Hipersuperfície tipo-espaço maximais em variedades de Lorentz admitindo um campo de vetores tipo-luz paralelo

Joicy Priscila de Araújo Cruz[a]

- UFPE -

14 abril de 2023

[a] joicy.cruz@ufpe.br

Sumário

Introdução

- Esta apresentação é baseada nos trabalhos:

[1] Cruz, Joicy. Hipersuperfície tipo-espaço maximais em variedades de Lorentz admitindo um campo de vetores tipo-luz paralelo. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p.82. 2021.

[2] J.A. Pelegrín, A. Romero, R. Rubio, *On maximal hypersurfaces in Lorentz manifolds admitting a parallel lightlike vector field*, Class. Quant. Grav. **33** (2016), 1-8.

- Onde apresentaremos os desenvolvimentos dos principais resultados.

Introdução

- Em 1915 Bernstein mostrou que os únicos gráficos inteiros e mínimos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos.
- Este resultado pode ser extendido naturalmente para o espaço de Lorentz-Minkowski e é chamado de *Teorema de Calabi-Bernstein:*

  "As únicas superfícies tipo-espaço completas máximais no espaço de Lorentz-Minkowski são os planos tipo-espaço"

- Inicialmente, Calabi [3] provou tal resultado para $n \leq 4$.
- Pouco tempo depois, Cheng-Yau [4] extenderam o resultado para qualquer n.

Introdução

- Nos últimos anos tem sido crescente o interesse pelo estudo da geometria de hipersuperfícies tipo-espaço imersa em certos ambientes Lorentzianos.
- Nesta direção destacamos os *espaço-tempos pp-wave* (ondas de frente plana com propagação paralela) que têm atraído muita atenção devido à recente detecção experimental de ondas gravitacionais.
- Originalmente Brinkmann [2] definiu o espaço-tempo pp-wave como qualquer espaço-tempo cujo tensor métrico pode ser descrito na forma,

$$ds^2 = \mathcal{H}(u,x,y)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2, \qquad (1)$$

onde $\mathcal{H}$ é uma função suave.

Introdução

Nesta apresentação, mostraremos alguns resultados para hipersuperfícies com curvatura média constante em um espaço-tempo pp-wave.

- O primeiro deles é:

Teorema

Seja $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a TCC. Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de $\overline{M}^{n+1}$ com curvatura média constante, então ela deve ser totalmente geodésica.

Introdução

- O segundo é uma generalizalização do clássico resultado de Calabi-Bernstein para superfícies completas maximais em espaço-tempo pp-wave 3-dimensional.

Teorema

Se $\overline{M}^3$ um espaço-tempo *pp*-wave satisfazendo a TCC e S^2 uma superfície completa e maximal de $\overline{M}^3$, então S^2 é totalmente geodésica e flat[1].

[1] Dizemos que uma variedade Riemanniana é flat, se sua curvatura seccional é nula em todos os pontos.

Definições

- Para o que segue, denotaremos por M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional com tensor metrico $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇;
- $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos suaves;
- $C^\infty(M)$ o conjunto das funções suaves em M^n.
- $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, a aplicação A é denominada *Operador de Forma*

Definição (Variedade semi-Riemanniana)

Uma variedade semi-Riemanniana n-dimensional é uma variedade diferenciável $\overline{M}^n$ munida com um tensor métrico $\overline{g}$ e de índice constante ν.

Noções Preliminares

- Se $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, dizemos que um vetor tangente v é:

  1. tipo-espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;
  2. tipo-tempo se $\langle v, v \rangle < 0$;
  3. nulo se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.

Definição (Variedade de Lorentz)

Uma variedade de Lorentz $(\overline{M}, \overline{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana cuja métrica $\overline{g}$ possui índice igual a 1.

Noções Preliminares

Definição

(a) Definimos a função curvatura média de H de M^n em $\overline{M}^{n+1}$ por

$$H = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(A).$$

- Se H é constante, dizemos que M^n possui curvatura média constante.
- Se H é constante igual a zero, dizemos que M^n maximal.

(b) Se $A = 0$, dizemos que M^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica.

- Toda hipersuperfície totalmente geodésica é maximal!

Resultados Principais

Definição

Dizemos que uma variedade Lorentziana $(\overline{M}^{n+1}, \langle\,,\rangle)$ é um espaço-tempo pp-wave se admite um campo de vetores ξ paralelo e tipo-luz globalmente definido, isto é,

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0, \quad \xi \neq 0 \quad \text{tal que} \quad \overline{\nabla}\xi = 0.$$

- Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$, podemos decompor o campo ξ em parte tangente e normal como segue:

$$\xi = \xi^{\top} + \xi^{\perp} = T - \langle N, \xi \rangle N, \tag{2}$$

  onde N é um campo de vetores normal e unitário ao longo de M^n em $\overline{M}^{n+1}$.

Resultados Principais

- Sendo ξ tipo-luz, de (2) temos a seguinte relação pitagórica:

$$0 = \langle \xi, \xi \rangle = |T|^2 - \langle N, \xi \rangle^2 \quad \Longrightarrow \quad |T|^2 = \langle N, \xi \rangle^2. \tag{3}$$

- Denotemos por $\eta = \langle N, \xi \rangle$ e escolhemos a orientação de M^n tal que $\eta > 0$.

Proposição:

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço de $\overline{M}^{n+1}$. Então

$$\Delta \eta = n \langle \nabla H, T \rangle + \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2 \right) \eta, \tag{4}$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ e $|\cdot|$ denota a norma de Hilbert-Schmidt de A definida por $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$.

Resultados Principais

Definição

Dizemos que um um espaço-tempo $\overline{M}^{n+1}$ obedece a *Condição de Convergência Temporal* (TCC) se

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X, X) \geq 0,$$

para todo campo tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Teorema

Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a TCC e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de $\overline{M}^{n+1}$. Se M^n possui curvatura média constante, então ela deve ser totalmente geodésica.

Demonstração

↱ Uma vez que M^n possui curvatura média constante, (4) se escreve como

$$\Delta\eta = \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right)\eta, \tag{5}$$

↱ Tomando a integral em ambos os lado e aplicando o Teorema da Divergência,

$$0 = \int_M \Delta\eta\, dM = \int_M \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right)\eta\, dM. \tag{6}$$

↱ Sendo $\eta > 0$ e $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a TCC, segue que

$$\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right)\eta \geq 0. \tag{7}$$

Demonstração

- Consequentemente de (6),

$$\left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right)\eta = 0. \tag{8}$$

- Como $\eta > 0$,

$$\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2 = 0. \tag{9}$$

- Portanto, segue de (9) que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) = 0 \quad \text{e} \quad |A|^2 = 0.$$

- Mostrando que $A = 0$, isto é, M^n é totalmente geodésica.

■

Resultados Principais

Teorema

Sejam $\overline{M}^3$ um espaço tempo *pp*-wave satisfazendo a TCC e S^2 uma superfície tipo-espaço completa e maximal de $\overline{M}$. Então S^2 admite um função positiva limitada η que é constante se, e somente se, S^2 é totalmente geodésica.

Demonstração:

↱ Para primeira implicação, observemos que o Teorema de Cayley-Hamilton garante-nos que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I = 0.$$

↱ Como $\mathrm{tr}(A) = -2H = 0$, segue que

$$A^2 = -\det(A)I.$$

Demonstração

↱ Tomando o traço em ambos os lados

$$|A|^2 = -\det(A)\mathrm{tr}(I) = -2\det(A).$$

↱ Assim,

$$\det(A) = -\frac{1}{2}|A|^2.$$

↱ Consequentemente

$$A^2 = \frac{1}{2}|A|^2 I.$$

↱ Como $\nabla\eta = -A(T)$, segue que

$$|\nabla\eta|^2 = \langle A^2(T), T\rangle = \frac{1}{2}|A|^2|T|^2 = \frac{1}{2}|A|^2\eta^2 \tag{10}$$

↱ Sendo η é uma função constante positiva, $|A|^2 = 0$ o que implica $A = 0$, ou seja, S^2 é totalmente geodésica.

Demonstração

↱ Para a reciproca, se S^2 é totalmente geodésica, por (4)

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= 2\langle\nabla H, T\rangle + \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right)\eta\\ &= \left(\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2\right)\eta\\ &= \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\eta.\end{aligned} \tag{11}$$

↱ O TCC garante que $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq 0$, e assim η é subharmonica.

↱ Da equação de Gauss, temos

$$K\eta^2 = \eta^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A(T)|^2 \geq 0. \tag{12}$$

↱ Logo, aplicando o Teorema de Huber[2] temos que S^2 é parabólica.

↱ Portanto, sendo η positiva e limitada, segue que η é constante.

■

[2] Toda superfície Riemanniana completa, não-compacta e com curvatura Gaussiana não negativa é parabólica [5].

Resultados Principais

Teorema

Se $\overline{M}^3$ um espaço-tempo *pp*-wave satisfazendo a TCC e S^2 uma superfície tipo-espaço completa e maximal de $\overline{M}^3$, então S^2 é totalmente geodésica e flat.

Demonstração:

↱ Obeservemos que,

$$\Delta\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta^2}\Delta\eta + \frac{2}{\eta^3}|\nabla\eta|^2.$$

↱ Assim, de (11) e (10),

$$\Delta\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta}\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \leq 0. \tag{13}$$

onde na última desigualdade foi usada a TCC.

Demonstração

↱ Reescrevendo,

$$\Delta\left(-\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta}\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq 0. \tag{14}$$

↱ Assim, $-1/\eta$ é uma função subharmônica limitada superiormente.

↱ Como S^2 é parabólica, devemos ter que $-1/\eta$ é constante.

↱ Consequentemente η é uma função positiva e constante.

↱ Pelo Teorema anterior segue que S^2 é totalmente geodésica.

Demonstração

↱ Além disso, sendo η uma constante positiva, de (14)

$$0 = \Delta\left(-\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta}\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) \geq 0,$$

isto é, $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) = 0$.

↱ Substituindo em (12),

$$K\eta^2 = \eta^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A(T)|^2 = 0. \tag{15}$$

↱ Mostrando que S^2 é flat, o que conclui a demonstração.

■

Resultados Principais

Corolário (Calabi–Bernstein)

As únicas superfícies completas maximais no espaço Lorentz–Minkowski $\mathbb{L}^3$ são os planos tipo-espaço.

Demonstração:

Seja S^2 uma superfície tipo-espaço completa e maximal no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$. Uma vez que $\mathbb{L}^3$ é um espaço-tempo pp-wave e satisfaz a TCC, pois é flat, segue que S^2 é totalmente geodésica. Como as únicas superfícies totalmente geodésicas tipo-espaço de $\mathbb{L}^3$ são os planos tipo-espaço segue o resultado.

$\blacksquare$

Referências

[1] L. J. Alías, A. Caminha, *On the scarcity of non-totally geodesic complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a Lie group with bi-invariant Lorentzian metric*, Diff. Geom. and its App., p.49-64 (2017).

[2] H. Brinkmann, *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*, Math. Ann. (1925).

[3] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math., p. 223-230 (1970).

[4] S.Y. Cheng, S.T. Yau, *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz–Minkowski spaces*, Ann. Math. (1976)

[5] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Commentarii Mathematici Helvetici, p. 13–72 (1957).

Obrigada !