Subvariedades com vetor curvatura média normalizado paralelo

Sylvia F. da Silva

sylvia.ferreira@ufpe.br

IV Workshop de Verão - UAMat UFCG

14 de Fevereiro, 2022

Sumário

- O objetivo desta palestra é apresentar parte dos resultados obtidos no artigo

  F.R. dos Santos and S.F da Silva, *On complete submanifolds with parallel normalized mean curvature in product spaces* To appear in Proceedings of Edinburg Section A.

- Neste trabalho são apresentados resultados de caracterização para subvariedades com *vetor curvatura média normalizado paralelo* (*pnmc*) e *segunda curvatura média constante* em espaços produto do tipo $M^n(c) \times \mathbb{R}$, onde $M^n(c)$ é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $c = -1, 1$, considerando restrições na função ângulo e na parte sem traço do operador de forma.

- Estes resultados podem ser vistos como extensões dos obtidos [4, 6].
- Em [4] o autor estudou superfícies completas imersas num espaço produto do tipo $M^2(c) \times \mathbb{R}$ com curvatura extrínseca constante. Ele obteve uma fórmula do tipo Simons para o operador de Cheng-Yau, e usando uma generalização do princípio do máximo, obteve uma caracterização do cilindro em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, sob algumas restrições adequadas à função ângulo e na parte sem traço da segunda forma fundamental.
- Já em [6], os autores mostraram que, sob restrições adequadas no quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma subvariedade Σ^m, com vetor curvatura média paralelo (pmc), imersa no espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$, esta deveria ser uma hipersuperfície de curvatura média constante (cmc), totalmente umbílica em $M^{m+1}(c) \hookrightarrow M^n(c)$.

Fórmulas Gerais

- Consideremos a subvariedade Σ^m imersa na variedade Rimanniana $\overline{M}^{n+1}$, com referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ e coreferencial dual $\{\omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ de modo que, em cada $p \in \Sigma^m$ temos que e_i será tangente à subvariedade para $1 \leqslant i \leqslant m$, e normal à subvariedade quando $m+1 \leqslant i \leqslant n+1$.

- Neste sentindo, utilizaremos ao longo do texto a seguinte convenção de índices:

$$1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant m \quad e \quad m+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leqslant n+1.$$

- Com base na escolha deste referencial, definimos o operador de forma e o quadrado de sua norma da seguinte maneira:

- Operador de Forma

$$A = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \omega_i \otimes \omega_j e_\alpha, \qquad h_{ij}^{\alpha} = \langle A_\alpha (e_i), e_j \rangle = \langle \sigma (e_i, e_j), e_\alpha \rangle. \quad (1)$$

- De (1) segue que

$$|A|^2 = \sum_{\alpha} |A_\alpha|^2 = \sum_{\alpha,i,j} \left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2.$$

- Além disso, definimos o vetor curvatura média e a função curvatura média de Σ^m em $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente, por

$$h = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} tr(A_\alpha) e_\alpha \quad \text{e} \quad H = |h| = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{\alpha} tr(A_\alpha)^2}.$$

Proposição 1 (Fórmula do Tipo Simons).

Seja Σ^m *uma subvariedade de* $\overline{M}^{n+1}$ *com* $n \geqslant m$. *Então:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = {} & |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h^{\alpha}_{ij}\left(h^{\alpha}_{kkij} - \overline{R}_{\alpha ikjk} - \overline{R}_{\alpha kkij}\right) \\
& + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^{\alpha}_{ij}\left(-h^{\beta}_{kk}\overline{R}_{\alpha ij\beta} + 2h^{\beta}_{jk}\overline{R}_{\alpha\beta ki} - h^{\beta}_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k} + 2h^{\beta}_{ki}\overline{R}_{\alpha\beta ki}\right) \\
& + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^{\alpha}_{ij}\left(-h^{\beta}_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k} + 2h^{\beta}_{ki}\overline{R}_{\alpha\beta ki}\right) \\
& - \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha\right) + \left[tr\left(A_\alpha A_\beta\right)\right]^2 - tr\left(A_\beta\right) tr\left(A_\alpha^2 A_\beta\right)\right) \\
& + 2\sum_{\alpha,i,j,k,p} h^{\alpha}_{pj}\left(h^{\alpha}_{pk}\overline{R}_{pijk} + h^{\alpha}_{pj}\overline{R}_{pkik}\right),
\end{aligned}$$

onde $N(A) = tr\left(AA^t\right)$ *para qualquer matriz* $A = (a_{ij})$ *e* $\overline{R}$ *representa o tensor de curvatura em* $\overline{M}^{n+1}$.

O espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$

- Sendo $M^n(c)$ uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante $c = -1, 1$ e seu tensor métrico $\langle , \rangle_M$, o espaço produto Riemanniano $M^n(c) \times \mathbb{R}$ é uma variedade diferenciável com a métrica Riemanniana definida por:

$$\langle v, w \rangle_p = \langle (\pi_M)_* v, (\pi_M)_* w \rangle_M + \langle (\pi_{\mathbb{R}})_* v, (\pi_{\mathbb{R}*} w) \rangle,$$

com $p \in M^n(c) \times \mathbb{R}$, $v, w \in T_p(M \times \mathbb{R})$ e π_M, $\pi_{\mathbb{R}}$ denotando as projeções nos fatores correspondentes do produto.

- Associado ao produto Riemanniano, o campo vetorial

$$\partial_t := \left(\frac{\partial}{\partial_t} \right) \Big|_{(q,t)}, \qquad (q, t) \in M^n \times \mathbb{R}, \tag{2}$$

é paralelo e unitário, isto é,

$$\overline{\nabla}\partial_t = 0 \quad e \quad \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita da variedade Riemanniana $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

- Sendo Σ^m uma subvariedade de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, temos a decomposição:

$$\xi := \partial_t = T + N \tag{3}$$

  onde $T := \partial_t^T$ e $N := \partial_t^\perp$, denotam, respectivamente, as partes tangente e normal do campo ξ.

- Segue portanto, que

$$1 = \langle \xi, \xi \rangle = |T|^2 + |N|^2. \tag{4}$$

- Em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, o tensor curvatura satisfaz

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = c\,(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X) + c\langle Z,\xi\rangle(\langle Y,\xi\rangle X - \langle X,\xi\rangle Y)\\ + c\,(\langle Y,Z\rangle\langle X,\xi\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,\xi\rangle)\,\xi,\end{aligned} \tag{5}$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M\times\mathbb{R})$ e $\overline{R}$ é definido por

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z - \left[\overline{\nabla}_X, \overline{\nabla}_Y\right]Z.$$

- Um cálculo direto em (3) nos fornece as seguintes relações

$$A_N(X) = \nabla_X T \quad e \quad \sigma(X,T) = -\nabla^{\perp}_X N, \tag{6}$$

onde ∇ e $\nabla^{\perp}$ são as conexões tangente e normal dos fibrados tangente e normal sobre Σ^m e $A_N = \sum_\alpha \langle N, e_\alpha\rangle A_\alpha$ denota o operador de Weingarten na direção normal de ξ.

- Uma vez que $M^n(c) \times \mathbb{R}$ é localmente simétrica, temos

$$\overline{R}_{\alpha ikjk} = \overline{R}_{\alpha kkij} = 0. \tag{7}$$

Além disso, um cálculo rápido nos mostra que $\overline{R}_{\alpha\beta jk} = 0$, para todo α, β, j, k.

- Destas considerações e utilizando (5), podemos reescrever a Proposição 1 como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = {} & |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + cm|A_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|A_\alpha(T)|^2 \\
& - cm^2|H|^2 + c\left(m - |T|^2\right)|A|^2 - cm^2\langle h, N\rangle^2 \\
& + 3cm\langle\sigma(T,T), h\rangle - \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha\right) + \left[tr\left(A_\alpha A_\beta\right)\right]^2\right) \\
& + \sum_{\alpha,\beta} tr\left(A_\beta\right) tr\left(A_\alpha^2 A_\beta\right).
\end{aligned}$$

- Agora, vamos considerar o seguinte tensor simétrico

$$\phi = \sum_{\alpha} \phi_{ij}^{\alpha} \omega_i \otimes \omega_j e_{\alpha}, \quad onde \quad \phi_{ij}^{\alpha} = \langle \phi_{\alpha}(e_i), e_j \rangle. \tag{8}$$

- Observe que $\phi_{\alpha} = A_{\alpha} - \langle h, e_{\alpha} \rangle I$ é sem traço, e que

$$|\phi|^2 = \sum_{\alpha} |\phi_{\alpha}|^2 = \sum_{\alpha,i,j} \left(\phi_{ij}^{\alpha}\right)^2 = |A|^2 - mH^2. \tag{9}$$

- Note que $|\phi| = 0$ se, e somente, se Σ^m é uma subvariedade totalmente umbílica de $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

- Desta forma, temos

$$m|A_N|^2 = m|\phi_N|^2 + m^2\langle h, N\rangle^2$$

e

$$\sum_{\alpha}|A_\alpha(T)|^2 = \sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 + 2\langle\phi_h(T), T\rangle + H^2|T|^2.$$

- Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ik}h^\alpha_{kkij} + cm|\phi|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\ + c\left(m - |T|^2\right)|\phi|^2 - cm\langle\phi_h(T), T\rangle + \sum_{\alpha,\beta} tr\left(A_\beta\right) tr\left(A_\alpha^2 A_\beta\right) \\ - \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha\right) + \left[tr\left(A_\alpha A_\beta\right)\right]^2\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Uma fórmula do tipo Simons para subvariedades pnmc em $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

- Uma vez que consideraremos subvariedades *pnmc* Σ^m imersas no espaço produto $M^n(c)\times\mathbb{R}$, então $H>0$ e o vetor curvatura média normalizado $\eta=\dfrac{h}{H}$ é paralelo como seção do fibrado normal.
- Nesta configuração, vamos considerar $\{e_{m+1},\ldots,e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal local com $e_{m+1}=\eta$. Daí,

$$tr\,(A_{m+1})=mH \quad e \quad tr\,(A_\alpha)=m\langle h,e_\alpha\rangle=0, \qquad para \;\; todo \;\; \alpha\geqslant m+2$$

- De (8),

$$\phi_{ij}^{m+1}=h_{ij}^{m+1}-H\delta_{ij} \;\; e \;\; \phi_{ij}^{\alpha}=h_{ij}^{\alpha}, \qquad para\ todo\ \alpha\geqslant m+2. \tag{11}$$

- E como e_{m+1} é paralelo, da equação de Ricci segue que $A_\alpha A_{m+1}=A_{m+1}A_\alpha$ para todo $\alpha\geqslant m+2$.

- Portanto, de (9) e (11),

$$\sum_{\alpha,\beta} tr\left(A_\beta\right) tr\left(A_\alpha^2 A_\beta\right) - \sum_{\alpha,\beta}\Big(N\left(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha\right) + \left[tr\left(A_\alpha A_\beta\right)\right]^2\Big)$$
$$= mH^2|\phi|^2 + mH\sum_{\alpha} tr\left(\phi_\alpha^2 \phi_{m+1}\right) - \sum_{\alpha,\beta>m+1} N\left(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha\right)$$
$$+\sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)\right]^2. \tag{12}$$

- Para o estudo de subvariedades *pnmc*, introduziremos o operador diferencial de Cheng-Yau, [3], dado por:

$$\square(f) = \sum_{i,k} \left(mH\delta_{ij} - h_{ij}^{m+1} \right) f_{ij} = mH\Delta f - \sum_{i,j} h_{ij}^{m+1} f_{ij}, \qquad (13)$$

onde f_{ij} são as componentes do hessiano de f. Do ponto de vista tensorial, (13) pode ser escrito como:

$$\square(f) = tr\,(P \circ Hess\ f) \qquad (14)$$

onde

$$P = mHI - h^{m+1}$$

com I a identidade na álgebra dos campos vetoriais em Σ^m e $h^{m+1} = \left(h_{ij}^{m+1}\right)$ denota a segunda forma de Σ^m na direção de e_{m+1}.

- Por outro lado, em [2, 7] os autores definiram as *r-ésimas funções curvatura média* H_r de uma subvariedade imersa em um espaço forma Riemanniano de dimensão m, da seguinte forma:

- Para cada inteiro $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, a r-ésima é dada por

$$\binom{m}{r} H_r := S_r = \frac{1}{r!} \sum_{i,j} \delta^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} \langle B_{i_1 j_1}, B_{i_2, j_2} \rangle \ldots \langle B_{i_{r-1} j_{r-1}}, B_{i_r j_r} \rangle.$$

onde $\binom{m}{r}$ é o coeficiente binomial, $\delta^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_r}$ é o delta Kronecker generalizado e $B_{ij} = \sum_{\alpha, i, j} h^{\alpha}_{ij} e_{\alpha}$ com $\{e_{\alpha}\}_{\alpha=m+1}^{n+1}$ referencial ortonormal no fibrado normal. Por convenção, $H_0 = S_0 = 1$.

- Levando em conta esta definição, trabalharemos com o caso $r = 2$, que da definição anterior fornece:

$$m(m-1)H_2 = 2S_2 = m^2H^2 - |A|^2. \tag{15}$$

- Tomando $f = mH$ em (13) e usando (15), obtemos:

$$\begin{aligned} \square(mH) &= \frac{1}{2}\Delta\left(m^2H^2\right) - 2m^2|\nabla H|^2 - m\sum_{i,j} h_{ij}^{m+1}H_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\Delta|A|^2 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta H_2 - m^2|\nabla H|^2 - m\sum_{i,j} h_{ij}^{m+1}H_{ij}. \end{aligned}$$

- Utilizando (10) e (12) na igualdade anterior, obtemos a seguinte fórmula do tipo Simons para o operador de Cheng-Yau, agindo na função curvatura média de Σ^m em $M^n(c)\times\mathbb{R}$:

Proposição 2.

Seja Σ^m *uma subvariedade pnmc de* $M^n(c)\times\mathbb{R}$*, então temos*

$$\begin{aligned}\square(mH) &= |\nabla A|^2 - m^2|\nabla H|^2 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta H_2 + cm|\phi_N|^2 \\ &\quad - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 + \left(c\left(m-|T|^2\right)+mH^2\right)|\phi|^2 \\ &\quad - cmH\langle\phi_{m+1}(T),T\rangle + mH\sum_\alpha tr\left(\phi_\alpha^2\phi_{m+1}\right) \\ &\quad - \sum_{\alpha,\beta}\left(N\left(\phi_\alpha\phi_\beta-\phi_\beta\phi_\alpha\right)+\left[tr\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)\right]^2\right).\end{aligned}$$

Lemas Auxiliares.

- O Lema 1 apresenta extensões dos Lema 2.3 e Lema 2.5 de [4] para dimensão e codimensão arbitrárias e segunda curvatura média constante.
- Os dois seguintes, por sua vez têm demonstrações a serem encontradas em [10] e [8].

Lema 1.

Seja Σ^m uma subvariedade pnmc do espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$ com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Então

(i) $|\nabla A|^2 \geqslant m^2 |\nabla H|^2$. Em particular, se $H_2 > 0$, esta desigualdade se torna uma igualdade se, e somente se, Σ^m é uma região aberta de uma subvariedade paralela de $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

(ii) Se $H_2 \geqslant 0$, então o operador P definido em (14) é positivo semidefinido e consequentemente, o operador quadrado $\square$ é semi elíptico.

Lema 2.

Sejam $B, C : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação linear simétrica tal que* $[B, C] = 0$ *e* $tr\,(B) = tr\,(C) = 0$, *então*

$$-\frac{m-2}{\sqrt{m\,(m-1)}}|B|^2|C| \leqslant tr\left(B^2 C\right) \leqslant \frac{m-2}{\sqrt{m}\,(m-1)}|B|^2|C|.$$

Lema 3.

Sejam $B_1, \ldots, B_p$, *onde* $p \geqslant 2$, *matrizes simétricas* $m \times m$. *Então*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \left(N\left(B_\alpha B_\beta - B_\beta B_\alpha\right)\right) + \left[tr\left(B_\alpha B_\beta\right)\right]^2 \leqslant \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{p} N\left(B_\alpha\right)\right)^2 .$$

Um Princípio do Máximo.

- Sejam Σ^m uma variedade Riemanniana e $L : \mathscr{C}^2(\Sigma) \to \mathscr{C}^2(\Sigma)$ o operador semi-elípitico definido por

$$L(u) = tr\left(\mathscr{P} \circ Hess\ \ u\right), \tag{16}$$

onde $\mathscr{P} : T\Sigma \to T\Sigma$ é um tensor simétrico semidefinido.

- De acordo com [1], o *Princípio do Máximo de Omori-Yau* vale em Σ^m para o operador L se, e somente se, para qualquer função $u \in \mathscr{C}^2(\Sigma)$ com $u^* = sup_\Sigma u < +\infty$ existir uma sequência $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^m$ com as propriedades

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \qquad |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad L(u(p_k)) < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

- O resultado clássico devido a Omori [9] e Yau [11] afirma que o princípio do Máximo de Omori-Yau vale em toda variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci seja inferiormente limitada.

Lema 4 (Alías-Mastrolia-Rigoli).

Seja Σ^m uma variedade de Riemanniana completa e não compacta, seja $o \in \Sigma^m$ um ponto de referência e denote por $r(x)$ a função distância Riemanniana de o. Assuma que a curvatura seccional de Σ^m satisfaz

$$K(x) \geqslant -G^2(r(x)), \tag{17}$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz

$$(i)\, G(0) > 0 \quad (ii)\, G'(0) \geqslant 0 \quad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{G(t)} = +\infty.$$

Então o Princípio do Máximo de Omori-Yau vale em Σ^m para algum operador L com $\sup_\Sigma tr(\mathscr{P}) < +\infty$.

Proposição 3 (Princípio do Máximo).

Seja Σ^m uma variedade Riemanniana, completa e não compacta, cuja curvatura seccional satisfaz a condição (17) *e seja L um operador semielíptico como em* (16) *com $\sup_\Sigma tr(\mathscr{P}) < +\infty$. Se $f \in \mathscr{C}^2(\Sigma)$ é uma função não negativa tal que $L(f) \geqslant af^\beta$ para algum número real $a > 0$ e $\beta > 1$, então $f \equiv 0$.*

Demonstração:

- Considere uma função positiva $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e tome $g = \phi \circ f$. Logo, o gradiente e o Hessiano de g são dados por:

$$\nabla g = \phi'(f)\nabla f \quad e \quad \operatorname{Hess} g = \phi'(f)\operatorname{Hess} f + \phi''(f)\nabla f.$$

- Aplicando (16),

$$\begin{aligned} L(g) &= \phi'(f)L(f) + \phi''(f)\langle \mathscr{P}(\nabla f), \nabla f\rangle \\ &= \phi'(f)L(f) + \frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2}\langle \mathscr{P}(\nabla g), \nabla g\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

- Sendo assim

$$-\frac{\phi''(f)}{\phi'(f)^2}\langle \mathscr{P}(\nabla g), \nabla g\rangle + L(g) = \phi'(f)L(f).$$

- Escolhendo ϕ de modo que $\phi(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, as primeira e segunda derivadas são

$$\phi'(t) = -\alpha\phi(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\phi''(t)}{\phi'(t)^2} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\frac{1}{\phi(t)}.$$

- Portanto, de (18), fazendo $\alpha = \frac{\beta-1}{2} > 0$, chegamos a

$$a\alpha\left(\frac{f}{1+f}\right)^{\beta} \leqslant -gL(g) + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\langle\mathscr{P}(\nabla g), \nabla g\rangle. \tag{19}$$

- Já que L é semi-elíptico se, e somente se, $\mathscr{P}$ for positivo definido e $\rho = sup_{\Sigma} tr(\mathscr{P}) < +\infty$, tem-se

$$\langle\mathscr{P}(\nabla g), \nabla g\rangle \leqslant \rho|\nabla g|^2.$$

- De (19)
$$a\alpha\left(\frac{f}{f+1}\right)^{\beta} \leqslant -gL(g)+\rho\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^{2}. \tag{20}$$
- Como g é limitada por baixo, L é semielíptica, $sup_{\Sigma} tr(\mathscr{P}) < +\infty$ e a curvatura seccional de Σ^{m} satisfaz (17), podemos aplicar o Lema 4 afim de obter uma sequência $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de pontos em Σ^{m} tal que
$$g(p_k) < g_{*}+\frac{1}{k}, \quad |\nabla g(p_k)| < \frac{1}{k} \quad e \quad L(g(p_k)) > -\frac{1}{k}.$$
- Portanto, $f(p_k)\to f^{*}$ e substituindo em (20) temos
$$a\alpha\left(\frac{f(p_k)}{1+f(p_k)}\right)^{\beta} \leqslant \frac{1}{k}\left(g_{*}+\frac{1}{k}\right)+\frac{\rho(\alpha+1)}{k\alpha}. \tag{21}$$

Fazendo $k\longrightarrow+\infty$, temos que $f^{*}=0$, e já que $f\geqslant 0$ isto nos dá $f\equiv 0$.

■

Resultados Principais.

- A proposição a seguir fornece uma estimativa para o operador quadrado agindo na função curvatura média, a qual é essencial para a dos nossos teoremas.

Proposição 4.

Seja Σ^m uma subvariedade pnmc de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, $n \geqslant m \geqslant 3$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Então, temos

$$\Box(mH) \geqslant cm|\phi_N|^2 - cmH\langle \phi_{m+1}(T), T\rangle - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 + |\phi|^2\left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 + c\left(m - |T|^2\right)\right).$$

Demonstração:

- Das desigualdades de Cauchy-Schwarz e do Lema 2, temos:

$$\sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)\right]^2 \leqslant |\phi_{m+1}|^2 + 2|\phi_{m+1}|^2\left(|\phi|^2 - |\phi_{m+1}|^2\right) + \sum_{\alpha,\beta>m+1}\left[tr\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)\right]^2$$

e

$$mH\sum_{\alpha} tr\left(\phi_\alpha^2\phi_{m+1}\right) \geqslant -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^2|\phi_{m+1}|.$$

- Do Lema 3, podemos estimar

$$\sum_{\alpha,\beta>m+1}\left(N\left(\phi_\alpha^2\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha\right) + \left[tr\left(\phi_\alpha\phi_\beta\right)\right]^2\right) \leqslant \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha>m+1}|\phi_\alpha|^2\right) = \frac{3}{2}\left(|\phi|^2 - |\phi_{m+1}|^2\right)^2.$$

- Destas desigualdades,

$$
\begin{aligned}
& mH\sum_{\alpha} tr\left(\phi_{\alpha}^{2}\phi_{m+1}\right) - \sum_{\alpha,\beta\neq m+1} N\left(\phi_{\alpha}\phi_{\beta}-\phi_{\beta}\phi_{\alpha}\right) - \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(\phi_{\alpha}\phi_{\beta}\right)\right]^{2} \\
& \geqslant -\frac{m(m-2)}{\sqrt{m(m-1)}}H|\phi|^{2}|\phi_{m+1}| - |\phi_{m+1}|^{4} - 2|\phi_{m+1}|^{2}\left(|\phi|^{2}-|\phi_{m+1}|^{2}\right) \\
& -\frac{3}{2}\left(|\phi|^{2}-|\phi_{m+1}|^{2}\right)^{2}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

- Aplicando a desigualdade de Young para

$$
a=\sqrt{\frac{m}{m-1}}|\phi|H \quad \text{e} \quad b=|\phi||\phi_{m+1}|,
$$

obtemos

$$
\sqrt{\frac{m}{m-1}}H|\phi|^{2}|\phi_{m+1}| \leqslant \frac{m}{2(m-1)}|\phi|^{2}H^{2}+\frac{1}{2}|\phi|^{2}|\phi_{m+1}|^{2} \tag{23}
$$

- Além disso,

$$
\begin{aligned}
&-|\phi_{m+1}|^4-2|\phi_{m+1}|^2\left(|\phi|^2-|\phi_{m+1}|^2\right)-\frac{3}{2}\left(|\phi|^2-|\phi_{m+1}|^2\right)^2\\
&=\frac{1}{2}|\phi_{m+1}|^2\left(|\phi|^2-|\phi_{m+1}|^2\right)-\frac{3}{2}|\phi|^2\left(|\phi|^2-|\phi_{m+1}|^2\right)\\
&-\frac{3}{2}|\phi|^2\left(|\phi|^2-|\phi_{m+1}|^2\right)-|\phi|^2|\phi_{m+1}|^2.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

- Daí, inserindo (24) e (23) em (22), em seguida na Proposição 2 e usando que $H_2 \geqslant 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\square(mH) \geqslant\ & cm|\phi_N|^2-cmH\langle\phi_{m+1}(T),T\rangle-2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2\\
&+c\left(m-|T|^2\right)|\phi|^2-\frac{3}{2}|\phi|^4-\frac{(m-3)}{2}|\phi|^2|\phi_{m+1}|^2\\
&-\frac{m^2}{2(m-1)}H^2|\phi|^2+\frac{1}{2}|\phi_{m+1}|^2\left(|\phi|^2-|\phi_{m+1}|^2\right).
\end{aligned}
$$

- Como $m \geqslant 3$ e

$$|\phi|^2 = |\phi_{m+1}|^2 + \sum_{\alpha > m+1} |\phi_\alpha|^2 \geqslant |\phi_{m+1}|^2, \tag{25}$$

escrevemos:

$$\begin{aligned} \square(mH) \geqslant\ & cm|\phi_N|^2 - cmH\langle \phi_{m+1}(T), T\rangle - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + |\phi|^2 \left(-\frac{m}{2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H^2 + c\left(m - |T|^2\right)\right). \end{aligned} \tag{26}$$

- Além disso, como

$$mH^2 = \frac{1}{m-1}|\phi|^2 + mH_2, \tag{27}$$

concluímos:

$$\begin{aligned} \square(mH) \geqslant\ & cm|\phi_N|^2 - cmH\langle \phi_{m+1}(T), T\rangle - 2cm\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + |\phi|^2 \left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 + c\left(m - |T|^2\right)\right). \end{aligned}$$

- De agora em diante, denotaremos $M^n(c) \times \mathbb{R}$ por $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ quando $c = 1$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ quando $c = -1$.

- Estes espaços podem ser considerados como hipersuperfícies do espaço Euclideano $\mathbb{R}^{n+2}$ e do espaço Lorentiziano, respectivamente:

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+2}; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

$$e$$

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{L}^{n+2}; -x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -1\}$$

- Como aplicação da Proposição 4 temos os seguintes resultados:

Teorema 1.

Seja Σ^m *uma subvariedade pnmc completa de* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geqslant 3$, *com segunda curvatura média constante* $H_2 \geqslant 0$. *Se o ângulo entre* $\eta = \frac{h}{H}$ *e* ξ *é constante e*

$$|\phi|^2 + \frac{2(2m+1)}{m}|T|^2 \leqslant 2 + \frac{m}{m-1}H_2, \tag{28}$$

então Σ^m *é uma hipersuperfície cmc totalmente umbílica em* $\mathbb{S}^{m+1}$.

Demonstração:

- Fazendo $c = 1$ na Proposição 4, temos

$$\square(mH) \geqslant m|\phi_N|^2 - mH\langle \phi_{m+1}(T), T\rangle - 2m\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 + |\phi|^2\left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 + m - |T|^2\right). \tag{29}$$

- Da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$-2m\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \geqslant -2m\sum_{\alpha}|\phi_\alpha|^2|T|^2 = -2m|\phi|^2|T|^2. \tag{30}$$

- Além disso, da hipótese sobre o ângulo entre η e ξ e do fato de $\eta = e_{m+1}$ ser paralelo, temos

$$0 = X\langle \eta, \xi \rangle = -\langle \sigma(T, X), \eta \rangle = -\langle A_{m+1}(T), X \rangle, \tag{31}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Segue que $\phi_{m+1}(T) = -HT$ e, portanto

$$m|\phi_N|^2 - mH\langle \phi_{m+1}(T), T \rangle = m|\phi_N|^2 + mH^2|T|^2 \geqslant 0. \tag{32}$$

- Inserindo estas desigualdades em (29), obtemos

$$\Box(mH) \geqslant |\phi|^2 \left(-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)^2}|\phi|^2 + \frac{m^2}{2(m-1)}H_2 - (2m+1)|T|^2 + m \right). \tag{33}$$

- Usando a hipótese do (28), verificarmos que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{m^2(m-2)}{2(m-1)}|\phi|^2+\frac{m^2}{2(m-1)}H_2-(2m+1)|T|^2+m\\
&\geqslant \frac{m}{2(m-1)^2}|\phi|^2.
\end{aligned}
$$

- Sendo assim, (33) se torna

$$\square(mH)\geqslant \frac{m}{2(m-1)}|\phi|^4. \tag{34}$$

- Como $H_2\geqslant 0$, o Lema 1 garante que P é positivo semidefinido e de (27) temos

$$
\begin{aligned}
\square\left(|\phi|^2\right)&=2(m-1)H\square(mH)+2m(m-1)\langle P(\nabla H),\nabla H\rangle\\
&\geqslant 2(m-1)H\square(mH).
\end{aligned} \tag{35}
$$

- Uma vez que $|\phi| \leqslant \sqrt{\frac{m}{(m-1)}}H$, de (34) e (35) obtemos

$$\square\left(|\phi|^2\right) \geqslant \sqrt{\frac{m}{m-1}}|\phi|^5 \tag{36}$$

- Vamos verificar se Σ^m satisfaz às condições da Proposição 3, com o intuito de concluir que $|\phi|^2 \equiv 0$.

(i) A hipótese (28) implica que

$$\begin{aligned} m\,(m-1)\,H^2 &= |\phi|^2 + m\,(m-1)\,H_2 \\ &\leqslant 2 + \frac{m}{m-1}H_2 + m\,(m-1)\,H_2. \end{aligned}$$

Portanto, $sup_\Sigma H < +\infty$ e de (14),

$$sup_\Sigma tr\,(P) = m\,(m-1)\,sup_\Sigma H < +\infty. \tag{37}$$

(ii) Por outro lado, como $H_2 \geqslant 0$, de (15) temos, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $m+1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$,

$$(\lambda_i^\alpha)^2 \leqslant |A|^2 = m^2 H^2 - m(m-1) H_2 \leqslant m^2 H^2 \tag{38}$$

Consequentemente, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $m+1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$, temos

$$|\lambda_i^\alpha| \leqslant mH.$$

(iii) Além disto, da equação de Gauss,

$$R_{ijij} = \overline{R}_{ijij} + \sum_\alpha \left(h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha - \left(h_{ij}^\alpha\right)^2 \right). \tag{39}$$

De (38), vemos que para todo α, i, j,

$$\left(h_{ij}^\alpha\right)^2 \leqslant |A|^2 \leqslant m^2 H^2 \qquad e \qquad |h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha| = |h_{ii}^\alpha||h_{jj}^\alpha| \leqslant (mH)^2. \tag{40}$$

(iv) Então inserindo (37) e (40) em (39), temos

$$R_{ijij} \geqslant 1 - 2|T|^2 - (mH)^2 - |A|^2 \geqslant -1 - 2m^2 sup_\Sigma H^2 > -\infty. \tag{41}$$

- Isto é, a curvatura seccional de Σ^m é limitada inferiormente por uma função constante positiva, e portanto, podemos aplicar a Proposição 3 a (36) com $\beta = \frac{5}{2}$ para obtermos que $|\phi|^2 = 0$.
- Assim, todas as desigualdades obtidas ao longo da demonstração, viram igualdades. Em particular, a igualdade ocorre em (32).
- Concluímos a partir do Teorema de Redução da Codimensão (Teorema 2 em [5]), que Σ^m é uma hipersuperfície cmc em $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ totalmente umbílica.

■

Teorema 2

Seja Σ^m uma subvariedade *pnmc* completa em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geqslant 3$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Se o ângulo entre $\eta = \frac{h}{H}$ e ξ é constante e

$$|\phi|^2 - \frac{2(m+1)}{m}|T|^2 \leqslant -4 + \frac{m}{m-1}H_2, \tag{42}$$

então Σ^m é uma hipersuperfície *cmc* totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{m+1}$.

- Relembremos que uma subvariedade é dita ser *pseudo-umbílica* se o vetor curvatura média é não nulo e é direção umbílica, isto é

$$\sigma(X,Y) = \langle X,Y\rangle h, \text{ para todo } X,Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$$

- Neste caso, $\phi_h = 0$. Uma vez que $\phi_h = H\phi_{m+1}$ e $H > 0$, segue que $\phi_{m+1} = 0$.

- Nesta configuração a expressão (30) fica dada por:

$$\begin{aligned} \square(mH) \geqslant\ & cm|\phi_N|^2 - 2cm\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\ & + |\phi|^2\left(\frac{(3m-5)}{2(m-1)}|\phi|^2 + mH_2 + c\left(m - |T|^2\right)\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Proposição 5

Seja Σ^m uma subvariedade *pnmc* em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geqslant 2$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Se Σ^m é pseudo-umbílica e

$$|\phi|^2 + \frac{2m+1}{m}|T|^2 \leqslant 1 + H_2. \tag{44}$$

Então Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica *cmc* em $\mathbb{S}^{m+1}$.

Proposição 6

Seja Σ^m uma subvariedade *pnmc* em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > m \geqslant 2$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Se Σ^m é pseudo-umbílica e

$$|\phi|^2 - \frac{m+1}{m}|T|^2 \leqslant -2 + H_2. \tag{45}$$

Então Σ^m é uma hipersuperfície totalmente umbílica *cmc* em $\mathbb{H}^{m+1}$.

Superfícies pnmc em $M^n(c) \times \mathbb{R}$.

- Para estes, precisaremos da seguinte reformulação da Proposição 4.

$$
\begin{aligned}
2H\sum_{\alpha=3}^{n+1} tr\left(\phi_\alpha^2\phi_3\right) - \sum_{\alpha,\beta=3}\Big(N\left(\phi_\alpha\phi_\beta-\phi_\beta\phi_\alpha\right)+\left[tr\left(\phi_\beta\phi_\alpha\right)\right]^2\Big)& \\
\geqslant \frac{1}{2}|\phi_3|^2\left(|\phi|^2-|\phi_3|^2\right)-\frac{3}{2}|\phi|^2\left(|\phi|^2-|\phi_3|^2\right)-|\phi|^2|\phi_3|^2& \qquad (46)\\
\geqslant -\frac{3}{2}|\phi|^2\left(|\phi|^2-|\phi_3|^2\right)-|\phi|^2|\phi_3|^2,&
\end{aligned}
$$

com a igualdade ocorrendo na última igualdade se, e somente se,

$$|\phi_3| = 0 \quad \text{ou} \quad |\phi| = |\phi_3|.$$

- Por outro lado, de (25)

$$
\begin{aligned}
& -\frac{3}{2}|\phi|^2\left(|\phi|^2-|\phi_3|^2\right)-|\phi|^2|\phi_3|^2 \\
& =-\frac{3}{2}|\phi|^4+\frac{1}{2}|\phi|^2|\phi_3|^2 \geqslant -2|\phi|^4,
\end{aligned} \tag{47}
$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $|\phi| = |\phi_3| = 0$.

- Portanto, assumindo que H_2 é constante, quando inserindo (47) em (46) e então, na Proposição 2, obtemos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\square(2H) \geqslant\ & |\nabla A|^2 - 4|\nabla H|^2 - 2c|\phi_N|^2 - 4c\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 \\
& - 2cH\langle\phi_3(T), T\rangle + |\phi|^2\left(-|\phi|^2 + 2H_2 + c\left(2-|T|^2\right)\right).
\end{aligned} \tag{48}
$$

Teorema 3

Seja Σ^2 uma superfície *pnmc* completa de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $n > 2$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Se o ângulo entre $\eta = \frac{h}{H}$ e ξ é constante e

$$sup_{\Sigma}\left(|\phi|^2 + 5|T|^2\right) < 2 + 2H_2, \tag{49}$$

então Σ^2 é uma superfície cmc totalmente umbílica de $\mathbb{S}^3$.

Demonstração:

- Tome $c = 1$ em (48). Como $H_2 \geqslant 0$ segue do Lema 1,

$$\begin{aligned} \square(2H) \geqslant 2|\phi_N|^2 - 4\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 - 2H\langle\phi_3(T), T\rangle \\ + |\phi|^2\left(-2|\phi|^2 + 2H^2 + 2 - |T|^2\right) \end{aligned} \tag{50}$$

- Por outro lado, como o ângulo entre η e ξ é constante, a desigualdade (32) vale e, substituindo em (50),

$$\square(2H) \geqslant |\phi|^2\left(-|\phi|^2 + 2H_2 + 2 - 5|T|^2\right), \tag{51}$$

onde também utilizamos (27) e (30).

- Considerando $d := -sup_{\Sigma}\left(|\phi|^2 + 5|T|^2\right) + 2 + 2H_2 > 0$, temos

$$\square(2H) \geqslant d|\phi|^2.$$

- Agora, de (15) e (35),

$$\square\left(|\phi|^2\right) \geqslant d\sqrt{2}|\phi|^3.$$

- Por hipótese (49), a curvatura Gaussiana K satisfaz

$$\begin{aligned} 2K &= 2\left(1-|T|^2\right)+2H_2 \\ &\geqslant 2-sup_{\Sigma}\left(|\phi|^2+5|T|^2\right)+2H_2+3|T|^2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{52}$$

- Novamente, pela hipótese (49), temos que H é limitado e, consequentemente, $sup_{\Sigma} tr\,(P) < +\infty$.
- Da Proposição 3, concluímos que $|\phi|^2 = 0$ e o resultado segue como na última parte do Teorema 1.

■

Teorema 4

Seja Σ^2 uma superfície *pnmc* completa de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $n > 2$, com segunda curvatura média constante $H_2 \geqslant 0$. Se o ângulo entre $\eta = \frac{h}{H}$ e ξ é constante e

$$sup_\Sigma \left(|\phi|^2 + 3|N|^2\right) < -1 + 2H_2,$$

então Σ^2 é uma superfície *cmc* totalmente umbílica de $\mathbb{H}^3$.

Referências I

- L. J. Alías, P. Mastrolia and M.Rigoli *Maximum principles and geometric aplications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2016
- L. Cao and H. Li, *r-Minimal submanifolds in space forms*, Ann.Glob.Anal.Geom. **32** (2007), 311-341;
- Cheng, S. Y. and Yau, S-T, *Hypersurfaces with constant scalar curvature,* Math. Ann **225**, (1997), 195-204.
- F. R. dos Santos, *Rigidity of surfaces with constant extrinsic curvature in Riemannian product spaces*, Bull. Braz. Math.Soc, New Series (2021);
- J. H. Eschengburg and R. Tribuzy, *Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **89**, (1993), 11-18;

D. Fetcu and H. Rosenberg, *On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces* Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), 2158-2176;

J. F. Grosjean, *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact submanifolds* Pacific J. Math **206** (2002), 93-112;

A. M. Li and J. M. Li, *An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere,* Arch. Math. **58** (1992), 582-594;

Omori, H. *Isometric immersions of Riemannian manifolds,* J. Math. Soc. Japan **19**, (1967), 205-214;
Mem. Amer. Math, Soc. **822** (2005);

W. Santos, *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres,* Tohoku Math.J. **46** (1994), 403-415.

Yau, S-T., *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds,* Comm. Pure Appl. Math **28** (1975),201-228;

Obrigada!