Estudo de Equações Diferenciais via métodos variacionais

Elisandra Gloss

Departamento de Matemática - UFPB

II WMM, UFRPE, 2023

Introdução

Veremos um esboço dos métodos variacionais para busca de soluções de Equações Diferenciais Parciais Elípticas.
Falaremos de soluções fracas e clássicas e veremos alguns exemplos de equações cujas soluções podem ser obtidas através de teoremas clássicos da teoria dos pontos críticos para funcionais.

Cálculo das Variações

Busca-se extremos de um funcional da forma

$$I(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

sobre $X := \{y \in C^1(a,b) \cap C[a,b] : y(a) = c,\ y(b) = d\}$, onde $f(x,y,z)$ possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em $(a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Para cada $y \in X$ e $\eta \in C^1(a,b) \cap C_0[a,b]$, temos $y + t\eta \in X$. Definimos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) = I(y + t\eta).$$

Se y é um mínimo (ou máximo) de I em X, temos que $t = 0$ é um ponto de mínimo (ou máximo) de ϕ e assim $\phi'(0) = 0$.

Variação do funcional

Variação de I em y é definida por $\delta I(y,\eta) := \phi'(0)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\delta I(y,\eta) &= \lim_{t\to 0}\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}\\ &= \int_a^b \lim_{t\to 0}\frac{[f(x,y+t\eta,y'+t\eta')-f(x,y,y')]}{t}dx.\end{aligned}$$

Para cada $x\in(a,b)$, se

$$\alpha(t) := f(x,y(x)+t\eta(x),y'(x)+t\eta'(x)),$$

tem-se

$$\alpha'(0) = f_y(x,y(x),y'(x))\eta(x) + f_z(x,y(x),y'(x))\eta'(x).$$

Logo

$$\delta I(y,\eta) = \int_a^b \left[f_y(x,y(x),y'(x))\eta(x) + f_z(x,y(x),y'(x))\eta'(x) \right] dx.$$

Se $y \in C^2(a,b)$, integrando por partes, já que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, obtemos

$$\delta I(y,\eta) = \int_a^b \left\{ f_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}[f_z(x,y(x),y'(x))] \right\} \eta(x) dx.$$

Portanto, se y é um extremo para I em X, e $y \in C^2(a,b)$, tem-se

$$\int_a^b \left\{ f_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}[f_z(x,y(x),y'(x))] \right\} \eta(x) dx = 0$$

para toda $\eta \in C_c^1(a,b)$.

Equação de Euler

Lema (Lema Fundamental do Cálculo das Variações)

Suponha que $h \in C([a,b])$ *e* $\int_a^b h(x)\eta(x)dx = 0,\ \forall \eta \in C_c^1([a,b])$. *Então* $h \equiv 0$.

Teorema

Se $y \in X \cap C^2(a,b)$ *for um mínimo (ou máximo) do funcional* I *em* X *então* y *satisfaz a equação de Euler*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}[f_z(x, y(x), y'(x))] = 0.$$

Problema de Dirichlet

É um problema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = h & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde Ω é um domínio (conjunto aberto e conexo) limitado em $\mathbb{R}^N$, Δ é o operador laplaciano, definido por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

e $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Problema equivalente

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Método de Dirichlet

i) Seja $\mathcal{A}_h = \{u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : u = h$ em $\partial\Omega$ e $\Phi(u) < \infty\}$ onde

$$\Phi(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

ii) Seja $u_0 \in \mathcal{A}_h$ a função onde Φ atinge seu ínfimo.

iii) Dado $v \in \mathcal{A}_0$, seja

$$\phi(t) := \int_\Omega |\nabla(u_0 + tv)|^2 dx.$$

Tem-se $\phi'(0) = 0$, donde $\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx = 0$.

iv) Pelo Teorema do divergente se obtém

$$\int_\Omega (\Delta u_0) v dx = 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{A}_0, \quad \text{donde} \quad \Delta u_0 = 0.$$

Teorema

Sejam X um espaço topológico compacto e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então Φ é limitada inferiormente e existe $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Teorema

Sejam H um espaço de Hilbert e $\Phi : H \to \mathbb{R}$ uma função fracamente semicontínua inferiormente e coerciva. Então Φ é limitada inferiormente e assume seu ínfimo em H.

Teorema

Sejam X um espaço topológico compacto e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então Φ é limitada inferiormente e existe $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Teorema

Sejam H um espaço de Hilbert e $\Phi : H \to \mathbb{R}$ uma função fracamente semicontínua inferiormente e coerciva. Então Φ é limitada inferiormente e assume seu ínfimo em H.

Problema unidimensional

Consideremos o problema

$$-u''(x) = g(x, u) \text{ em } (a, b), \quad u(a) = u(b) = 0, \qquad \text{(P)}$$

com $g : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua dada.

- Se $u \in C^2(a, b) \cap C([a, b])$ satisfaz (P): u é solução clássica.
- Multiplicando a equação em (P) por $v \in C_0^1([a, b])$, obtemos

$$\int_a^b g(x, u)v dx = -\int_a^b u'' v dx = -u'v\Big|_a^b + \int_a^b u'v' dx = \int_a^b u'v' dx,$$

de modo que

$$\int_a^b u'v' dx - \int_a^b g(x, u)v dx = 0, \quad \forall v \in C_0^1([a, b]). \qquad (4)$$

Problema unidimensional

Consideremos o problema

$$-u''(x) = g(x,u) \text{ em } (a,b), \quad u(a) = u(b) = 0, \qquad \text{(P)}$$

com $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua dada.

- Se $u \in C^2(a,b) \cap C([a,b])$ satisfaz (P): u é solução clássica.
- Multiplicando a equação em (P) por $v \in C_0^1([a,b])$, obtemos

$$\int_a^b g(x,u)v\,dx = -\int_a^b u''v\,dx = -u'v\big|_a^b + \int_a^b u'v'\,dx = \int_a^b u'v'\,dx,$$

de modo que

$$\int_a^b u'v'\,dx - \int_a^b g(x,u)v\,dx = 0, \quad \forall v \in C_0^1([a,b]). \qquad (4)$$

- Para $G(x,t)=\int_0^t g(x,s)ds$, definimos $J : C_0^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2 dx - \int_a^b G(x,u)dx,$$

e, para $u, v \in C_0^1([a,b])$ e $\phi(t) = J(u+tv)$, a variação

$$\begin{aligned} J'(u)v &:= \phi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \\ &= \int_a^b u'v'dx - \int_a^b g(x,u)vdx. \end{aligned}$$

Observe que u satisfaz (4) se, e somente se, $J'(u)v = 0$ para toda $v \in C_0^1([a,b])$.

Escolha do espaço adequado

Denotamos

$$L^2(a,b) := \{u : (a,b) \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_a^b u^2 dx < \infty\}.$$

Para $u \in L^2(a,b)$, se existe $v \in L^2(a,b)$ tal que

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b v\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(a,b),$$

v é dita a derivada fraca de u, e denotamos $v = u'$. Definimos

$$H_0^1(a,b) := \{u \in L^2(a,b) : \exists u' \in L^2(a,b) \text{ e } u(a) = u(b) = 0\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com a norma

$$|||u||| = \left(\int_a^b u^2 dx + \int_a^b |u'|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escolha do espaço adequado

Denotamos

$$L^2(a,b) := \{u : (a,b) \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_a^b u^2 dx < \infty\}.$$

Para $u \in L^2(a,b)$, se existe $v \in L^2(a,b)$ tal que

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b v\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(a,b),$$

v é dita a derivada fraca de u, e denotamos $v = u'$. Definimos

$$H_0^1(a,b) := \{u \in L^2(a,b) : \exists u' \in L^2(a,b) \text{ e } u(a) = u(b) = 0\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com a norma

$$|||u||| = \left(\int_a^b u^2 dx + \int_a^b |u'|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Escolha do espaço adequado

Denotamos

$$L^2(a,b) := \{u : (a,b) \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_a^b u^2 dx < \infty\}.$$

Para $u \in L^2(a,b)$, se existe $v \in L^2(a,b)$ tal que

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b v\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(a,b),$$

v é dita a derivada fraca de u, e denotamos $v = u'$. Definimos

$$H_0^1(a,b) := \{u \in L^2(a,b) : \exists u' \in L^2(a,b) \text{ e } u(a) = u(b) = 0\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com a norma

$$|||u||| = \left(\int_a^b u^2 dx + \int_a^b |u'|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vemos que $C_0^1([a,b])$ é denso em $H_0^1(a,b)$ e existe $c > 0$ tal que

$$\int_a^b |u'|^2 dx \geq c \int_a^b u^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(a,b). \quad \text{(Wirtinger)}$$

Então, em $H_0^1(a,b)$ podemos tomar a norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u'v' dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(a,b).$$

Diremos que u_n converge fraco para u em $H_0^1(a,b)$, $u_n \rightharpoonup u$, se

$$\langle u_n, v \rangle \to \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(a,b).$$

Vemos que $C_0^1([a,b])$ é denso em $H_0^1(a,b)$ e existe $c>0$ tal que

$$\int_a^b |u'|^2 dx \geq c\int_a^b u^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(a,b). \quad \text{(Wirtinger)}$$

Então, em $H_0^1(a,b)$ podemos tomar a norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u'|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u'v' dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(a,b).$$

Diremos que u_n converge fraco para u em $H_0^1(a,b)$, $u_n \rightharpoonup u$, se

$$\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(a,b).$$

Voltemos ao problema (P),

$$-u''(x) = g(x,u) \text{ em } (a,b), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

e busquemos uma solução fraca, ou seja, $u \in H_0^1(a,b)$ tal que

$$\int_a^b u'v'dx - \int_a^b g(x,u)vdx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(a,b). \tag{5}$$

Consideramos $J : H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$, $J \in C^1$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2 dx - \int_a^b G(x,u)dx,$$

e buscamos $u \in H_0^1(a,b)$ tal que $J'(u)v = 0$, $\forall v \in H_0^1(a,b)$.

Minimização

Teorema

Sejam X um espaço topológico compacto e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então Φ é limitada inferiormente e existe $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Teorema

Sejam H um espaço de Hilbert e $\Phi : H \to \mathbb{R}$ uma função fracamente semicontínua inferiormente e coerciva. Então Φ é limitada inferiormente e assume seu ínfimo em H.

Minimização

Teorema

Sejam X um espaço topológico compacto e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então Φ é limitada inferiormente e existe $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Teorema

Sejam H um espaço de Hilbert e $\Phi : H \to \mathbb{R}$ uma função fracamente semicontínua inferiormente e coerciva. Então Φ é limitada inferiormente e assume seu ínfimo em H.

Exemplo 1: $g(x,t) = f(x) - q(x)t$ com $q \geq 0$.

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \qquad (P_1)$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[|u'|^2 + q(x)u^2\right] dx - \int_a^b f u dx, \quad u \in H_0^1(a,b).$$

- J é fracamente semicontínuo inferiormente, ou seja,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

i) $\|u\| \leq \liminf \|u_n\| \; (\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle + \|u\|^2)$;

ii) Usando a compacidade da imersão $H_0^1(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$,

$$\int_a^b q u_n^2 dx \to \int_a^b q u^2 dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f u_n dx \to \int_a^b f u dx.$$

- J é coercivo, ou seja, $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J(u) = \infty$.

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\int_a^b \left[|u'|^2 + q(x)u^2\right] dx - \int_a^b fudx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2dx - \left(\int_a^b f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b u^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\left(\int_a^b |u'|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{c}\left(\int_a^b f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int_a^b |u'|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \frac{1}{c}\left(\int_a^b f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |u'|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \|u\| \geq \frac{4}{c}\|f\|_2.
\end{aligned}$$

Pelo teorema de Minimização, existe $u_0 \in H_0^1(a,b)$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in H_0^1(a,b)} J(u),$$

e daí vemos que $J'(u_0)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(a,b)$, ou seja, u_0 é solução fraca para (P_1).

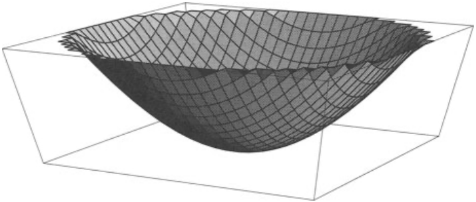


Figura: Minimização - Fonte: Costa (2007)

Argumentos similares mostram que os problemas

$$\begin{cases} -u'' + u^3 = 0, & 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} -u'' = \dfrac{1}{2}u - sen(x), & 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

possuem solução fraca em H_0^1.

Exemplo 2: $g(x,t) = t^3$, via Passo da Montanha

$$\begin{cases} -u'' = u^3, & a < t < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \qquad (P_M)$$

O funcional associado ao problema (P_M) é $J : H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2 dx - \frac{1}{4}\int_a^b u^4 dx,$$

com derivada

$$J'(u)v = \int_a^b u'v' dx - \int_a^b u^3 v dx, \quad u, v \in H_0^1(a,b).$$

É claro que $u \equiv 0$ é solução de (P_M). Buscamos uma solução não trivial.

Teorema do Passo da Montanha

Teorema

Seja H um espaço de Hilbert e $\Phi \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Suponha ainda que

(i) $\Phi(0) = 0$;

(ii) *existem $r > 0$ e $\rho > 0$ tais que $\Phi(u) \geq \rho$ para todo $\|u\| = r$;*

(iii) *existe $u_0 \in H$ tal que $\|u_0\| > r$ e $\Phi(u_0) < 0$.*

Então Φ possui um valor crítico $c_m \geq \rho$, caracterizado por

$$c_m := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi(\gamma(t)), \quad \textit{onde}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = u_0\}.$$

Condição (PS)

Uma sequência de Palais-Smale (PS) para J é uma sequência (u_n) em H_0^1 tal que $(J(u_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$ e $J'(u_n) \to 0$ em H^{-1}.

Dizemos que J satisfaz a condição (PS) se toda sequência (PS) possuir subsequência convergente em H_0^1.

- Para $g(t) = t^3$, vemos que $G(t) = \dfrac{1}{4}t^4 = \dfrac{1}{4}tg(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$. Daí, se (u_n) é uma sequência (PS) para J, tem-se

$$C_1 + C_2\|u_n\| \geq 4J(u_n) - J'(u_n)u_n = \int_a^b |u_n'|^2 dx = \|u_n\|^2,$$

o que nos diz que (u_n) é limitada. Graças à compacidade das imersões $H_0^1(a,b) \hookrightarrow L^p(a,b)$, $p \geq 1$, vemos que J satisfaz (PS).

Condição (PS)

Uma sequência de Palais-Smale (PS) para J é uma sequência (u_n) em H_0^1 tal que $(J(u_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$ e $J'(u_n) \to 0$ em H^{-1}.

Dizemos que J satisfaz a condição (PS) se toda sequência (PS) possuir subsequência convergente em H_0^1.

• Para $g(t) = t^3$, vemos que $G(t) = \dfrac{1}{4}t^4 = \dfrac{1}{4}tg(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Daí, se (u_n) é uma sequência (PS) para J, tem-se

$$C_1 + C_2\|u_n\| \geq 4J(u_n) - J'(u_n)u_n = \int_a^b |u_n'|^2 dx = \|u_n\|^2,$$

o que nos diz que (u_n) é limitada. Graças à compacidade das imersões $H_0^1(a,b) \hookrightarrow L^p(a,b)$, $p \geq 1$, vemos que J satisfaz (PS).

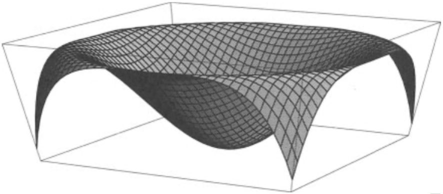
Geometria do Passo da Montanha

- Graças à imersão $H_0^1(a,b) \hookrightarrow L^4(a,b)$ temos

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|_4^4 \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{C_3}{2}\|u\|^2\right)\|u\|^2, \ \forall u \in H_0^1.$$

- Fixando $\varphi \in C_c^1(a,b)$, $\varphi \neq 0$, temos

$$J(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{t^4}{4}\|\varphi\|_4^4 \quad \to -\infty \text{ quando } t \to \infty.$$



Exemplo 3: $g(x,t) = 2t - sen(x)$, via Ponto de Sela

$$\begin{cases} -u'' = 2u - sen(x), & 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (P_S)$$

O funcional associado a (P_S) é $J : H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'|^2 dx - \int_0^\pi u^2 dx + \int_0^\pi u(x) sen(x) dx,$$

com derivada

$$J'(u)v = \int_0^\pi u'v' dx - 2\int_0^\pi uv dx + \int_0^\pi v(x) sen(x) dx,$$

quaisquer $u, v \in H_0^1(0,\pi)$.

Teorema do Ponto de Sela

Teorema

Seja $H = V \oplus W$ um espaço de Hilbert onde $dim V < \infty$ e seja $\Phi \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que

$$m := \max_{u \in \partial D} \Phi(u) < \inf_{u \in W} \Phi(u) := M,$$

então

$$c := \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \Phi(h(u))$$

é um valor crítico para Φ, com $c \geq M$, onde

$$\Gamma := \{h \in C(\overline{D}, H); h(u) = u, \forall u \in \partial D\}.$$

- J satisfaz (PS).
- J Para $V := \langle sen(x) \rangle$, temos, para $v = tsen(x)$,

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{t^2}{2}\int_0^\pi \cos^2(x)dx - t^2\int_0^\pi sen^2(x)dx + t\int_0^\pi sen^2(x)dx \\ &= -\frac{t^2}{2}\int_0^\pi sen^2(x)dx + t\int_0^\pi sen^2(x)dx \end{aligned}$$

de modo que $J(v) \to -\infty$ quando $\|v\| \to \infty$, $v \in V$.

- Para $W := V^\perp$, já que $4 = \lambda_2 = \inf\limits_{0 \neq w \in W} \dfrac{\int_0^\pi |w'|^2 dx}{\int_0^\pi w^2 dx}$, temos

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi |w'|^2(x)dx - \int_0^\pi w^2 dx + \int_0^\pi w(x)sen(x)dx \\ &\geq \int_0^\pi w^2 dx \quad \geq 0, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

- J satisfaz (PS).
- J Para $V := \langle sen(x) \rangle$, temos, para $v = tsen(x)$,

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{t^2}{2}\int_0^\pi \cos^2(x)dx - t^2\int_0^\pi sen^2(x)dx + t\int_0^\pi sen^2(x)dx \\ &= -\frac{t^2}{2}\int_0^\pi sen^2(x)dx + t\int_0^\pi sen^2(x)dx \end{aligned}$$

de modo que $J(v) \to -\infty$ quando $\|v\| \to \infty$, $v \in V$.

- Para $W := V^\perp$, já que $4 = \lambda_2 = \inf\limits_{0 \neq w \in W} \dfrac{\int_0^\pi |w'|^2 dx}{\int_0^\pi w^2 dx}$, temos

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi |w'|^2(x)dx - \int_0^\pi w^2 dx + \int_0^\pi w(x)sen(x)dx \\ &\geq \int_0^\pi w^2 dx \quad \geq 0, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

Graças ao Teorema do Ponto de Sela sabemos que J possui um ponto crítico, ou seja, (P_S) possui uma solução fraca em $H_0^1(0,\pi)$.

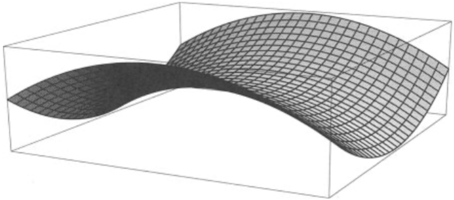


Figura: Ponto de Sela - Fonte: Costa (2007)

Regularidade da solução

Consideremos u solução fraca para o problema

$$-u''(x) = g(x,u) \text{ em } (a,b), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

com $g \in C([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ou seja, $u \in H_0^1(a,b)$ e

$$\int_a^b u'v'dx - \int_a^b g(x,u)vdx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(a,b).$$

Como $h(x) := g(x,u(x))$ pertence a $L^2(a,b)$ temos $u \in H^2(a,b)$, de modo que $u \in C_0^1([a,b])$. Se tivermos $h \in C^\alpha$ então teremos $u \in C^{2,\alpha}(a,b)$.

Recuperação da solução clássica

Temos $u \in C_0^1([a,b]) \cap C^2(a,b)$ satisfazendo

$$\int_a^b u'v'dx - \int_a^b g(x,u)vdx = 0, \quad \forall v \in C_0^1([a,b]),$$

donde

$$\int_a^b \left[u'' + g(x,u)\right] vdx = 0, \quad \forall v \in C_0^1([a,b]).$$

Segue do Lema Fundamental do Cálculo das Variações que

$$u'' + g(x,u) = 0, \quad q.t.p.\ x \in (a,b).$$

Sendo funções contínuas, esta igualdade se verifica em todo $x \in (a,b)$. Portanto u é uma solução clássica.

Referências

- Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, (2011).
- Figueiredo, D. G., *Métodos Variacionais em Equações Diferenciais*, Revista Matemátiva Universitária, nº 7 (1988).
- Figueiredo, D. G., *O Princípio de Dirichlet*, Revista Matemátiva Universitária, nº 1 (1985).
- Costa, D. G., *An invitation to variational methods in differential equations*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2007), xii+138.

Obrigada pela atenção!