

O Problema de Plateau e as Superfícies Mínimas

Rodrigo Fernandes de Moura Melo

Universidade Federal de Alagoas

IV Workshop de Verão em Matemática da UFCG
Sessão de Geometria Diferencial

16 de Fevereiro de 2022



Sumário

- 1 Introdução
- 2 História
- 3 Superfícies mínimas de fronteira livre na bola
- 4 Referências Bibliográficas



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Seja ainda $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ um campo normal unitário sobre Σ .



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Seja ainda $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ um campo normal unitário sobre Σ .

- Para cada $p \in \Sigma$, a matriz do **operador de Weingarten** $A = -(\overline{\nabla}N)^T$ (em uma base apropriada) é

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$



Introdução

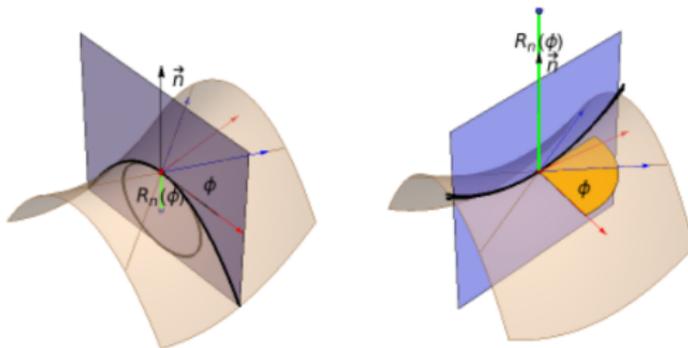
Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Seja ainda $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ um campo normal unitário sobre Σ .

- Para cada $p \in \Sigma$, a matriz do **operador de Weingarten** $A = -(\overline{\nabla}N)^T$ (em uma base apropriada) é

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

- A **curvatura média** de Σ em $p \in \Sigma$ é $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$.



Fonte: demonstrations.wolfram.com

Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Uma **variação** de x é uma aplicação suave $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de suporte compacto, tal que



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Uma **variação** de x é uma aplicação suave $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de suporte compacto, tal que

- (a) $x_t := x(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é imersão isométrica.



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Uma **variação** de x é uma aplicação suave $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de suporte compacto, tal que

- (a) $x_t := x(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é imersão isométrica.
- (b) $x_0 = x$.



Introdução

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Uma **variação** de x é uma aplicação suave $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de suporte compacto, tal que

- (a) $x_t := x(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é imersão isométrica.
- (b) $x_0 = x$.
- (c) $x_t(\partial\Sigma) = x_0(\partial\Sigma)$.



Introdução

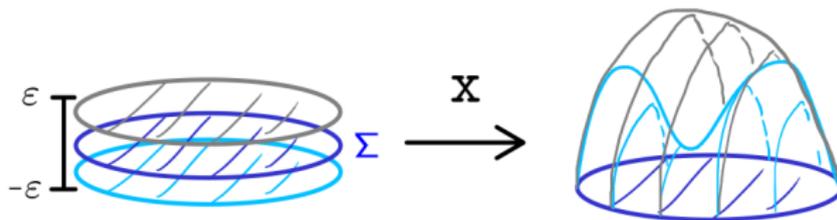
Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho de uma superfície conexa, orientável e com bordo $\partial\Sigma$.

Uma **variação** de x é uma aplicação suave $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de suporte compacto, tal que

- (a) $x_t := x(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é imersão isométrica.
- (b) $x_0 = x$.
- (c) $x_t(\partial\Sigma) = x_0(\partial\Sigma)$.

Campo variacional: $V(p) := \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t=0}$.

Funcional área: $\mathcal{A}(t) := \int_{\Sigma} d\Sigma_t$.



Introdução

Problema de Plateau: dada uma curva fechada C em \mathbb{R}^3 , mostrar que existe uma superfície de área mínima cuja fronteira é C .



Introdução

Problema de Plateau: dada uma curva fechada C em \mathbb{R}^3 , mostrar que existe uma superfície de área mínima cuja fronteira é C .

- Estudado primeiramente por Lagrange em 1760.



Introdução

Problema de Plateau: dada uma curva fechada C em \mathbb{R}^3 , mostrar que existe uma superfície de área mínima cuja fronteira é C .

- Estudado primeiramente por Lagrange em 1760.
- Plateau realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão em 1850.

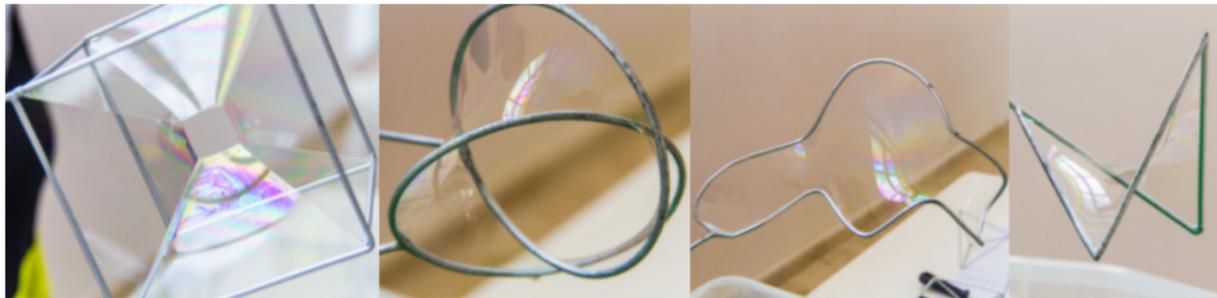


Fonte: matemateca.ime.usp.br

Introdução

Problema de Plateau: dada uma curva fechada C em \mathbb{R}^3 , mostrar que existe uma superfície de área mínima cuja fronteira é C .

- Estudado primeiramente por Lagrange em 1760.
- Plateau realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão em 1850.



Fonte: matemateca.ime.usp.br

- **Primeira variação da área:**
$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} H \langle N, V \rangle d\Sigma.$$

Introdução

Problema de Plateau: dada uma curva fechada C em \mathbb{R}^3 , mostrar que existe uma superfície de área mínima cuja fronteira é C .

- Estudado primeiramente por Lagrange em 1760.
- Plateau realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão em 1850.



Fonte: matemateca.ime.usp.br

- **Primeira variação da área:** $\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} H \langle N, V \rangle d\Sigma.$
- Se x minimiza área para toda variação, então $H = 0$.

Introdução

Problema de bordo livre: dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, encontrar superfície Σ de área mínima que atenda às seguintes condições:

- (a) $\text{int}\Sigma \subset \text{int}\Omega$
- (b) $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$;



Introdução

Problema de bordo livre: dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, encontrar superfície Σ de área mínima que atenda às seguintes condições:

- (a) $\text{int}\Sigma \subset \text{int}\Omega$
- (b) $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$;

- **Primeira variação da área:**
$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} H \langle N, V \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle V, \nu \rangle ds.$$

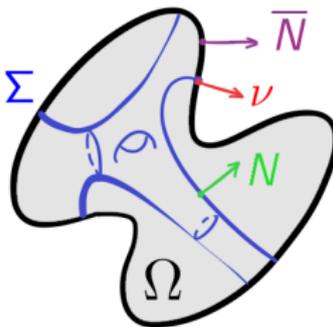


Introdução

Problema de bordo livre: dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, encontrar superfície Σ de área mínima que atenda às seguintes condições:

- (a) $\text{int}\Sigma \subset \text{int}\Omega$
- (b) $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$;

- **Primeira variação da área:** $\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} H \langle N, V \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle V, \nu \rangle ds.$
- Se x minimiza área para toda variação, então $H = 0$ e $\nu \in (T_p \partial\Omega)^\perp$ para todo $p \in \partial\Sigma$.



Introdução

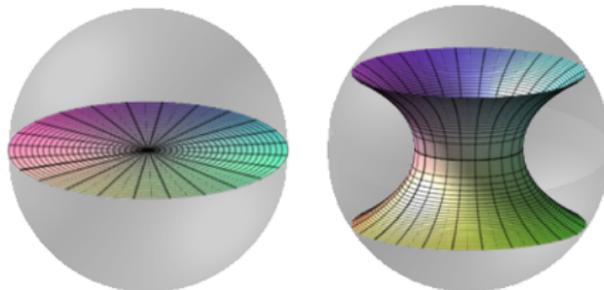
Exemplos clássicos de superfícies de fronteira livre na bola unitária $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$:



Introdução

Exemplos clássicos de superfícies de fronteira livre na bola unitária $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$:

- Disco equatorial plano $\Sigma = \mathbb{D}$.
- Catenóide crítico $\Sigma = \mathbb{K}$.



Sumário

- 1 Introdução
- 2 História
- 3 Superfícies mínimas de fronteira livre na bola
- 4 Referências Bibliográficas



Mínimas de fronteira livre: História



Mínimas de fronteira livre: História

1930-1940 **Douglas, Radó**: Problema de Plateau. (Bordo fixo.)



Mínimas de fronteira livre: História

1930-1940 **Douglas, Radó:** Problema de Plateau. (Bordo fixo.)

1940-1950 **Courant:** Existência de superfícies que minimizam área, propriamente imersas em domínios de \mathbb{R}^3 . (Bordo livre.)



Mínimas de fronteira livre: História

1930-1940 **Douglas, Radó**: Problema de Plateau. (Bordo fixo.)

1940-1950 **Courant**: Existência de superfícies que minimizam área, propriamente imersas em domínios de \mathbb{R}^3 . (Bordo livre.)

1980-2000 **Grüter, Jost, Nitsche, Struwe**: Existência de discos mínimos de fronteira livre em domínios convexos.



Mínimas de fronteira livre: História

1930-1940 **Douglas, Radó**: Problema de Plateau. (Bordo fixo.)

1940-1950 **Courant**: Existência de superfícies que minimizam área, propriamente imersas em domínios de \mathbb{R}^3 . (Bordo livre.)

1980-2000 **Grüter, Jost, Nitsche, Struwe**: Existência de discos mínimos de fronteira livre em domínios convexos.

Teorema (Nitsche (1985))

Seja Σ uma superfície mínima de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se Σ tem o tipo topológico do disco então Σ é um disco equatorial plano.

* Generalizações: **Fraser - Schoen (2015), Wheeler - Wheeler (2019)**.



Mínimas de fronteira livre: História



Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Ambrozio - Nunes (2016))

Seja Σ uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$, então Σ é o disco equatorial plano ou o catenóide crítico.

* Em 2020, **Barbosa - Viana** generalizaram o resultado em codimensão arbitrária.



Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Ambrozio - Nunes (2016))

Seja Σ uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$, então Σ é o disco equatorial plano ou o catenóide crítico.

* Em 2020, **Barbosa - Viana** generalizaram o resultado em codimensão arbitrária.

Teorema (Lawson (1969) e Chern - do Carmo - Kobayashi (1970))

Seja Σ^2 uma superfície mínima fechada na esfera unitária \mathbb{S}^3 . Suponha que $|A|^2 \leq 2$. Então Σ^2 é um equador ou um toro de Clifford.

Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Ambrozio - Nunes (2016))

Seja Σ uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$, então Σ é o disco equatorial plano ou o catenóide crítico.

* Em 2020, **Barbosa - Viana** generalizaram o resultado em codimensão arbitrária.

Teorema (Lawson (1969) e Chern - do Carmo - Kobayashi (1970))

Seja Σ^2 uma superfície mínima fechada na esfera unitária \mathbb{S}^3 . Suponha que $|A|^2 \leq 2$. Então Σ^2 é um equador ou um toro de Clifford.

Teorema (Cavalcante - Mendes - Vitória (2019))

Seja Σ^2 uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{2+k} , onde k é qualquer inteiro positivo. Se $|A|^2 \leq 4$, então Σ^2 é o disco equatorial plano.

Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Ambrozio - Nunes (2016))

Seja Σ uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$, então Σ é o disco equatorial plano ou o catenóide crítico.

* Em 2020, **Barbosa - Viana** generalizaram o resultado em codimensão arbitrária.

Teorema (Lawson (1969) e Chern - do Carmo - Kobayashi (1970))

Seja Σ^2 uma superfície mínima fechada na esfera unitária \mathbb{S}^3 . Suponha que $|A|^2 \leq 2$. Então Σ^2 é um equador ou um toro de Clifford.

Teorema (Cavalcante - Mendes - Vitório (2019))

Seja Σ^2 uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{2+k} , onde k é qualquer inteiro positivo. Se $|A|^2 \leq 4$, então Σ^2 é o disco equatorial plano.

Teorema (Barbosa - Freitas - Melo - Vitório (2021))

Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{n+1} . Se $|A|^2 \leq 2n$, então Σ é um disco equatorial totalmente geodésico \mathbb{D}^n .

Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Brendle (2013))

O Toro de Clifford é a única superfície mínima, mergulhada, fechada e de gênero 1 em \mathbb{S}^3 .

* Em resposta a uma conjectura proposta por **Lawson** em 1970.



Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Brendle (2013))

O Toro de Clifford é a única superfície mínima, mergulhada, fechada e de gênero 1 em \mathbb{S}^3 .

* Em resposta a uma conjectura proposta por **Lawson** em 1970.

Conjectura (Fraser - Li (2014))

A menos de congruência, o catenóide crítico é o único anel mínimo de fronteira livre propriamente mergulhado em \mathbb{B}^3 .

* Provada parcialmente por Fraser - Schoen (2016) e McGrath (2018).

Mínimas de fronteira livre: História

Teorema (Brendle (2013))

O Toro de Clifford é a única superfície mínima, mergulhada, fechada e de gênero 1 em \mathbb{S}^3 .

* Em resposta a uma conjectura proposta por **Lawson** em 1970.

Conjectura (Fraser - Li (2014))

A menos de congruência, o catenóide crítico é o único anel mínimo de fronteira livre propriamente mergulhado em \mathbb{B}^3 .

* Provada parcialmente por Fraser - Schoen (2016) e McGrath (2018).

Teorema (Kapouleas - Li (2017))

As únicas superfícies mínimas, mergulhadas e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 que possuem pelo menos uma componente de bordo invariante por rotações em \mathbb{S}^2 são o disco equatorial plano e o catenóide crítico.



Sumário

- 1 Introdução
- 2 História
- 3 Superfícies mínimas de fronteira livre na bola
- 4 Referências Bibliográficas



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Teorema (Barbosa - Freitas - Melo - Vitório (2021))

Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície mínima, mergulhada e de fronteira livre. Seja $\gamma \subset \partial\Sigma$ uma componente conexa do bordo de Σ . Suponha que exista um colar $\Gamma \subset \Sigma$ sobre γ no qual o conjunto $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente. Então, Σ é o disco equatorial \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} .

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Teorema (Barbosa - Freitas - Melo - Vitório (2021))

Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície mínima, mergulhada e de fronteira livre. Seja $\gamma \subset \partial\Sigma$ uma componente conexa do bordo de Σ . Suponha que exista um colar $\Gamma \subset \Sigma$ sobre γ no qual o conjunto $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente. Então, Σ é o disco equatorial \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} .

Observação 1

$$g = \langle x, N \rangle \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{2}|x|^2$$

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Teorema (Barbosa - Freitas - Melo - Vitório (2021))

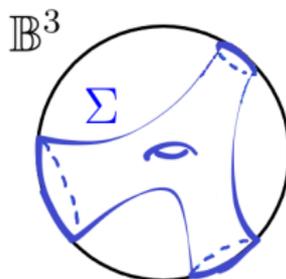
Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície mínima, mergulhada e de fronteira livre. Seja $\gamma \subset \partial\Sigma$ uma componente conexa do bordo de Σ . Suponha que exista um colar $\Gamma \subset \Sigma$ sobre γ no qual o conjunto $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente. Então, Σ é o disco equatorial \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} .

Observação 1

$$g = \langle x, N \rangle \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{2}|x|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla g = -Ax^T \quad \text{e} \quad \nabla \rho = x^T$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Teorema (Barbosa - Freitas - Melo - Vitório (2021))

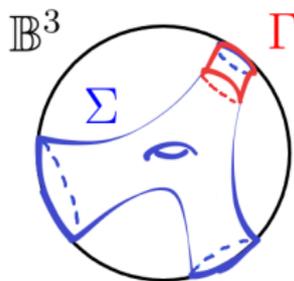
Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície mínima, mergulhada e de fronteira livre. Seja $\gamma \subset \partial\Sigma$ uma componente conexa do bordo de Σ . Suponha que exista um colar $\Gamma \subset \Sigma$ sobre γ no qual o conjunto $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente. Então, Σ é o disco equatorial \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} .

Observação 1

$$g = \langle x, N \rangle \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{2}|x|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla g = -Ax^T \quad \text{e} \quad \nabla \rho = x^T$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Observação 2

A matriz de A na base $\{e_1, x^T\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde τ é a curvatura geodésica de γ vista como subvariedade de \mathbb{S}^2 .

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Observação 2

A matriz de A na base $\{e_1, x^T\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde τ é a curvatura geodésica de γ vista como subvariedade de \mathbb{S}^2 .

Observação 3

Tendo em vista o resultado de **Kapouleas - Li**, é suficiente mostrarmos que a componente γ é invariante por rotações em \mathbb{S}^2 .



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Observação 2

A matriz de A na base $\{e_1, x^T\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde τ é a curvatura geodésica de γ vista como subvariedade de \mathbb{S}^2 .

Observação 3

Tendo em vista o resultado de **Kapouleas - Li**, é suficiente mostrarmos que a componente γ é invariante por rotações em \mathbb{S}^2 .

Observação 4

Sendo Σ mínima, basta mostrarmos que λ é constante sobre γ .



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Para cada $p \in \Sigma$, considere o operador

$$\begin{aligned} J_p : T_p \mathbb{R}^3 &\longrightarrow T_p \Sigma \\ V &\longmapsto J(V) = N \wedge V^T \end{aligned}$$

onde \wedge representa a operação de produto vetorial em \mathbb{R}^3 .

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Para cada $p \in \Sigma$, considere o operador

$$\begin{aligned} J_p : T_p \mathbb{R}^3 &\longrightarrow T_p \Sigma \\ V &\longmapsto J(V) = N \wedge V^T \end{aligned}$$

onde \wedge representa a operação de produto vetorial em \mathbb{R}^3 .

Lema 1

Sejam $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável e $\omega \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ o campo dado por $\omega(x) = J_x(x)$. Então,

$$\langle \nabla_X \omega, X \rangle = -\langle x, N \rangle \langle AX, J(X) \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Em particular, se x^T é uma direção principal do operador de Weingarten sobre um colar ao redor de uma componente conexa de $\partial\Sigma$, então

$$\langle \nabla_{x^T} \omega, x^T \rangle = 0.$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Proposição 1

Sob as mesmas hipóteses do teorema, temos que o autovalor λ associado a x^T é constante ao longo de γ .



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Proposição 1

Sob as mesmas hipóteses do teorema, temos que o autovalor λ associado a x^T é constante ao longo de γ .

Demonstração.

- $\nabla g = -Ax^T = -\lambda x^T$ sobre Γ .

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Proposição 1

Sob as mesmas hipóteses do teorema, temos que o autovalor λ associado a x^T é constante ao longo de γ .

Demonstração.

- $\nabla g = -Ax^T = -\lambda x^T$ sobre Γ .
- Σ de fronteira livre $\Rightarrow \lambda^2 = \lambda^2 |x^T|^2 = |\nabla g|^2$ sobre $\gamma \subset \partial\Sigma$.



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Proposição 1

Sob as mesmas hipóteses do teorema, temos que o autovalor λ associado a x^T é constante ao longo de γ .

Demonstração.

- $\nabla g = -Ax^T = -\lambda x^T$ sobre Γ .
- Σ de fronteira livre $\Rightarrow \lambda^2 = \lambda^2 |x^T|^2 = |\nabla g|^2$ sobre $\gamma \subset \partial\Sigma$.
- x e N ortogonais a $\partial\Sigma \Rightarrow \omega = J(x) = N \wedge x$ tangente a $\partial\Sigma$.

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Proposição 1

Sob as mesmas hipóteses do teorema, temos que o autovalor λ associado a x^T é constante ao longo de γ .

Demonstração.

- $\nabla g = -Ax^T = -\lambda x^T$ sobre Γ .
- Σ de fronteira livre $\Rightarrow \lambda^2 = \lambda^2 |x^T|^2 = |\nabla g|^2$ sobre $\gamma \subset \partial\Sigma$.
- x e N ortogonais a $\partial\Sigma \Rightarrow \omega = J(x) = N \wedge x$ tangente a $\partial\Sigma$.

Para mostrarmos que λ é constante ao longo de $\gamma \subset \partial\Sigma$, é suficiente verificarmos que

$$\omega |\nabla g|^2 = 0 \text{ sobre } \gamma.$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\omega|\nabla g|^2 = 2\langle \nabla_\omega \nabla g, \nabla g \rangle$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned}\omega|\nabla g|^2 &= 2\langle \nabla_\omega \nabla g, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \text{Hess}_g \omega, \nabla g \rangle\end{aligned}$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned}\omega|\nabla g|^2 &= 2\langle \nabla_\omega \nabla g, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \text{Hess}_g \omega, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \omega, \text{Hess}_g \nabla g \rangle\end{aligned}$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned}\omega|\nabla g|^2 &= 2\langle \nabla_\omega \nabla g, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \text{Hess}_g \omega, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \omega, \text{Hess}_g \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \omega, \nabla_{\nabla g} \nabla g \rangle\end{aligned}$$



Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned}\omega|\nabla g|^2 &= 2\langle \nabla_\omega \nabla g, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \text{Hess}_g \omega, \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \omega, \text{Hess}_g \nabla g \rangle \\ &= 2\langle \omega, \nabla_{\nabla g} \nabla g \rangle \\ &= 2\nabla g \langle \omega, \nabla g \rangle - 2\langle \nabla_{\nabla g} \omega, \nabla g \rangle\end{aligned}$$

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned}\omega|\nabla g|^2 &= 2\langle\nabla_\omega\nabla g,\nabla g\rangle \\ &= 2\langle\text{Hess}_g\omega,\nabla g\rangle \\ &= 2\langle\omega,\text{Hess}_g\nabla g\rangle \\ &= 2\langle\omega,\nabla_{\nabla g}\nabla g\rangle \\ &= 2\nabla g\langle\omega,\nabla g\rangle - 2\langle\nabla_{\nabla g}\omega,\nabla g\rangle \\ &= 2\nabla g\langle J(x^T),-Ax^T\rangle - 2\langle\nabla_{-Ax^T}\omega,-Ax^T\rangle\end{aligned}$$

Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned}\omega|\nabla g|^2 &= 2\langle\nabla_\omega\nabla g,\nabla g\rangle \\ &= 2\langle\text{Hess}_g\omega,\nabla g\rangle \\ &= 2\langle\omega,\text{Hess}_g\nabla g\rangle \\ &= 2\langle\omega,\nabla_{\nabla g}\nabla g\rangle \\ &= 2\nabla g\langle\omega,\nabla g\rangle - 2\langle\nabla_{\nabla g}\omega,\nabla g\rangle \\ &= 2\nabla g\langle J(x^T),-Ax^T\rangle - 2\langle\nabla_{-Ax^T}\omega,-Ax^T\rangle \\ &= 2\nabla g\langle J(x^T),-\lambda x^T\rangle - 2\lambda^2\langle\nabla_{x^T}\omega,x^T\rangle.\end{aligned}$$

□



Sumário

- 1 Introdução
- 2 História
- 3 Superfícies mínimas de fronteira livre na bola
- 4 Referências Bibliográficas





Barbosa, E., Freitas, A., Melo, R., and Vitório, F. (2021).
Uniqueness of free-boundary minimal hypersurfaces in rotational domains.
arXiv:2108.00441.



Brendle, S. (2013).
Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture.
Acta Math., 211(2):177–190.



Cavalcante, M. P., Mendes, A. a., and Vitório, F. (2019).
Vanishing theorems for the cohomology groups of free boundary submanifolds.
Ann. Global Anal. Geom., 56(1):137–146.



Chern, S. S., do Carmo, M., and Kobayashi, S. (1970).
Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length.
In Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968), pages 59–75. Springer, New York.



Fraser, A. and Li, M. M.-c. (2014).
Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary.
J. Differential Geom., 96(2):183–200.



Fraser, A. and Schoen, R. (2015).
Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms.
Int. Math. Res. Not. IMRN, (17):8268–8274.





Kapouleas, N. and Li, M. M.-c. (2017).

Free boundary minimal surfaces in the unit three-ball via desingularization of the critical catenoid and the equatorial disk.

arXiv preprint arXiv:1709.08556.



Lawson, Jr., H. B. (1969).

Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces.

Ann. of Math. (2), 89:187–197.



McGrath, P. (2018).

A characterization of the critical catenoid.

Indiana Univ. Math. J., 67(2):889–897.



Melo, R. (2021).

Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns domínios euclidianos e outros tópicos.

Dissertações e Teses defendidas na UFAL - IM.



Nitsche, J. C. C. (1985).

Stationary partitioning of convex bodies.

Arch. Rational Mech. Anal., 89(1):1–19.



Wheeler, G. and Wheeler, V.-M. (2019).

Minimal hypersurfaces in the ball with free boundary.

Differential Geom. Appl., 62:120–127.



Obrigado!!

rodrigo@pos.mat.ufal.br

