Uma Equação Diofantina Relacionada a Soma de Dois Quadrados de Números de Fibonnaci k-Generalizado Consecutivos

Freitas, Gérsica - UFAL
Marques, Diego - UNB
Trojovský, Pavel - UHK
Bednarík, Dusan - UHK

14 abril de 2023

Sumário

Sequência de Fibonacci k-generalizada

Definição

Seja $k \geq 2$ um inteiro positivo. A **sequência de Fibonacci k-generalizada** $(F_n^{(k)})_{k\geq 0}$ é definida pelos valores iniciais $F_0^{(k)} = \ldots = F_{k-2}^{(k)} = 0$ e $F_{k-1}^{(k)} = 1$ e pela relação de recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \ldots + F_{n-k}^{(k)}, \ n \geq k.$$

- Se $k = 2$ temos os números de Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

- Se $k = 3$ temos a sequência de Tribonacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, \ldots$$

- Se $k = 4$ temos a sequência de Tetranacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872 \ldots$$

Sequência de Fibonacci k-generalizada

Definição

Seja $k \geq 2$ um inteiro positivo. A **sequência de Fibonacci k-generalizada** $(F_n^{(k)})_{k\geq 0}$ é definida pelos valores iniciais $F_0^{(k)} = \ldots = F_{k-2}^{(k)} = 0$ e $F_{k-1}^{(k)} = 1$ e pela relação de recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \ldots + F_{n-k}^{(k)}, \; n \geq k.$$

- Se $k = 2$ temos os números de Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

- Se $k = 3$ temos a sequência de Tribonacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, \ldots$$

- Se $k = 4$ temos a sequência de Tetranacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872 \ldots$$

Sequência de Fibonacci k-generalizada

Definição

Seja $k \geq 2$ um inteiro positivo. A **sequência de Fibonacci k-generalizada** $(F_n^{(k)})_{k\geq 0}$ é definida pelos valores iniciais $F_0^{(k)} = \ldots = F_{k-2}^{(k)} = 0$ e $F_{k-1}^{(k)} = 1$ e pela relação de recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \ldots + F_{n-k}^{(k)}, \; n \geq k.$$

- Se $k = 2$ temos os números de Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

- Se $k = 3$ temos a sequência de Tribonacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, \ldots$$

- Se $k = 4$ temos a sequência de Tetranacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872 \ldots$$

Sequência de Fibonacci k-generalizada

Definição

Seja $k \geq 2$ um inteiro positivo. A **sequência de Fibonacci k-generalizada** $(F_n^{(k)})_{k \geq 0}$ é definida pelos valores iniciais $F_0^{(k)} = \ldots = F_{k-2}^{(k)} = 0$ e $F_{k-1}^{(k)} = 1$ e pela relação de recorrência

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + \ldots + F_{n-k}^{(k)}, \ n \geq k.$$

- Se $k = 2$ temos os números de Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

- Se $k = 3$ temos a sequência de Tribonacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, \ldots$$

- Se $k = 4$ temos a sequência de Tetranacci

$$0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872 \ldots$$

Resultados Pré Existentes

- Os números de Fibonacci satisfazem a seguinte identidade

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \text{ para todo } n \geq 0. \tag{1}$$

- Em 2010, Marques e Togbé, em [5], mostraram que para um s fixo, se

$$F_n^s + F_{n+1}^s$$

  é um número de Fibonacci para infinitos n, então $s = 1$ ou 2.

- Luca e Oyono, em [4], resolveram o problema completamente mostrando que a equação Diofantina

$$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m,$$

  não tem solução (n, m, s) com $n \geq 2$ e $s \geq 3$.

Resultados Pré Existentes

- Os números de Fibonacci satisfazem a seguinte identidade

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \text{ para todo } n \geq 0. \tag{1}$$

- Em 2010, Marques e Togbé, em [5], mostraram que para um s fixo, se

$$F_n^s + F_{n+1}^s$$

é um número de Fibonacci para infinitos n, então $s = 1$ ou 2.

- Luca e Oyono, em [4], resolveram o problema completamente mostrando que a equação Diofantina

$$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m,$$

não tem solução (n, m, s) com $n \geq 2$ e $s \geq 3$.

Resultados Pré Existentes

- Os números de Fibonacci satisfazem a seguinte identidade

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \text{ para todo } n \geq 0. \tag{1}$$

- Em 2010, Marques e Togbé, em [5], mostraram que para um s fixo, se

$$F_n^s + F_{n+1}^s$$

  é um número de Fibonacci para infinitos n, então $s = 1$ ou 2.

- Luca e Oyono, em [4], resolveram o problema completamente mostrando que a equação Diofantina

$$F_n^s + F_{n+1}^s = F_m,$$

  não tem solução (n, m, s) com $n \geq 2$ e $s \geq 3$.

- Em 2014, Chaves e Marques, em [6], estudaram uma generalização da equação (1) e mostraram que a equação Diofatina

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}, \tag{2}$$

não possui suluções em inteiros positivos n, m e k, com $n > 1$ e $k \geq 3$.

- Em 2014, Luca e Gómez, em [7], mostraram que a equação

$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)},$$

não possui soluções em inteiros positivos quando $k \geq 3$, $n \geq 2$ e $s \geq 2$.

- Em 2014, Chaves e Marques, em [6], estudaram uma generalização da equação (1) e mostraram que a equação Diofatina
$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(k)}, \tag{2}$$
não possui suluções em inteiros positivos n, m e k, com $n > 1$ e $k \geq 3$.
- Em 2014, Luca e Gómez, em [7], mostraram que a equação
$$(F_n^{(k)})^s + (F_{n+1}^{(k)})^s = F_m^{(k)},$$
não possui soluções em inteiros positivos quando $k \geq 3$, $n \geq 2$ e $s \geq 2$.

Resultado Principal

Teorema

A equação Diofantina

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)}, \tag{3}$$

não possui solução para $2 \leq k < l$ *e* $n > k + 1$.

Sequências Recorrentes

O polinômio característico associado a $(F_n^{(k)})_n$ é

$$\psi_k(x) := x^k - x^{k-1} - \ldots - x - 1,$$

que é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x]$. É conhecido que $\psi_k(x)$ possui apenas um zero fora do círculo unitário, denotaremos tal zero por α e o chamaremos de raiz dominante de $\psi_k(x)$.

Além disso, conhecemos o seguinte fato sobre essa raiz, descoberto pelo Wolfram em [9, Lemma 3.6].

Lema

Para todo $k \geq 2$ temos que

$$2(1 - 2^{-k}) \leq \alpha \leq 2.$$

Fórmula de Dresden

Para $k = 2$ temos a conhecida fórmula de Binet

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Para os números de Fibonacci k-generalizado temos a fórmula de "Binet-Like"devido a G. Dresden, veja [8, Fórmula (2)]:

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - 1}{2 + (k+1)(\alpha_i - 2)} \alpha_i^{n-1}, \tag{4}$$

para $\alpha := \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ raízes de

$$\psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x - 1.$$

Fórmula de Dresden

Para $k = 2$ temos a conhecida fórmula de Binet

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Para os números de Fibonacci k-generalizado temos a fórmula de "Binet-Like" devido a G. Dresden, veja [8, Fórmula (2)]:

$$F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - 1}{2 + (k+1)(\alpha_i - 2)} \alpha_i^{n-1}, \tag{4}$$

para $\alpha := \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ raízes de

$$\psi_k(x) = x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x - 1.$$

Nesse mesmo artigo foi mostrado que a contribuição das raízes dentro círculo na fórmula (4) é pequena. Mais precisamente, temos que

$$|E_n(k)| = \left|F_n^{(k)} - g(\alpha, k)\alpha^{n-1}\right| < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

onde

$$g(x, k) := \frac{(x-1)}{2 + (k+1)(x-2)}.$$

Abaixo exibimos alguns valores de $\alpha = \alpha(k)$ e $g(\alpha, k)$:

k	$\alpha(k)$	$g(\alpha, k)$	k	$\alpha(k)$	$g(\alpha, k)$
2	1.6180	0.723607	6	1.9835	0.521772
3	1.8392	0.618419	7	1.9919	0.512454
4	1.9275	0.566342	8	1.9960	0.507071
5	1.9659	0.537926	9	1.9980	0.503980

Proposição

Temos,

$$\frac{1}{\alpha} < g(\alpha,k) = \frac{\alpha-1}{2+(k+1)(\alpha-2)} < \frac{3}{4} \tag{6}$$

para todo $k \geq 2$

Demonstração.

De fato, segue da tabela anterior que ambas as desigualdade são válidas para $k \in [2,9]$. Além disso, observamos que para $k \geq 4$ temos:

$$g(\alpha,k) = \frac{\alpha-1}{2+(k+1)(\alpha-2)} < \frac{2-1}{2-(k+1)/2^{k-1}} < 3/4. \tag{7}$$

Mais ainda, para todo $k \geq 3$ obtemos que

$$g\alpha - 1 = \frac{\alpha^2+k(2-\alpha)-2\alpha}{2+(k+1)(\alpha-2)} \geq \frac{\alpha^2-5\alpha+6}{2+(k+1)(\alpha-2)} > 0. \tag{8}$$

Proposição

Temos,

$$\frac{1}{\alpha} < g(\alpha, k) = \frac{\alpha - 1}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} < \frac{3}{4} \qquad (6)$$

para todo $k \geq 2$

Demonstração.

De fato, segue da tabela anterior que ambas as desigualdade são válidas para $k \in [2, 9]$. Além disso, observamos que para $k \geq 4$ temos:

$$g(\alpha, k) = \frac{\alpha - 1}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} < \frac{2 - 1}{2 - (k+1)/2^{k-1}} < 3/4. \qquad (7)$$

Mais ainda, para todo $k \geq 3$ obtemos que

$$g\alpha - 1 = \frac{\alpha^2 + k(2 - \alpha) - 2\alpha}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} \geq \frac{\alpha^2 - 5\alpha + 6}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} > 0. \qquad (8)$$

Proposição

Temos,

$$\frac{1}{\alpha} < g(\alpha, k) = \frac{\alpha - 1}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} < \frac{3}{4} \tag{6}$$

para todo $k \geq 2$

Demonstração.

De fato, segue da tabela anterior que ambas as desigualdade são válidas para $k \in [2, 9]$. Além disso, observamos que para $k \geq 4$ temos:

$$g(\alpha, k) = \frac{\alpha - 1}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} < \frac{2 - 1}{2 - (k+1)/2^{k-1}} < 3/4. \tag{7}$$

Mais ainda, para todo $k \geq 3$ obtemos que

$$g\alpha - 1 = \frac{\alpha^2 + k(2 - \alpha) - 2\alpha}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} \geq \frac{\alpha^2 - 5\alpha + 6}{2 + (k+1)(\alpha - 2)} > 0. \tag{8}$$

$\square$

Outro fato muito importante foi provado por Bravo e Luca, em [3, Lemma 1], e nos dá a seguinte estimativa para o $F_n^{(k)}$.

Lema

Para todo $k \geq 2$ *temos que*

$$\alpha^{n-2} \leq F_n^{(k)} \leq \alpha^{n-1},$$

para todo $n \geq 1$.

Formas Lineares Logarítmicas

Uma ferramenta muito importante que vamos utilizar em nosso problema é uma limitação inferior para formas lineares logaritmicas *à la Baker*.

O teorema abaixo nos dá uma limitação e é devido a Matveev, para uma demonstração desse teorema ver [10] ou [11, Theorem 9.4].

Teorema

Suponha que $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ *são números algébricos reais positivos em um corpo de números algébricos* $\mathbb{K}$ *de grau* D, *e* $b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{Z}$ *tais que* $\Lambda := \gamma_1^{b_1} \ldots \gamma_t^{b_t} - 1$ *é não nulo. Então*

$$|\Lambda| > \exp(-1.4 \times 30^{t+3} \times t^{4.5} \times D^2(1 + \log D)(1 + \log B)A_1 \cdots A_t),$$

onde $B \geq \max\{|b_1|, \ldots, |b_t|\}$, *e* $A_i \geq \max\{Dh(\gamma_i), |\gamma_i|, 0.16\}$, *para todo* $i \in [1, t]$.

Em 1998, Dujella e Pethö, em [12, Lemma 5 (a)], apresentam uma versão do método de redução baseado no Lema de Baker-Davenport.

Apresentaremos o lema que é uma variação imediata do resultado devido a Dujella e Pethö, que será uma ferramenta chave no nosso trabalho desempenhando a função de diminuir drasticamente os limitantes das variáveis da equação Diofantina trabalhada aqui.

Lema

Seja M um inteiro positivo e seja p/q um convergente da fração contínua do número irracional γ tal que $q > 6M$. Sejam A, B, μ números reais com $A > 0$ e $B > 1$. Defina $\epsilon = \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$ (onde $\|x\|$ denota a distância de x ao inteiro mais próximo). Se $\epsilon > 0$, então não existe solução da desigualdade

$$0 < |u\gamma - v + \mu| < AB^{-w} \tag{9}$$

em inteiros positivos u, v e w com

$$u \leq M \text{ e } w \geq \frac{\log(Aq/\epsilon)}{\log B}.$$

Teorema Principal

Teorema

A equação Diofantina

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+1}^{(k)})^2 = F_m^{(l)},$$

não possui solução para $2 \leq k < l$ *e* $n > k + 1$.

Vejamos uma breve ideia da nossa demonstração!

- Usamos o Lema (2) provado por Bravo e Luca e obtemos

$$n < m < 2n + 3. \tag{10}$$

- A partir da fórmula de Dresden obtemos uma limitação superior para a forma linear em três logaritmos relacionada à equação (1). Em seguida usamos uma limitação inferior dada por Matveev para obtermos uma limitação para n, m em função de l. Obtemos assim o seguinte resultado.

Lema

Se (n, m, k, l) é um uma solução inteira da equação Diofantina (3), com $l > k$ e $m > l + 1$, então

$$n < 3 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l \quad \textit{and} \quad m < 6.1 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l.$$

Vejamos uma breve ideia da nossa demonstração!

- Usamos o Lema (2) provado por Bravo e Luca e obtemos

$$n < m < 2n + 3. \tag{10}$$

- A partir da fórmula de Dresden obtemos uma limitação superior para a forma linear em três logaritmos relacionada à equação (1). Em seguida usamos uma limitação inferior dada por Matveev para obtermos uma limitação para n, m em função de l. Obtemos assim o seguinte resultado.

Lema

Se (n, m, k, l) é um uma solução inteira da equação Diofantina (3), com $l > k$ e $m > l + 1$, então

$$n < 3 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l \quad \textit{and} \quad m < 6.1 \cdot 10^{15} l^9 \log^3 l.$$

- Bravo e Luca usaram, em [2, p. 77 e 78], um argumento combinando algumas estimativas junto com o Teorema do Valor Médio.

Lema

Se (n, m, k, l) é uma solução inteira não trivial da equação (3) com $l > 1026$, $2^{k/2} < n$ e $m > l + 1$, então

$$n < m < 3.8 \cdot 10^{307}, \; l < 6.3 \cdot 10^{31} \text{ e } k \leq 2091.$$

- Como os limitantes são "astronômicos", usamos um argumento de redução, devido a Dujella e Pethö, que reduz drasticamente os limitantes. Segue da forma linear logarítmica que

$$0 < (2n-2)\gamma_k - m + \mu_k < 14.5 \cdot (1.42)^{-l}, \qquad (11)$$

onde $\gamma_k := \frac{\log \alpha}{\log 2}$ e $\mu_k := 2 + \frac{\log(g^2(1+\alpha^2))}{\log 2}$.

- Bravo e Luca usaram, em [2, p. 77 e 78], um argumento combinando algumas estimativas junto com o Teorema do Valor Médio.

Lema

Se (n, m, k, l) é uma solução inteira não trivial da equação (3) com $l > 1026$, $2^{k/2} < n$ e $m > l + 1$, então

$$n < m < 3.8 \cdot 10^{307}, \ l < 6.3 \cdot 10^{31} \ e \ k \leq 2091.$$

- Como os limitantes são "astronômicos", usamos um argumento de redução, devido a Dujella e Pethö, que reduz drasticamente os limitantes. Segue da forma linear logarítmica que

$$0 < (2n-2)\gamma_k - m + \mu_k < 14.5 \cdot (1.42)^{-l}, \qquad (11)$$

onde $\gamma_k := \frac{\log \alpha}{\log 2}$ e $\mu_k := 2 + \frac{\log(g^2(1+\alpha^2))}{\log 2}$.

No nosso caso usamos esse argumento duas vezes e conseguimos limitantes superiores para nossas formas lineares em três logaritmos.

- Finalmente usamos o software Mathematica que confirma que a equação (3) não possui solução para

$$2 \leq k < l \leq 1621, \quad k+1 < n < 26072 \ \ e \ \ l+1 < m < 52144.$$

$\square$

Referências I

[1] D. Bednarik, G. Freitas, D. Marques, P. Trojovsky. On the sum of squares of consecutive k-bonacci numbers which are l-bonacci numbers. *Colloquium Mathematicum*, **v. 156**, p. 153-164, (2019).

[2] J. J. Bravo, F. Luca, Powers of two in generalized Fibonacci sequences, *Rev. Colombiana Mat.* **46** (2012), 67–79.

[3] J. J. Bravo, F. Luca, On a conjecture about repdigits in k-generalized Fibonacci sequences, *Publ. Math. Debrecen* **82** Fasc. 3–4 (2013).

[4] F. Luca, R. Oyono, An exponential Diophantine equation related to powers of two consecutive Fibonacci numbers. *Proc. Japan Acad. Ser.* **87** (2011) p. 45–50.

[5] D. Marques, A. Togbé, On the sum of powers of two consecutive Fibonacci numbers. *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **86** (2010), 174–176.

Referências II

[6] A. P. Chaves, D. Marques, A Diophantine equation related to the sum of squares of consecutive k-generalized Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly* **52** (2014), 70–74.

[7] C. A. G. Ruiz, F. Luca, An exponential Diophantine equation related to the sum of powers of two consecutive k-generalized Fibonacci numbers, *Colloquium Mathematicum* **137** (2014), 171–188.

[8] G. P. Dresden, Z. Du, A simplified Binet formula for k-generalized Fibonacci numbers, *Journal of Integer Sequences*, **17** (4) (2014).

[9] A. Wolfram, Solving generalized Fibonacci recurrences, *Fibonacci Quart.* **36** (1998), 129–145.

Referências III

[10] E. M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers, II, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **64** (2000), 125–180. English translation in *Izv. Math.* **64** (2000), 1217–1269.

[11] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas powers, *Annals of Math* **163** (2006), 969–1018.

[12] A. Dujella, A. Petho, A generalization of a theorem of Baker and Davenport, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **49** (1998), 291–306.

Obrigada!