



Bifurcações de Configurações de Dziobek nos Problemas de Quatro e Cinco Corpos



Michelle Gonzaga dos Santos - UFPE
michelle.gonzaga@ufpe.br
Eduardo Shirlippe Goes Leandro - UFPE



14 de Abril de 2023

Sumário

1. O Problema de N-Corpos
2. Análise de Bifurcação do Triângulo Equilátero
3. Análise de Bifurcação do Tetraedro Centrado

Referências

Introdução

O problema de N -Corpos Generalizado é formulado pelas equações

$$m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{i \neq j} m_i m_j r_{ij}^{2a} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j), \quad a \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Consideramos a configuração do sistema $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ em \mathbb{R}^{2N} ou em \mathbb{R}^{3N} e $m_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, N$.

Força de Atração

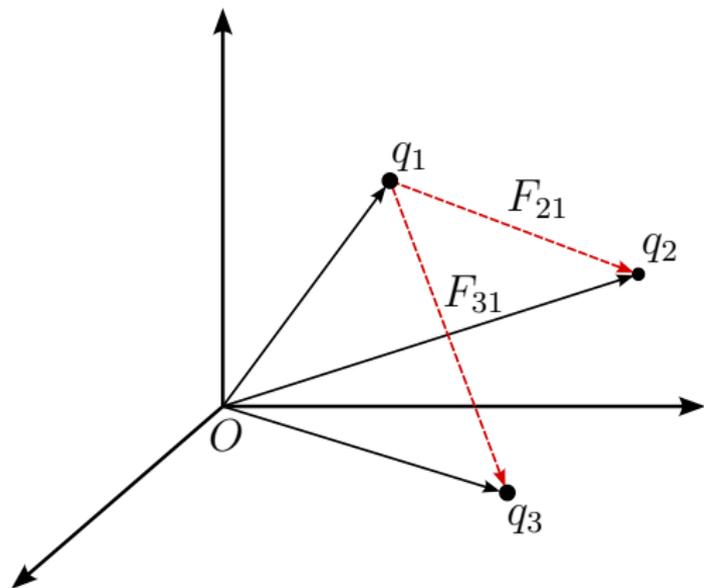


Figura: O caso Newtoniano, $a = -\frac{3}{2}$, os corpos são atraídos mutuamente por uma força de atração gravitacional.

Introdução

Um **Equilíbrio Relativo** é uma solução particular do problema planar de N -Corpos em que os corpos descrevem um movimento circular uniforme ao redor do centro de massa \mathbf{C} .

A posição inicial desta solução é conhecida na literatura como uma **Configuração Central** e satisfaz

$$\sum_{j \neq i} m_i m_j r_{ij}^{2a} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) = -\lambda m_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{C}),$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado.

Exemplo

N=3.

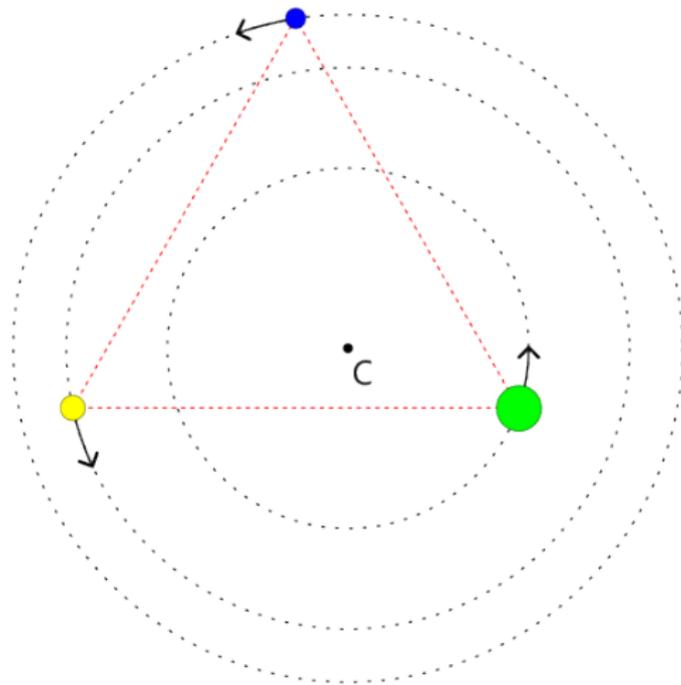


Figura: Equilíbrio Relativo de Lagrange.

Bifurcações de Configurações de Dziobek

Seja $q = (q_1, \dots, q_N)$ uma configuração central com massas positivas m_1, \dots, m_N de dimensão exatamente $N - 2$.

Bifurcações de Configurações de Dziobek

Seja $q = (q_1, \dots, q_N)$ uma configuração central com massas positivas m_1, \dots, m_N de dimensão exatamente $N - 2$. Existe uma única n-upla $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ (não nula) tal que

$$S : \begin{cases} \delta_i & = \delta_j, \\ \sum x_i & = 0, \\ \frac{\lambda}{M} - s_{ij}^{\mathbf{a}} & = \frac{x_i x_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \end{cases}$$

onde $M = \sum_i m_i$, $s_{ij} = r_{ij}^2$, $\delta_i = \sum_{i \neq j} x_i s_{ij}$ e $\mathbf{a} \in (-\infty, -1)$. Essas configurações são conhecidas como **Configurações de Dziobek**.

Bifurcações de Configurações de Dziobek

Seja $q = (q_1, \dots, q_N)$ uma configuração central com massas positivas m_1, \dots, m_N de dimensão exatamente $N - 2$. Existe uma única n-upla $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ (não nula) tal que

$$S : \begin{cases} \delta_i & = \delta_j, \\ \sum x_i & = 0, \\ \frac{\lambda}{M} - s_{ij}^{\mathbf{a}} & = \frac{x_i x_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \end{cases}$$

onde $M = \sum_i m_i$, $s_{ij} = r_{ij}^2$, $\delta_i = \sum_{i \neq j} x_i s_{ij}$ e $\mathbf{a} \in (-\infty, -1)$. Essas configurações são conhecidas como **Configurações de Dziobek**.

Uma Breve ideia sobre Bifurcações: Vamos analisar as bifurcações das soluções da seguinte equação

$$f(x, \epsilon) = x^2 - \epsilon = 0, \quad x, \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Bifurcações de Configurações de Dziobek

Seja $q = (q_1, \dots, q_N)$ uma configuração central com massas positivas m_1, \dots, m_N de dimensão exatamente $N - 2$. Existe uma única n -upla $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ (não nula) tal que

$$S : \begin{cases} \delta_i & = \delta_j, \\ \sum x_i & = 0, \\ \frac{\lambda}{M} - s_{ij}^{\mathbf{a}} & = \frac{x_i x_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \end{cases}$$

onde $M = \sum_i m_i$, $s_{ij} = r_{ij}^2$, $\delta_i = \sum_{i \neq j} x_i s_{ij}$ e $\mathbf{a} \in (-\infty, -1)$. Essas configurações são conhecidas como **Configurações de Dziobek**.

Uma Breve ideia sobre Bifurcações: Vamos analisar as bifurcações das soluções da seguinte equação

$$f(x, \epsilon) = x^2 - \epsilon = 0, \quad x, \epsilon \in \mathbb{R}.$$

As soluções são $\mathbf{x} = \pm\sqrt{\epsilon}$. Além disso, $D_x f = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Comportamento das Soluções

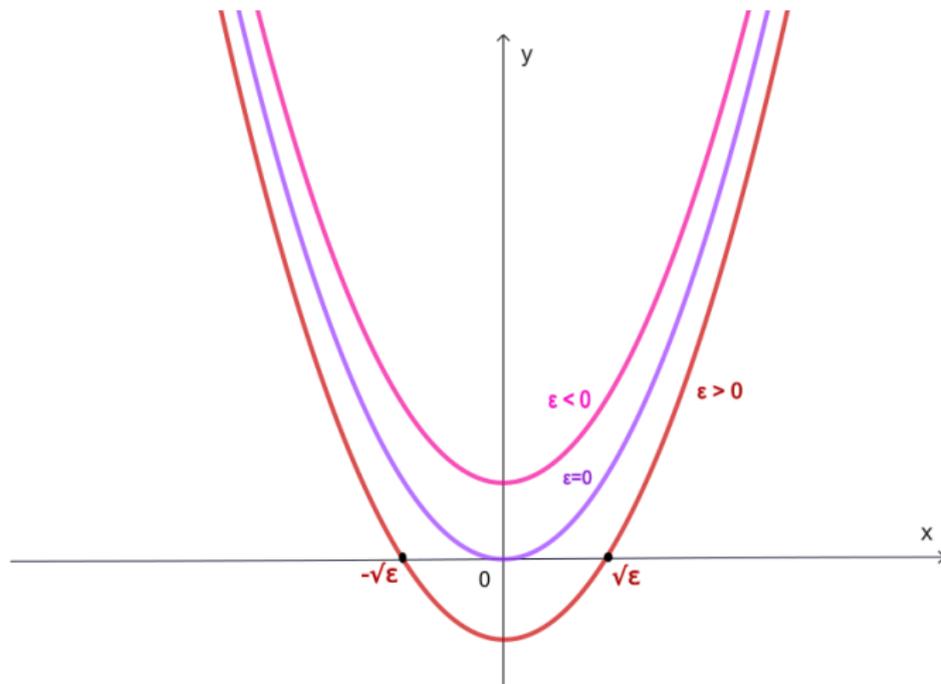


Figura: Bifurcações ao redor **ponto de bifurcação** $(0, 0)$.

Triângulo Equilátero Centrado

Considere o sistema de equações S com $N = 4$ e massas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e $m_4 = m$; escolhemos $m_4 = m^* + \epsilon$ com m^* sendo o valor de bifurcação.

Triângulo Equilátero Centrado

Considere o sistema de equações S com $N = 4$ e massas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e $m_4 = m$; escolhamos $m_4 = m^* + \epsilon$ com m^* sendo o valor de bifurcação. O **problema de bifurcação** é descrito pela equação

$$\Phi(X, \epsilon) = 0,$$

com grupo de simetria S_3 , onde $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mapa suave. Ou seja, existe um mapa linear $\rho_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, para cada $\sigma \in S_3$, chamado **ação** de S_3 em \mathbb{R}^3 , dado por $\rho_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ de modo que

$$\Phi(\rho_\sigma(X), \epsilon) = \rho_\sigma(\Phi(X), \epsilon).$$

Triângulo Equilátero Centrado

Considere o sistema de equações S com $N = 4$ e massas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e $m_4 = m$; escolhamos $m_4 = m^* + \epsilon$ com m^* sendo o valor de bifurcação. O **problema de bifurcação** é descrito pela equação

$$\Phi(X, \epsilon) = 0,$$

com grupo de simetria S_3 , onde $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mapa suave. Ou seja, existe um mapa linear $\rho_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, para cada $\sigma \in S_3$, chamado **ação** de S_3 em \mathbb{R}^3 , dado por $\rho_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ de modo que

$$\Phi(\rho_\sigma(X), \epsilon) = \rho_\sigma(\Phi(X), \epsilon).$$

Neste caso, dizemos que Φ é **S_3 -equivariante**.

Triângulo Equilátero Centrado

Considere o sistema de equações S com $N = 4$ e massas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e $m_4 = m$; escolhemos $m_4 = m^* + \epsilon$ com m^* sendo o valor de bifurcação. O **problema de bifurcação** é descrito pela equação

$$\Phi(X, \epsilon) = 0,$$

com grupo de simetria S_3 , onde $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mapa suave. Ou seja, existe um mapa linear $\rho_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, para cada $\sigma \in S_3$, chamado **ação** de S_3 em \mathbb{R}^3 , dado por $\rho_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ de modo que

$$\Phi(\rho_\sigma(X), \epsilon) = \rho_\sigma(\Phi(X), \epsilon).$$

Neste caso, dizemos que Φ é **S_3 -equivariante**.

Definition

A representação $\rho : \Gamma \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é **absolutamente irredutível** se e somente se os únicos mapas lineares Γ -equivariantes em \mathbb{V} são múltiplos escalares da identidade.

Método de Redução de Lyapunov-Schmidt:

Método de Redução de Lyapunov-Schmidt:

► **Passo 1.** Seja $\mathcal{L} = D\Phi(X_0)$. Decomponha

$$\mathbb{R}^3 = \ker\{\mathcal{L}\} \oplus \text{Im}\{\mathcal{L}\}$$

Método de Redução de Lyapunov-Schmidt:

- **Passo 1.** Seja $\mathcal{L} = D\Phi(X_0)$. Decomponha

$$\mathbb{R}^3 = \ker\{\mathcal{L}\} \oplus \text{Im}\{\mathcal{L}\}$$

- **Passo 2.** Denotamos a projeção $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}\{\mathcal{L}\}$, com $\ker\{\mathcal{P}\} = \ker\{\mathcal{L}\}$. Portanto, $\Phi(X, \epsilon) = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\Phi(X, \epsilon) &= 0, \\ (I - \mathcal{P})\Phi(X, \epsilon) &= 0.\end{aligned}$$

Método de Redução de Lyapunov-Schmidt:

- ▶ **Passo 1.** Seja $\mathcal{L} = D\Phi(X_0)$. Decomponha

$$\mathbb{R}^3 = \ker\{\mathcal{L}\} \oplus \text{Im}\{\mathcal{L}\}$$

- ▶ **Passo 2.** Denotamos a projeção $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}\{\mathcal{L}\}$, com $\ker\{\mathcal{P}\} = \ker\{\mathcal{L}\}$. Portanto, $\Phi(X, \epsilon) = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\Phi(X, \epsilon) &= 0, \\ (I - \mathcal{P})\Phi(X, \epsilon) &= 0.\end{aligned}$$

- ▶ **Passo 3.** A solução da primeira equação segue diretamente do **Teorema da função Implícita**.

Método de Redução de Lyapunov-Schmidt:

- ▶ **Passo 1.** Seja $\mathcal{L} = D\Phi(X_0)$. Decomponha

$$\mathbb{R}^3 = \ker\{\mathcal{L}\} \oplus \text{Im}\{\mathcal{L}\}$$

- ▶ **Passo 2.** Denotamos a projeção $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Im}\{\mathcal{L}\}$, com $\ker\{\mathcal{P}\} = \ker\{\mathcal{L}\}$. Portanto, $\Phi(X, \epsilon) = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\Phi(X, \epsilon) &= 0, \\ (I - \mathcal{P})\Phi(X, \epsilon) &= 0.\end{aligned}$$

- ▶ **Passo 3.** A solução da primeira equação segue diretamente do **Teorema da função Implícita**. Vamos escrever a solução implícita como $w = W(v, \epsilon)$, onde $v \in \ker\{\mathcal{L}\}$ e $w \in \text{Im}\{\mathcal{L}\}$.

- **Passo 4.** Considere $\phi : \ker\{\mathcal{L}\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \ker\{\mathcal{L}\}$ onde $\phi(v, \epsilon) = (I - \mathcal{P})\Phi(v + W, \epsilon)$.

- **Passo 4.** Considere $\phi : \ker\{\mathcal{L}\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \ker\{\mathcal{L}\}$ onde $\phi(v, \epsilon) = (I - \mathcal{P})\Phi(v + W, \epsilon)$. Qualquer vetor $v \in \ker\{\mathcal{L}\}$ pode ser escrito como uma combinação linear de uma base convenientemente escolhida $\{v_1, v_2\}$ para $\ker\{\mathcal{L}\}$. Definimos um novo sistema de **equações coordenadas**

$$g_i(y, \epsilon) = \langle v_i, \phi(y_1 v_1 + y_2 v_2, \epsilon) \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

- **Passo 4.** Considere $\phi : \ker\{\mathcal{L}\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \ker\{\mathcal{L}\}$ onde $\phi(v, \epsilon) = (I - \mathcal{P})\Phi(v + W, \epsilon)$. Qualquer vetor $v \in \ker\{\mathcal{L}\}$ pode ser escrito como uma combinação linear de uma base convenientemente escolhida $\{v_1, v_2\}$ para $\ker\{\mathcal{L}\}$. Definimos um novo sistema de **equações coordenadas**

$$g_i(y, \epsilon) = \langle v_i, \phi(y_1 v_1 + y_2 v_2, \epsilon) \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Reescrevendo o sistema reduzido como $g(y, \epsilon) = 0$, podemos provar que a S_3 -equivariância é preservada.

- **Passo 4.** Considere $\phi : \ker\{\mathcal{L}\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \ker\{\mathcal{L}\}$ onde $\phi(v, \epsilon) = (I - \mathcal{P})\Phi(v + W, \epsilon)$. Qualquer vetor $v \in \ker\{\mathcal{L}\}$ pode ser escrito como uma combinação linear de uma base convenientemente escolhida $\{v_1, v_2\}$ para $\ker\{\mathcal{L}\}$.

Definimos um novo sistema de **equações coordenadas**

$$g_i(y, \epsilon) = \langle v_i, \phi(y_1 v_1 + y_2 v_2, \epsilon) \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Reescrevendo o sistema reduzido como $g(y, \epsilon) = 0$, podemos provar que a S_3 -equivariância é preservada. Suponha que queremos encontrar uma solução para a equação reduzida com simetria $\Sigma \leq S_3$.

- **Passo 4.** Considere $\phi : \ker\{\mathcal{L}\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \ker\{\mathcal{L}\}$ onde $\phi(v, \epsilon) = (I - \mathcal{P})\Phi(v + W, \epsilon)$. Qualquer vetor $v \in \ker\{\mathcal{L}\}$ pode ser escrito como uma combinação linear de uma base convenientemente escolhida $\{v_1, v_2\}$ para $\ker\{\mathcal{L}\}$.

Definimos um novo sistema de **equações coordenadas**

$$g_i(y, \epsilon) = \langle v_i, \phi(y_1 v_1 + y_2 v_2, \epsilon) \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Reescrevendo o sistema reduzido como $g(y, \epsilon) = 0$, podemos provar que a S_3 -equivariância é preservada. Suponha que queremos encontrar uma solução para a equação reduzida com simetria $\Sigma \leq S_3$. Tal solução, associada com Σ , deve estar em

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{y \in \ker\{\mathcal{L}\} : \rho_\sigma(y) = y, \text{ para todo } \sigma \in \Sigma\}$$

o **subespaço de pontos fixados**. O grupo Σ é chamado de **subgrupo de isotropia**.

Teorema da Ramificação Equivariante

Suponha que a ação de um grupo finito Γ sobre um espaço vetorial \mathbb{V} seja absolutamente irreduzível e $g : \mathbb{V} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{V}$ seja um mapa suave e Γ -equivariante (consequentemente $Dg(0, \epsilon) = \mu(\epsilon)\mathbf{Id}$). Assuma que $0 \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ com $\mu(0) = 0$ e $\mu'(0) \neq 0$. Além disso, se $\Sigma \leq \Gamma$ é um subgrupo de isotrofia com

$$\dim(\text{Fix}(\Sigma)) = 1,$$

então existe um único ramo $\epsilon(v)$ de soluções para $g(v, \epsilon) = 0$, perto da solução trivial, com simetria Σ .

O mapa reduzido satisfaz todas as hipóteses do Teorema da Ramificação Equivariante e existem três subgrupos de isotropia de S_3 , a saber

$$\Sigma_1 = \{id, (12)\}, \Sigma_2 = \{id, (13)\} \text{ e } \Sigma_3 = \{id, (23)\}.$$

O mapa reduzido satisfaz todas as hipóteses do Teorema da Ramificação Equivariante e existem três subgrupos de isotrofia de S_3 , a saber

$$\Sigma_1 = \{id, (12)\}, \Sigma_2 = \{id, (13)\} \text{ e } \Sigma_3 = \{id, (23)\}.$$

Comportamento da família de Bifurcação:

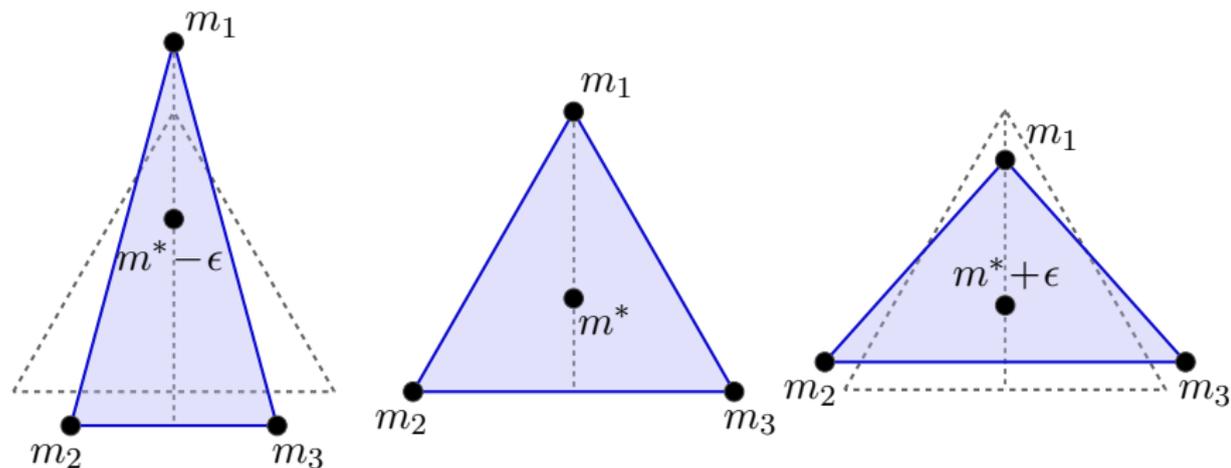


Figura: Ramos de Triângulos isósceles emanando do triângulo equilátero.

Outros Tipos de Bifurcações: Considere as massas $m_1 = m_2 = 1$, $m_4 = m^*$ and $m_3 = 1 + \epsilon$. A equação

$$\Phi(X, \epsilon) = 0,$$

descreve o problema de bifurcação com o grupo de simetria S_2 .

Outros Tipos de Bifurcações: Considere as massas $m_1 = m_2 = 1$, $m_4 = m^*$ and $m_3 = 1 + \epsilon$. A equação

$$\Phi(X, \epsilon) = 0,$$

descreve o problema de bifurcação com o grupo de simetria S_2 . Após a redução de Lyapunov-Schmidt, teremos um sistema

$$\begin{aligned}g_1(y_1, y_2, \epsilon) &= 0, \\g_2(y_1, y_2, \epsilon) &= 0,\end{aligned}$$

que não admite uma solução diferenciável $y(\epsilon) = (y_1(\epsilon), y_2(\epsilon))$ definida numa vizinhança de $\epsilon = 0$.

Outros Tipos de Bifurcações: Considere as massas $m_1 = m_2 = 1$, $m_4 = m^*$ and $m_3 = 1 + \epsilon$. A equação

$$\Phi(X, \epsilon) = 0,$$

descreve o problema de bifurcação com o grupo de simetria S_2 . Após a redução de Lyapunov-Schmidt, teremos um sistema

$$\begin{aligned}g_1(y_1, y_2, \epsilon) &= 0, \\g_2(y_1, y_2, \epsilon) &= 0,\end{aligned}$$

que não admite uma solução diferenciável $y(\epsilon) = (y_1(\epsilon), y_2(\epsilon))$ definida numa vizinhança de $\epsilon = 0$. Então, resolvemos a primeira equação para ϵ e a segunda equação satisfaz o lema

Lema

Se $H(x, y)$ é uma função analítica definida numa vizinhança da origem, tal que $H(x, x) = 0$ então

$$H(x, y) = (x - y)h(x, y),$$

onde $h(x, y)$ é analítica numa vizinhança de $(0, 0)$.

Portanto,

$$g_2(y_1, y_2, \epsilon(y_1, y_2)) = (y_1 - y_2)h(y_1, y_2) = 0,$$

tem **dois ramos de bifurcações** numa vizinhança da origem.

Portanto,

$$g_2(y_1, y_2, \epsilon(y_1, y_2)) = (y_1 - y_2)h(y_1, y_2) = 0,$$

tem **dois ramos de bifurcações** numa vizinhança da origem.

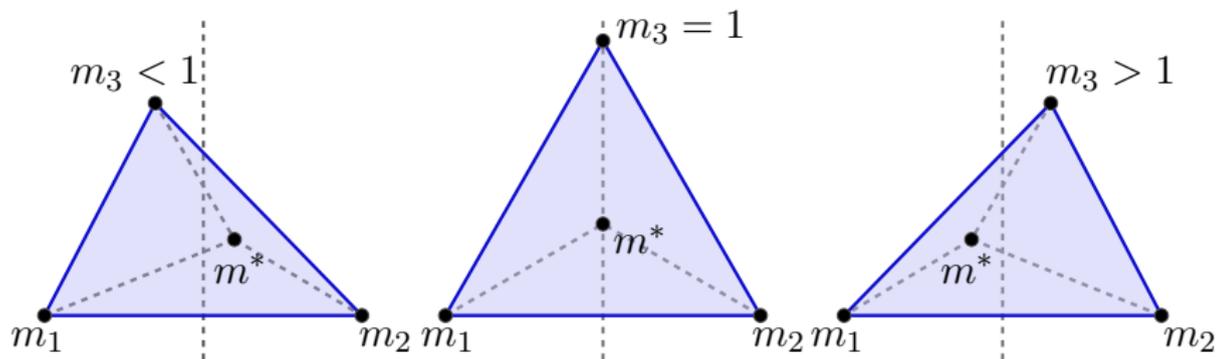


Figura: Ramos de bifurcações de triângulos escalenos correspondendo aos zeros da função h .

Tetraedro Regular Centrado: Agora, consideramos o tetraedro regular com massas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ nos seus vértices e $m_5 = m^{**} + \epsilon$ no seu baricentro. O problema de bifurcação é formulado pela equação

$$F(X, \epsilon) = 0,$$

Tetraedro Regular Centrado: Agora, consideramos o tetraedro regular com massas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ nos seus vértices e $m_5 = m^{**} + \epsilon$ no seu baricentro. O problema de bifurcação é formulado pela equação

$$F(X, \epsilon) = 0,$$

onde a função $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ é suave e S_4 -equivariante. Procedendo com a análise de bifurcação de uma forma semelhante ao triângulo equilátero obtém-se **sete subgrupos de isotropia** que satisfaz o Teorema da Ramificação Equivariante.

Tetraedro Regular Centrado: Agora, consideramos o tetraedro regular com massas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ nos seus vértices e $m_5 = m^{**} + \epsilon$ no seu baricentro. O problema de bifurcação é formulado pela equação

$$F(X, \epsilon) = 0,$$

onde a função $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ é suave e S_4 -equivariante. Procedendo com a análise de bifurcação de uma forma semelhante ao triângulo equilátero obtém-se **sete subgrupos de isotropia** que satisfaz o Teorema da Ramificação Equivariante.

Cálculo das Bifurcações

- ▶ Simetria tipo Eixo:

$$x(\epsilon) = \epsilon b + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

com $\epsilon > 0$, isto é, $m > m^{**}$.

Tetraedro Regular Centrado: Agora, consideramos o tetraedro regular com massas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ nos seus vértices e $m_5 = m^{**} + \epsilon$ no seu baricentro. O problema de bifurcação é formulado pela equação

$$F(X, \epsilon) = 0,$$

onde a função $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ é suave e S_4 -equivariante. Procedendo com a análise de bifurcação de uma forma semelhante ao triângulo equilátero obtém-se **sete subgrupos de isotropia** que satisfaz o Teorema da Ramificação Equivariante.

Cálculo das Bifurcações

- ▶ Simetria tipo Eixo:

$$x(\epsilon) = \epsilon b + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

com $\epsilon > 0$, isto é, $m > m^{**}$.

- ▶ Simetria do Tipo Plano:

$$x(\epsilon) = (-\epsilon)^{1/2} d + \mathcal{O}(((-\epsilon)^{1/2})^2),$$

com $\epsilon < 0$, isto é, $m < m^{**}$.

Comportamento das Famílias de Bifurcações

Família I.

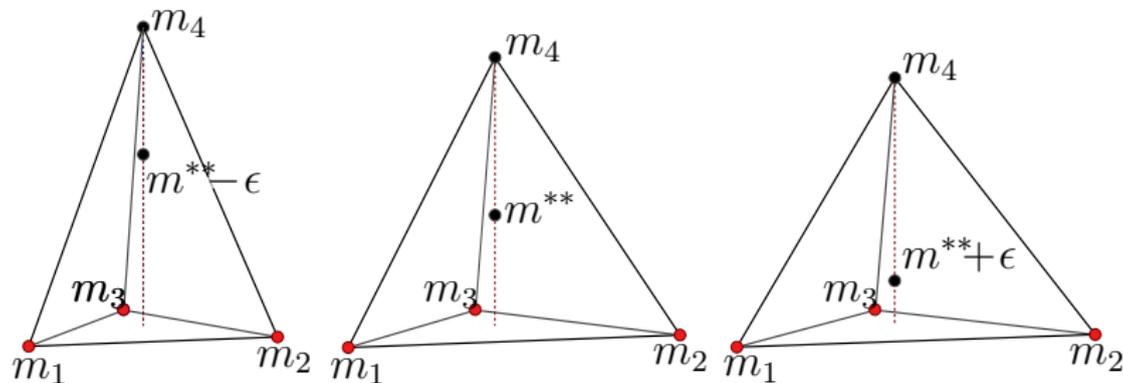


Figura: Simetria com respeito ao eixo passando por q_4 e q_5 .

Comportamento das Famílias de Bifurcações

Família II.

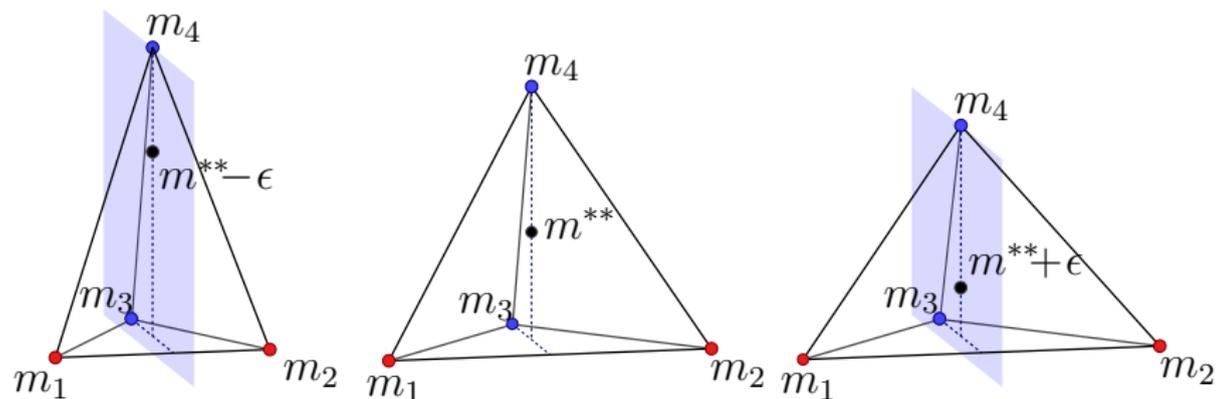


Figura: Simetria com respeito ao plano ortogonal ao segmento q_1q_2 .

Referências

- [1] Meyer, K. R.; Schmidt, D. S. Bifurcations of Relative Equilibria in the 4 and 5 Body-Problems. Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge University Press, v. 8, n. 8*, p. 215–225, 1988.
- [2] Golubitsky, M.; Stewart, I.; Schaeffer, D.G. [Singularities and Groups in Bifurcation Theory](#), Vol.II. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] Santos, A. A.; Marchesin, M.; Pérez-Chavela, E.; Vidal, C. Continuation and Bifurcations of Concave Central Configurations in the Four and Five Body-Problems for Homogeneous Force Laws. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 446, n. 2, p. 1743-1768, 2017..
- [4] Santos, A. A. Dziobek's Configurations in Restricted Problems and Bifurcation. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, p. 213-238, 2004.

Agradecimentos



Muito Obrigada!!

IIW **mm**
Workshop de
Mulheres na
Matemática