do presente trabalho, o Saber Ensinado é a execução prática da nossa Sequência Didática. É o momento em que a teoria árida dos polinômios se transforma em uma experiência visual, tátil e tecnológica de modelagem.

Enquanto o documento curricular (Saber a Ensinar) exige apenas que o aluno compreenda funções polinomiais, o professor, na sua práxis, transpõe essa exigência para o

desafio tangível do design. O Saber Ensinado manifesta-se através das seguintes ações didáticas:

1. A Ressignificação da Álgebra: O polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ deixa de ser uma sequência abstrata de letras e números. No software GeoGebra, através da manipulação dos controles deslizantes, os alunos visualizam em tempo real que o coeficiente a determina a "abertura" da curva.

2. A Tradução do Rigor Matemático: Conceitos avançados de Cálculo Numérico (Saber Sábio), como a continuidade das derivadas de primeira e de segunda ordem para garantir a suavidade entre duas Splines, são transpostos para a linguagem dos alunos. O professor não lhes ensina as regras de derivação clássicas do Ensino Superior, em vez disso, o Saber Ensinado foca na eliminação dos bicos no encontro de duas curvas, construindo o alicerce intuitivo e geométrico do cálculo diferencial.

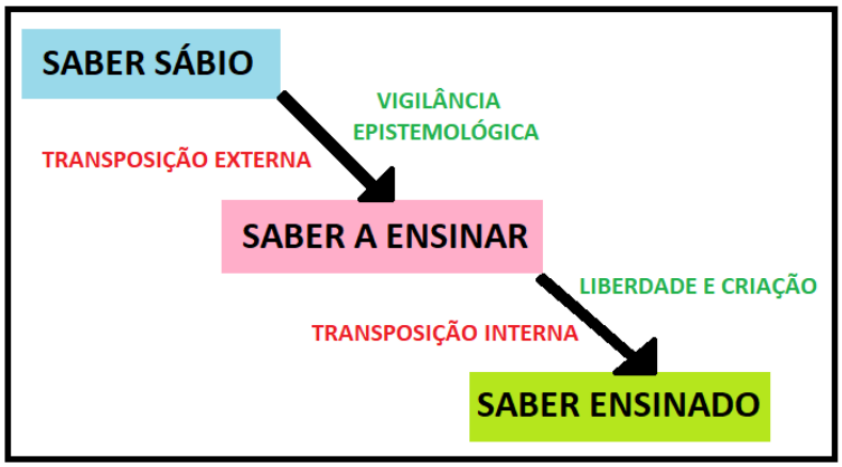
3. A Apropriação Tecnológica e Social: Alinhado à perspectiva CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade), o Saber Ensinado garante que os alunos não aprendam a modelar as curvas apenas para obter uma nota escolar. O conhecimento ganha sentido quando eles percebem que a matemática que estão manipulando na tela é a mesma tecnologia que desenha os gráficos dos videogames que jogam e garante a segurança dos veículos em que andam (BAZZO, 2003).

Portanto, o Saber Ensinado proposto por este trabalho não é a reprodução passiva de algoritmos, mas um ambiente de investigação ativa. A Transposição Didática completa-se quando o conhecimento sobre as Splines, que nasceu nas fábricas da Renault por Pierre Bézier (Saber Sábio), viaja através dos currículos educacionais (Saber a Ensinar) e chega, finalmente, à mente e às mãos de um adolescente no laboratório de informática escolar (Saber Ensinado), transformando-o num sujeito capaz de ler e modelar o mundo tecnológico ao seu redor, construindo um conhecimento significativo sobre polinômios.

7.4 A Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa e Validação

Para garantir o rigor científico na elaboração, aplicação e validação da nossa proposta de ensino sobre funções polinomiais e Splines, este trabalho adota como referencial metodológico a Engenharia Didática, formalizada pela pesquisadora francesa Michèle Artigue (1995)(ALMOULOUD, 2007)(ARTIGUE, 1995). No contexto da Didática da Matemática, esta metodologia transcende a simples criação de planos de aula, ela se configura como um esquema experimental, fundamentado em realizações didáticas em sala de aula, estruturando-se em quatro fases interdependentes.

Figura 7.2:



Fonte:(CHEVALLARD, 1991)

7.4.1 Fase 1: Análises Prévias (O Diagnóstico Epistemológico, Cognitivo e Didático)

A primeira fase exige do pesquisador um mapeamento profundo do "ecossistema"onde o saber habita. Em nosso trabalho, essa análise desdobrou-se em três vertentes:

Epistemológica: Investigamos a origem histórica e a necessidade matemática das curvas de Bézier e da interpolação por Splines. Compreendemos, através do Fenômeno de Runge, as limitações inerentes aos polinômios de grau elevado e por que a engenharia moderna optou pela interpolação segmentada.

Didática: Analisamos criticamente como o ensino de polinômios se cristalizou no Ensino Médio. Identificamos que o currículo tradicional prioriza a manipulação algébrica excessiva, como o dispositivo de Briot-Ruffini ou a busca incessante por raízes, em detrimento do significado geométrico. O polinômio é frequentemente ensinado de forma descontextualizada da sua aplicação visual e tecnológica.

Cognitiva: refletimos as dificuldades dos estudantes em transitar entre os registros de representação algébrica e gráfica, especialmente quando se trata de funções definidas por partes, um conceito raramente explorado na Educação Básica.(ALMOULOUD, 2007)

7.4.2 Fase 2: Concepção e Análise a Priori (O Planejamento e o Controle de Variáveis)

Nesta segunda fase, o pesquisador atua como um “engenheiro” que projeta um dispositivo didático, elaborando e justificando as decisões que orientarão a intervenção pedagógica. A Análise a Priori constitui o núcleo metodológico dessa etapa, pois permite explicitar as escolhas realizadas e antecipar, de forma fundamentada, as possíveis estratégias, dificuldades e aprendizagens dos estudantes durante o desenvolvimento das atividades.

Para a construção da sequência didática, optou-se pela utilização do software GeoGebra como ambiente de experimentação, aliado à abordagem Ciência,Tecnologia e Sociedade (CTS), de modo a inserir os estudantes em um contexto de resolução de um problema inspirado em uma situação de engenharia. Essa escolha busca favorecer a investigação matemática por meio da exploração dinâmica de representações gráficas e algébricas.

Prevê-se que, diante do desafio de conectar os pontos da pista, os estudantes recorram inicialmente às funções afins, por constituírem o tipo de função com que possuem maior familiaridade. Espera-se que a representação gráfica obtida apresente "descontinuidades" visuais, caracterizadas pela formação de "bicos", levando os alunos a perceberem que tal solução seria inadequada para o deslocamento seguro do carrinho. Esse contraste entre a expectativa inicial e o resultado observado tende a produzir um conflito cognitivo capaz de impulsionar a busca por novas estratégias.

Como consequência, espera-se que os estudantes passem a explorar funções polinomiais de graus mais elevados, especialmente as quadráticas e cúbicas, manipulando os coeficientes por meio dos controles deslizantes do GeoGebra. Nesse processo investigativo, prevê-se que construam intuitivamente ideias relacionadas à suavidade e à continuidade da trajetória, estabelecendo bases conceituais que posteriormente poderão ser formalizadas com o estudo algébrico e analítico desses conceitos (PAIS, 2010) (BAZZO, 2003).

7.4.3 Fase 3: Experimentação (A Aplicação Prática e a Coleta de Dados)

A Experimentação é a fase em que o modelo teórico entra em contato com a realidade da sala de aula. Aqui, o professor-pesquisador abdica da postura de mero transmissor de informações e assume o papel de mediador das situações didáticas.

Inicialmente, espera-se que o professor apresente toda tecnologia ou recurso adicional, no caso o GeoGebra, aos alunos, desenvolvendo atividades que ajudarão na familiarização do software e posteriormente na tomada de decisão das atividades previstas na Sequência Didática, tais como criar círculos, retângulos, retas perpendiculares a outras retas, retas tangentes a curvas, mediatrizes, pontos médios de segmentos, enfim, o professor deve apresentar minimamente as ferramentas disponíveis no software, consistindo de uma preparação de um ambiente para o domínio dessa tecnologia e consequentemente permitir aos alunos fazerem escolhas apropriadas durante as investigações didáticas.

Essa fase de conhecimento do software corrobora com o que Luiz Carlos Paes (PAIS, 2010)(pg. 152). Chama de fase da **Simulação como antecipação da aprendizagem**. Paes define a simulação como um momento específico de uma situação de aprendizagem, no qual o sujeito tem a possibilidade de perceber e de manipular parâmetros, invariantes ou aspectos que intervêm diretamente na elaboração dos conceitos e dos conhecimentos em questão, favorecendo o reconhecimento de casos particulares e contribuindo para a

abstração dos conceitos estudados. Segundo (PAIS, 2010) (pg. 154), o envolvimento com o conhecimento simulado possibilita desenvolver melhor a intuição e asim contribuir para a formação básica do conhecimento teórico.

Após o domínio do software, já na fase de experimentação, os alunos entram na fase de ação e formulação de hipóteses frente aos desafios das atividades propostas. Enquanto eles debatem como configurar a função *Se* no GeoGebra para restringir o domínio da Spline, o pesquisador realiza a coleta rigorosa de dados. Esta coleta não se limita a provas escritas, mas envolve a observação direta dos diálogos dos grupos, o registro das tentativas e erros no software, e as justificativas apresentadas durante a socialização das pistas criadas por eles (PAIS, 2010).

7.4.4 Fase 4: Análise a Posteriori e Validação (O Confronto e a Comprovação)

A quarta fase da Engenharia Didática corresponde à Análise a Posteriori e à Validação, momento em que os dados produzidos durante a experimentação são confrontados com as previsões estabelecidas na Análise a Priori. Diferentemente de abordagens fundamentadas predominantemente em procedimentos estatísticos de validação externa, a Engenharia Didática privilegia a validação interna, baseada na comparação sistemática entre as hipóteses formuladas pelo pesquisador e os fenômenos efetivamente observados durante a implementação da sequência didática.

Nesse processo, busca-se analisar em que medida as estratégias, dificuldades e formas de raciocínio antecipadas na etapa de planejamento manifestaram-se durante a experimentação. As convergências entre o previsto e o observado fortalecem as hipóteses formuladas, enquanto as divergências constituem oportunidades para compreender aspectos não antecipados do processo de ensino e aprendizagem, possibilitando o refinamento do dispositivo didático e das interpretações teóricas.

No contexto da presente proposta, espera-se encontrar evidências de que os estudantes reconheçam as limitações da utilização de funções afins para representar a trajetória do carrinho, especialmente pela formação de "bicos" na pista. Espera-se, ainda, que essa percepção os conduza à exploração de polinômios de graus superiores, particularmente quadráticos e cúbicos, buscando produzir trajetórias mais suaves por meio da manipulação de seus coeficientes. Caso esse percurso investigativo seja observado, os resultados oferecerão evidências favoráveis às hipóteses estabelecidas na Análise a Priori.

Por fim, a Análise a Posteriori permitirá verificar se a sequência didática favoreceu a atribuição de significado ao conceito de função polinomial em um contexto de modelagem. Sob a perspectiva da abordagem Ciência, Tecnologia e Sociedade, pretende-se analisar se os estudantes passaram a compreender os polinômios não apenas como objetos algébricos, mas também como ferramentas matemáticas capazes de modelar situações reais de enge-

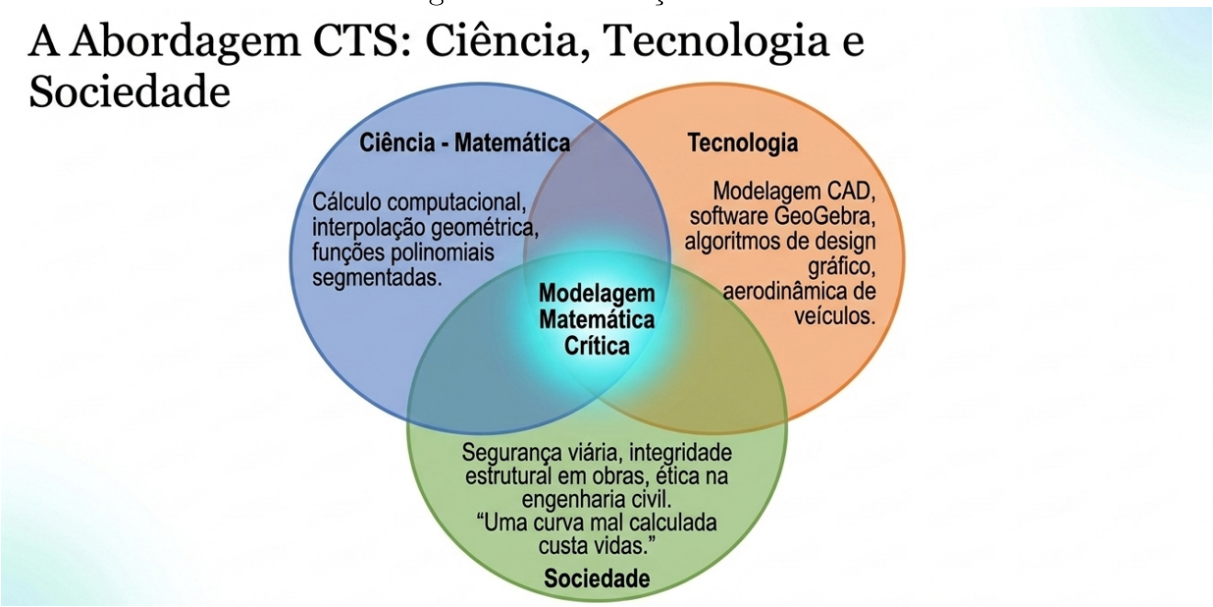
nharia, evidenciando sua relevância para questões relacionadas à segurança, ao projeto de trajetórias e ao desenvolvimento tecnológico (PAIS, 2010).

Figura 7.3: Ilustração Engenharia Didática



Fonte: Elaborado com auxílio do Gemini (OpenAI, 2026). OPENAI. ChatGPT. Disponível em: https://gemini.google.com/. Acesso em: 10 jul. 2026.

Figura 7.4: Ilustração da CTS



Fonte: Elaborado com auxílio do Gemini (OpenAI, 2026). OPENAI. ChatGPT. Disponível em: https://gemini.google.com/. Acesso em: 10 jul. 2026.

Capítulo 8

Plano Educacional

8.1 Introdução ao Produto Educacional

O ensino da Matemática na Educação Básica frequentemente esbarra no desafio de materializar conceitos algébricos abstratos em aplicações visuais conectadas à realidade do estudante. Este Produto Educacional foi concebido para preencher essa lacuna, propondo uma intervenção pedagógica focada no estudo do comportamento de funções e na modelagem matemática de curvas por meio da interpolação segmentada (Splines). Ancorada na Teoria da Transposição Didática e na Engenharia Didática, esta sequência transforma conhecimentos tradicionalmente acadêmicos em saberes acessíveis e significativos para o ambiente escolar.

Para garantir a eficácia do processo de ensino e aprendizagem, a arquitetura deste produto baseia-se nas premissas de construção de sequências didáticas defendidas por Cardoso (CARDOSO, 2024). Sob essa ótica, o roteiro não se apresenta como um conjunto de atividades isoladas, mas sim como uma progressão intencional e articulada de fases metodológicas. A intervenção inicia-se com o reconhecimento dos conhecimentos prévios e a apresentação de uma situação problema concreta (fase de problematização) e avança progressivamente para a abstração geométrica. O processo culmina na etapa de Síntese e Reflexão, momento em que o aluno consolida a aprendizagem, analisando as diferenças estruturais entre modelos rígidos (retas) e modelos suaves (cúbicos).

A proposta utiliza o software GeoGebra como principal mediador tecnológico, substituindo cálculos exaustivos pela geometria dinâmica e pela experimentação interativa. Por meio de uma abordagem CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade), os estudantes são instigados a compreender não apenas a estrutura matemática das funções definidas por partes, mas também suas aplicações diretas, na computação gráfica e na resolução de anomalias matemáticas, como o Fenômeno de Runge. Alinhado às competências do eixo de Matemática e suas Tecnologias da BNCC, este roteiro fornece ao professor uma estrutura, dividida em fases bem delineadas, para ressignificar a aprendizagem.

Tabela 8.1: Parâmetros e Estrutura de Aplicação da Sequência Didática

Componente	**Especificação Pedagógica**
Público-Alvo	Estudantes do **3º ano do Ensino Médio**. A escolha justifica-se pela maturidade algébrica da turma para lidar com abstrações geométricas, além de ser o momento ideal para consolidar conhecimentos pré-universitários.
Duração Estimada	**5 aulas** (módulos de 50 minutos cada), estruturadas de forma progressiva conforme as fases da sequência didática: problematização inicial, construção linear, modelagem cúbica no software e síntese, reflexão.
Conhecimentos Prévios	Localização de coordenadas (x, y) no Plano Cartesiano; comportamento gráfico de funções polinomiais de $1^{\underline{o}}$ e $2^{\underline{o}}$ graus; noções fundamentais de domínio e imagem.
Recursos Necessários	Laboratório de informática (ou smartphones dos próprios alunos); software **GeoGebra** (via navegador ou aplicativo); projetor multimídia para o docente; quadro branco e marcadores.
Avaliação	**Formativa e processual**. O professor deve avaliar a autonomia do aluno na manipulação do GeoGebra, a precisão na conexão dos nós (pontos) e a capacidade de argumentação crítica durante a etapa final de Síntese e Reflexão, focando na resolução do problema sob a ótica CTS.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

8.2 Da Rigidez de Newton à Suavidade das Splines, Uma Jornada de Modelagem Matemática.

A transição do conhecimento matemático estritamente acadêmico para uma abordagem palpável, contextualizada e dotada de significado em sala de aula constitui um dos maiores desafios da prática docente. No cenário do Ensino Médio, esse desafio se acentua quando o objetivo é introduzir conceitos que, tradicionalmente, habitam no universo de cursos de graduação, mais especificamente, nas disciplinas de Cálculo Numérico e da análise matemática. Diante desse desafio, esta seção apresenta a introdução e o desenho metodológico da proposta educacional desenvolvida nesta pesquisa, cujo título traduz o percurso cognitivo e geométrico proposto aos estudantes.

Para sustentar e guiar essa jornada pedagógica, este trabalho fundamenta-se em três pilares teóricos e metodológicos fundamentais da Educação Matemática, a Transposição Didática, a Engenharia Didática e a Abordagem Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS).

A Transposição Didática, teorizada por Yves Chevallard, atua como o mecanismo essencial de transformação do saber sábio, o rigor das matrizes tridiagonais e as condições de continuidade e diferenciabilidade das funções polinomiais por partes, em um saber ensinado, perfeitamente assimilável por alunos da educação básica. Essa passagem é viabilizada e potencializada pelo uso do software GeoGebra, que funciona como uma ferramenta de mediação, permitindo que a rigidez de um polinômio, seja visualmente demostrado pela flexibilidade e suavidade das Splines Cúbicas.

Complementarmente, a Engenharia Didática, sob a perspectiva de Michèle Artigue, fornece a estrutura metodológica rigorosa para o delineamento e a análise desta sequência de aulas, organizando a pesquisa em quatro fases interdependentes. Inicialmente, nas análises prévias, realiza-se o diagnóstico do cenário educativo, mapeando os obstáculos cognitivos e didáticos no ensino tradicional. Em seguida, na concepção e análise a priori, o Produto Educacional é desenhado, momento em que se planejam as atividades e se formulam as hipóteses teóricas sobre os comportamentos e possíveis erros dos alunos. A terceira fase, a experimentação, corresponde à aplicação prática, transformando a sala de aula em um ambiente de investigação ativa mediada pelo pesquisador. Por fim, na análise a posteriori e validação, confrontam-se os dados reais coletados durante a intervenção com as previsões iniciais, confirmando a eficácia da estratégia. É por meio desse referencial que as atividades são encadeadas para que os estudantes não sejam meros receptores de fórmulas, mas sim sujeitos que levantam hipóteses, realizam testes e validam seus próprios modelos matemáticos.(ALMOULOUD, 2007)(ARTIGUE, 1995)

Por fim, a Abordagem CTS confere o sentido social, tecnológico e ético indispensável à formação crítica dos alunos. Ao se depararem com problemas de modelagem baseados em situações reais, como o desenho seguro do perfil de uma montanha-russa ou de um casco de um navio, os estudantes são estimulados a compreender as interações entre o desenvol-

vimento científico, a engenharia e os impactos sociais. A matemática deixa de ser vista como um conjunto de regras estáticas e passa a ser interpretada como uma ferramenta viva de tomada de decisão, onde a escolha entre a rigidez de uma curva inadequada ou a suavidade da trajetória de um avião implicam diretamente na segurança e no bem-estar humano.(SANTOS; AULER, 2011)(BAZZO, 2003)

Assim, a jornada aqui descrita não visa apenas ao ensino de técnicas de interpolação, mas propõe uma experiência de modelagem, onde a tecnologia, a teoria e a prática social se unem para dar vida, forma e movimento aos polinômios.

8.2.1 Aula 1: O Poder da Previsão, Interpolação e o Método de Newton

Tema: Interpolação Polinomial e o Método de Diferenças Divididas de Newton.

Fase Cardoso: Diagnóstico e Sensibilização.

- Objetivo: Compreender a interpolação como ferramenta de estimativa de valores no intervalo dos dados conhecidos.
- Atividade: O professor apresenta dados reais (ex: Censo Populacional, crescimento populacional ou variação de temperatura etc).
- Ação: Apresentar o Método de Newton e as Diferenças Divididas, para encontrar um polinômio de grau 2 ou 3 que passe por esses pontos. O foco aqui é mostrar que, para poucos pontos, a matemática clássica funciona muito bem para prever o que aconteceu entre os anos de censo, por exemplo.
- Foco CTS: Como a ciência ajuda o governo a planejar infraestrutura a partir de dados incompletos.

Planejamento da Aula.

1. Problematização e Contextualização CTS (aproximadamente 10 min).

   O professor inicia a aula apresentando um desafio estratégico de planejamento urbano de longo prazo.

   No cenário proposto, os alunos assumem o papel de gestores públicos encarregados de planejar a infraestrutura educacional do município, sendo necessário dimensionar e construir uma nova escola para atender à demanda de 2025. Sabendo que os dados oficiais do IBGE são decenais (2000, 2010, 2020) e que o censo seguinte ocorrerá apenas em 2030, o docente questiona: como avaliar a taxa de crescimento

demográfico quinquenal, estimando a população nos anos de 2005 e 2015, a fim de fundamentar a decisão antes da realização do novo levantamento?

Tabela 8.2: Dados do Censo IBGE nos anos de referência (Exemplo para o quadro).

Ano (x)	**População em milhares (y)**
$x_0 = 2000$	$y_0 = 50$
$x_1 = 2010$	$y_1 = 62$
$x_2 = 2020$	$y_2 = 78$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026), adaptado de dados do IBGE.

2. **O Conceito de Interpolação (aprox. 10 min):** O professor explica que estimar valores não conhecidos exige rigor e que interpolar não é "chutar"um número, mas encontrar uma função matemática que passe **exatamente por todos os pontos conhecidos** (nós). Apresenta-se a diferença fundamental entre Ajuste de Curvas (onde a curva busca uma tendência geral e passa próxima aos pontos) e Interpolação (onde a curva é obrigada a interceptar cada um dos nós).

3. **O Método de Newton por Diferenças Divididas (aprox. 20 min):** Para evitar fórmulas extensas e facilitar a compreensão no Ensino Médio, o professor utiliza a construção algorítmica da Tabela de Diferenças Divididas.

   O Polinômio de Newton tem a estrutura:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

   - **Ordem 0 (Valores de y):** 50, 62, 78.
   - **Ordem 1:**

$$f[x_0, x_1] = \frac{62 - 50}{2010 - 2000} = 1{,}2 \quad \text{e} \quad f[x_1, x_2] = \frac{78 - 62}{2020 - 2010} = 1{,}6$$

   - **Ordem 2:**

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1{,}6 - 1{,}2}{2020 - 2000} = \frac{0{,}4}{20} = 0{,}02$$

   Equação do Polinômio Interpolador:

$$P(x) = 50 + 1{,}2(x - 2000) + 0{,}02(x - 2000)(x - 2010)$$

4. **Aplicação, Análise de Taxa e Projeção (aprox. 10 min):** Com a função obtida, o professor orienta a turma na resolução de duas etapas integradas:

- **Reconstrução Intercensitária (2005 e 2015):**

$$P(2005) = 50 + 1{,}2(5) + 0{,}02(5)(-5) = 55{,}5 \text{ mil habitantes}$$

$$P(2015) = 50 + 1{,}2(15) + 0{,}02(15)(5) = 69{,}5 \text{ mil habitantes}$$

- **Avaliação da Taxa de Crescimento Quinquenal:** Nota-se que o ganho populacional a cada 5 anos cresce progressivamente (+5,5; +6,5; +7,5; +8,5 mil habitantes), evidenciando uma aceleração no crescimento demográfico do município.
- **Tomada de Decisão para 2025:** Para dimensionar a nova escola antes da realização do Censo de 2030, projeta-se a população para 2025:

$$P(2025) = 50 + 1{,}2(25) + 0{,}02(25)(15) = 87{,}5 \text{ mil habitantes}$$

5. **Fechamento da Aula 1:** O professor conclui destacando que a interpolação permitiu reconstruir o passado recente e identificar a aceleração da taxa de crescimento, fundamentando com segurança a projeção para 2025. Encerra comparando o polinômio a uma "linha elástica"e lança o questionamento para a Aula 2: o que ocorreria se tentássemos utilizar essa mesma abordagem global para 15 ou 20 pontos de censo? A linha continuaria comportada ou sairia do controle?

8.2.2 Aula 2: Quando a Matemática "Falha", O Fenômeno de Runge

Tema: Interpolação Polinomial e o Fenômeno de Runge

Fase Cardoso: Conflito Cognitivo.

- Objetivo: Identificar as limitações dos polinômios de alto grau.
- Atividade: O professor propõe um desafio de engenharia: modelar o perfil de uma estrada longa com 11 pontos de controle.
- O Conflito: Ao tentar usar o Método de Newton da aula anterior para 12 pontos (gerando um polinômio de grau 11), os alunos observam o Fenômeno de Runge. A curva "chicoteia"nas pontas, tornando a estrada impossível de ser construída.
- Foco CTS: A ética na engenharia: uma matemática mal aplicada pode causar desastres reais.

Planejamento da Aula.

1. Retomada e o Novo Desafio (aproximadamente 10 min) O professor inicia relembrando o sucesso da Aula 1 (onde conseguimos prever a população com um polinômio de grau 2). Em seguida, eleva o nível do desafio apresentando um problema complexo de design e engenharia.

   "A prefeitura agora contratou vocês para projetar uma nova rodovia (ou o trilho de uma montanha-russa). O terreno é muito acidentado, e os engenheiros topográficos marcaram 11 pontos obrigatórios por onde a pista deve passar. Se usarmos a mesma lógica da aula passada, precisaremos de um polinômio de grau 10."

2. A Tentativa de Solução Global (aproximadamente 10 min). O professor desenha (ou projeta no quadro) os 12 pontos perfeitamente alinhados no formato de uma curva suave (como o formato de um sino).

   A Hipótese do Aluno: A intuição do aluno, baseada na aula anterior, dirá: "É só jogar no computador, achar a equação gigante de grau 10 e a estrada estará pronta e perfeita!"

3. O Choque Visual: O Fenômeno de Runge (aproximadamente 20 min). É aqui que o professor gera o conflito cognitivo. Ele mostra o que acontece quando o computador realmente traça esse polinômio de grau 10.

   O que aparece na tela: No centro da estrada, a curva passa bonitinha. Mas nas extremidades (nas pontas), a linha começa a oscilar violentamente para cima e para baixo.

   A Explicação Matemática: O professor apresenta formalmente o Fenômeno de Runge (descoberto em 1901). Ele explica que a clássica função de Runge:

   $$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

   quando interpolada por polinômios de graus cada vez maiores em pontos igualmente espaçados, não se ajusta melhor à curva. Pelo contrário, o erro tende ao infinito nas bordas. Aumentar o grau do polinômio piora o resultado.

4. Debate CTS: A Ética e a Segurança na Engenharia (aproximadamente 5 min). O professor traz a matemática para a vida real:

   Se construíssemos o trilho do trem ou a rodovia usando essa equação de grau 10, o que aconteceria com os passageiros nas extremidades da pista?

   Conclusão da turma: Os veículos seriam arremessados para fora. O polinômio global é matematicamente instável e tecnologicamente perigoso.

5. Fechamento e Gancho para a Aula 3 (aproximadamente 5 min). O professor finaliza a aula deixando um mistério no ar:

   "Se um polinômio gigante de grau 10 oscila demais e causa acidentes, como os engenheiros da vida real constroem montanhas-russas perfeitas?"

   A Pista (Spoiler): E se, em vez de usar uma única corda elástica para ligar os 11 pontos, nós cortássemos a corda e usássemos vários pedacinhos menores e mais firmes colados uns nos outros?

8.2.3 Aula 3: A Revolução Digital, Demonstração do GeoGebra e Splines

- Fase Cardoso: Investigação e Familiarização Tecnológica.
- Objetivo: Apresentar o GeoGebra como ambiente de modelagem e a Spline como solução.
- Atividade: Aula demonstrativa no laboratório. O professor apresenta o conceito de Spline: "Em vez de uma equação gigante para tudo, usamos várias equações pequenas para cada trecho".
- Mão no Software: O professor ensina os comandos básicos:
- Como criar pontos e controles deslizantes.
- O comando Função.
- A demonstração de como uma Spline Linear (retas) cria "bicos"e como a Spline Cúbica garante que a transição seja suave e segura.

1. Introdução Histórica e Epistemológica: O que é uma Spline? (aproximadamente 10 min)

O professor inicia a aula contextualizando o termo.

Antes dos computadores, os engenheiros navais e aeronáuticos usavam réguas de madeira ou metal muito flexíveis, chamadas splines, ou gabaritos de curva. Eles colocavam pesos de metal sobre o papel para fixar alguns pontos e a régua se moldava elasticamente entre eles, criando uma curva perfeitamente suave. Hoje, nós fazemos exatamente isso, mas dentro do computador usando equações matemáticas por pedaços.

2. Apresentação da Interface do GeoGebra (aproximadamente 10 min)

No laboratório de informática, ou usando os smartphones, o professor orienta os alunos a abrirem o GeoGebra, versão Gráfica ou Geometria.

Mostra a Janela de Álgebra, onde a matemática é digitada e a Janela de Visualização, onde os gráficos ganham vida.

Ensina a criar pontos na tela clicando na ferramenta "Ponto"ou digitando diretamente na barra de entrada (ex: A = (0, 2)).

3. Demonstração Prática do Professor: O Comando Mágico (aproximadamente 20 min)

O professor projeta sua tela para a turma e demonstra como construir uma função definida por partes, uma Spline, utilizando três pontos de controle para simular uma pequena rampa.

Passo a Passo da Demonstração:

1. Plotagem dos Pontos: O professor insere os pontos $A = (0, 1)$, $B = (3, 4)$ e $C = (6, 1)$ no GeoGebra.

2. O Desafio da Rampa: Se ligarmos esses pontos com segmentos de reta, Spline Linear, o que acontece no topo ponto B? O professor traça os segmentos e os alunos observam que se forma um bico pontiagudo. Para um skatista ou um carro de montanha-russa, esse bico seria um desastre.

3. Introdução ao Comando Condicional: O professor apresenta a sintaxe do comando de restrição de domínio, explicando que vamos usar uma função para o primeiro trecho (de A até B) e outra para o segundo trecho (de B até C).

   - Ele digita na barra de entrada: $f(x) = Se(0 \leq x \leq 6, -0.33x^2 + 2x + 1)$.

   Observação: o professor pode usar uma parábola simples que passe pelos pontos para mostrar a junção.

4. Visualização da Suavidade: Os alunos observam que, ao usar funções quadráticas, grau 2, bem calculadas, as duas curvas se unem no ponto B de forma contínua, fazendo sumir o "bico"e gerando uma transição suave.

5. Fechamento da Aula 3 e Preparação para o Desafio (aproximadamente 5 min)

O professor encerra a aula validando as descobertas:

Hoje vocês aprenderam sobre o GeoGebra e viram que é possível colar pedaços de funções usando o comando 'Se' para criar curvas sem bicos.

Gancho para a Aula 4:

Na próxima aula, o laboratório será de vocês. Vocês receberão a planta baixa com os pontos de uma montanha-russa real e terão que calcular e construir todas as equações de Splines para salvar o projeto da engenharia!

8.2.4 Aula 4: O Desafio do Designer, Modelagem Prática, Mão na Massa

Fase Cardoso: Construção do Conhecimento / Experimentação.

Objetivo: Aplicar os conceitos de Splines para resolver o problema do traçado suave.

Atividade: "O Projeto da Montanha-Russa". Em grupos, os alunos recebem uma malha de pontos no GeoGebra.

Ação: Eles devem construir as funções por partes que conectam esses pontos. O desafio é ajustar os coeficientes para que o final de uma curva se encaixe perfeitamente no início da outra, eliminando qualquer solavanco (o bico). Eles vivenciam a matemática como uma ferramenta de design e segurança.

1. Briefing do Projeto e Divisão dos Grupos (aproximadamente 10 min)

O professor organiza a turma em equipes de 3 a 4 alunos e distribui o objetivo de cada grupo. Cada grupo recebe uma folha com as coordenadas de 8 pontos estratégicos (nós) determinados pela topografia do terreno onde a montanha-russa deve ser construída.

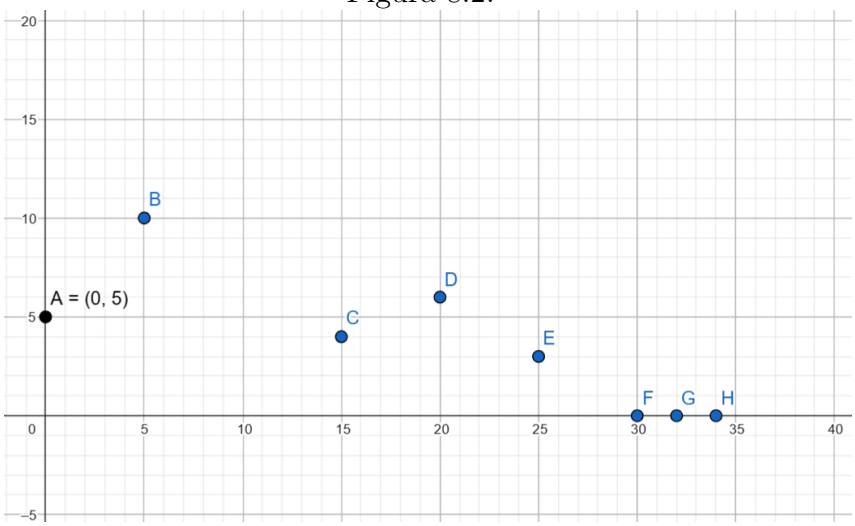
Exemplo de Pontos de Controle para o GeoGebra:

- $A = (0, 5)$ (Plataforma de embarque)
- $B = (5, 10)$ (Topo da primeira grande queda)
- $C = (15, 4)$ (Ponto mais baixo/vale)
- $D = (20, 6)$ (Início do segundo looping ou colina)
- $E = (25, 3)$ (Curva de desaceleração)
- $F = (30, 0)$ (desaceleração)
- $G = (32, 0)$ (trajeto final)
- $H = (34, 0)$ (Fim do trajeto)

Figura 8.1: Professor, escaneie o código abaixo para acessar o cenário base desta aula diretamente no GeoGebra

Fonte: O Autor. 2026

Figura 8.2:



Fonte: O Autor. 2026

2. Desenvolvimento do Projeto no GeoGebra (aproximadamente 30 min)

Os alunos inserem os pontos no software e começam a propor as funções por partes. O professor circula pelo laboratório atuando apenas como mediador, fazendo perguntas para guiar os grupos.

A Fase do Erro Construtivo (Spline Linear):

Inicialmente, alguns grupos tentarão unir os pontos usando segmentos de reta simples (Se(0 x 2, ...)).

O professor intervém: Olhem para a emenda no ponto B. Se o carrinho passar por aí a 80 km/h, o que acontece com os passageiros? Os alunos percebem visualmente o perigo do solavanco e descartam as retas.

Figura 8.3: O carrinho da montanha-russa sobreviveria a essa quina?

Fonte: O Autor 2026

Figura 8.4:



Fonte: O Autor 2026

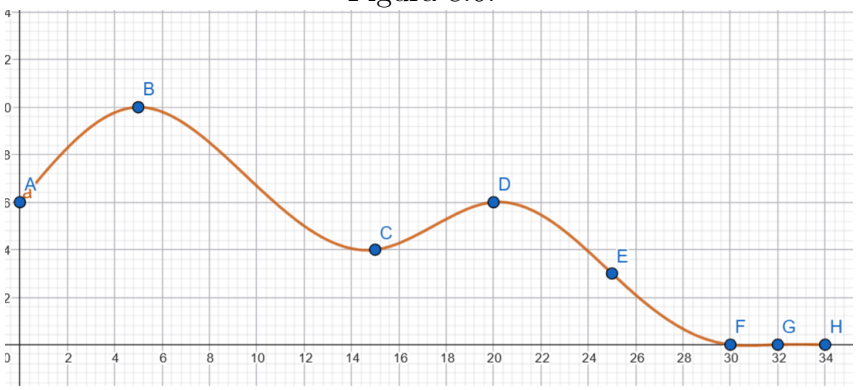
A Busca pela Suavidade, Splines Quadráticas, Cúbicas:

Os alunos passam a testar funções polinomiais de 2^{o} ou 3^{o} grau. Eles usam ferramentas do GeoGebra, como a criação de Controles Deslizantes para as variáveis a, b, c, d das equações $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ajustando os botões na tela, eles tentam alinhar perfeitamente o fim de uma curva com o começo da outra até que a transição fique visualmente lisa e contínua.

Figura 8.5: A suavidade das curvas

Fonte: O Autor. 2026

Figura 8.6:



Fonte: O Autor. 2026

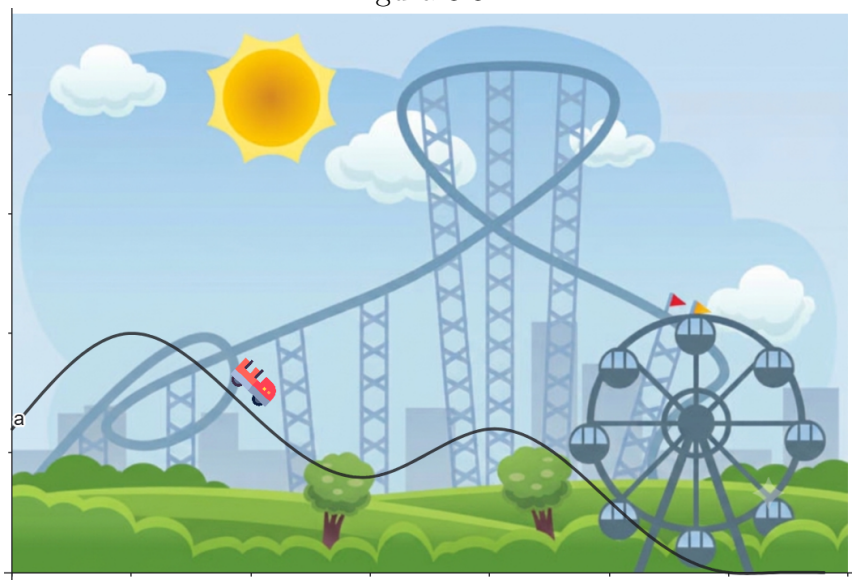
3. Compartilhamento e Ajustes Finais (aproximadamente 10 min)

Os grupos salvam os seus arquivos digitais e fazem um teste de simulação visual, o GeoGebra permite criar um ponto animado que corre sobre a função, simulando o carrinho. Eles verificam se o trajeto é fluido e seguro.

Figura 8.7: Professor, escaneie o código abaixo para acessar o cenário base desta aula diretamente no GeoGebra

Fonte: O Autor. 2026

Figura 8.8:



Fonte: O Autor. 2026

8.2.5 Aula 5: O Fechamento de Ouro, Sistematização e Reflexão CTS

- Fase Cardoso: Sistematização e Avaliação.
- Objetivo: Formalizar o saber e avaliar o impacto social.
- Atividade: Apresentação dos projetos. Cada grupo mostra sua montanha-russa ou pista de skate no GeoGebra.
- Sistematização: O professor formaliza no quadro a definição de funções definidas por partes e a importância da continuidade e da suavidade.
- Reflexão Final: Discussão sobre como a tecnologia, CAD, animações da Pixar, design de carros depende inteiramente desse conceito matemático para existir.

1. A Defesa dos Engenheiros (aproximadamente 20 min)

Cada grupo projeta a sua tela para a sala de aula durante 3 a 4 minutos. Eles devem explicar:

- Como resolveram o problema das emendas nos pontos críticos.
- Quais os graus dos polinômios escolhidos para os trechos, se usaram parábolas ou curvas cúbicas.
- Por que a pista deles é segura para a sociedade, foco CTS.

2. Sistematização e Institucionalização no Quadro (aproximadamente 20 min)

Após as apresentações, o professor assume o quadro para formalizar matematicamente o conceito construído intuitivamente no computador pelos alunos.

Definição Formal: Explica o que é uma Função Definida por Várias Sentenças, Função por Partes.

A Condição de Spline Cúbica: O professor explica que, para uma montanha-russa real, a engenharia exige que no ponto de emenda x_1 a transição entre os trechos seja perfeitamente suave. Matematicamente, isso significa igualar a inclinação e a concavidade das duas curvas, evitando bicos e solavancos bruscos no trajeto.

3.O Segredo da Emenda Perfeita, A Geometria da Suavidade: O professor desenha dois gráficos no quadro: um com um "bico", não suave e outro perfeitamente liso, suave. Como o Ensino Médio não trabalha com o rigor do Cálculo Diferencial, o professor traduz os requisitos de uma boa Spline utilizando conceitos geométricos e algébricos acessíveis.

O Ponto de Encontro, Continuidade sem buracos: A primeira regra para a montanha-russa não causar um acidente é que o final do trilho 1 deve encaixar perfeitamente no início do trilho 2. Matematicamente, se o trecho 1 termina na coordenada $(2, 5)$, o trecho

2 precisa começar obrigatoriamente na mesma coordenada $(2, 5)$. O professor demonstra no quadro que, ao substituir o valor de x na equação das duas funções, o resultado de y deve ser exatamente o mesmo.

O Alinhamento da Direção, suavidade sem bicos: A segunda regra para não haver solavanco é eliminar os "bicos"nas emendas. O professor explica isso usando o conceito de reta tangente. Se colocarmos uma régua reta encostada no exato ponto de junção, as duas curvas, a que chega e a que sai, devem deslizar suavemente sobre essa mesma régua. É por isso que os alunos precisaram ajustar os controles deslizantes no GeoGebra, para alinhar visualmente a inclinação das duas curvas no ponto de encontro.

A Abertura da Curva, a transição da força física: Por fim, o professor relembra o papel do coeficiente a e as funções quadráticas ($y = ax^2+bx+c$), que define se a parábola é mais aberta ou mais fechada, concavidade. Ele explica, de forma intuitiva, que emendar uma curva extremamente fechada com uma reta plana gera uma força brusca sobre o carrinho. O design perfeito exige que a transição de abertura, concavidade entre os trechos seja gradual para proteger os passageiros de solavancos.

4.Reflexão CTS e Avaliação Final (aproximadamente 10 min)

O professor encerra a Sequência Didática expandindo os horizontes da turma. Ele projeta exemplos de como as Splines e as Curvas de Bézier, que nasceram nas fábricas da Renault e Citroën, hoje ditam o formato das fontes dos celulares, a aerodinâmica dos aviões modernos e até os gráficos dos jogos de videogame que eles jogam todos os dias.

A avaliação final é composta pela entrega do arquivo digital do GeoGebra e por um breve relatório escrito onde o grupo justifica as suas escolhas matemáticas baseadas na segurança do projeto.

8.3 Sugestão de Atividade 2: O Design Aerodinâmico de um Veículo Elétrico

1. Contextualização CTS: O professor introduz a transição global para a mobilidade elétrica como ferramenta de combate às mudanças climáticas. O grande desafio dos engenheiros hoje não é apenas a bateria, mas a aerodinâmica. Um carro com formato mal projetado sofre com a resistência do ar, o que drena a bateria rapidamente e reduz a autonomia do veículo. A geometria do design dita a eficiência ecológica e econômica do transporte.

2. Transposição Didática via GeoGebra: Os alunos recebem no software as coordenadas de pontos estratégicos que definem lateral de um carro, do capô ao porta-malas.

O confronto de métodos: Ao tentarem usar o Polinômio, as oscilações nas extremidades criam deformações absurdas no capô ou na traseira do carro. Se usarem segmentos de reta, Spline Linear, o carro fica quadrado e sem aerodinâmica. Os alunos utilizam

funções polinomiais por partes no GeoGebra para encontrar curvas suaves, percebendo visualmente que a inclinação, reta tangente nas emendas precisa ser idêntica para o ar fluir sem turbulência.

3. Dinâmica da Engenharia Didática: Na fase de experimentação, as equipes de estudantes competem para criar o design com a transição mais suave. Na sistematização, o professor conecta a suavidade visual alcançada pelos alunos no software com as condições algébricas.

8.4 Sugestão de Atividade 3: Engenharia de Infraestrutura. O Traçado Vertical de uma Rodovia Segura.

1. Contextualização CTS: A atividade aborda a engenharia civil e a segurança viária. Ao projetar uma rodovia que precisa passar por montanhas e vales, o desenho das curvas verticais, subidas e descidas, é vital. Transições bruscas na pista podem fazer com que os veículos percam a aderência dos pneus, efeito de decolagem no topo ou impacto severo na base, causando acidentes fatais. A matemática das curvas garante a segurança e a vida dos motoristas.

2. Transposição Didática via GeoGebra: O professor coloca pontos que representam o perfil de um terreno acidentado onde uma nova estrada deve ser construída.

O confronto de métodos: Usar um polinômio único para ligar todos os pontos do terreno gera caminhos caóticos devido à instabilidade polinomial, criando falsas subidas e descidas íngremes no meio da estrada. Usar retas cria quinas perigosas no topo da montanha. Os alunos utilizam o GeoGebra para criar uma transição suave através de funções por partes, Splines quadráticas ou cúbicas. Eles manipulam a concavidade das funções para garantir que a transição de uma subida para uma descida ocorra de forma gradual e segura.

3. Dinâmica da Engenharia Didática: Durante a experimentação, os alunos testam a colocação de pontos de controle para suavizar o traçado. Na Sistematização e Validação, o professor formaliza o conceito de Função Definida por Partes e explica intuitivamente que a suavidade de concavidade que eles buscaram visualmente ajuda a evitar solavancos físicos na trajetória de um veículo.

Capítulo 9

Considerações Finais

O presente trabalho buscou responder a um desafio da educação matemática, a necessidade de interligar conceitos teóricos e abstratos à resolução de problemas práticos no ambiente escolar. Tomando como ponto de partida o estudo de funções e polinômios na Educação Básica, a pesquisa propôs um itinerário que une o rigor matemático do ensino superior às demandas metodológicas da sala de aula, mostrando que a modelagem de dados pode ser um processo vivo, dinâmico e visual.

Ao longo desta jornada, ficou evidente que os métodos clássicos de interpolação global, como as fórmulas de Lagrange e de Newton, embora fundamentais historicamente, apresentam limitações numéricas e geométricas severas quando aplicados a polinômios de graus elevados, o conhecido Fenômeno de Runge. Diante disso, a introdução das Funções Spline e das Curvas de Bézier mostrou-se não apenas como uma solução técnica refinada para garantir aproximações precisas e curvas geometricamente suaves, mas também como um excelente conteúdo para expandir a visão dos estudantes sobre o conceito de função.

A viabilização dessa proposta pedagógica encontrou sustentação científica no levantamento bibliográfico realizado em dissertações da plataforma do PROFMAT, artigos e livros de referência em modelagem geométrica. Sob o referencial teórico da Transposição Didática, de Yves Chevallard, e das fases da Engenharia Didática, de Michèle Artigue, foi possível desenhar uma sequência de atividades que reconstrói o saber científico de forma tátil e compreensível para os alunos, transformando a rigidez das fórmulas tradicionais em conhecimento aplicado.

Nesse processo de mediação, o software de geometria dinâmica GeoGebra desempenhou um papel indispensável. Em total harmonia com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que tange às Competências Específicas 3 e 4, espera-se que os estudantes possam compreender o software de forma que ele possa transitar com flexibilidade entre múltiplos registros de representação matemática. Ao manipularem pontos na tela e observarem as equações se ajustando em tempo real, é esperado que os alunos compreendam a fundo as propriedades que definem as curvas, superando a visão estática e puramente aplicadas a fórmulas da álgebra tradicional.

Por fim, sob o amparo da Abordagem Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS), este trabalho deve cumprir o papel social ao demonstrar aos estudantes que a matemática que dita o design dos automóveis, a aerodinâmica dos aviões e os gráficos digitais, está ao alcance de suas mãos. Espera-se que esta pesquisa sirva como inspiração e ferramenta de apoio para outros professores de matemática, reafirmando que o uso de tecnologias digitais e a modelagem geométrica são caminhos fundamentais para construir uma educação de qualidade, que une a precisão da ciência ao desenvolvimento do pensamento crítico e da cidadania.

Referências Bibliográficas

ADEEB, S. et al. *Introduction to Numerical Analysis for Engineers*. Edmonton: University of Alberta, 2020. Acesso em: 14 jul. 2026. Disponível em: <https://engcourses-uofa.ca/books/introduction-to-numerical-analysis-for-engineers/>.

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, J. (Ed.). *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1995. p. 193–217.

BAZZO, W. A. *Ciência, Tecnologia e Sociedade: uma introdução ao estudo do efeito Lorentz*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2003.

BÉZIER, P. Mathematical and practical possibilities of unisurf. In: BARNHILL, R. E.; RIESENFELD, R. F. (Ed.). *Computer Aided Geometric Design*. Nova York: Academic Press, 1974. p. 127–152.

BOOR, C. D. *A Practical Guide to Splines*. Revised. New York: Springer-Verlag, 2001.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Acesso em: 07 jul. 2026. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

CARDOSO, M. B. *Sequências didáticas: orientações para iniciantes na pesquisa em educação matemática*. Iguatu, CE: Quipá Editora, 2024. ISBN 978-65-5376-287-9. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/742078>.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

FARIN, G. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. 5. ed. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002.

HOHENWARTER, M.; JOSILOWSKI, M. Geogebra: Changing the way school geometry is taught. *Journal of Online Learning and Teaching*, v. 3, n. 3, p. 273–281, 2007.

HOHENWARTER, M. et al. *GeoGebra Manual*. [S.l.]. Acesso em: 07 jul. 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org>.

KHAN ACADEMY. *Plataforma de Aprendizagem Online*. Acesso em: 07 jul. 2026. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org>.

LAGRANGE, J.-L. Leçons élémentaires sur les mathématiques. *Journal de l'École Polytechnique*, Paris, 1795.

NEWTON, I. *Methodus Differentialis*. London: William Jones, 1711.

PAIS, L. C. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2007.

SALOMON, D. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Nova York: Springer, 2006.

SANTOS, W. L. P. d.; AULER, D. (Ed.). *CTS e Educação Científica: desafios, tendências e resultados de pesquisa*. Brasília: Editora UnB, 2011.

STEWART, J. *Cálculo*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1.