Solução do sistema von Kármán com amortecimento interno via semigrupos

Roseane da Silva Martins - UFBA

14 de abril de 2023

INTRODUÇÃO

Theodor von kármán em 1910 apresentou o seguinte sistema não linear de equações diferenciais parciais para grandes deflexões de uma placa elástica fina

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta^2 w - [w, u] = 0 \ \text{ in } \ \Omega \times (0, T), \\ \Delta^2 u + [w, w] = 0 \ \text{ in } \ \Omega \times (0, T), \\ w(0) = w_0, \ \ w_t(0) = w_1 \ \text{ in } \ \Omega, \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ in } \ \Gamma \times (0, T), \end{cases} \tag{1}$$

$$[w, u] = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado do plano com fronteira regular Γ, $(x, y) \in \Omega$ e $t \in (0, T)$, T uma constante positiva. Neste modelo, com longa tradição na literatura, $w(x, y, t)$ denota o deslocamento transversal, $u(x, y, t)$ é a função de estresse de Airy e η é o vetor unitário normal externo em Γ.

Desde o trabalho pioneiro de von kármán, o modelo tem sido estudado por diversos autores. Em [1] foi considerado o modelo com memória de longo alcance e mostrado o decaimento geral da solução. Esse resultado incluiu certas funções de relaxamento que não são necessariamente do tipo exponencial ou polinomial. Em [2] foi levado em conta o acoplamento térmico não linear e condições de contorno livre e obtido um atrator global.

[1] C.A.Raposo, M.L.Santos. General decay to a von Kármán system with memory. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 74 (2011) 937–945.

[2] I. Lasiecka, T. F. Ma, R. N. Monteiro. Long-time dynamics of vectorial von Kármán system with nonlinear thermal effects and free boundary conditions. 23 (2018) 1037-1072

Neste trabalho estudamos a existência de solução para um sistema de vigas de von kármán do seguinte tipo

$$\begin{cases} \rho A w_{tt} - EA\left[\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)w_x\right]_x + EIw_{xxxx} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T), \\ \rho A u_{tt} - EA\left[u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T). \end{cases} \tag{2}$$

onde $w(x,t)$ é o deslocamento transversal, $u(x,t)$ o deslocamento longitudinal, $(0,L)$ é o segmento ocupado pela viga e T é um determinado tempo positivo. Os parâmetros físicos representam as propriedades do material: E o módulo de Young, A a área da seção transversal da viga, L o comprimento da viga, ρA o peso por unidade de comprimento e EI é a rigidez da viga ou, rigidez à flexão.

O modelo (2) foi proposto por J. E. Lagnese e J. L. Lions [5]. Em relação à esta formulação, em [6], o modelo de vigas de Timoshenko foi obtido como um limite do sistema von Kármán. Em [7] foi provado o decaimento exponencial da energia levando em conta amortecimento tipo Kelvin-Voigt mais amortecimento interno no deslocamento transversal.

[5] J. E. Lagnese and J. L. Lions, Modelling Analysis and Control of Thin Plates. Recherches en Mathématiques Appliquées 6, Masson, Paris, 1988.

[6] G.P. Menzala, E. Zuazua. The beam equation as a limit of $1-D$ nonlinear von Kármán model. Appl. Math. Lett. 12 (1999) 47–52.

[7] G.P. Menzala, A. F. Pazoto, E. Zuazua. Stabilization of Berger-Timoshenko equation as limit of the uniform stabilization of the von Kármán system of beams and plates. Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 36 (2002) 657–691

Estamos interessados em estudar a existência de solução, considerando o amortecimento por atrito, o que é um problema natural, dado por

$$\begin{cases} w_{tt} - b_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + b_2 w_{xxxx} + a_1 w_t = 0, \\ u_{tt} - b_1 \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x + a_2 u_t = 0, \end{cases} \tag{3}$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{4}$$

e condições de fronteira tipo Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \\ w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Existência e unicidade de solução

Nosso ponto de partida é a propriedade dissipativa da energia.

Proposição

A energia total do sistema (3) *é definida por*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[|w_t|^2 + |u_t|^2 + b_1|u_x + \frac{1}{2}w_x^2|^2 + b_2|w_{xx}|^2 \right] dx,$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -a_1 \int_0^L |w_t|^2 dx - a_2 \int_0^L |u_t|^2 dx. \qquad (6)$$

Existência e unicidade de solução

Consideramos o espaço de fase $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{H} = H_0^2(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L).$$

Vamos transformar o sistema (3) em problema de evolução no espaço de fase $\mathcal{H}$. Dado

$$U = (w, \varphi, u, \psi)^T \in \mathcal{H}, \text{ com } \varphi = w_t, \; \psi = u_t.$$

Note que,

$$U_t = \begin{pmatrix} w_t \\ \\ \varphi_t \\ \\ u_t \\ \\ \psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \\ b_1 \left[\left(u_x + \dfrac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - b_2 w_{xxxx} - a_1 \varphi \\ \\ \psi \\ \\ b_1 \left[u_x + \dfrac{1}{2} w_x^2 \right]_x - a_2 \psi \end{pmatrix}$$

Existência e unicidade de solução

A representação matricial anterior pode ser escrita como segue:

$$U_t = \begin{pmatrix} \varphi \\ \\ -b_2 w_{xxxx} - a_1 \varphi \\ \\ \psi \\ \\ b_1 u_{xx} - a_2 \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ b_1 \left[\left(u_x + \dfrac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \\ \\ 0 \\ \\ \dfrac{b_1}{2} \left[w_x^2 \right]_x \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{A} U + \mathcal{F}(U)$$

Existência e unicidade de solução

Então, (3) foi escrito como um problema de evolução de primeira ordem

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U), \\ U(0) = (w_0, \varphi_0, u_0, \psi_0)^T, \ \ \forall\, t > 0, \end{cases} \tag{7}$$

onde $\mathcal{A}$ é um operador linear definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \\ -b_2\partial_x^4 & -a_1 I & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & b_1\partial_x^2 & -a_2 I \end{pmatrix}.$$

O domínio do operador linear $\mathcal{A}$ é definido da seguinte maneira:

$$D(\mathcal{A}) = \left((w, \varphi, u, \psi)^T \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} w \in H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L), \\ \varphi \in H_0^2(0, L), \\ u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ \psi \in H_0^1(0, L). \end{array} \right).$$

Observação

Claramente o domínio $D(\mathcal{A})$ é denso no espaço de fase $\mathcal{H}$.

Existência e unicidade de solução

A ideia principal é considerar o sistema de evolução não linear $U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$ como uma perturbação $\mathcal{F}(U)$ do semigrupo linear de contração $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em $\mathcal{H}$. Se o termo não linear $\mathcal{F}$ for localmente Lipschitz, então, resultados abstratos (consulte [7, Cap. 6] e também [8, Teorema 7.1]) sobre a geração de semigrupos não lineares pode ser aplicado a fim de concluir a existência de semigrupos não lineares em $\mathcal{H}$ e consequentemente a existência uma única "*mild solution*".

[7] A., Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE's. Springer, New York (1986).

[8] I., Chueshov, M., Eller, I.,Lasiecka: On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. Commun. Partial Differ. Equ. 27, 1901-1951 (2002).

Existência e unicidade de solução

A teoria de semigrupos não lineares também implica que para dados iniciais no domínio do gerador infinitesimal, as soluções correspondentes são contínuas no tempo com os valores em $\overline{D(\mathcal{A})}$. Para um esboço da prova, veja [8, Apêndice]. Se o domínio $D(\mathcal{A})$ for denso em $\mathcal{H}$, então as soluções fortes possuem a propriedade $U \in C([0, T), \mathcal{H})$.

[8] I., Chueshov, I., Lasiecka: Attractors and Long Time Behavior of von Káarmáan Thermoelastic Plates. Appl Math Optim 58, (2008) 195-241.

Existência e unicidade de solução

Teorema

O operator $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em $\mathcal{H}$.

Definição

Um operador

$$\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$*, quando*

$$\|\mathcal{F}U - \mathcal{F}V\|_{\mathcal{H}} \leq L(R)\|U - V\|_{\mathcal{H}}$$

para

$$\|U\|_{\mathcal{H}}, \|V\|_{\mathcal{H}} \leq R.$$

Lemma

O operador $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é localmente Lipschitz.*

Estamos em condições de apresentar nosso resultado de existência de solução para o problema pertubado. Primeiro, para a boa compreensão, lembramos a definição de "*mild solution*".

Definição

Seja $S(t)$ um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Uma função contínua $U : (0, T] \to \mathcal{H}$ é denominada "mild solution" para o problem $U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$ quando U satisfaz a seguinte expressão

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\mathcal{F}(U(s))ds, \;\; 0 < t \leq T, \qquad (8)$$

onde $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$.

Existência e unicidade de solução

Teorema

Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema

$$U_t = \mathcal{A}U + \mathcal{F}(U)$$

possui uma única "mild solution"

$$U \in C([0,\infty),\mathcal{H}) \text{ com } U(0) = U_0.$$

Além disto, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$ a "mild solution" é uma solução forte globalmente definida.

OBRIGADA!