ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

# APLICATIVO GRAPHMATICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DERIVADAS: INTERPRETANDO GRÁFICOS

**Sérgio Cândido da Silva[1] - sergio.csilva@professor.educacao.pe.gov.br**

[1]Escola Tomé Francisco da Silva, Quixaba, PB, Brasil

***Resumo:*** *Neste trabalho buscamos apresentar uma alternativa que possa complementar a aula de Cálculo Diferencial nos cursos de graduação de Matemática de forma a tornar a aprendizagem mais completa. A nossa proposta de aula traz como base a dificuldade discente no entendimento do significado da derivada, trazendo consigo o aplicativo Graphmatica como uma forma de ampliar a compreensão dos gráficos. Ao integrar a tecnologia ao processo de ensino, busca-se tornar os conceitos de taxa de variação e inclinação da reta tangente mais acessíveis e visualmente intuitivos. O uso do Graphmatica permite aos licenciandos dos cursos de Matemática explorarem interativamente as mudanças nos gráficos das funções e suas respectivas derivadas, promovendo uma aprendizagem significativa. Dessa forma, espera-se contribuir para a superação de obstáculos conceituais, além de incentivar o uso de recursos tecnológicos como ferramentas didáticas no futuro exercício da docência.*
***Palavras-chave***:*Cálculo diferencial; Derivadas; Graphmatica; Tecnologia; Educação Matemática*

## 1. Introdução

Desde o início dos tempos, a sociedade em que vivemos passa por uma constante mudança, e nas últimas décadas, com o desenvolvimento das tecnologias, estas transformações se mostram em um ritmo cada vez mais acelerado. Em todas as áreas da nossa vida, o avanço tecnológico vem revolucionando o modo como tudo é feito e até pensado. No mundo atual, fica cada vez mais evidenciado que a forma antiga de realizar atividades se tornou obsoleta. Na área da educação não é diferente, principalmente no âmbito matemático. Para D'Ambrósio:

> "Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível"(D'AMBROSIO, 1996, p.13).

As tecnologias mostram ter uma enorme potencialidade no auxílio do ensino da Matemática. Nesse sentido, o aplicativo Graphmatica pode ser usado como uma ferramenta de representação gráfica de funções de uma variável muito poderosa por dispor de uma grande quantidade de funções numéricas e de cálculo sendo possível a representação de várias funções simultâneas em sua interface. O Graphmatica é capaz de fornecer soluções para equações diferenciais, além de calcular derivadas, integrais, máximos, mínimos e zeros das funções. Criado em 1997, pelo bacharel em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação, Keith Hertzer. Nele podemos representar com facilidade funções como logarítmicas, trabalhar Trigonometria com os ângulos, em graus ou radianos, entre outras tarefas. Além disso, as funções podem ser representadas no plano cartesiano ou em coordenadas polares, facilitando assim a construção de figuras que envolvam funções trigonométricas.

Dessa forma, tal recurso pode ser uma alternativa significativa no ensino do Cálculo Diferencial para ajudar a diminuir a grande dificuldade apresentada pelos discentes dessa disciplina. Sobre o déficit apresentado pelos alunos Silva (2024) comenta que: "a pouca familiaridade da grande parte dos estudantes com esse conteúdo causa uma dificuldade elevada com a disciplina, ocasionando déficit de aprendizado e chegando até, em muitos casos, a reprovação"(SILVA, 2024, p. 2). O autor reitera: "a preocupação com o baixo rendimento de grande parte dos alunos que cursam esta disciplina aumenta ainda mais. Sendo um dos principais responsáveis pelos altos índices de não aprovação e culpado pela desistência de vários alunos da graduação de Matemática"(SILVA, 2024, p. 2).

Assim sendo, justificamos a relevância de nossa pesquisa considerando a grande dificuldade que os alunos das disciplinas de Cálculo Diferencial apresentam. O objetivo desse trabalho é apresentar uma alternativa que possa

ISSN 2764-2631


ser implementada nas aulas de Cálculo Diferencial e possa proporcionar um entendimento mais profundo do conteúdo aos discentes do curso de Matemática, minimizando a defasagem apresentada por eles e proporcionando uma aprendizagem significativa.

Esse tipo de aprendizagem, proposta por David Ausubel, acontece quando o novo conhecimento é incorporado à estrutura cognitiva do aluno, ou seja, quando o estudante relaciona as novas informações com conceitos que já possui. Diferente da aprendizagem mecânica, em que há mera memorização, a aprendizagem significativa promove a compreensão, o raciocínio e a capacidade de aplicar o que foi aprendido em diferentes contextos.

## 2. Metodologia

Este trabalho possui natureza qualitativa, com caráter exploratório, que visa a construção de uma proposta didática como alternativa complementar para o ensino de derivadas em cursos de Licenciatura em Matemática. A proposta tem como objetivo contribuir para a superação das dificuldades conceituais enfrentadas por alunos no processo de compreensão do conceito de derivada, a partir da integração de recursos tecnológicos ao ensino, mais especificamente por meio do uso do software Graphmatica.

A metodologia consistiu na elaboração de um roteiro de aula teórico-metodológica, fundamentado nos pressupostos da aprendizagem significativa que visa proporcionar aos alunos uma abordagem visual e interativa do conceito de derivada, favorecendo a compreensão da taxa de variação e do comportamento que o gráfico de uma derivada apresenta em relação a função primitiva.

## 3. Resultado e discussão

Nesta seção apresentaremos algumas definições acerca dos conceitos relacionados as derivadas a fim propiciar uma base teórica inicial que será utilizada para a proposta de aula. Além disso, proporemos alguns exemplos práticos que podem ser trabalhados em sala de aula.

### 3.1 DERIVADAS

Desde a Grécia antiga os matemáticos já estudavam o conceito de reta tangente às curvas, principalmente às cônicas, porém para estudá-las se utilizavam unicamente de conceitos geométricos e não algébricos.

O estudo algébrico de derivadas só se deu após a criação do sistema de coordenadas cartesianas pelo matemático René Descartes, mas não foi ele o principal propulsor do tema. O cálculo teve como principais nomes dois grandes estudiosos da época: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Ambos realizavam trabalhos paralelos. Newton, mais voltado para área da Física, estudava o deslocamento de um ponto no plano cartesiano em um determinado espaço de tempo, assim seria possível determinar a taxa de variação, ou seja, a derivada da função chamada por ele de fluxo. Já Leibniz analisava a derivada como a razão da diferença entre as duas coordenadas, isto é, $dy/dx$.

As definições do cálculo que conhecemos hoje tiveram início com Leibniz, juntamente com as principais notações adotadas. Entretanto a contribuição de Newton para o cálculo de forma alguma é menos importante. Basicamente a derivada pode ser entendida como a taxa de variação do deslocamento de um ponto em um determinado espaço de tempo, em que aplicando-se em um ponto específico determinamos o coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto.

Definimos derivada de uma função $y = f(x)$ como sendo a taxa de variação instantânea de $y$ em relação a $x$. Geometricamente, a derivada de uma função em um determinado ponto representa o coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto, ou seja, o valor da tangente do ângulo formado entre o eixo das abcissas e a reta que tangencia a curva no ponto.

A derivada de uma função $f$ em relação a variável $x$ é a função $f'$, se o limite existir, diz-se que $f$ é derivável em $x$ e seu valor é dado por:

$$f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

### 3.2 APLICAÇÃO DA DERIVADA NO ESBOÇO DO GRÁFICO

No ensino mais básico aprendemos a esboçar gráficos encontrando pontos, ou seja, atribuímos valores para $x$ na função e encontramos os valores correspondentes para $y = f(x)$. Este método é eficiente para funções simples como retas e curvas com pouca variação, mas ao nos depararmos com funções mais complexas este método pode se tornar muito trabalhoso e quase inviável de ser adotado. Para esses casos usamos de algumas estratégias, como procurar por pontos que possuam características diferentes dos demais, ou seja, pontos críticos. Após identificar esses pontos e classificá-los, identificamos em quais intervalos a função é crescente ou decrescente e sua concavidade. Com isso, podemos definir o comportamento do gráfico de qualquer função.

Ainda assim, é notória a dificuldade dos alunos em interpretar geometricamente os cálculos algébricos que realizam para este esboço. No sentido de amenizar essa dificuldade, em associar estas duas partes do processo, os aplicativos mostram um grande potencial quando trazidos de forma correta para sala de aula, por facilitarem a visualização, além de despertar o interesse do aluno, pois com o uso desse tipo de tecnologia a aula pode se tornar bem mais dinâmica, prazerosa e até divertida.

O Graphmatica é um ótimo aplicativo para a abordagem das derivadas, pois possui uma interface bastante simples de se trabalhar, que não exige um conhecimento muito aprofundado em informática para o seu manuseio. Outra característica desse aplicativo é a possibilidade de apresentar vários gráficos simultaneamente. Associado com a ferramenta de derivação da função, podemos plotar ao mesmo tempo o gráfico da função original e da função derivada, possibilitando a comparação e a visualização do que ocorre em cada momento de sua construção. Uma alternativa pode ser trabalhar os cálculos algébricos concomitantemente com o uso do aplicativo, isso pode facilitar a visualização geométrica do que está sendo realizado em cada etapa do processo propiciando, assim, uma aprendizagem mais completa.

Sob o aspecto teórico, Thomas (2009), traz acerca do sinal da primeira derivada, o corolário 3: "Suponha que $f$ seja contínua em $[a, b]$, e derivável em $(a, b)$, se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então $f$ é estritamente crescente em $[a, b]$. Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então $f$ é estritamente decrescente em $[a, b]$" (THOMAS; WEIR; HASS, 2009, p.289).

Com relação a segunda derivada, o livro faz a seguinte afirmação: "seja $y = f(x)$ uma função duplamente derivável em um intervalo $I$. Se $f"(x) > 0$ em $I$, então, o gráfico de $f$ ao longo de $I$ é côncavo para cima. Se $f"(x) < 0$ em $I$, então, o gráfico de $f$ ao longo de $I$ é côncavo para baixo" (THOMAS; WEIR; HASS, 2009, p.293). O livro também traz a seguinte definição: "Um ponto onde a função possui reta tangente e onde há mudança de concavidade é um ponto de inflexão".

O objetivo do estudo das derivadas primeira e segunda, é que os alunos consigam compreender e visualizar o que elas representam, e quais as características de cada ponto da função em virtude do sinal da derivada. Para isso, e para dar sentido ao uso do aplicativo, deve-se aplicar atividades aos alunos, por meio das quais, eles possam relacionar as informações obtidas com a plotagem dos gráficos.

Como exemplo de atividade, podemos citar a seguinte questão:

**Exemplo:** "Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ juntamente com o de suas duas primeiras derivadas. Comente o comportamento de $f$ em relação aos sinais e valores de $f'$ e $f''$:

**Solução:** Vamos analisar a função: $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

**1. Derivadas**

**Primeira derivada:**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^4 - 4x^2 + 1) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 8x(x - 1)(x + 1).$$

**Segunda derivada:**

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(8x^3 - 8x) = 24x^2 - 8.$$

ISSN 2764-2631


**2. Pontos críticos**

Para encontrar os pontos críticos, devemos encontrar

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1,\ 0,\ 1.$$

Vamos analisar o sinal de $f'(x)$ em cada intervalo:

- Para $x < -1$: escolha $x = -2 \to f'(-2) = -48 \to f$ **é decrescente.**
- Para $-1 < x < 0$: escolha $x = -0{,}5 \to f'(-0{,}5) = +3 \to f$ **é crescente.**
- Para $0 < x < 1$: escolha $x = 0{,}5 \to f'(0{,}5) = -3 \to f$ **é decrescente.**
- Para $x > 1$: escolha $x = 2 \to f'(2) = +48 \to f$ **é crescente.**

Portanto, temos Mínimos locais em $x = -1$ e $x = 1$ e Máximo local em $x = 0$.

**3. Concavidade e pontos de inflexão**

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 24x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}577.$$

Sinal de $f''(x)$:

- Se $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$: $f''(x) > 0 \to$ **o gráfico de $f$ é côncavo para cima**.
- Se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$: $f''(x) < 0 \to$ **o gráfico de $f$ é côncavo para baixo**.

**4. Conclusões**

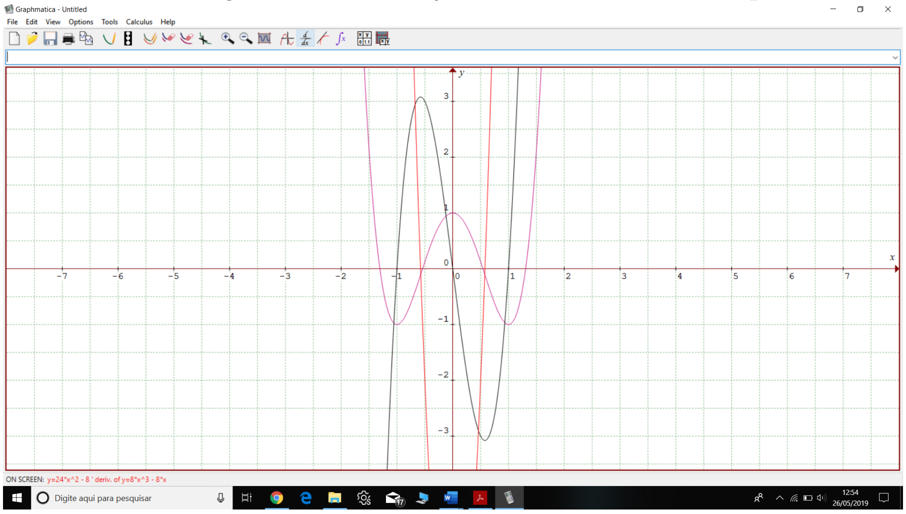
- $f$ é decrescente em $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$;
- $f$ é crescente em $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$;
- $f$ possui mínimos locais em $x = -1$ e $x = 1$ e máximo local em $x = 0$;
- Pontos de inflexão em $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- Concavidade: para cima quando $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ e para baixo entre $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

A medida que o discente calcula as derivadas da função $f$ ele deve plotar essas funções no aplicativo e comparar os pontos em comum entre as funções, assim, ele poderá perceber, por exemplo, que os zeros de $f'$ coincidem exatamente com os pontos de máximos e mínimos de $f$.

Na *Figura 1* temos a plotagem da função no Graphmatica. O gráfico de $f$ aparece na cor magenta, a primeira derivada na cor azul e a segunda na cor vermelha. Observando a imagem, o aluno pode perceber sua relação com o enunciado do Corolário 3 acerca do intervalo de crescimento da função, ou seja, no intervalo em que $f'$ é positiva, $f$ é crescente. Analogamente, no intervalo em que $f'$ é negativa, $f$ é decrescente. Da mesma forma, sua análise se dará com respeito a segunda derivada. No intervalo em que $f$" é positiva, $f$ possui concavidade voltada para cima. Analogamente, no intervalo em que $f$" é negativa, $f$ possui concavidade voltada para baixo.

Também será possível ao aluno observar os pontos de máximos e mínimos e de inflexão, que se dão nos pontos em que as derivadas primeira e segunda cortam o eixo das abcissas.

Figura 1: Gráfico da função $2x^4 - 2x + 1$, juntamente com suas duas primeiras derivadas




*Fonte: Elaborada pelo autor*

### 3.3 PROPOSTA DE AULA

Nossa proposta de aula está direcionada a alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática, ou seja, professores de Matemática em formação. Com duração prevista de duas aulas de duas horas cada, dividida em dois momentos.

No primeiro momento a aula deverá ser realizada no Laboratório de Informática, tendo no máximo dois alunos por computador. O professor/docente deverá apresentar o aplicativo Graphmatica aos alunos, mostrando algumas de suas ferramentas, em especial as que dizem respeito ao assunto abordado, isto é, derivada. Em seguida será cedido um tempo para que os alunos possam se familiarizar com o aplicativo.

No segundo momento será apresentada aos alunos a atividade, na qual eles poderão associar a relação algébrica e geométrica da construção do gráfico de funções com uma variável.

## 4. Conclusões

Diante da proposta apresentada, acreditamos que ela representa uma excelente alternativa, haja vista que, por meio da pesquisa realizada e dos argumentos expostos, a proposta de aula sugerida se mostra uma estratégia pedagogicamente consistente para cumprir os objetivos estabelecidos. Além de possibilitar uma aprendizagem mais ativa e participativa, a proposta contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos estudantes, favorecendo a construção do conhecimento de forma contextualizada e significativa. Dessa forma, compreendemos que sua aplicação pode gerar impactos positivos no processo de ensino e aprendizagem dos discentes do curso de Licenciatura em Matemática podendo impactar, também, na diminuição do número de não aprovações registradas nesses cursos.

## Referências

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 1996. Citado na página 1.

SILVA, S. C. da. Ensino de cálculo: Um estudo das possibilidades de introdução no ensino médio. 2024. Citado na página 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. R. *Cálculo 1*. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. Tradução da 11ª edição norte-americana. Citado na página 3.