Anéis limpos

Profa.Dra. Elen Deise Assis Barbosa

Universidade Federal da Bahia – UFBA

14 de Abril de 2023

Índice

Índice

Definição de Grupo

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in G$.
2. Existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$. (elemento neutro)
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1$.(simétrico de um elemento)

Definição de Grupo

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in G$.
2. Existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$. (elemento neutro)
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1$.(simétrico de um elemento)

Definição de Grupo

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in G$.
2. Existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$. (elemento neutro)
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1$.(simétrico de um elemento)

Definição de Grupo

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in G$.
2. Existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$. (elemento neutro)
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1$.(simétrico de um elemento)

Definição de Grupo

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in G$.
2. Existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$. (elemento neutro)
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1$.(simétrico de um elemento)

Exemplos

- $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo.
- Seja $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ é um grupo aditivo e comutativo.

Exemplos

- $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo.
- Seja $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ é um grupo aditivo e comutativo.

Definição de Anel

Um *anel* é um conjunto não vazio R munido de duas operações binárias, adição $(x, y) \mapsto x + y$ e multiplicação $(x, y) \mapsto x \cdot y$ tal que as seguintes propriedades valem:

1. R é um grupo comutativo com a adição.
2. $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in R$.
3. $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, para todo $x, y, z \in R$.

Definição de Anel

Um *anel* é um conjunto não vazio R munido de duas operações binárias, adição $(x, y) \mapsto x + y$ e multiplicação $(x, y) \mapsto x \cdot y$ tal que as seguintes propriedades valem:

1. R é um grupo comutativo com a adição.
2. $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in R$.
3. $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, para todo $x, y, z \in R$.

Definição de Anel

Um *anel* é um conjunto não vazio R munido de duas operações binárias, adição $(x, y) \mapsto x + y$ e multiplicação $(x, y) \mapsto x \cdot y$ tal que as seguintes propriedades valem:

1. R é um grupo comutativo com a adição.
2. $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in R$.
3. $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, para todo $x, y, z \in R$.

Definição de Anel

Um *anel* é um conjunto não vazio R munido de duas operações binárias, adição $(x, y) \mapsto x + y$ e multiplicação $(x, y) \mapsto x \cdot y$ tal que as seguintes propriedades valem:

1. R é um grupo comutativo com a adição.
2. $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in R$.
3. $x(y+z) = xy+xz$, $(x+y)z = xz+yz$, para todo $x, y, z \in R$.

Definição de Anel

Se um anel R satisfaz a propriedade:

4. Existe $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$, para todo $x \in R$, dizemos que R é um *anel com identidade*.
5. Se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in R$, dizemos que R é um *anel comutativo*.

Definição de Anel

Se um anel R satisfaz a propriedade:

4. Existe $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$, para todo $x \in R$, dizemos que R é um *anel com identidade*.
5. Se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in R$, dizemos que R é um *anel comutativo.*

Um elemento $x \in R$ é dito uma *unidade* de R se existir $y \in R$, tal que $xy = yx = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}(R)$ o conjunto de todas as unidades de R.

Um elemento $e \in R$ é chamado *idempotente* se $e^2 = e$.
Denotaremos por $Id(R)$ o conjunto de todos elementos idempotentes de R.

Um elemento $e \in R$ é chamado *idempotente* se $e^2 = e$. Denotaremos por $Id(R)$ o conjunto de todos elementos idempotentes de R.

Exemplos de Anéis

- Anéis comutativos:
  $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (n.\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- Seja A o conjunto de todas as matrizes 2×2, isto é,
  $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Exemplos de Anéis

- Anéis comutativos:
  $(\mathbb{Z},+,\cdot),(n.\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot)(\mathbb{R},+,\cdot),(\mathbb{C},+,\cdot)$.
- Seja A o conjunto de todas as matrizes 2×2, isto é,
  $A=\left\{\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right], a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$

Exemplos de Anéis

Vamos agora definir as operações $\oplus$ e $\otimes$ no conjunto A acima que denotaremos por $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, Sejam $a, b, c, d, a^{'}, b^{'}, c^{'}, d^{'} \in \mathbb{R}$.

- soma: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a^{'} & b^{'} \\ c^{'} & d^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a^{'} & b+b^{'} \\ c+c^{'} & d+d^{'} \end{bmatrix}$
- produto: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a^{'} & b^{'} \\ c^{'} & d^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa^{'}+bc^{'} & ab^{'}+bd^{'} \\ ca^{'}+dc^{'} & cb^{'}+dd^{'} \end{bmatrix}$

Exemplos de Anéis

Vamos agora definir as operações $\oplus$ e $\otimes$ no conjunto A acima que denotaremos por $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, Sejam $a, b, c, d, a^{'}, b^{'}, c^{'}, d^{'} \in \mathbb{R}$.

- soma: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a^{'} & b^{'} \\ c^{'} & d^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a^{'} & b + b^{'} \\ c + c^{'} & d + d^{'} \end{bmatrix}$
- produto: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a^{'} & b^{'} \\ c^{'} & d^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa^{'} + bc^{'} & ab^{'} + bd^{'} \\ ca^{'} + dc^{'} & cb^{'} + dd^{'} \end{bmatrix}$

Exemplos de Anéis

Vamos agora definir as operações $\oplus$ e $\otimes$ no conjunto A acima que denotaremos por $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, Sejam $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$.

- soma: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$
- produto: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$

Exemplos de Anéis

$(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$ é um anel onde

- $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é o elemento neutro para $\oplus$;
- $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a unidade de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemplos de Anéis

$(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$ é um anel onde

- $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é o elemento neutro para $\oplus$;
- $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a unidade de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Definição de Subanel

Um subconjunto não vazio S de um anel R com unidade é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\forall\ x, y \in S$ tem-se $x - y \in S$;(fechado para a diferença)
2. $\forall\ x, y \in S$, tem-se $xy \in S$; (fechado para o produto)
3. $0 \in S$ (o elemento neutro de R pertence a S).

Definição de Subanel

Um subconjunto não vazio S de um anel R com unidade é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\forall\ x, y \in S$ tem-se $x - y \in S$;(fechado para a diferença)
2. $\forall\ x, y \in S$, tem-se $xy \in S$; (fechado para o produto)
3. $0 \in S$ (o elemento neutro de R pertence a S).

Definição de Subanel

Um subconjunto não vazio S de um anel R com unidade é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\forall\ x, y \in S$ tem-se $x - y \in S$;(fechado para a diferença)
2. $\forall\ x, y \in S$, tem-se $xy \in S$; (fechado para o produto)
3. $0 \in S$ (o elemento neutro de R pertence a S).

Definição de Subanel

Um subconjunto não vazio S de um anel R com unidade é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\forall\ x, y \in S$ tem-se $x - y \in S$;(fechado para a diferença)
2. $\forall\ x, y \in S$, tem-se $xy \in S$; (fechado para o produto)
3. $0 \in S$ (o elemento neutro de R pertence a S).

Exemplo de Subanel

Seja $A = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel de A.

- $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a unidade de A;
- $1^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a unidade de B.

Subanéis importantes: Ideais

Seja R um anel e I um subanel de R. Dizemos que I é um ideal à esquerda (à direita) de R se,

1. $r \cdot x \in I (x \cdot r \in I)$ com $r \in R$ e $x \in I$;
2. Se I é um ideal simultaneamente à esquerda e à direita dizemos simplesmente que I é um ideal;
3. $\{0\}$ e R são chamados ideais triviais.

Exemplos de Ideais

Seja A o anel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

1. $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, a, c \in \mathbb{R} \right\}$ é um ideal à esquerda.
2. $J = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um ideal à direita.

Ideal Maximal

Um ideal M de R é maximal se $M \neq R$ e se naõ existe ideal I de R tal que

$$M \subsetneq I \subsetneq R.$$

Índice

Anéis Limpos

Definição

Seja $x \in R$, dizemos que x é um elemento limpo se $x = u + e$ onde $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.

Exemplo

Unidades são elementos limpos.
Note que toda unidade, u, pode ser escrita da forma

$$u = u + 0.$$

Anéis Limpos

Definição

Seja $x \in R$, dizemos que x é um elemento limpo se $x = u + e$ onde $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.

Exemplo

Unidades são elementos limpos.

Note que toda unidade, u, pode ser escrita da forma

$$u = u + 0.$$

Anéis Limpos

Definição

Seja $x \in R$, dizemos que x é um elemento limpo se $x = u + e$ onde $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.

Exemplo

Unidades são elementos limpos.
Note que toda unidade, u, pode ser escrita da forma

$$u = u + 0.$$

Anéis Limpos

Exemplo

Se e é um elemento idempotente de um anel R com unidade 1, então, e é limpo.

De fato,

- $e = (2e - 1) + (1 - e)$.
- $(2e - 1)(2e - 1) = 4e - 2e - 2e + 1 = 1$.
- $(1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$
- e é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Exemplo

Se e é um elemento idempotente de um anel R com unidade 1, então, e é limpo.

De fato,

- $e = (2e - 1) + (1 - e)$.
- $(2e - 1)(2e - 1) = 4e - 2e - 2e + 1 = 1$.
- $(1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$
- e é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Exemplo

Se e é um elemento idempotente de um anel R com unidade 1, então, e é limpo.

De fato,

- $e = (2e - 1) + (1 - e)$.
- $(2e - 1)(2e - 1) = 4e - 2e - 2e + 1 = 1$.
- $(1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$
- e é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Exemplo

Se e é um elemento idempotente de um anel R com unidade 1, então, e é limpo.

De fato,

- $e = (2e - 1) + (1 - e)$.
- $(2e - 1)(2e - 1) = 4e - 2e - 2e + 1 = 1$.
- $(1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$
- e é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Um elemento $x \in R$ é nilpotente se existe $n \geq 1$ tal que $x^n = 0$.

Exemplo

Se x é um elemento nilpotente de um anel R com unidade 1, então, x é limpo.

De fato,

- $x = (x - 1) + 1$.
- $(x - 1)^{-1} = (1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1})$.
- x é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Um elemento $x \in R$ é nilpotente se existe $n \geq 1$ tal que $x^n = 0$.

Exemplo

Se x é um elemento nilpotente de um anel R com unidade 1, então, x é limpo.

De fato,

- $x = (x-1)+1$.
- $(x-1)^{-1} = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1})$.
- x é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Um elemento $x \in R$ é nilpotente se existe $n \geq 1$ tal que $x^n = 0$.

Exemplo

Se x é um elemento nilpotente de um anel R com unidade 1, então, x é limpo.

De fato,

- $x = (x - 1) + 1.$
- $(x - 1)^{-1} = (1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}).$
- x é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Um elemento $x \in R$ é nilpotente se existe $n \geq 1$ tal que $x^n = 0$.

Exemplo

Se x é um elemento nilpotente de um anel R com unidade 1, então, x é limpo.

De fato,

- $x = (x - 1) + 1$.
- $(x - 1)^{-1} = (1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1})$.
- x é um elemento limpo.

Anéis Limpos

Definição

Um anel R é limpo se todos os seus elementos são limpos.

Exemplo

Corpos são anéis limpos.

Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.

Exemplo

Todo anel Booleano é limpo.

Anéis Limpos

Definição

Um anel R é limpo se todos os seus elementos são limpos.

Exemplo

Corpos são anéis limpos.

Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.

Exemplo

Todo anel Booleano é limpo.

Anéis Limpos

Definição

Um anel R é limpo se todos os seus elementos são limpos.

Exemplo

Corpos são anéis limpos.

Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.

Exemplo

Todo anel Booleano é limpo.

Anéis Limpos

Definição

Um anel R é limpo se todos os seus elementos são limpos.

Exemplo

Corpos são anéis limpos.

Um anel Booleano é aquele em que todo elemento é idempotente.

Exemplo

Todo anel Booleano é limpo.

Exemplo

O anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$ *não é limpo.*

Exemplo

Anéis de Polinômios não são limpos, [5].

Exemplo

O anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$ não é limpo.

Exemplo

Anéis de Polinômios não são limpos, [5].

Limpeza de Anéis de Matrizes

Teorema ([3])

Se R é um anel limpo, então $M_n(R)$ é limpo.

Anéis Limpos

Proposição ([2])

Sejam R e S anéis e $f : R \to S$ um homomorfismo sobrejetor. Se R é limpo, então S é limpo.

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

□

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

□

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- Sejam $s \in S$ e $r \in R$ tais que $f(r) = s$.
- Como R é limpo temos que $r = u + e$ com $u \in \mathcal{U}(R)$ e $e \in Id(R)$.
- $s = f(r) = f(u) + f(e)$ e S é limpo.
- $f(e).f(e) = f(e^2) = f(e)$.
- $f(u).f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1_R) = 1_S$.
- $f(u) \in \mathcal{U}(S)$ e $f(e) \in Id(S)$.
- Assim, $s = f(u) + f(e)$ e S é limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Corolário

Seja R um anel limpo e I um ideal de R, então o quociente R/I é limpo.

Vale a volta?

Um anel limpo quocientado por qualquer um de seus ideais não triviais resulta em um anel limpo, porém nem sempre a recíproca é verdadeira.

Exemplo

O quociente $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um corpo, logo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é limpo, porém $\mathbb{Z}$ não é limpo.

Um anel limpo quocientado por qualquer um de seus ideais não triviais resulta em um anel limpo, porém nem sempre a recíproca é verdadeira.

Exemplo

O quociente $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é um corpo, logo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ é limpo, porém $\mathbb{Z}$ não é limpo.

Anéis Limpos

Proposição ([2])

Se R e S são anéis limpos, então $R \times S$ é limpo.

Se R_i são anéis limpos, então $\prod_{i=1}^{k} R_i$ é limpo.

Anéis Limpos

Proposição ([2])

Se R e S são anéis limpos, então $R \times S$ é limpo.
Se R_i são anéis limpos, então $\prod_{i=1}^{k} R_i$ é limpo.

Anéis Limpos

Demonstração.

- Seja $(r, s) \in R \times S$.
- Como r e s são elementos limpos temos que existem $e, u \in R$ e $f, v \in S$ tais que:
- $e^2 = e, f^2 = f, u \in \mathcal{U}(R), v \in \mathcal{U}(S)$.
- $r = u + e$ e $s = v + f$. Assim,
- $(r, s) = (u + e, v + f) = (u, v) + (e, f)$.

□

Anéis Limpos

Demonstração.

- Seja $(r,s) \in R \times S$.
- Como r e s são elementos limpos temos que existem $e, u \in R$ e $f, v \in S$ tais que:
- $e^2 = e, f^2 = f, u \in \mathcal{U}(R), v \in \mathcal{U}(S)$.
- $r = u + e$ e $s = v + f$. Assim,
- $(r,s) = (u+e, v+f) = (u,v) + (e,f)$.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- Seja $(r, s) \in R \times S$.
- Como r e s são elementos limpos temos que existem $e, u \in R$ e $f, v \in S$ tais que:
- $e^2 = e, f^2 = f, u \in \mathcal{U}(R), v \in \mathcal{U}(S)$.
- $r = u + e$ e $s = v + f$. Assim,
- $(r, s) = (u + e, v + f) = (u, v) + (e, f)$.

□

Anéis Limpos

Demonstração.

- Seja $(r, s) \in R \times S$.
- Como r e s são elementos limpos temos que existem $e, u \in R$ e $f, v \in S$ tais que:
- $e^2 = e, f^2 = f, u \in \mathcal{U}(R), v \in \mathcal{U}(S)$.
- $r = u + e$ e $s = v + f$. Assim,
- $(r, s) = (u + e, v + f) = (u, v) + (e, f)$.

□

Anéis Limpos

Demonstração.

- Seja $(r, s) \in R \times S$.
- Como r e s são elementos limpos temos que existem $e, u \in R$ e $f, v \in S$ tais que:
- $e^2 = e, f^2 = f, u \in \mathcal{U}(R), v \in \mathcal{U}(S)$.
- $r = u + e$ e $s = v + f$. Assim,
- $(r, s) = (u + e, v + f) = (u, v) + (e, f)$.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- $(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$.
- $(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$.
- $(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$
- (e, f) é um idempotente de $R \times S$.
- (u, v) uma unidade de $R \times S$
- $R \times S$ é um anel limpo.

□

Anéis Limpos

Demonstração.

- $(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$.
- $(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$.
- $(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$
- (e, f) é um idempotente de $R \times S$.
- (u, v) uma unidade de $R \times S$
- $R \times S$ é um anel limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- $(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$.
- $(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$.
- $(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$
- (e, f) é um idempotente de $R \times S$.
- (u, v) uma unidade de $R \times S$
- $R \times S$ é um anel limpo.

$\square$

Anéis Limpos

Demonstração.

- $(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$.
- $(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$.
- $(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$
- (e, f) é um idempotente de $R \times S$.
- (u, v) uma unidade de $R \times S$
- $R \times S$ é um anel limpo.

Anéis Limpos

Demonstração.

- $(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$.
- $(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$.
- $(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$
- (e, f) é um idempotente de $R \times S$.
- (u, v) uma unidade de $R \times S$
- $R \times S$ é um anel limpo.

Anéis Limpos

Demonstração.

- $(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$.
- $(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$.
- $(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$
- (e, f) é um idempotente de $R \times S$.
- (u, v) uma unidade de $R \times S$
- $R \times S$ é um anel limpo.

$\square$

Definição (Anéis de grupo)

Sejam R um anel com unidade e G um grupo. Definimos por RG o conjunto de todas as combinações lineares (quase nulas) da forma $\sum_{g\in G} a_g g$. Onde suas operações são definidas por:

- *soma de dois elementos em RG:*

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, g.$$

- *produto de dois elementos em RG:*

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (a_g b_h)\, gh.$$

Definição (Anéis de grupo)

Sejam R um anel com unidade e G um grupo. Definimos por RG o conjunto de todas as combinações lineares (quase nulas) da forma $\sum_{g \in G} a_g g$. Onde suas operações são definidas por:

- *soma de dois elementos em RG:*

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g)\, g.$$

- *produto de dois elementos em RG:*

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g,h \in G} (a_g b_h)\, gh.$$

Elemento do Anel de Grupo

- $\alpha = a_{g_1}g_1 + a_{g_2}g_2 + \cdots + a_{g_n}g_n$
- Elementos de RG que possuem coeficientes (elementos de R) iguais a zero serão desconsiderados
- $0g_1 + 0g_2 + a_1g_3 = a_1g_3$
- Se R tem 1, então $1_R g_i = g_i$ para todo $g_i \in RG$.

Elemento do Anel de Grupo

- $\alpha = a_{g_1} g_1 + a_{g_2} g_2 + \cdots + a_{g_n} g_n$
- Elementos de RG que possuem coeficientes (elementos de R) iguais a zero serão desconsiderados
- $0g_1 + 0g_2 + a_1 g_3 = a_1 g_3$
- Se R tem 1, então $1_R g_i = g_i$ para todo $g_i \in RG$.

Elemento do Anel de Grupo

- $\alpha = a_{g_1}g_1 + a_{g_2}g_2 + \cdots + a_{g_n}g_n$
- Elementos de RG que possuem coeficientes (elementos de R) iguais a zero serão desconsiderados
- $0g_1 + 0g_2 + a_1g_3 = a_1g_3$
- Se R tem 1, então $1_R g_i = g_i$ para todo $g_i \in RG$.

Elemento do Anel de Grupo

- $\alpha = a_{g_1}g_1 + a_{g_2}g_2 + \cdots + a_{g_n}g_n$
- Elementos de RG que possuem coeficientes (elementos de R) iguais a zero serão desconsiderados
- $0g_1 + 0g_2 + a_1g_3 = a_1g_3$
- Se R tem 1, então $1_Rg_i = g_i$ para todo $g_i \in RG$.

Anéis de Grupo

Sejam $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ um grupo e R um anel com unidade.

- $\alpha = a_{g_1} g_1 + a_{g_2} g_2$ e $\beta = b_{g_1} g_1 + b_{g_2} g_2 + b_{g_3} g_3$. Assim,
- $\alpha \oplus \beta = (a_{g_1} + b_{g_1}) g_1 + (a_{g_2} + b_{g_2}) g_2 + b_{g_3} g_3$.
- $\alpha \odot \beta = (a_{g_1} b_{g_1})(g_1 g_1) + (a_{g_1} b_{g_2})(g_1 g_2) + (a_{g_1} b_{g_3})(g_1 g_3) + (a_{g_2} b_{g_1})(g_2 g_1) + (a_{g_2} b_{g_2})(g_2 g_2) + (a_{g_2} b_{g_3})(g_2 g_3)$.

Anéis de Grupo

Sejam $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ um grupo e R um anel com unidade.

- $\alpha = a_{g_1}g_1 + a_{g_2}g_2$ e $\beta = b_{g_1}g_1 + b_{g_2}g_2 + b_{g_3}g_3$. Assim,
- $\alpha \oplus \beta = (a_{g_1} + b_{g_1})g_1 + (a_{g_2} + b_{g_2})g_2 + b_{g_3}g_3$.
- $\alpha \odot \beta = (a_{g_1}b_{g_1})(g_1g_1) + (a_{g_1}b_{g_2})(g_1g_2) + (a_{g_1}b_{g_3})(g_1g_3) + (a_{g_2}b_{g_1})(g_2g_1) + (a_{g_2}b_{g_2})(g_2g_2) + (a_{g_2}b_{g_3})(g_2g_3)$.

Anéis de Grupo

Sejam $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ um grupo e R um anel com unidade.

- $\alpha = a_{g_1}g_1 + a_{g_2}g_2$ e $\beta = b_{g_1}g_1 + b_{g_2}g_2 + b_{g_3}g_3$. Assim,
- $\alpha \oplus \beta = (a_{g_1} + b_{g_1})g_1 + (a_{g_2} + b_{g_2})g_2 + b_{g_3}g_3$.
- $\alpha \odot \beta = (a_{g_1}b_{g_1})(g_1g_1) + (a_{g_1}b_{g_2})(g_1g_2) + (a_{g_1}b_{g_3})(g_1g_3) + (a_{g_2}b_{g_1})(g_2g_1) + (a_{g_2}b_{g_2})(g_2g_2) + (a_{g_2}b_{g_3})(g_2g_3)$.

- Podemos fazer várias perguntas sobre o Anel de Grupo RG. Dentre elas, sob quais condições RG é limpo?
- A função $\epsilon : RG \longrightarrow R$ definida por $\epsilon(\sum_{g\in G} a_g g) = \sum_{g\in G} a_g$. ($\epsilon$ é um epimorfismo).
- Se RG é limpo, então tem-se que R também o é.
- No artigo Extensions of Clean Rings [3], foram apresentados os primeiros resultados sobre limpeza em anéis de grupo.

- Podemos fazer várias perguntas sobre o Anel de Grupo RG. Dentre elas, sob quais condições RG é limpo?
- A função $\epsilon : RG \longrightarrow R$ definida por $\epsilon(\sum_{g\in G} a_g g) = \sum_{g\in G} a_g$. ($\epsilon$ é um epimorfismo).
- Se RG é limpo, então tem-se que R também o é.
- No artigo Extensions of Clean Rings [3], foram apresentados os primeiros resultados sobre limpeza em anéis de grupo.

- Podemos fazer várias perguntas sobre o Anel de Grupo RG. Dentre elas, sob quais condições RG é limpo?
- A função $\epsilon : RG \longrightarrow R$ definida por $\epsilon(\sum_{g\in G} a_g g) = \sum_{g\in G} a_g$. ($\epsilon$ é um epimorfismo).
- Se RG é limpo, então tem-se que R também o é.
- No artigo Extensions of Clean Rings [3], foram apresentados os primeiros resultados sobre limpeza em anéis de grupo.

- Podemos fazer várias perguntas sobre o Anel de Grupo RG. Dentre elas, sob quais condições RG é limpo?
- A função $\epsilon : RG \longrightarrow R$ definida por $\epsilon(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} a_g$. ($\epsilon$ é um epimorfismo).
- Se RG é limpo, então tem-se que R também o é.
- No artigo Extensions of Clean Rings [3], foram apresentados os primeiros resultados sobre limpeza em anéis de grupo.

Definição

Um grupo é dito localmente finito se todo subgrupo finitamente gerado é finito.

Teorema ([1])

Seja p um número primo com $p \in J(R)$ (radical de Jacobson). Se R é um anel limpo e G é um p-grupo localmente finito, então RG é limpo.

Definição

Um grupo é dito localmente finito se todo subgrupo finitamente gerado é finito.

Teorema ([1])

Seja p um número primo com $p \in J(R)$ (radical de Jacobson). Se R é um anel limpo e G é um p-grupo localmente finito, então RG é limpo.

Definição

Um anel R é dito local se possui apenas um ideal maximal.

Teorema ([1])

Se R é um anel local e G é um 2-grupo abeliano elementar, então RG é limpo.

Definição

Um anel R é dito local se possui apenas um ideal maximal.

Teorema ([1])

Se R é um anel local e G é um 2-grupo abeliano elementar, então RG é limpo.

- A note on Clean Group Algebras (Kanchan Joshi; Pramod Kanwar e J.B. Srivastava);
- On Clean Group Ring (Yiqiang Zhou);
- Clean Rings: A Survey (W. Keith Nicholson e Yiqiang Zhou);
- $*$ Limpeza em Anéis de Grupo Comutativo (Dissertação da aluna Laiz Valim da Rocha sob a orientação da professora Paula Murgel Veloso - UFF).

- A note on Clean Group Algebras (Kanchan Joshi; Pramod Kanwar e J.B. Srivastava);
- On Clean Group Ring (Yiqiang Zhou);
- Clean Rings: A Survey (W. Keith Nicholson e Yiqiang Zhou);
- $*$ Limpeza em Anéis de Grupo Comutativo (Dissertação da aluna Laiz Valim da Rocha sob a orientação da professora Paula Murgel Veloso - UFF).

- A note on Clean Group Algebras (Kanchan Joshi; Pramod Kanwar e J.B. Srivastava);
- On Clean Group Ring (Yiqiang Zhou);
- Clean Rings: A Survey (W. Keith Nicholson e Yiqiang Zhou);
- $*$ Limpeza em Anéis de Grupo Comutativo (Dissertação da aluna Laiz Valim da Rocha sob a orientação da professora Paula Murgel Veloso - UFF).

- A note on Clean Group Algebras (Kanchan Joshi; Pramod Kanwar e J.B. Srivastava);
- On Clean Group Ring (Yiqiang Zhou);
- Clean Rings: A Survey (W. Keith Nicholson e Yiqiang Zhou);
- $*$ Limpeza em Anéis de Grupo Comutativo (Dissertação da aluna Laiz Valim da Rocha sob a orientação da professora Paula Murgel Veloso - UFF).

- C. POLCINO MILIES,S.K.SEHGAL, *An Introduction to Group Rings.* Dordrecht: Kluwer Academic, 2002. (Algebras and Applications, 1).
- D.D. ANDERSON, V.P.CAMILLO. *Commutative rings whose elements are sum of a unit and idempotent*, Communications in Algebra, 30(7),2002,3327-3336.
- J. HAN, W.K NICHOLSON, *Extensions of Clean Rings*. Communications in Algebra.29:6,2589-2595,2001.
- V.P.CAMILLO, H.P.YU,*Exchange Rings, units and idempotents*, Communications in Algebra, v.22, n.12, p.4737-4749, 1994.
- W.K.NICHOLSON,Y.ZHOU, *Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit*, Glasgow mathematical Journal 46 (2004),227-236.

Y.ZHOU, *On Clean Group Rings*. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002. (Algebras and Applications, 1).

X.WANG;H.YOU, *Cleanness of the Group Ring of an Abelian p-group over a Commutative Ring*, Algebra Colloquium 19 (2012),539-544.

Agradecimentos

Muito Obrigada!
contato: elen.deise@ufba.br