31ª Olimpíada Campinense de Matemática

Professor José Vieira Alves

www.ufcg.edu.br/~ocm

Prova do Nível 2

1ª Parte - Questões Objetivas - Gabarito

1) D, 2) D, 3) E, 4) B, 5) C, 6) D, 7) B, 8) C, 9) C, 10) C

2ª Parte - Questões Discursivas - Gabarito

1. Um computador tem duas teclas: a tecla X subtrai 2 do número que está no visor e a tecla Y divide o número que está no visor por 2 (operações feitas no conjunto dos números inteiros não-negativos). O objetivo de certo jogo é, usando apenas essas duas teclas, obter o número 0 no visor.

   (a) Mostre uma sequência de teclas X e Y que dá a vitória se o número no visor for 32. Essa é a única sequência possível?

   (b) Se $XXYYYX$ é a sequência ganhadora para um certo número, a sequência $YYYXXX$ também é para esse mesmo número?

   (c) Que números não possuem sequências ganhadoras? Justifique.

   Resposta: (15 pontos)(a) Uma sequência ganhadora para 32 é YYYYX, pois $32 \div 2 = 16$, $16 \div 2 = 8$, $8 \div 2 = 4$, $4 \div 2 = 2$ e $2 - 2 = 0$. É claro que ela não é a única. Várias outras sequências ganhadoras podem ser formadas, como YYYXX e

$$\underbrace{XXXXXXXXXXXXXXXX}_{16}.$$

   (15 pontos)(b) A ordem em que acionamos as teclas faz diferença. O número cuja sequências ganhadora é XXYYYX pode ser encontrado fazendo as operações no sentido inverso, XYYYXX:

$$0 \overset{X}{\leftrightarrow} 2 \overset{Y}{\leftrightarrow} 4 \overset{Y}{\leftrightarrow} 8 \overset{Y}{\leftrightarrow} 16 \overset{X}{\leftrightarrow} 18 \overset{X}{\leftrightarrow} 20.$$

   Já a sequência YYYXXX, origina, pelo mesmo processo, o número 48:

$$0 \overset{X}{\leftrightarrow} 2 \overset{X}{\leftrightarrow} 4 \overset{X}{\leftrightarrow} 6 \overset{Y}{\leftrightarrow} 12 \overset{Y}{\leftrightarrow} 24 \overset{Y}{\leftrightarrow} 48.$$

   (10 pontos)(c) Se de um número ímpar subtraímos 2, obtemos um outro ímpar. Além disso, não podemos dividi-lo por 2; logo, não haverá modo de alcançar o 0. Concluímos, portanto, que nenhum número ímpar admite sequências ganhadoras.

2. Um homem reparte certa quantidade de dinheiro igualmente entre seus filhos e sobrinhos. Se não tivesse incluído seus três sobrinhos na divisão, cada filho teria recebido \$50 a mais. Por outro lado, se tivesse sua neta no rateio, cada filho e sobrinho teria recebido \$10 a menos. Determine quantos filhos tem o homem e quanto dinheiro ele repartiu.

   Resposta: Seja x o número de filhos e y o total de dinheiro dividido. Fazendo a divisão entre os sobrinhos e filhos, cada um recebeu $\frac{y}{x+3}$. Se não tivesse incluído os sobrinhos, cada filho receberia \$50 a mais, isto é $\frac{y}{x+3} + 50$, mas isso teria que ser igual ao total do dinheiro dividido pelo número de filhos, que é $\frac{y}{x}$. Por outro lado, se a neta tivesse entrado na divisão, teríamos que cada um receberia \$10 a menos, ou seja $\frac{y}{x+3} - 10$, o que seria igual a $\frac{y}{x+4}$. Temos então o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{y}{x+3} + 50 = \frac{y}{x} \\ \frac{y}{x+3} - 10 = \frac{y}{x+4} \end{cases}$$

   Resolvendo, obtemos que: $x = 6$ e $y = 900$. (20 pontos para chegar ao sistema e 20 pontos para resolver o sistema.)

3. José e João decidiram fazer um dado atípico. Ao invés de enumerar as faces de um 1 à 6 como é feito usualmente eles numeraram as mesmas somente com números primos naturais e distintos. Após numerar as faces eles lançaram o dado uma vez e observaram que a soma da face voltada para cima com a sua face oposta era 32. Sabendo-se que a soma de todas as faces é igual a 123 e que haviam primos gêmeos entre os seis números distribuídos para numerar os dados, determine todos os conjuntos possíveis de 6 números que podem ter sido utilizados para montar esse dado.

   Obs: Dois primos são ditos gêmeos quando a diferença entre os mesmos é igual a 2.

   Resposta: Utilizando o método do Crivo de Eratóstenes temos que os números à seguir são números primos menores que 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

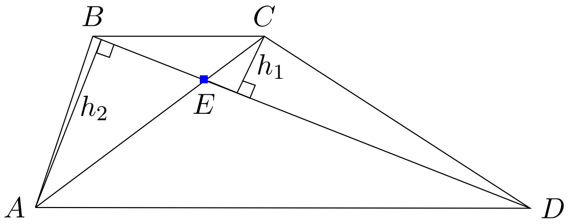
   Como a soma dos seis números resulta em um número ímpar uma das faces obrigatoriamente é o 2.(9 pontos para fazer essa identificação!)

   Uma vez que ao lançarem os dados José e João observaram que a soma das faces opostas eram 32, sabendo que os números eram todos primos e distintos há duas possibilidades: Ou esses dois números eram 3 e 29 ou eram 13 e 19. (9 pontos para fazer essa identificação!)

   Conjuntos soluções possíveis {2,3,5,11,29,73}, {2,3,5,13,29,71}, {2,3,5,17,29,67}, {2,3,5,23,29,61}, {2,3,5,29,31,53}, {2,3,5,29,37,47}, {2,3,5,29,41,43}, {2,3,5,29,31,53}, {2,3,7,29,31,51}, {2,3,11,29,31,47}, {2,3,17,29,31,41}, {2,3,17,19,29,53}, {2,5,11,13,19,73}, {2,5,13,19,41,43}, {2,5,13,17,19,67}, {2,7,11,13,19,71}, {2,11,13,19,37,41}, {2,11,13,17,19,61}, {2,11,13,19,31,47}, {2,11,13,17,19,61}, {2,13,17,19,29,43}, {2,13,17,19,31,41}. (1 ponto para conjunto solução identificado!)

4. Considere um trapézio $ABCD$ de bases BC e AD. Seja E a interseção das diagonais do trapézio. Se $DE = 3BE$ e Área(ABE)=Área(CED)= 9, calcule a área do trapézio.

   Resposta: Conforme descrito, podemos observar a figura,



   Note que, sendo h_1 e h_2 as alturas dos triângulos BCD e ABD, ambas relativas à base BD, respectivamente, temos:

   (i) Área(BCE)= $\frac{1}{2}\overline{BE}h_1$ e Área(CDE)= $\frac{1}{2}\overline{DE}h_1 = 9$;

   (ii) Área(ABE)= $\frac{1}{2}\overline{BE}h_2$ e Área(ADE)= $\frac{1}{2}\overline{DE}h_2 = 9$. (10 pontos)

   De (i), temos
$$\frac{\text{Área}(BCE)}{\text{Área}(CDE)} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BE}h_1}{\frac{1}{2}\overline{DE}h_1} = \frac{\overline{BE}}{3\overline{BE}} = \frac{1}{3}.$$

   Logo, Área(BCE)= $\frac{\text{Área}(CDE)}{3} = \frac{9}{3} = 3$. (10 pontos)

   De (ii), temos
$$\frac{\text{Área}(ADE)}{\text{Área}(ABE)} = \frac{\frac{1}{2}\overline{DE}h_2}{\frac{1}{2}\overline{BE}h_2} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{3\overline{BE}}{\overline{BE}} = 3.$$

   Logo, Área(ADE)= 3Área$(ABE) = 3 \times 9 = 27$. (10 pontos)

   Portanto, Área$(ABCD)$=Área(ABE)+Área(BCE)+Área(CDE)+Área(ADE)=9+3+9+27=48. (10 pontos)

5. Se x e y são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, determine o valor de xy.

   Resposta: Dado que,

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+y^3+3xy(x+y) = 5(x+y)+3xy(x+y) = (5+3xy)(x+y)$$

   e
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4 + 2xy, \text{(10 pontos)}$$

   como $x + y \neq 0$, temos

$$\frac{(x + y)^3}{x + y} = \frac{(5 + 3xy)(x + y)}{x + y} \quad \Rightarrow \quad (x + y)^2 = 5 + 3xy \quad \Rightarrow \quad 4 + 2xy = 5 + 3xy$$

$$\Rightarrow 2xy - 3xy = 5 - 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad -xy = 1 \quad \Rightarrow \quad xy = -1. \quad \text{(30 pontos)}$$