A geometria da curvatura: um universo de idéias matemáticas emergindo da vida real

Por: Dra Débora Lopes da Silva

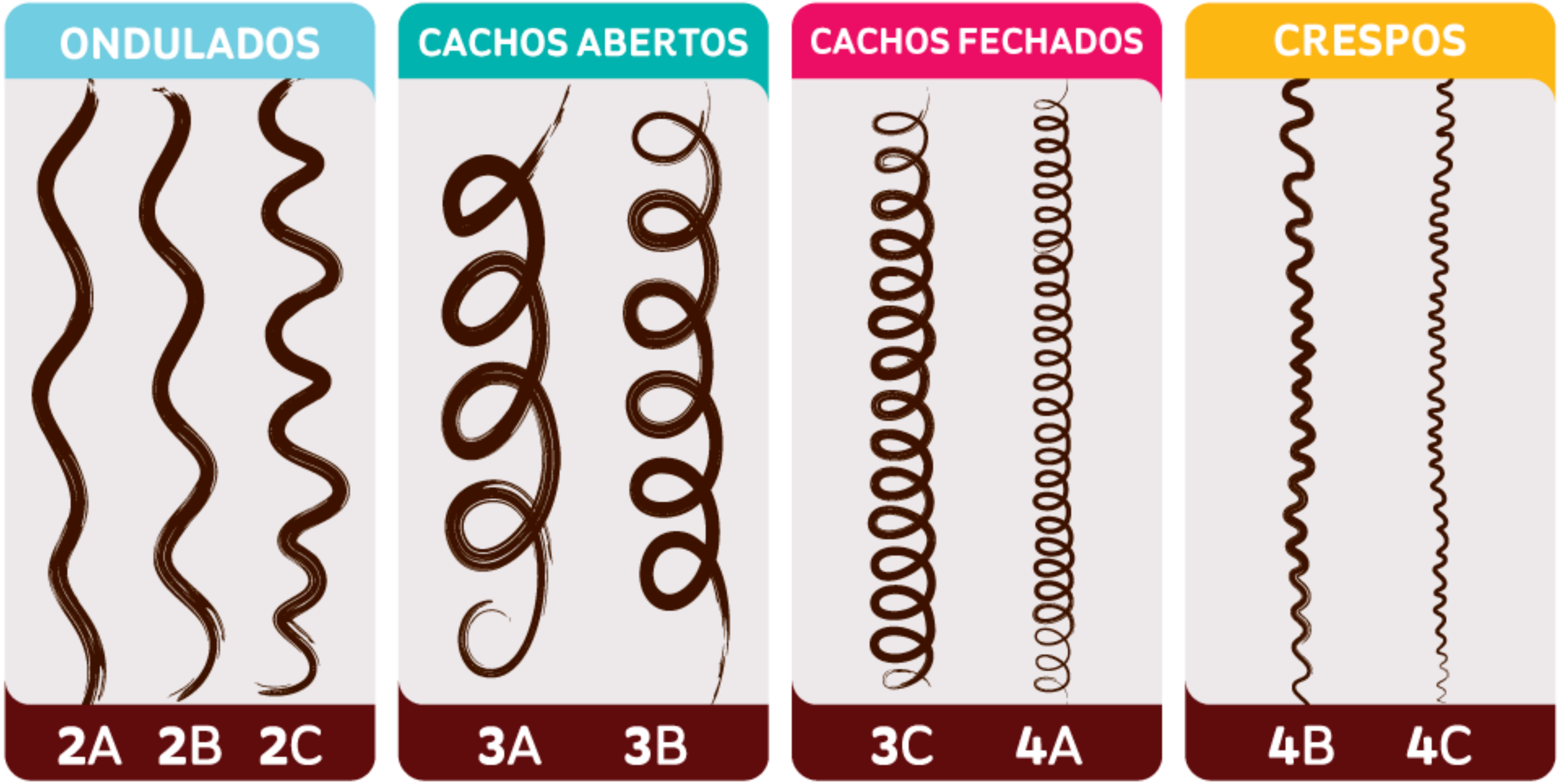
Mãe de Sara e Ana Rosa,

Professora e pesquisadora no Departamento de Matemática – UFS

Mas o que é curvatura? dobrar

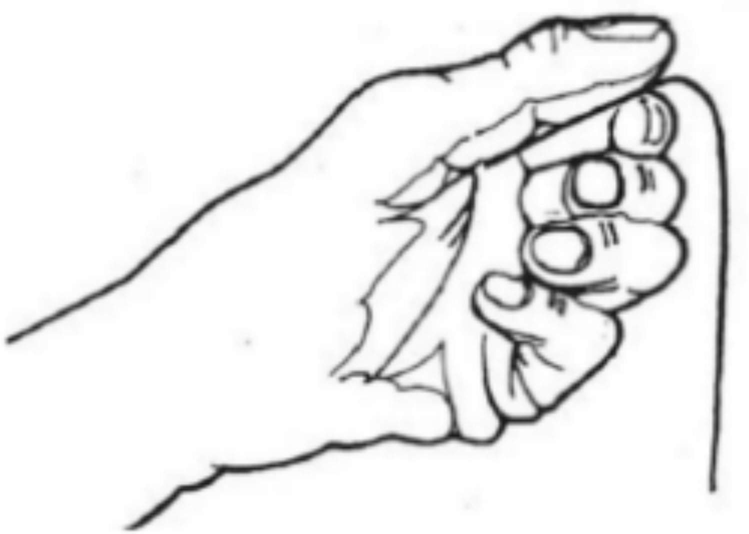
Curvatura em superfícies
É problema fascinante
de importância geométrica
é beleza apaixonante
te convido para ouvir
para a vida é marcante

TIPOS DE CURVATURA:



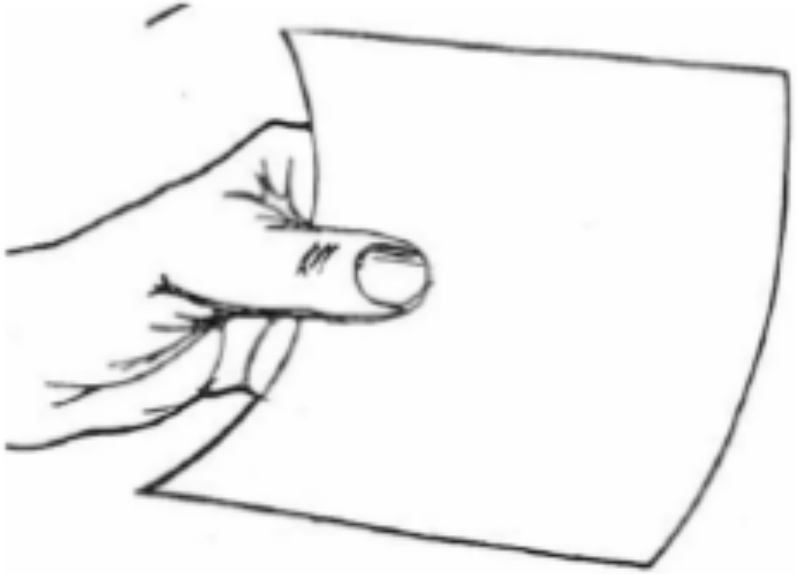
A geometria dos elementos estruturais

- *Uma folha de papel não é capaz de suportar a si mesma quando se projeta fora da mão.*



A geometria dos elementos estruturais

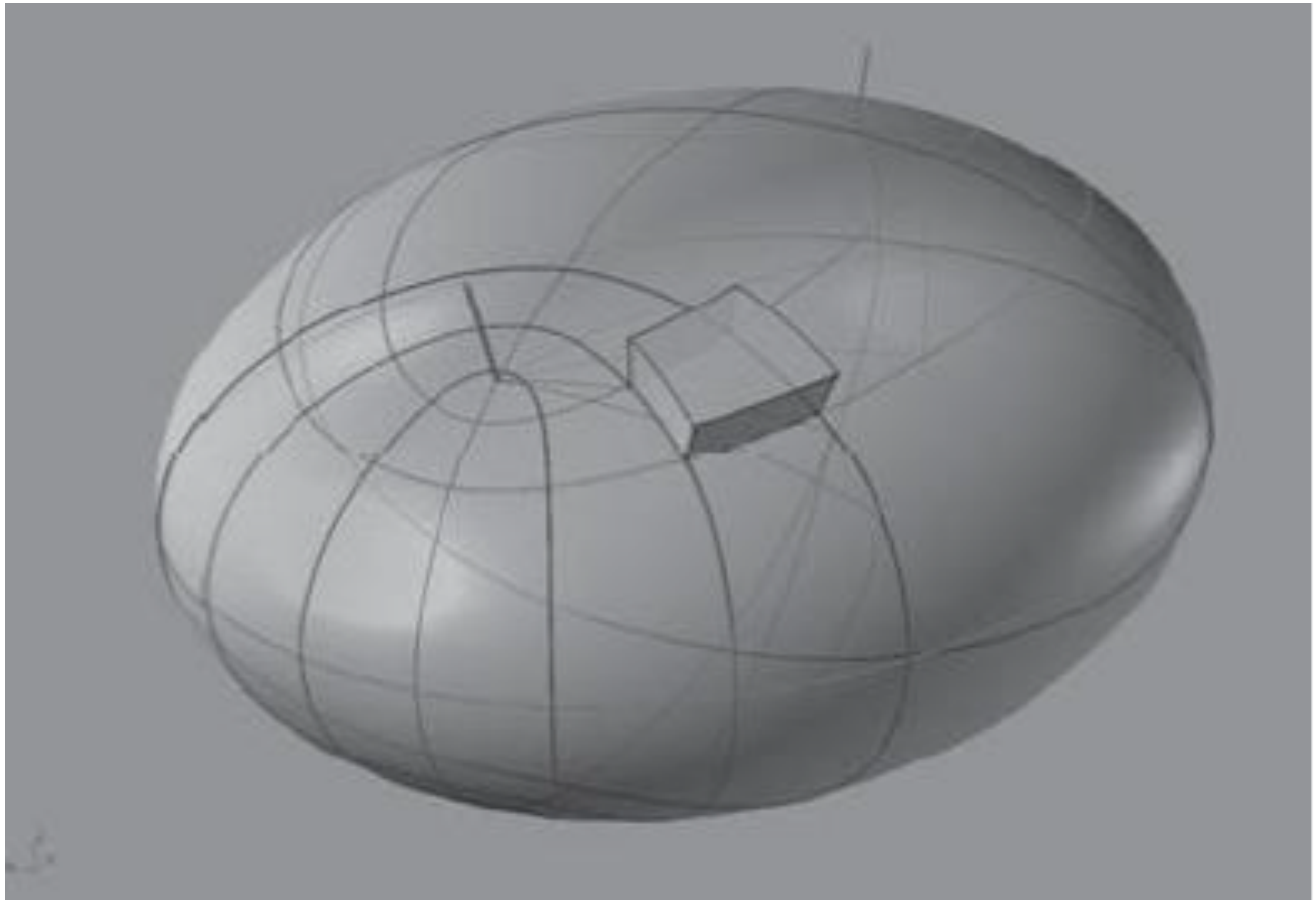
- *Se for dada a essa folha uma pequena curvatura, ela passa a ter uma rigidez maior e a ser capaz de suportar forças perpendiculares ao seu plano.*



A geometria dos elementos estruturais

- *Pode-se concluir que não é só a resistência do material que garante a um elemento estrutural a capacidade de suportar cargas.*
- *Sua forma é muitas vezes mais determinante da sua resistência do que a própria resistência do material.*

Cortes de Pedras

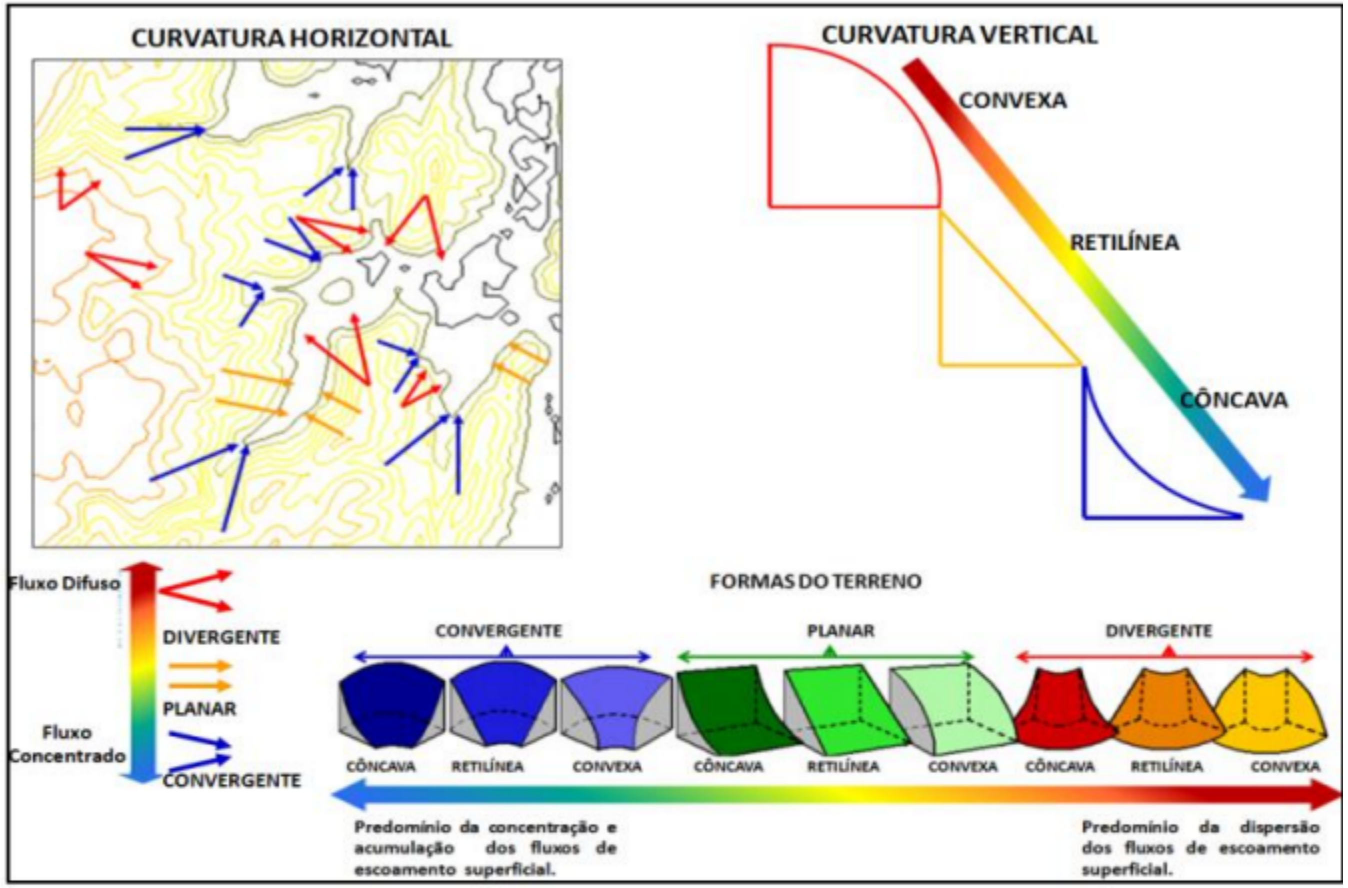


A topografia é a descrição de um lugar, definida como a ciência que estuda as características naturais ou artificiais presentes na superfície de uma localidade.

Os atributos topográficos podem ser parametrizados a partir de diversas variáveis, dentre elas, destacam-se: altitude, declividade, **perfil de curvatura** e **plano de curvatura** que permitem oferecer um conjunto de recursos para mapeamento e predição do meio físico, diagnóstico ambiental, etc... Aplicando em diversas áreas como edificações, sistema viário, loteamentos, saneamento, mineração e indústria.

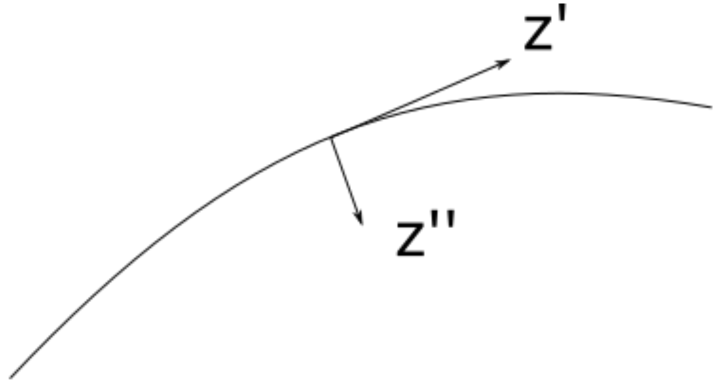
A curvatura no plano (da terra) é a taxa de variação da declividade na direção ortogonal à da orientação da vertente e refere-se ao caráter convexo/côncavo do terreno sendo decisiva na aceleração ou desaceleração do fluxo da água sobre o mesmo.

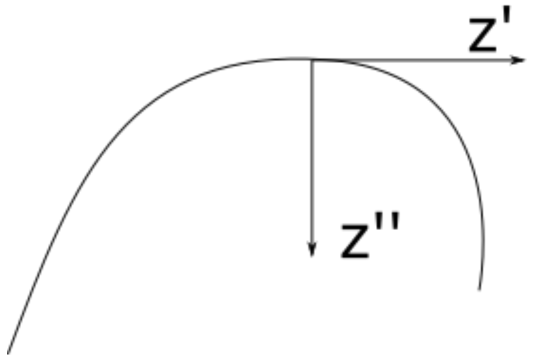
Vertentes (encostas) retilíneas têm valor de curvatura nulo, vertentes côncavas os têm positivos e convexas têm curvatura negativa (VALERIANO, 2003)

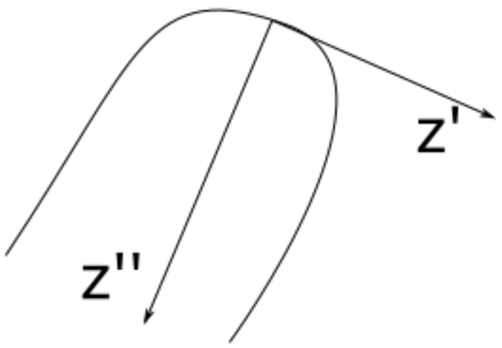


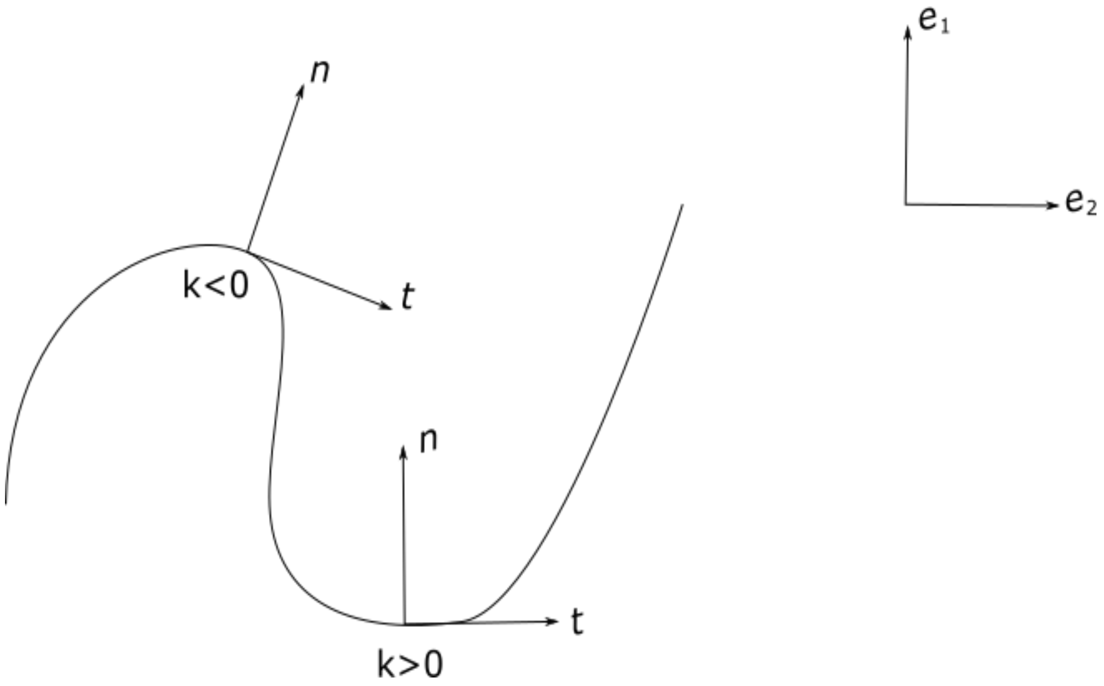
Fonte: SILVA NETO, J. C. A. Avaliação da vulnerabilidade à perda de solos na bacia do rio Salobra, MS, com base nas formas do terreno. Londrina: **Geografia**, vol. 22, n. 1, 2013.

Valor: aceleração



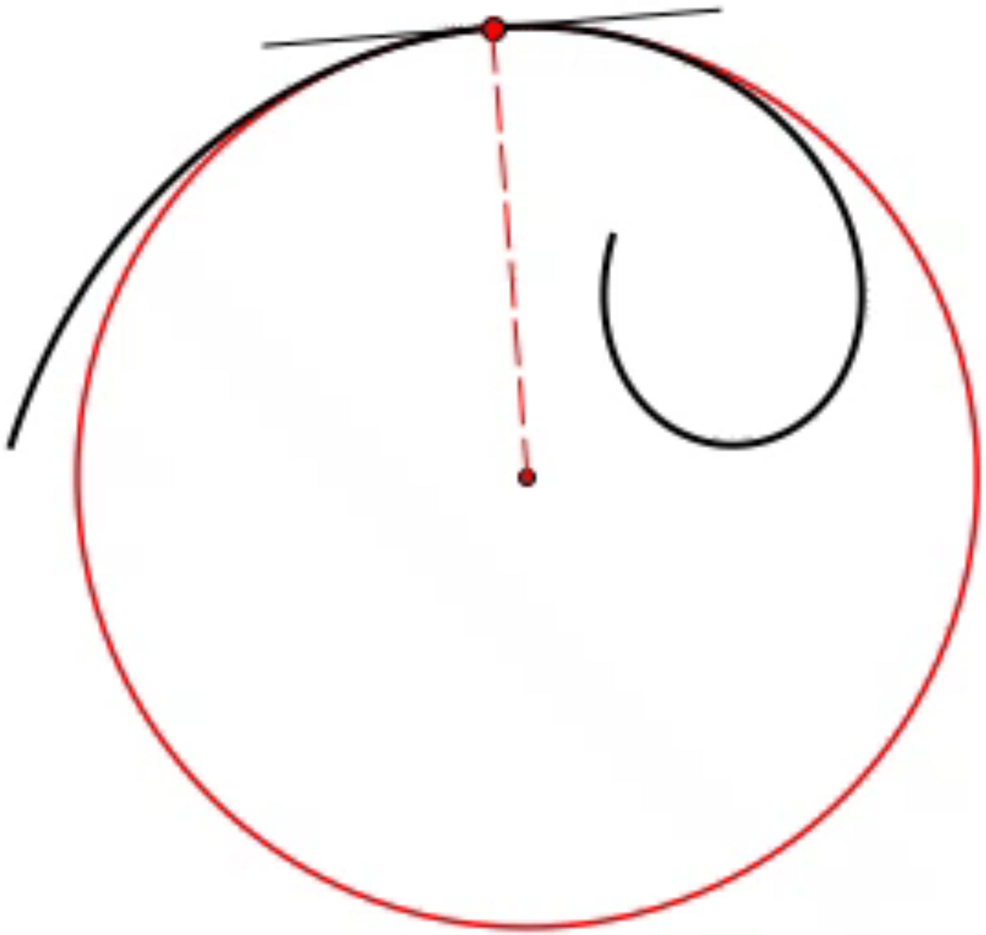




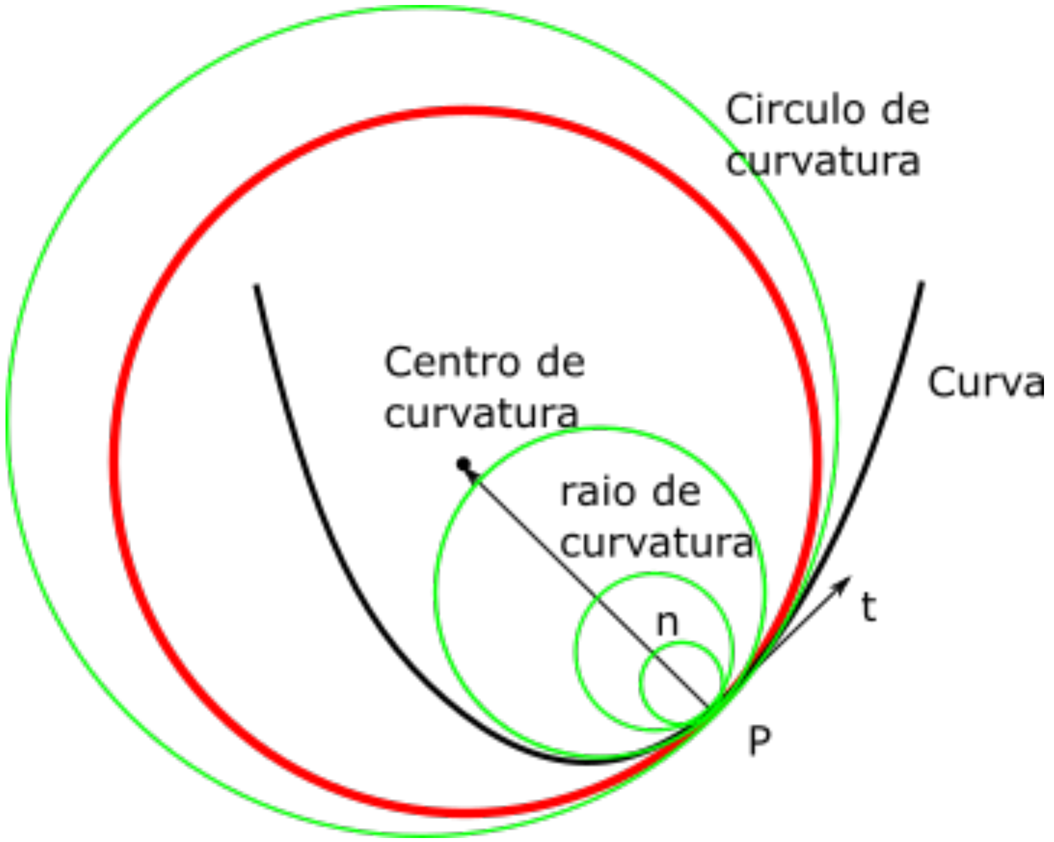


sinal: concavidade (plano)

Círculo Osculador



Existe um único círculo tangente a **c** que possui maior contato. O inverso do raio deste círculo (círculo osculador) é chamado de curvatura de **c**.



Euler foi que iniciou
para nós a curvatura
lá no século dezoito
nos trazendo belezura
Monge seu contemporâneo
a colocou numa aventura

Tal caminho que se fez
veio de uma aplicação
quando Monge quis falar
Sobre otimização
e surgiu a descoberta
com muita dedicação

Depois disso veio Gauss
Matemático genial
Fez surgir uma curvatura
E uma estudante sem igual
Que também fez geometria
Trazendo pra vida real

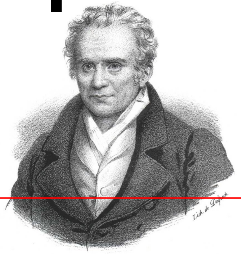
Seu nome Marie-sohpie
traz pra nós inspiração
pesquisadora e matemática
estudou com o coração
uma mulher arretada
que nos traz inspiração

Linha do tempo

1707  1783

Euler

Fundador da geometria

1746  1818

Monge

Análise e Geometria

1784  1873

Dupin

Discípulo de Monge

1777  1855

Gauss

Curvatura Gaussiana

1776  1831

Marie-Sophie Germain

Curvatura de Germain (média)

1767, Euler. Fundador da geometria diferencial das superfícies

Euler é considerado o fundador da Teoria da Curvatura Bidimensional, introduzindo o conceito de curvatura normal e de direções principais.

Leonhard Euler,
De solidis quorum superficiem in planum explicare licet,
Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 16, (1772), 3-34.

RECHERCHES SUR LA COURBURE DES SURFACES.

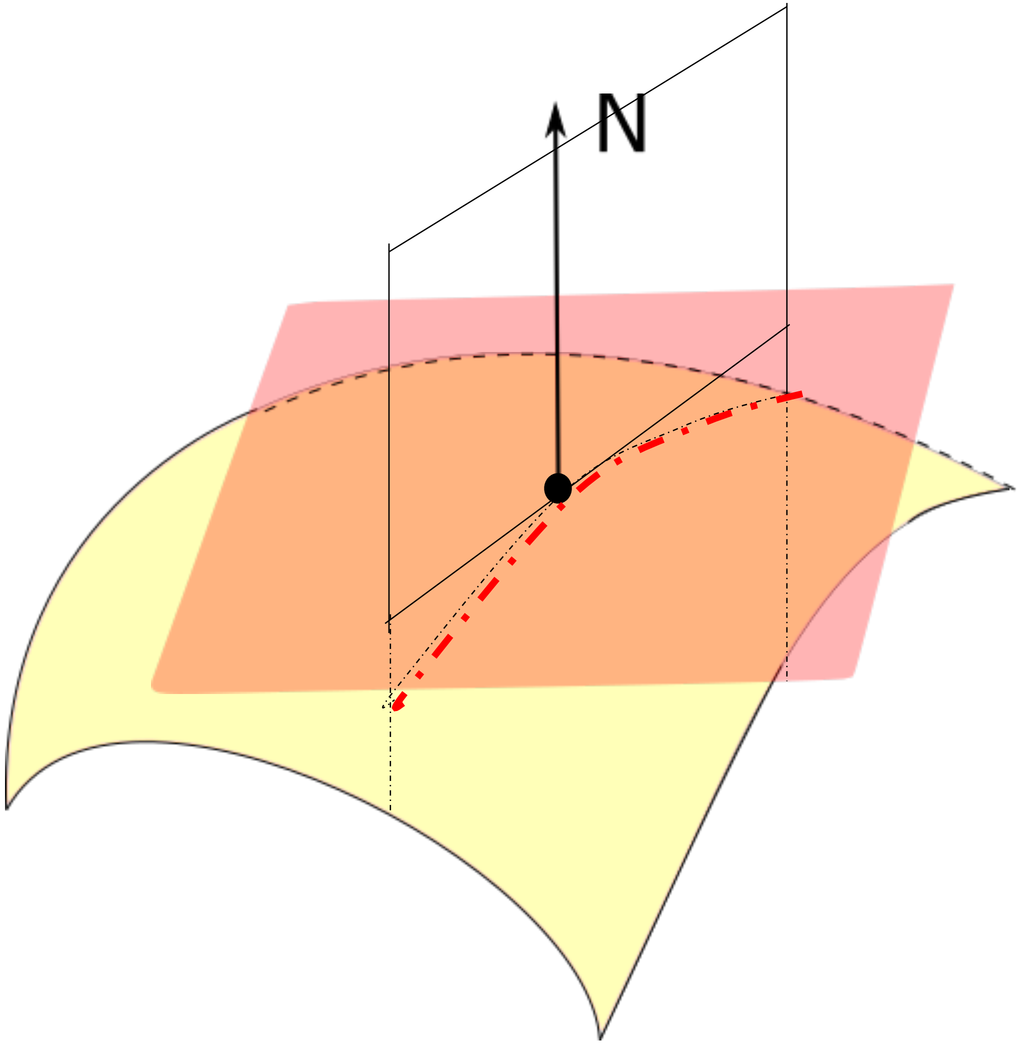
PAR M. EULER.

Pour connoitre la courbure des lignes courbes, la détermination du rayon oſculateur en fournit la plus juſte meſure, en nous préſentant pour chaque point de la courbe un cercle, dont la courbure eſt préciſément la même. Mais, quand on demande la courbure d'une ſurface, la queſtion eſt fort équivoque, & point du tout ſuſceptible d'une reponſe abſolue, comme dans le cas précédent. Il n'y a que les ſurfaces ſphériques dont on puiſſe meſurer la courbure, attendu que la courbure d'une ſphere eſt la même que celle de ſes grands cercles, & que ſon rayon en peut être regardé comme la juſte meſure. Mais pour les autres ſurfaces on n'en ſauroit même comparer la courbure avec celle d'une ſphere, comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raiſon en eſt évidente puisque, dans chaque point d'une ſurface, il peut y avoir une infinité de courbures différentes. On n'a qu'à conſidérer la ſurface d'un cylindre, où ſelon les directions paralleles à l'axe il n'y a aucune courbure, pendant que dans les ſections perpendiculaires à l'axe, qui ſont des cercles, la courbure eſt la même, & que toute autre ſection faite obliquement à l'axe donne une courbure particuliere. Il en eſt de même de toutes les autres ſurfaces, où il peut même arriver que dans un ſens la courbure ſoit convexe, & dans un autre concave, comme dans celles qui reſſemblent à une ſelle.

Donc la queſtion ſur la courbure des ſurfaces n'eſt pas ſuſceptible d'une réponſe ſimple, mais elle exige à la fois une infinité de détermi-

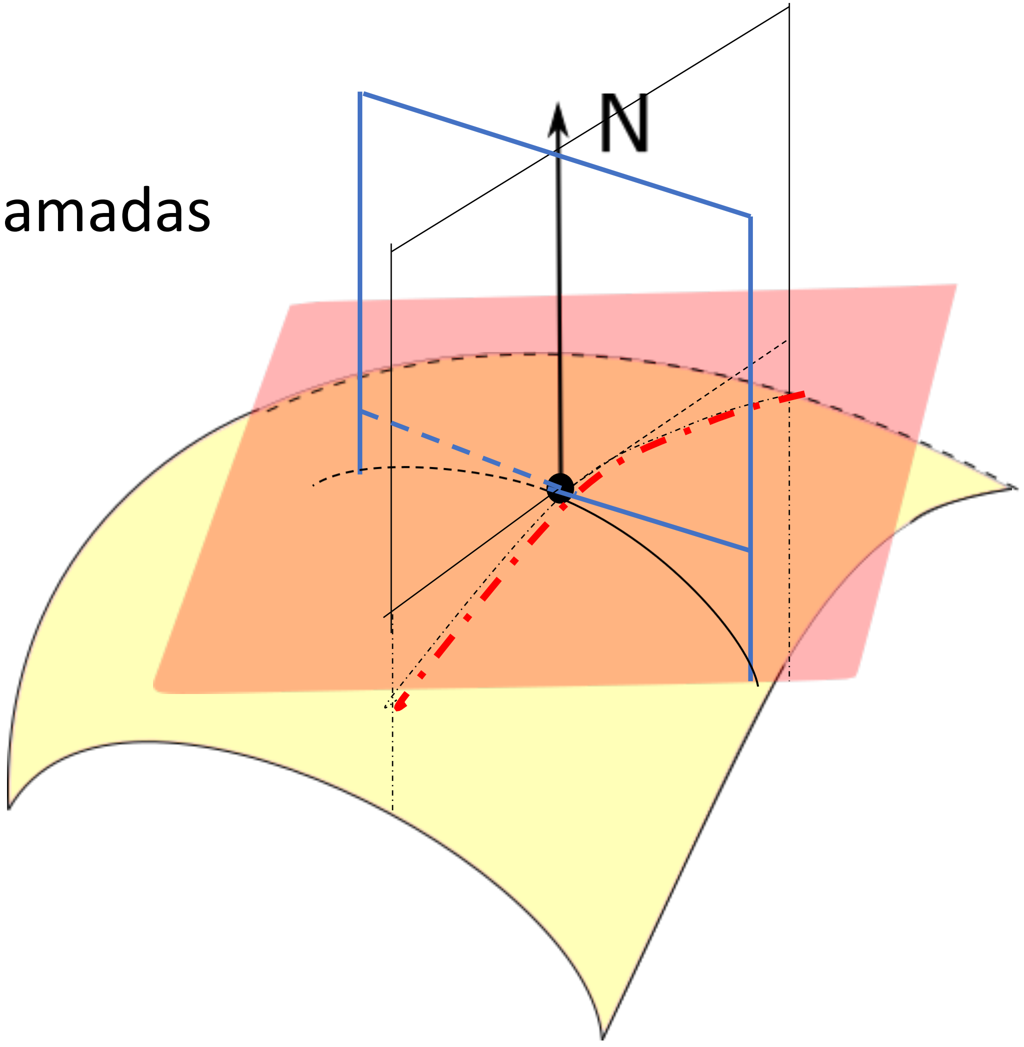
- Sua abordagem é a seguinte: Consideremos uma superfície, seu plano tangente em um ponto e a direção normal.

A superfície é então cortada por um plano que contém a direção normal e o corte obtido é observado, cuja curvatura pode ser avaliada no ponto considerado.

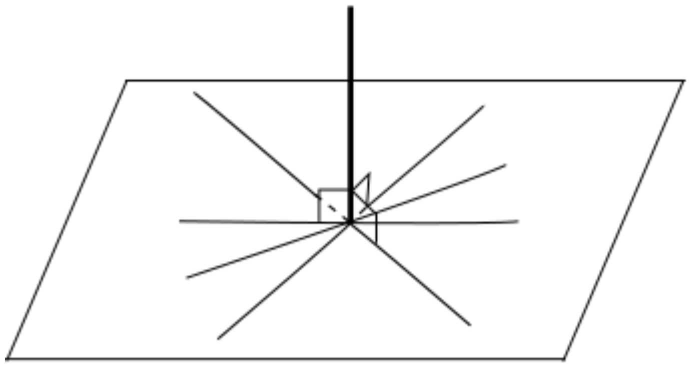


- A interseção da superfície com o plano que contém a normal N é chamada de seção normal. A curvatura desta curva é o que chamamos de curvatura normal.

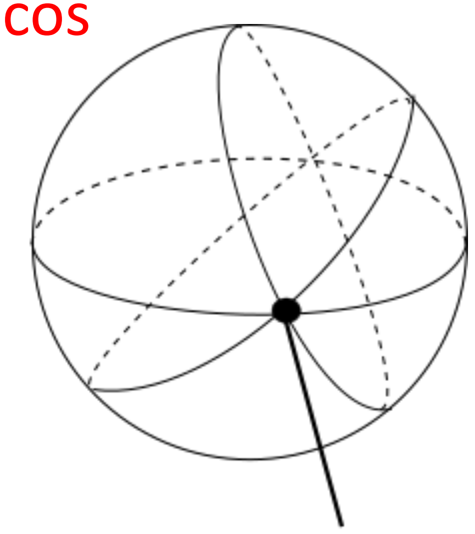
Euler mostrou que quando o plano gira em torno da direção normal, a curvatura normal (em geral) passa por um máximo e um mínimo, chamadas curvaturas principais.



Pontos Umbílicos



Plano



Esfera

Isso é praticamente tudo o que se sabia sobre a geometria das superfícies em 1767.

Curvatura Guassiana, Gauss (1827): $k_1 k_2$

Curvatura de Germain (Média): $\frac{k_1 + \ k_2}{2}$

(**Marie-Sophie Germain, 1821**)

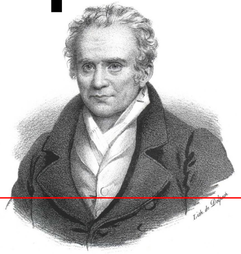
(Antoine-Auguste Le Blanc.)

Linha do tempo

1707 1783

Euler

Fundador da geometria



1746 1818

Monge

Análise e Geometria

1784 1873

Dupin

Discípulo de Monge

1777 1855

Gauss

Curvatura Gaussiana

1776 1831

Marie-Sophie Germain

Curvatura de Germain (média)

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DES DÉBLAIS ET DES REMBLAIS.

Par M. MONGE.

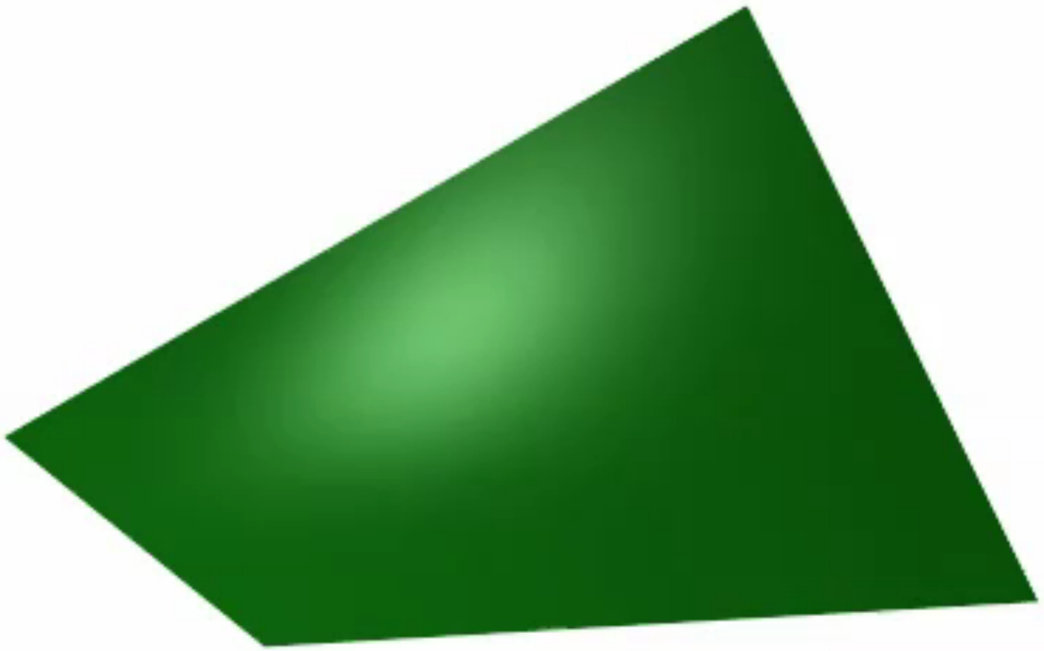
LORSQU'ON doit tranſporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit tranſporter, & le nom de *Remblai* à l'eſpace qu'elles doivent occuper après le tranſport.

Memória sobre a teoria de escavações (desaterro) e aterros

O problema de Monge consiste em minimizar o custo de transporte quando se desloca um monte de terra de uma escavação para um aterro.

O texto (das memórias de Monge) foi dividido em duas partes, dependendo se as escavações e os aterros são domínios em dimensão 2 ou 3.

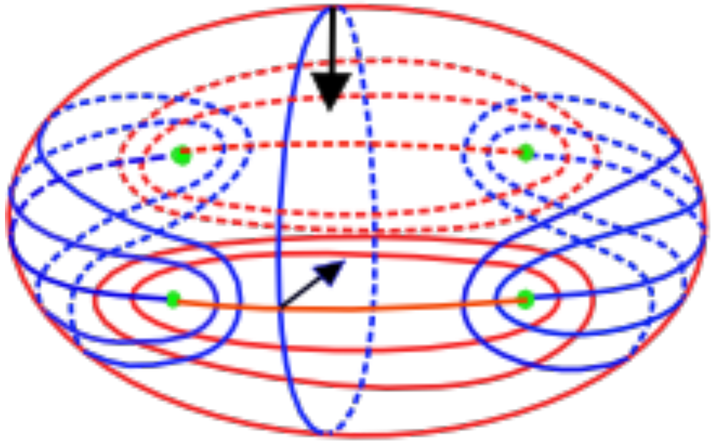
Monge não resolve o problema proposto, mas nos traz um novo olhar para estudo das curvaturas

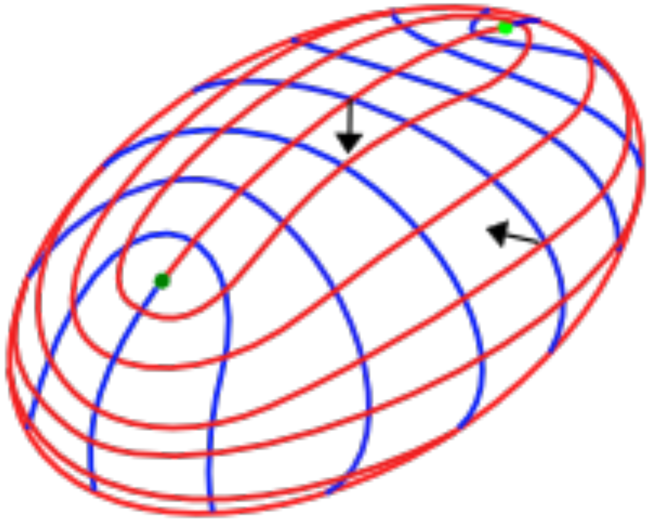


G. Monge (1796) - Linhas de Curvatura no Elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

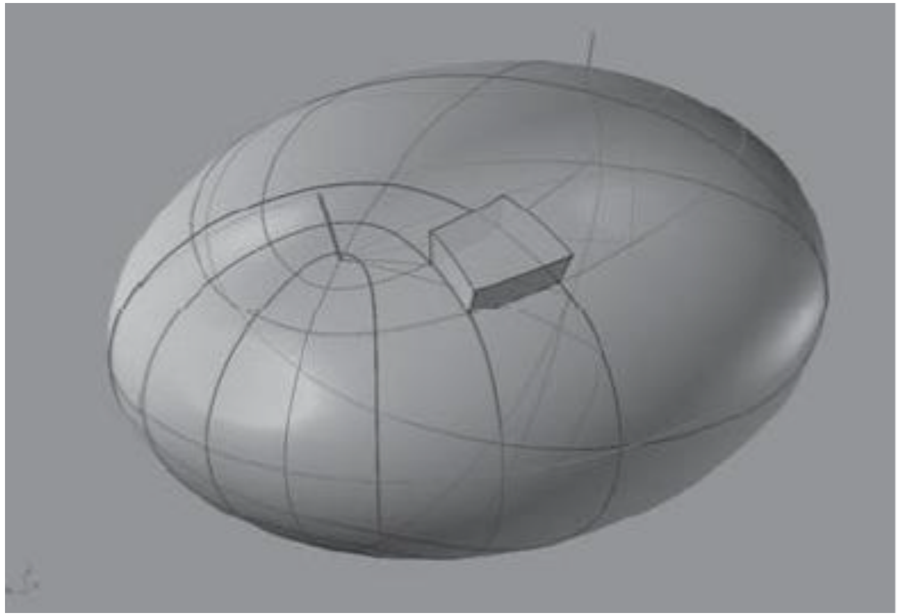
Coordenadas dos pontos umbílicos: $$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}\right)$$

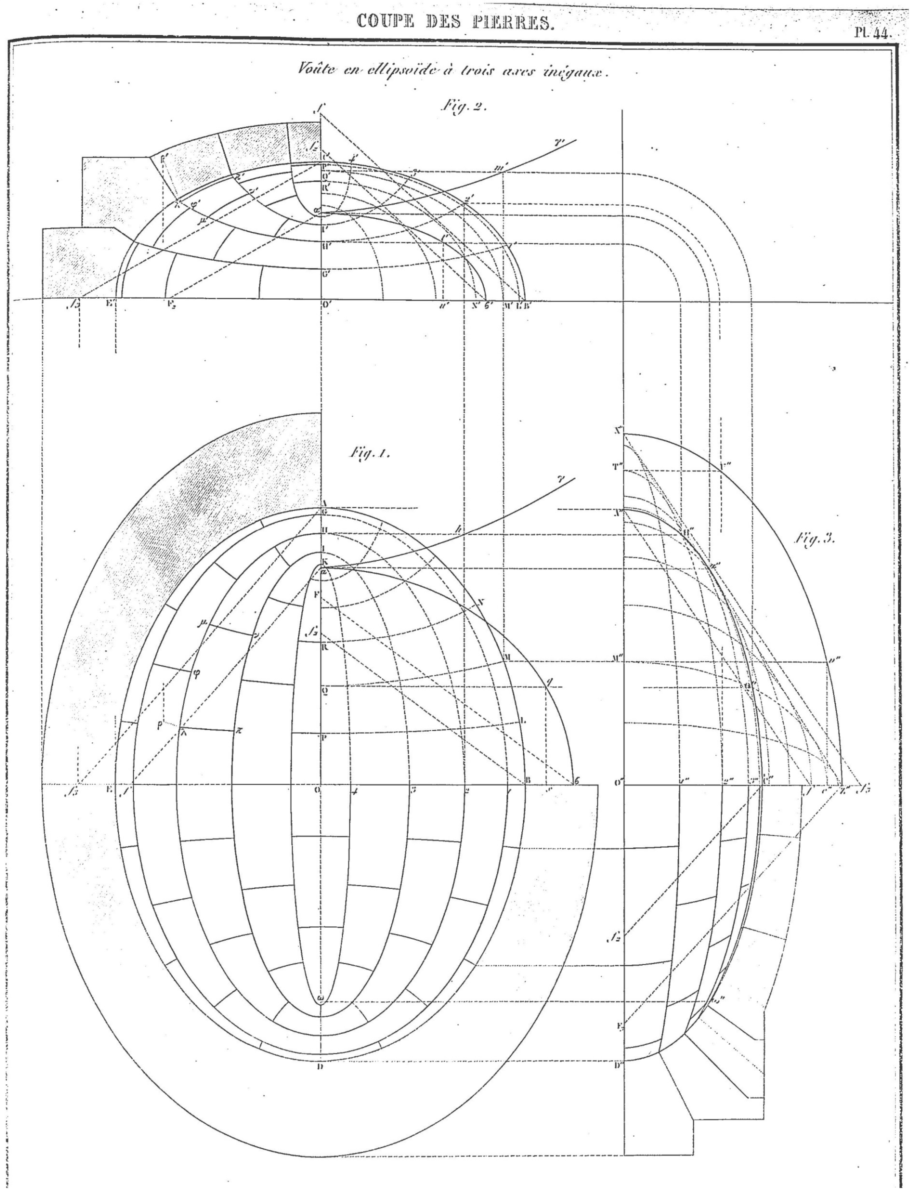




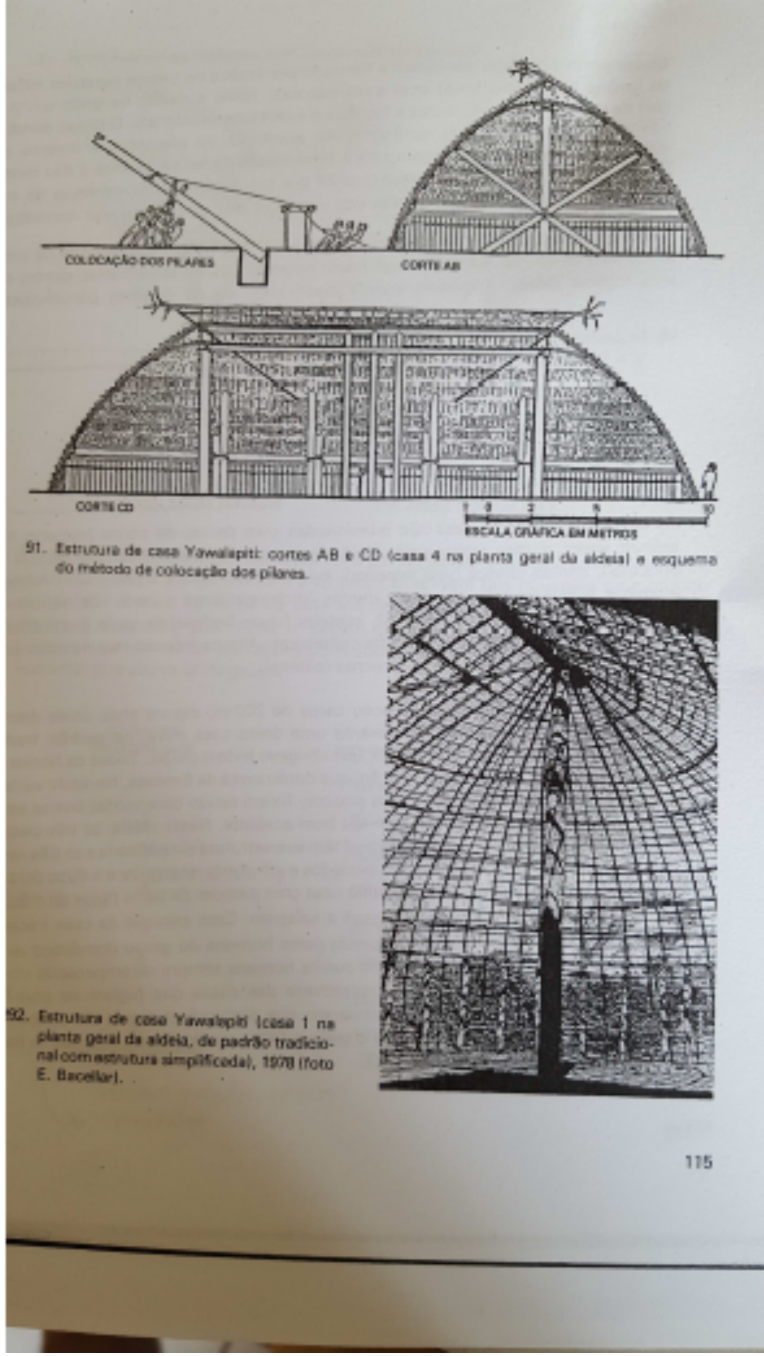
Monge, entitled Sur les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoide, published in Journal de l'Ecole Polytechnique., II, cah, 1796.

Monge propôs que a Assembleia Nacional se baseasse na ideia de cortes de pedras na direção das desenvolvíveis.. Aqui está uma planta lateral do século XIX que indica como isso deve ser feito (arquitetura)





Colocação dos caibros de sustentação das palhas para a cob
da maloca Yawalapiti (tribo da região Xingu – Mato Grosso)



91. Estrutura de casa Yawalapiti: cortes AB e CD (casa 4 na planta geral da aldeia) e esquema do método de colocação dos pilares.

92. Estrutura de casa Yawalapiti (casa 1 na planta geral da aldeia, de padrão tradicional com estrutura simplificada), 1978 (foto E. Bacellar).

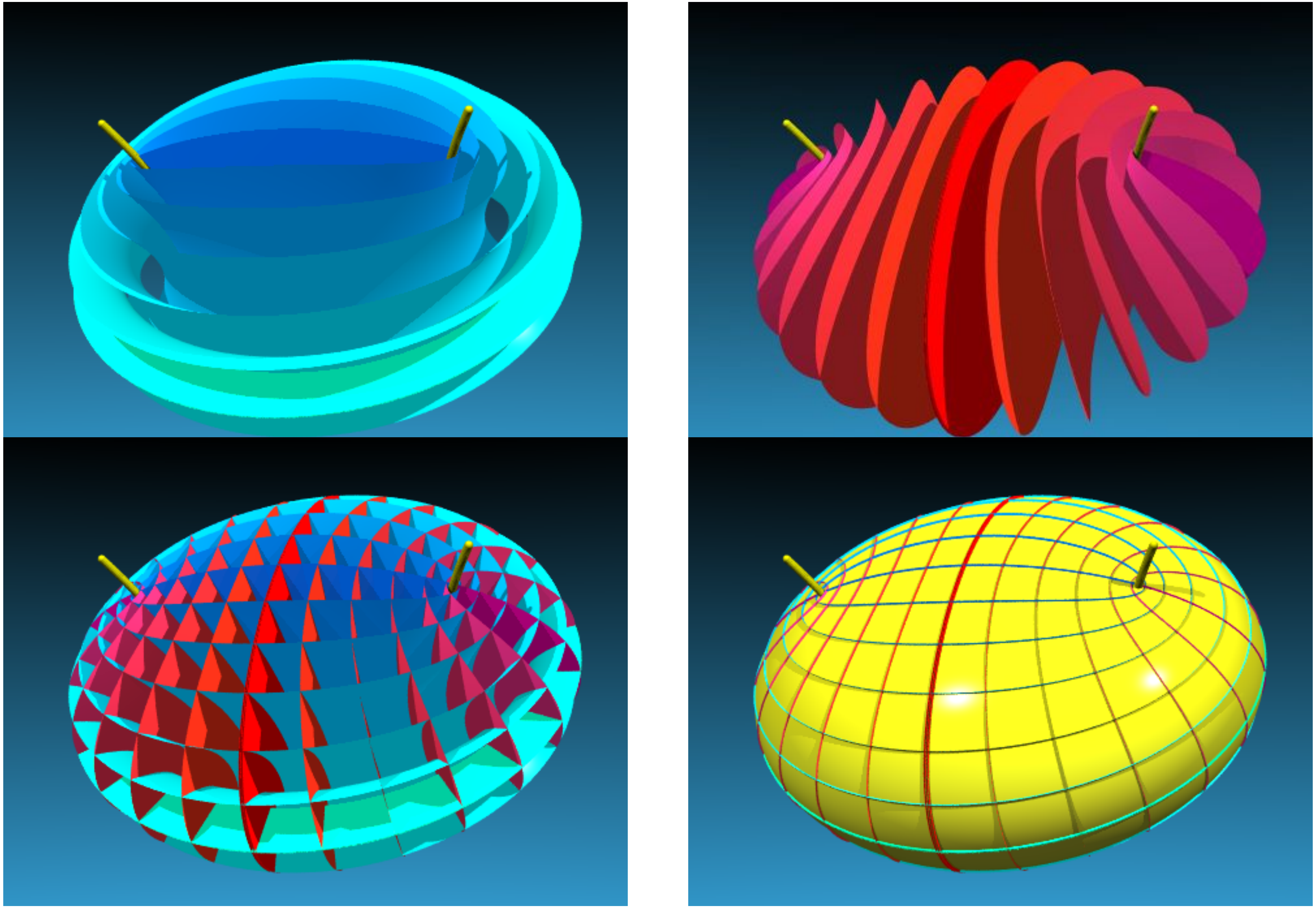
115

Análise Geométrica de Cúpulas e Estruturas de Concreto Armado. (V colóquio de matemática da região Centro-Oeste), por **Neves Spindola, Marina de Miranda Martins, Deyvisson Ribeiro Pires, Manoele Ribeiro Santos, Patrick Luan Oliveira de Jesus**

Grande Teatro Nacional - casa de ópera em Pequim. (Inaugurado em 2007)

- Dupin [1815], explicou as linhas de curvatura no elipsóide em termos de “sistemas ortogonais triplos”, que segundo Etienne Ghys: “uma jóia geométrica.”

Teorema de Dupin: Famílias de superfícies triplamente ortogonais se intersectam ao longo de linhas de curvatura.



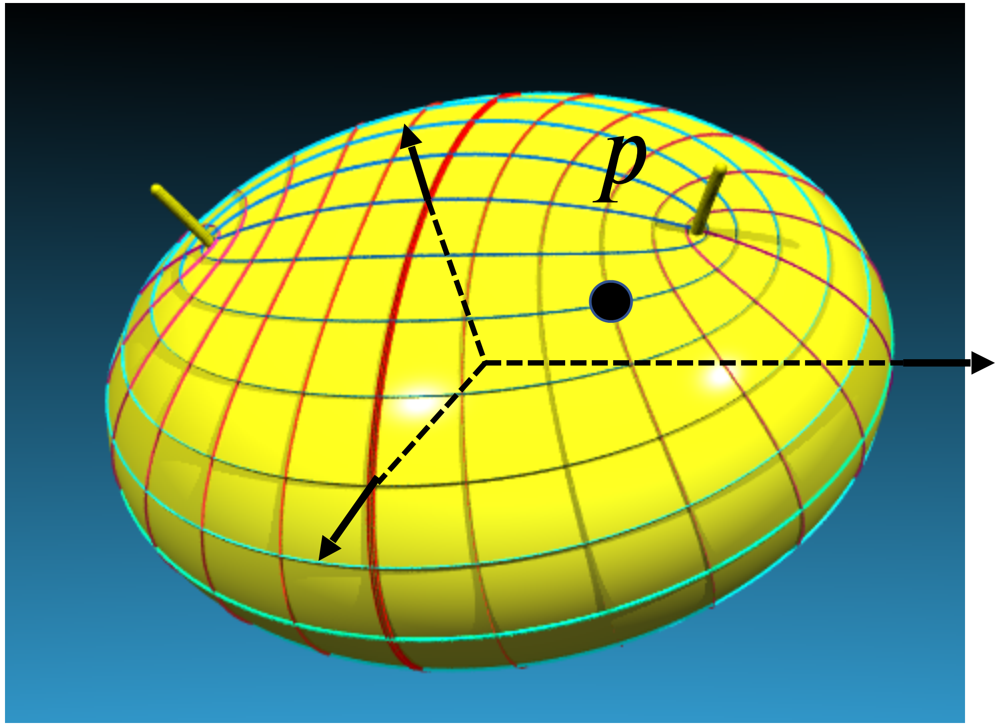
Suponhamos $a > b > c > 0.$

Para cada tripla (c_1, c_2, c_3) em $(-\infty, c^2) \times (c^2, b^2) \times (b^2, a^2)$ existe um único ponto $p = (x, y, z) = G(c_1, c_2, c_3)$ no octante positive que é a interseção das superficies quádricas $E(c_1)$, $H_1(c_2)$, $H_2(c_3)$.

$$E(c_1): \frac{x^2}{a^2 - c_1} + \frac{y^2}{b^2 - c_1} + \frac{z^2}{c^2 - c_1} = 1$$

$$H_1(c_2): \frac{x^2}{a^2 - c_2} + \frac{y^2}{b^2 - c_2} + \frac{z^2}{c^2 - c_2} = 1$$

$$H_2(c_3): \frac{x^2}{a^2 - c_3} + \frac{y^2}{b^2 - c_3} + \frac{z^2}{c^2 - c_3} = 1$$



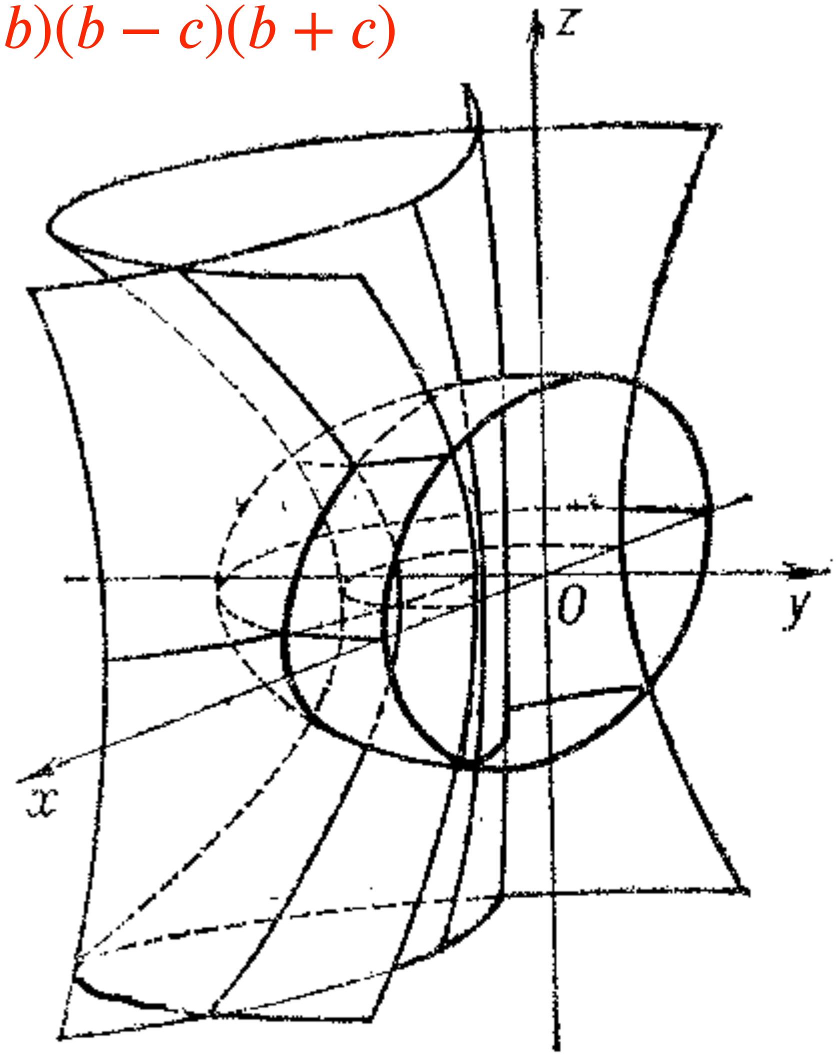
$$G\left(c_1, c_2, c_3\right) = (x, y, z) \quad \text{onde}$$

$$x^2 = \frac{\left(a^2 - c_3\right)\left(a^2 - c_2\right)\left(a^2 - c_1\right)}{(a-c)(a+c)(a-b)(a+b)} \qquad y^2 = \frac{\left(b^2 - c_3\right)\left(b^2 - c_2\right)\left(b^2 - c_1\right)}{(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)}$$

$$z^2 = \frac{\left(c^2 - c_3\right)\left(c^2 - c_2\right)\left(c^2 - c_1\right)}{(b-c)(b+c)(a-c)(a+c)}$$

G é conhecido como Sistema de coordenadas Elipsoidal no octante positivo, o que significa que as quádricas são definidas pelos níveis das funções coordenadas

$$G^{-1}(x, y, z) = \left(h_1,\ h_2,\ h_3\right).$$



Por exemplo, podemos obter a parametrização do elisoide de Monge fazendo $c_1 = 0;\ c_2 = u; c_3 = v$:

$$x^2 = \frac{\left(a^2 - c_3\right)\left(a^2 - c_2\right)\left(a^2 - c_1\right)}{(a-c)(a+c)(a-b)(a+b)} \qquad y^2 = \frac{\left(b^2 - c_3\right)\left(b^2 - c_2\right)\left(b^2 - c_1\right)}{(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)}$$

$$y^2 = \frac{\left(c^2 - c_3\right)\left(c^2 - c_2\right)\left(c^2 - c_1\right)}{(b-c)(b+c)(a-c)(a+c)}$$

Elipsóide: $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$

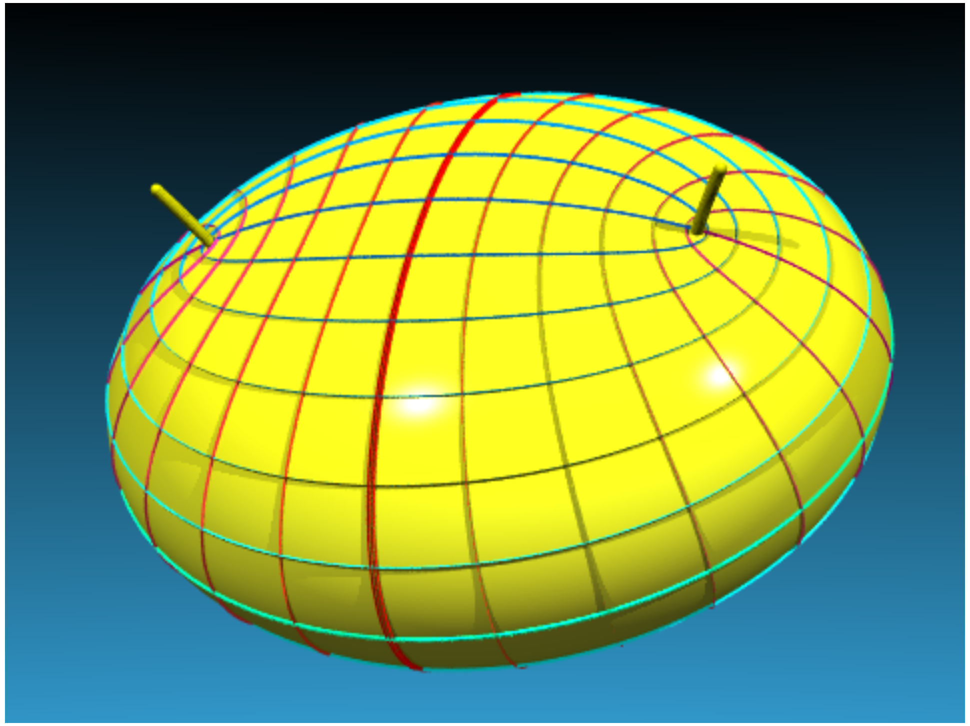
$$x(u,v) = \sqrt{\frac{a^2\left(-u+a^2\right)\left(-v+a^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(-c^2+a^2\right)}} \qquad y(u,v) = \sqrt{\frac{b^2\left(-u+b^2\right)\left(-v+b^2\right)}{\left(b^2-a^2\right)\left(b^2-c^2\right)}}$$

$$z(u,v) = \sqrt{\frac{a^2\left(-u+a^2\right)\left(-v+a^2\right)}{\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}}$$

Na parametrização $\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$,

$$x(u,v) = \sqrt{\frac{a^2\left(-u+a^2\right)\left(-v+a^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(-c^2+a^2\right)}} \qquad y(u,v) = \sqrt{\frac{b^2\left(-u+b^2\right)\left(-v+b^2\right)}{\left(b^2-a^2\right)\left(b^2-c^2\right)}}$$

$$z(u,v) = \sqrt{\frac{a^2\left(-u+a^2\right)\left(-v+a^2\right)}{\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}}$$



As linhas de curvatura são as curvas coordenadas e os pontos umbílicos são:

$$(\pm\sqrt{\frac{a^2\left(-b^2+a^2\right)}{(-c\hat{\ }2+a\hat{\ }2))}}, 0, \sqrt{\frac{c^2\left(-b^2+c^2\right)}{(c^2-a\hat{\ }2))}}),$$

Uma das maiores dificuldades em persuadir uma mulher a tornar-se matemática é a falta de exemplos: a Matemática é apresentada aos estudantes como uma sequência de proezas conseguidas quase exclusivamente por homens e é necessária muita confiança para uma jovem estudante com talento se imaginar a fazer contribuições significativas

GAZETA DE MATEMÁTICA
Janeiro 2004 - nº 146

A Vida e o Trabalho de Sophie Germain

Natascha Hall, Mary Jones e Gareth Jones
Mathematics Department, University of Southampton, United Kingdom

- “Não deixe ninguém roubar sua imaginação, sua criatividade ou sua curiosidade. É o seu lugar no mundo; é a sua vida. Vá em frente e faça tudo o que puder com ele, e transforme-o na vida que você deseja viver.” - Mae Jemison, primeira astronauta afro-americana no espaço.

Obrigada !!