Ideais Gorenstein equigerados de codimensão três

Dayane Lira - UFPE

14 abril de 2023

Sumário

Notações e definições

Notação

• $R := \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ é o anel de polinômios graduado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sobre um corpo $\Bbbk$.

Notação

• $I \subset R$ é um ideal homogêneo equigerado $\mathfrak{m}$-primário.

Definição

$\mathrm{Soc}(R/I) := I : \mathfrak{m}/I \subset R/I$ é o *socle* da álgebra Artiniana graduada R/I.

Definição

Um quociente Artiniano graduado R/I é *Gorenstein* se $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Soc}(R/I) = 1$.

Notações e definições

Definição

Uma *matriz antissimétrica* é uma matriz quadrada A tal que $A = -A^t$.

Definição

Uma *matriz alternada* é uma matriz antissimétrica cujas entradas da diagonal principal são todas iguais a zero.

Exemplo

Matriz alternada de ordem três

$$\begin{bmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{bmatrix}.$$

Notações e definições (cntd)

Seja Φ uma matriz alternada de tamanho $r \times r$ ($r \geq 1$) com entradas em R. É um resultado clássico que $\det \Phi = 0$ quando r é ímpar e é o quadrado de um polinômio nas entradas de Φ se r é par. Esse polinômio é chamado de *Pfaffiano* de Φ e é denotado por $Pf(\Phi)$. No caso em que $r \geq 3$ é ímpar, é costume se referir aos Pfaffianos que surgem dos menores principais $(r-1) \times (r-1)$ de Φ como os Pfaffianos (maximais) de Φ.

Virtual datum

Teorema

([1, Theorem 2.1])[1] *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local Noetheriano.*

(i) *Seja* $r \geqslant 3$ *um inteiro ímpar, e seja* Φ *uma matriz alternada* $r \times r$ *com entradas em* $\mathfrak{m}$. *Suponha que* $Pf_{r-1}(\Phi)$ *tenha grade* 3. *Então* $Pf_{r-1}(\Phi)$ *é um ideal de Gorenstein, minimamente gerado por* r *elementos.*

(ii) *Todo ideal de Gorenstein de grade* 3 *surge como em* (i).

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebraic structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, *American J. Math.* **99** (1977), 447–485.

Virtual datum

Além disso, quando I é equigerado, digamos, em grau $d \geq 1$, então as colunas de Φ devem ser homogêneas de algum grau padrão $d_i, , 1 \leq i \leq r$. Pela natureza de cada gerador de I como um Pfaffiano maximal de Φ e por um argumento elementar, concluímos que $d_1 = d_2 = \cdots = d_r$. Segue que $2d = (r-1)d'$, onde d' é o valor comum dos d_i's, isto é,

$$d = \frac{r-1}{2}\, d'. \tag{1}$$

Virtual datum

Por conveniência de referência, introduzimos a seguinte terminologia:

Definição

Um *virtual datum Gorenstein equigerado de codimensão* 3 (ou somente *virtual datum*) em dimensão $n \geq 3$ é um par (d, r) de inteiros tal que:

(i) $d \geq 2$ e $r \geq 3$.

(ii) r é ímpar e $(r-1)/2$ é um fator de d.

Virtual datum

Definição

Diremos que o datum (d, r) é *proper* (na dimensão n) se existir um ideal de Gorenstein de codimensão 3 em R com este datum, satisfazendo $\operatorname{ht} I_1(\Phi) = n$, onde Φ é a matriz antissimétrica cujos Pfaffianos máximos geram I.

Virtual datum

Example

Para todo $d \geq 1$, considere o virtual datum (d, r) onde $r = 2d+1$. Seja $H_d = (L_{i,j})$ uma matriz antissimétrica $r \times r$ cujas entradas acima da diagonal são definidas por:

$$L_{(i,j)} = \begin{cases} x & \text{if } j = i+1 \text{ and } i \text{ is odd} \\ y & \text{if } j = i+1 \text{ and } i \text{ is even} \\ z & \text{if } j = r-i+1 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

O ideal $I = \mathrm{Pf}_{2d}(H_d)$ é um ideal de Gorenstein de codimensão 3 em $R = \Bbbk[x, y, z]$ (veja [1, Proposição 6.2]). Além disso, $\operatorname{ht} I_1(H_d) = 3$. Isso cuida do caso linear, isto é, todo virtual datum $(d, 2d+1)$ é proper em dimensão 3.

Virtual datum

Teorema

Seja $n \geq 3$. *Suponha que são dados inteiros positivos* d *e* r, *tais que* $(r-1)/2$ *é um fator inteiro de* d. *Então existe um ideal de Gorenstein* d*-equigerado de codimensão* 3 *com* $r = \mu(I)$ *e* $I_1(\Phi)$ *um ideal de altura* n.

Referências

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebraic structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, *American* J. Math. **99** (1977), 447–485.

[2] D. S. Lira, *Equigenerated Gorenstein ideals of codimension 3. With a chapter on general forms*, PhD Thesis, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brazil, 2022.

[3] D. Lira, Z. Ramos and A. Simis, Equigenerated Gorenstein ideals of codimension three, *Collect. Math.* (2022). https://doi.org/10.1007/s13348-022-00365-6.

OBRIGADA!!!