Uma equação biharmônica de Choquard com crescimento exponencial crítico

Lorena Maria Augusto Pequeno Silva-UFPB
Manassés Xavier de Souza - UFPB
Uberlândio Batista Severo - UFPB

14 abril de 2023

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é provar a existência de solução não trivial para a seguinte equação elíptica de quarta ordem:

$$\Delta^2 u - \Delta u + V(x)u = \left[|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))\right] K(x)f(x,u), \;\; x \in \mathbb{R}^4 \tag{1}$$

onde V e K são funções contínuas positivas, que podem desaparecer no infinito, f é uma função contínua não negativa com crescimento exponencial crítico no infinito, F é a primitiva de f, $*$ denota o operador de convolução, $\mu \in (0,4)$, $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ denota o operador biharmônico e Δ é o laplaciano.

Equações como (1) surgem em vários ramos da matemática aplicada e da física. Por exemplo, parte do interesse se deve ao fato de que as soluções do (1) estão relacionadas à existência de soluções de ondas solitárias para equações de Schrödinger da forma

$$i\frac{\partial\psi}{t\partial} = \Delta^2\psi - \Delta\psi + W(x)\psi - \left[|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,\psi))\right] K(x)f(x,\psi), \quad (2)$$

onde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ é uma função desconhecida e $W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é a função potencial.

Motivada por esses aspectos físicos, a Equação (1) tem atraído muita atenção de pesquisadores e alguns resultados de existências e de multiplicidade foram obtidos.

Equações como (1) surgem em vários ramos da matemática aplicada e da física. Por exemplo, parte do interesse se deve ao fato de que as soluções do (1) estão relacionadas à existência de soluções de ondas solitárias para equações de Schrödinger da forma

$$i\frac{\partial\psi}{t\partial} = \Delta^2\psi - \Delta\psi + W(x)\psi - \left[|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,\psi))\right] K(x)f(x,\psi), \quad (2)$$

onde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ é uma função desconhecida e $W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é a função potencial.

Motivada por esses aspectos físicos, a Equação (1) tem atraído muita atenção de pesquisadores e alguns resultados de existências e de multiplicidade foram obtidos.

Citamos alguns trabalhos interessantes que encontramos na literatura que tratam da existência de soluções por meio de métodos variacionais:

- considerando não linearidades com crescimento polinomial no infinito, apontamos por exemplo, [2, 5, 6];
- problemas elípticos envolvendo não linearidades com crescimento exponencial foram inicialmente estudados por Adimurthi em [1] e Figueiredo, Miyagaki e Ruf no trabalho [8];
- Sani [12], Aouaoui e Albuquerque [4], Miyagaki et al. [9] e Yang [14] trataram de alguns problemas de quarta ordem sem a presença do termo envolvendo o termo de convolução $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$. Seguindo as ideias de [1, 8], Sani [12] estudou uma classe de problemas envolvendo o operador biharmônico e uma classe de potenciais esfericamente simétricos (ou mesmo coercivos) e limitados inferiormente por uma constante positiva.

Citamos alguns trabalhos interessantes que encontramos na literatura que tratam da existência de soluções por meio de métodos variacionais:

- considerando não linearidades com crescimento polinomial no infinito, apontamos por exemplo, [2, 5, 6];
- problemas elípticos envolvendo não linearidades com crescimento exponencial foram inicialmente estudados por Adimurthi em [1] e Figueiredo, Miyagaki e Ruf no trabalho [8];
- Sani [12], Aouaoui e Albuquerque [4], Miyagaki et al. [9] e Yang [14] trataram de alguns problemas de quarta ordem sem a presença do termo envolvendo o termo de convolução $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$. Seguindo as ideias de [1, 8], Sani [12] estudou uma classe de problemas envolvendo o operador biharmônico e uma classe de potenciais esfericamente simétricos (ou mesmo coercivos) e limitados inferiormente por uma constante positiva.

Citamos alguns trabalhos interessantes que encontramos na literatura que tratam da existência de soluções por meio de métodos variacionais:

- considerando não linearidades com crescimento polinomial no infinito, apontamos por exemplo, [2, 5, 6];
- problemas elípticos envolvendo não linearidades com crescimento exponencial foram inicialmente estudados por Adimurthi em [1] e Figueiredo, Miyagaki e Ruf no trabalho [8];
- Sani [12], Aouaoui e Albuquerque [4], Miyagaki et al. [9] e Yang [14] trataram de alguns problemas de quarta ordem sem a presença do termo envolvendo o termo de convolução $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$. Seguindo as ideias de [1, 8], Sani [12] estudou uma classe de problemas envolvendo o operador biharmônico e uma classe de potenciais esfericamente simétricos (ou mesmo coercivos) e limitados inferiormente por uma constante positiva.

Citamos alguns trabalhos interessantes que encontramos na literatura que tratam da existência de soluções por meio de métodos variacionais:

- considerando não linearidades com crescimento polinomial no infinito, apontamos por exemplo, [2, 5, 6];
- problemas elípticos envolvendo não linearidades com crescimento exponencial foram inicialmente estudados por Adimurthi em [1] e Figueiredo, Miyagaki e Ruf no trabalho [8];
- Sani [12], Aouaoui e Albuquerque [4], Miyagaki et al. [9] e Yang [14] trataram de alguns problemas de quarta ordem sem a presença do termo envolvendo o termo de convolução $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$. Seguindo as ideias de [1, 8], Sani [12] estudou uma classe de problemas envolvendo o operador biharmônico e uma classe de potenciais esfericamente simétricos (ou mesmo coercivos) e limitados inferiormente por uma constante positiva.

Citamos alguns trabalhos interessantes que encontramos na literatura que tratam da existência de soluções por meio de métodos variacionais:

- considerando não linearidades com crescimento polinomial no infinito, apontamos por exemplo, [2, 5, 6];
- problemas elípticos envolvendo não linearidades com crescimento exponencial foram inicialmente estudados por Adimurthi em [1] e Figueiredo, Miyagaki e Ruf no trabalho [8];
- Sani [12], Aouaoui e Albuquerque [4], Miyagaki et al. [9] e Yang [14] trataram de alguns problemas de quarta ordem sem a presença do termo envolvendo o termo de convolução $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$. Seguindo as ideias de [1, 8], Sani [12] estudou uma classe de problemas envolvendo o operador biharmônico e uma classe de potenciais esfericamente simétricos (ou mesmo coercivos) e limitados inferiormente por uma constante positiva.

- Aouaoui e Albuquerque [4] consideraram potenciais e pesos que são radiais e podem ter singularidade na origem e podem desaparecer no infinito.
- Recentemente, Chen e Wang em [7] estudaram a existência de ground state normalizado para o seguinte problema do tipo Choquard biharmônico:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \beta \Delta u = \lambda u + (I_\mu * F(u)) f(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^4, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |u|^2 \mathrm{d}x = c^2, \end{cases}$$

onde $\beta \geq 0$ é pequeno, $c > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_\mu(x) = |x|^{-\mu}$ com $\mu \in (0, 4)$ e f tem crescimento exponencial crítico, entre outras condições padrão.

- Aouaoui e Albuquerque [4] consideraram potenciais e pesos que são radiais e podem ter singularidade na origem e podem desaparecer no infinito.
- Recentemente, Chen e Wang em [7] estudaram a existência de ground state normalizado para o seguinte problema do tipo Choquard biharmônico:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \beta \Delta u = \lambda u + (I_\mu * F(u))f(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^4, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |u|^2 \mathrm{d}x = c^2, \end{cases}$$

onde $\beta \geq 0$ é pequeno, $c > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_\mu(x) = |x|^{-\mu}$ com $\mu \in (0, 4)$ e f tem crescimento exponencial crítico, entre outras condições padrão.

Motivação

O presente trabalho foi motivado por alguns trabalhos já citados e por um artigo de Shen, Radulescu e Yang [13] que estudou a existência de soluções para uma classe de equações de Schrödinger do tipo

$$-\Delta u + V(x)u = \left[|x|^{-\mu} * (K(x)G(u))\right] K(x)g(u), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

onde o potencial V e o peso K podem decair para zero no infinito como $(1+|x|^{\alpha})^{-1}$ e $(1+|x|^{\beta})^{-1}$, respectivamente, para $\alpha \in (0,2)$, $\beta > (4-\mu)\alpha/4$, $\mu \in (0,2)$ e G é a primitiva de g, que cumpre um crescimento exponencial crítico no sentido de Trudinger-Moser.

Hipóteses de V e K

Inspirados por [10, 13], ao longo deste trabalho iremos assumir as seguintes hipóteses sobre as funções V e K:

(V) $V \in C(\mathbb{R}^4)$ e existem $\alpha, a > 0$ tais que $V(x) \geq \dfrac{a}{1 + |x|^\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$;

(K) $K \in C(\mathbb{R}^4)$ e existem $\beta, b > 0$ tais que $0 < K(x) \leq \dfrac{b}{1 + |x|^\beta}$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

Observamos que as condições acima permitem que V e K desapareçam no infinito. Para o estudo do problema (1) envolvendo o operador biharmônico será necessário ampliar o intervalo de variação das constantes α e β adotadas em [13]. Precisamente, vamos assumir as seguintes condições:

$$0 < \alpha \leq 4 \quad \text{e} \quad \frac{(8-\mu)\alpha}{8} \leq \beta < \infty, \quad \text{com} \quad \mu \in (0,4). \tag{3}$$

Hipóteses de V e K

Inspirados por [10, 13], ao longo deste trabalho iremos assumir as seguintes hipóteses sobre as funções V e K:

(V) $V \in C(\mathbb{R}^4)$ e existem $\alpha, a > 0$ tais que $V(x) \geq \dfrac{a}{1+|x|^{\alpha}}$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$;

(K) $K \in C(\mathbb{R}^4)$ e existem $\beta, b > 0$ tais que $0 < K(x) \leq \dfrac{b}{1+|x|^{\beta}}$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

Observamos que as condições acima permitem que V e K desapareçam no infinito. Para o estudo do problema (1) envolvendo o operador biharmônico será necessário ampliar o intervalo de variação das constantes α e β adotadas em [13]. Precisamente, vamos assumir as seguintes condições:

$$0 < \alpha \leq 4 \quad \text{e} \quad \frac{(8-\mu)\alpha}{8} \leq \beta < \infty, \quad \text{com} \quad \mu \in (0,4). \tag{3}$$

Espaço E

Considere o espaço definido da seguinte forma

$$E := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4) \,:\, |\nabla u|,\, \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^4) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^4} V(x) u^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

dotado de produto interno

$$\langle u, v \rangle_E := \int_{\mathbb{R}^4} (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x) uv) \, \mathrm{d}x$$

e sua norma correspondente

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^4} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x) u^2) \, \mathrm{d}x \right]^{1/2}.$$

Usando a condição (V), segue que o espaço E equipado com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ é um espaço de Hilbert. E podemos provar também que $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ é denso em E.

Espaço E

Considere o espaço definido da seguinte forma

$$E := \left\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4) \;:\; |\nabla u|,\, \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^4) \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^4} V(x) u^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

dotado de produto interno

$$\langle u, v \rangle_E := \int_{\mathbb{R}^4} \left(\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x) uv \right) \mathrm{d}x$$

e sua norma correspondente

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^4} \left(|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x) u^2 \right) \mathrm{d}x \right]^{1/2}.$$

Usando a condição (V), segue que o espaço E equipado com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ é um espaço de Hilbert. E podemos provar também que $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ é denso em E.

Espaço E

Considere o espaço definido da seguinte forma

$$E := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4) \ : \ |\nabla u|,\, \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^4) \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^4} V(x) u^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

dotado de produto interno

$$\langle u, v \rangle_E := \int_{\mathbb{R}^4} (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x) uv)\, \mathrm{d}x$$

e sua norma correspondente

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^4} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x) u^2)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2}.$$

Usando a condição (V), segue que o espaço E equipado com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ é um espaço de Hilbert. E podemos provar também que $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ é denso em E.

Teorema 1

Podemos estabelecer a seguinte versão ponderada da desigualdade de Adams.

Teorema

Suponha que (V), (K) *e* (3) *sejam válidos. Então, para todo* $\gamma > 0$ *e qualquer* $u \in E$ *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^4} K^{\frac{8}{8-\mu}}(x)(e^{\gamma u^2} - 1)\, dx < \infty. \tag{4}$$

Além disso, se considerarmos o supremo

$$\sup_{\{u \in E \,:\, \|u\| \leq 1\}} \int_{\mathbb{R}^4} K^{\frac{8}{8-\mu}}(x)(e^{\gamma u^2} - 1)\, dx = \begin{cases} < \infty & se \quad \gamma \in (0, 32\pi^2); \\ +\infty & se \quad \gamma > 32\pi^2. \end{cases} \tag{5}$$

Aplicações do Teorema 1

O próximo resultado é um princípio de concentração-compacidade do tipo Lions. Este resultado é crucial para mostrar que o funcional I satisfaz a condição de compacidade de Cerami.

Proposição

Suponha que $(V), (K)$ *e* (3) *valem. Se* $(u_n) \subset E$ *satisfaz* $\|u_n\| = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E *com* $u \in E$ *e* $\|u\| < 1$, *então para todo* $p \in \left(0, \frac{32\pi^2}{1-\|u\|^2}\right)$ *temos*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^4} K^{\frac{8}{8-\mu}}(x)(e^{pu_n^2} - 1)\, dx < \infty.$$

Aplicações do Teorema 1

O próximo resultado é um princípio de concentração-compacidade do tipo Lions. Este resultado é crucial para mostrar que o funcional I satisfaz a condição de compacidade de Cerami.

Proposição

Suponha que $(V),(K)$ *e* (3) *valem. Se* $(u_n) \subset E$ *satisfaz* $\|u_n\| = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E *com* $u \in E$ *e* $\|u\| < 1$, *então para todo* $p \in \left(0, \frac{32\pi^2}{1-\|u\|^2}\right)$ *temos*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^4} K^{\frac{8}{8-\mu}}(x)(e^{pu_n^2} - 1)\, dx < \infty.$$

Finalmente, estabelecemos o seguinte resultado de compacidade:

Proposição

Suponha que (V), (K) *e* (3) *sejam válidos. Então, para todo* $p \geq \frac{8-\mu}{4}$, *a imersão*

$$E \hookrightarrow L^{\frac{8p}{8-\mu}}(\mathbb{R}^4, K^{\frac{8}{8-\mu}}) \tag{6}$$

é contínua. Além disso, se a condição (3) *for substituída por*

$$0 < \alpha \leq 4 \quad e \quad \frac{(8-\mu)\alpha}{8} < \beta, \quad onde \quad 0 < \mu < 4, \tag{7}$$

então as imersões acima são compactas para cada $p \geq \frac{8-\mu}{4}$.

Para controlar o termo não local $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$, precisamos da conhecida desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev que desempenhará um papel importante ao longo do trabalho.

Proposição (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev)

Suponha que $s, r > 1$ e $0 < \mu < N$ com $\frac{1}{s} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2$, $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Então, existe uma constante aguda $C = C(s, N, \mu, r) > 0$, independente de g e h, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|x|^{-\mu} * g(x)]h(x)dx \leq C\|g\|_s\|h\|_r. \tag{8}$$

Para controlar o termo não local $|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))$, precisamos da conhecida desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev que desempenhará um papel importante ao longo do trabalho.

Proposição (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev)

Suponha que $s, r > 1$ *e* $0 < \mu < N$ *com* $\frac{1}{s} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2$, $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$*. Então, existe uma constante aguda* $C = C(s, N, \mu, r) > 0$*, independente de* g *e* h*, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|x|^{-\mu} * g(x)]h(x)\,dx \leq C\|g\|_s\|h\|_r. \tag{8}$$

Como aplicação do Teorema 1 e da Proposição 3, investigaremos a existência de solução fraca para o problema (1). Dizemos que $u \in E$ é uma **solução fraca** para (1), se para todo $v \in E$ vale a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^4} \Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x) uv \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))] K(x) f(x,u) v \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Estamos interessados no caso em que a não linearidade $f(x,s)$ tem o crescimento crítico que nos permite estudar (1) usando uma estrutura variacional considerando o espaço E.

Como aplicação do Teorema 1 e da Proposição 3, investigaremos a existência de solução fraca para o problema (1). Dizemos que $u \in E$ é uma **solução fraca** para (1), se para todo $v \in E$ vale a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^4} \Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x) uv \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))] K(x) f(x,u) v \, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Estamos interessados no caso em que a não linearidade $f(x,s)$ tem o crescimento crítico que nos permite estudar (1) usando uma estrutura variacional considerando o espaço E.

Mais especificamente, assumimos condições suficientes para que as soluções fracas do problema (1) tornem-se pontos críticos do funcional $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))]K(x)F(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

onde $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$. Precisamente, dizemos que $f(x,s)$ tem **crescimento exponencial crítico** (no infinito) se existir $\gamma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{e^{\gamma s^2}} = \begin{cases} 0, & \text{para todos } \gamma > \gamma_0, \\ +\infty, & \text{para todos } \gamma < \gamma_0, \end{cases} \tag{10}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Mais especificamente, assumimos condições suficientes para que as soluções fracas do problema (1) tornem-se pontos críticos do funcional $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))]K(x)F(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

onde $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$. Precisamente, dizemos que $f(x,s)$ tem **crescimento exponencial crítico** (no infinito) se existir $\gamma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{e^{\gamma s^2}} = \begin{cases} 0, & \text{para todos } \gamma > \gamma_0, \\ +\infty, & \text{para todos } \gamma < \gamma_0, \end{cases} \tag{10}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Estabeleceremos agora nossas principais suposições sobre a não linearidade $f(x,s)$:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$, f tem crescimento exponencial crítico, $f(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times (-\infty, 0]$ e $f(x,s) = o(s^{\frac{4-\mu}{4}})$ como $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$;

(f_2) $0 \leq H(x,t) \leq H(x,s)$ para todo $0 < t < s$ e para $x \in \mathbb{R}^4$, onde $H(x,u) = uf(x,u) - F(x,u)$;

(f_3) $F(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times [0, +\infty)$ e existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que

$$0 < sF(x,s) \leq M_0 f(x,s), \text{ para todos } s \geq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^4;$$

(f_4) $\liminf\limits_{s \to +\infty} \dfrac{F(x,s)}{e^{\gamma_0 s^2}} := \beta_0 > 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Estabeleceremos agora nossas principais suposições sobre a não linearidade $f(x,s)$:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$, f tem crescimento exponencial crítico, $f(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times (-\infty, 0]$ e $f(x,s) = o(s^{\frac{4-\mu}{4}})$ como $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$;

(f_2) $0 \leq H(x,t) \leq H(x,s)$ para todo $0 < t < s$ e para $x \in \mathbb{R}^4$, onde $H(x,u) = uf(x,u) - F(x,u)$;

(f_3) $F(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times [0, +\infty)$ e existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que

$$0 < sF(x,s) \leq M_0 f(x,s), \text{ para todos } s \geq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^4;$$

(f_4) $\liminf_{s \to +\infty} \dfrac{F(x,s)}{e^{\gamma_0 s^2}} := \beta_0 > 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Estabeleceremos agora nossas principais suposições sobre a não linearidade $f(x,s)$:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$, f tem crescimento exponencial crítico, $f(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times (-\infty, 0]$ e $f(x,s) = o(s^{\frac{4-\mu}{4}})$ como $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$;

(f_2) $0 \leq H(x,t) \leq H(x,s)$ para todo $0 < t < s$ e para $x \in \mathbb{R}^4$, onde $H(x,u) = uf(x,u) - F(x,u)$;

(f_3) $F(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times [0,+\infty)$ e existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que

$$0 < sF(x,s) \leq M_0 f(x,s), \text{ para todos } s \geq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^4;$$

(f_4) $\liminf\limits_{s \to +\infty} \dfrac{F(x,s)}{e^{\gamma_0 s^2}} := \beta_0 > 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Estabeleceremos agora nossas principais suposições sobre a não linearidade $f(x,s)$:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$, f tem crescimento exponencial crítico, $f(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times (-\infty, 0]$ e $f(x,s) = o(s^{\frac{4-\mu}{4}})$ como $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$;

(f_2) $0 \leq H(x,t) \leq H(x,s)$ para todo $0 < t < s$ e para $x \in \mathbb{R}^4$, onde $H(x,u) = uf(x,u) - F(x,u)$;

(f_3) $F(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times [0, +\infty)$ e existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que

$$0 < sF(x,s) \leq M_0 f(x,s), \text{ para todos } s \geq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^4;$$

(f_4) $\liminf_{s \to +\infty} \frac{F(x,s)}{e^{\gamma_0 s^2}} := \beta_0 > 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Estabeleceremos agora nossas principais suposições sobre a não linearidade $f(x,s)$:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$, f tem crescimento exponencial crítico, $f(x,s) = 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times (-\infty, 0]$ e $f(x,s) = o(s^{\frac{4-\mu}{4}})$ como $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$;

(f_2) $0 \leq H(x,t) \leq H(x,s)$ para todo $0 < t < s$ e para $x \in \mathbb{R}^4$, onde $H(x,u) = uf(x,u) - F(x,u)$;

(f_3) $F(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^4 \times [0, +\infty)$ e existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que

$$0 < sF(x,s) \leq M_0 f(x,s), \text{ para todos } s \geq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^4;$$

(f_4) $\liminf\limits_{s \to +\infty} \dfrac{F(x,s)}{e^{\gamma_0 s^2}} := \beta_0 > 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^4$.

Teorema 2

O primeiro teorema de existência é o seguinte:

Teorema

Suponha que (V) *e* (K) *valem com* $\alpha \in (0,4)$ *e* $\beta > (8-\mu)\alpha/8$. *Se* f *satisfaz* $(f_1)-(f_4)$, *então* (1) *admite pelo menos uma solução fraca não trivial em* E.

Esboço da prova

- Geometria do passo da montanha:
  (i) existem $\tau, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \tau$ for all $\|u\| = \rho$;
  (ii) existe $e \in E$, com $\|e\| > \rho$, tal que $I(e) < 0$.
- Como consequência, o nível minimax

$$c_M := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

  é positivo, onde
  $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}$.
- Estimativa do nível minimax $c_M < \frac{2\pi^2(8-\mu)}{\gamma_0}$.

- Lema de convergência: Se $(u_n) \subset E$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E com $n \to \infty$ e existe constante $C > 0$ satisfazendo

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u_n))]K(x)f(x,u_n)u_n \mathrm{d}x \leq C,$$

então, a menos de subsequência, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u_n))]K(x)F(x,u_n)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))]K(x)F(x,u)\mathrm{d}x.$$

Além disso, para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, a menos de subsequência, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u_n))]K(x)f(x,u_n)\psi\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^4} [|x|^{-\mu} * (K(x)F(x,u))]K(x)f(x,u)\psi\mathrm{d}x.$$

I satisfaz a **condição de Cerami** no nível c, denotada por $(Ce)_c$, se existir sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_* \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty,$$

tem uma subsequência que converge forte em E.

- Toda (u_n) $(Ce)_{c_M}$-sequência para I é limitada em E.
- I satisfaz a condição $(Ce)_{c_M}$.
- Portanto, o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e temos também que I satisfaz o $(Ce)_{c_M}$ condição. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha (com a condição Cerami) o funcional I tem um ponto crítico u_0 não trivial no nível minimax c_M.

I satisfaz a **condição de Cerami** no nível c, denotada por $(Ce)_c$, se existir sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_* \to 0 \;\; \text{as} \;\; n \to \infty,$$

tem uma subsequência que converge forte em E.

- Toda (u_n) $(Ce)_{c_M}$-sequência para I é limitada em E.
- I satisfaz a condição $(Ce)_{c_M}$.
- Portanto, o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e temos também que I satisfaz o $(Ce)_{c_M}$ condição. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha (com a condição Cerami) o funcional I tem um ponto crítico u_0 não trivial no nível minimax c_M.

Teorema 3

No nosso último resultado, ao restringir o intervalo de α, mostraremos que a solução obtida no Teorema 2 está em $L^2(\mathbb{R}^4)$ e portanto pertence a $H^2(\mathbb{R}^4)$, ou seja, a solução é **bound state**.

Teorema

Suponha que (V) e (K) valem com $\alpha \in (0,2)$ e $\beta > (8-\mu)\alpha/8$. Se f satisfaz $(f_1)-(f_4)$, então a solução obtida no Teorema 2 é bound state do problema (1).

Para a prova, alguns argumentos são adaptados aos apresentados por Ambrosetti, Felli e Malchiodi em [3].

Teorema 3

No nosso último resultado, ao restringir o intervalo de α, mostraremos que a solução obtida no Teorema 2 está em $L^2(\mathbb{R}^4)$ e portanto pertence a $H^2(\mathbb{R}^4)$, ou seja, a solução é **bound state**.

Teorema

Suponha que (V) *e* (K) *valem com* $\alpha \in (0,2)$ *e* $\beta > (8-\mu)\alpha/8$. *Se* f *satisfaz* $(f_1)-(f_4)$, *então a solução obtida no Teorema 2 é bound state do problema* (1).

Para a prova, alguns argumentos são adaptados aos apresentados por Ambrosetti, Felli e Malchiodi em [3].

Teorema 3

No nosso último resultado, ao restringir o intervalo de α, mostraremos que a solução obtida no Teorema 2 está em $L^2(\mathbb{R}^4)$ e portanto pertence a $H^2(\mathbb{R}^4)$, ou seja, a solução é **bound state**.

Teorema

Suponha que (V) e (K) valem com $\alpha \in (0,2)$ e $\beta > (8-\mu)\alpha/8$. Se f satisfaz $(f_1)-(f_4)$, então a solução obtida no Teorema 2 é bound state do problema (1).

Para a prova, alguns argumentos são adaptados aos apresentados por Ambrosetti, Felli e Malchiodi em [3].

Referências Bibliográficas I

- Adimurthi, *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n−Laplacian*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (1990), 393–413.
- C. O. Alves, J. M. do Ó, *Positive solutions of a fourth-order semilinear problem involving critical growth*, Adv. Nonlinear Stud. **2** (2002), 437–458.
- A. Ambrosetti, V. Felli, A. Malchiodi, *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 117–144
- S. Aouaoui, F. S. B. Albuquerque, *Adams' type inequality and application to a quasilinear nonhomogeneous equation with singular and vanishing radial potentials in* $\mathbb{R}^4$, Ann. Mat. Pura Appl. **198** (2019), 1331–1349.

Referências Bibliográficas II

- P. C. Carrião, R. Demarque, O. H. Miyagaki, *Nonlinear biharmonic problems with singular potentials*, Commun. Pure Appl. Anal. **13** (2014), 2141–2154.
- J. Chabrowski, J. M. do Ó, *On some fourth-order semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods **49** (2002), 861–884.
- W. Chen, Z. Wang, *Normalized ground states for a biharmonic Choquard equation with exponential critical growth*, arxiv.org/abs/2211.13701v1.
- D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki, B. Ruf, *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), 139–153.

Referências Bibliográficas III

- O. H. Miyagaki, C. R. Santana, R. S. Vieira, *Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^4$ *involving the biharmonic operator with critical exponential growth*, Rocky Mountain J. Math. **51** (2021), 243–263.
- J. M. do Ó, E. Gloss, F. Sani, *Spike solutions for nonlinear Schrödinger equations in* 2*D with vanishing potentials*, Ann. Mat. Pura Appl. **198** (2019), 2093–2122.
- J. M. do Ó, F. Sani, J. Zhang, *Stationary nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^2$ *with potentials vanishing at infinity*, Ann. Mat. Pura Appl. **196** (2017), 363–393.
- F. Sani, *A biharmonic equation in* $\mathbb{R}^4$ *involving nonlinearities with critical exponential growth*, Commun. Pure Appl. Anal. **12** (2013), 405–428.

Referências Bibliográficas IV

- L. Shen, V. D. Radulescu, M. Yang, *Planar Schrödinger-Choquard equations with potentials vanishing at infinity: the critical case*, J. Differential Equations **329** (2022), 206–254.
- Y. Yang, *Adams type inequalities and related elliptic partial differential equations in dimension four*, J. Differential Equations **252** (2012), 2266–2295.