



DO VELOCÍMETRO AO CÁLCULO: UM CAMINHO PARA A VELOCIDADE INSTANTÂNEA NO ENSINO BÁSICO

Tiago Emanuel Melo Pereira¹ - tiagoemelop@gmail.com
Romildo Nascimento de Lima² - romildo@mat.ufcg.edu.br
Alânio Barbosa Nóbrega³ - alannio@mat.ufcg.edu.br

¹Secretaria Estadual de Educação, Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves - Serra Talhada, PE, Brasil

²Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

³Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Este trabalho propõe investigar intuitivamente o problema da velocidade instantânea no Ensino Básico. Embora sua solução envolva alguns conceitos mais abstratos que não são abordados nessa etapa educacional, enxergamos a oportunidade de utilizar o conhecimento prévio dos educandos e aprofundá-lo ainda mais com a introdução de novas ideias. Aqui, trazemos um recorte de estudos realizados na dissertação de Mestrado do PROFMAT intitulada “Investigando Processos Infinitos: Uma Proposta de Disciplina Eletiva sob a Ótica do Novo Ensino Médio” (PEREIRA et al., 2024). Comentamos de forma sucinta um dos temas que lá foram abordados. Na dissertação, além da temática principal deste resumo, abordamos outros problemas, como o problema da tangente e o problema da área, que fundamentam nossa análise sobre processos infinitos. Esse estudo nos permitiu desenvolver sequências didáticas adaptadas para o Ensino Básico e elaborar histórias em quadrinhos abordando cada um dos problemas estudados. A partir desses elementos didáticos, criamos e implementamos uma proposta de disciplina eletiva voltada para alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves, localizada em Serra Talhada - PE.

Palavras-chave: Problema da Velocidade Instantânea; Processos Infinitos; Popularização da Matemática.

1. Introdução

Durante o Ensino Médio, é comum o estudo de um ramo da Física conhecido como Mecânica. Por sua abrangência, a Mecânica é subdividida em diferentes tópicos, sendo a Cinemática o foco deste trabalho. A Cinemática trata do estudo do movimento dos corpos sem considerar suas causas.

Um dos movimentos abordados nesse contexto é o Movimento Uniforme, no qual o móvel percorre espaços iguais em intervalos de tempos iguais. Isso implica a ausência de aceleração, já que não há variação da velocidade; assim, a velocidade do móvel permanece constante ao longo do tempo.

No entanto, ao considerarmos situações do cotidiano, percebemos que assumir uma velocidade constante, mesmo em intervalos curtos, nem sempre reflete a realidade. Um experimento simples pode ilustrar essa ideia: observe o comportamento do velocímetro de um veículo durante uma viagem ou durante o seu trajeto até o trabalho.

O que se observa? Claramente, o velocímetro não indica a mesma velocidade por longos períodos. Essa constatação evidencia que a velocidade do veículo varia com o tempo. Podemos, então, afirmar que o veículo registra uma velocidade definida para cada instante de tempo. É justamente essa noção que define o conceito de *velocidade instantânea*.

Com o intuito de proporcionar ao leitor uma explanação mais didática para esse conceito, achamos pertinente trazer um diálogo, onde discorreremos sobre o problema da velocidade instantânea. O texto desenvolvido é uma adaptação do diálogo apresentado em (NUSENZVEIG, 2002).

1.1 Dialogando Sobre o Problema da Velocidade Instantânea

Certo dia, um estudante estava em sua motocicleta a caminho da Universidade quando um guarda de trânsito o fez parar, relatando que ele estava transitando na via com velocidade acima da permitida, vejamos o enredo dessa história.

Guarda: Quando você passou pela lombada eletrônica foi registrado que a sua moto estava a 80 km/h, mas



o *limite* de velocidade dessa via é de 40 km/h. Você não percebeu que estava rápido demais?

Estudante: Desculpe Sr. Guarda, acho que a lombada deve estar com algum defeito. Me explique como eu poderia estar a 80 km/h se só estava dirigindo por aqui há cerca de 1 minuto, e não durante 1 hora?

Guarda: A questão não é essa! No instante em que você passou pela lombada registrou-se a velocidade de 80 km/h, isto quer dizer que se você seguisse viagem mantendo constante essa velocidade, após 1 hora, teria percorrido 80 km.

Estudante: E com toda certeza, eu já teria ultrapassado a Universidade.

Guarda: Não tenho dúvidas disso! Contudo, se você tivesse continuado com essa velocidade durante 1 minuto, teria percorrido 1,33 km, e em 1 segundo 22,22 metros, e em 0,1 segundos teria percorrido 2,22 m e teria dado perfeitamente para prosseguir durante 0,1 segundos sem ultrapassar a Universidade.

Estudante: Entendo, você determinou os espaços percorridos com essa velocidade para intervalos de tempo cada vez menores. Mas, para mim só faz sentido pensar dessa forma se o limite da via fosse 2,22 metros em 0,1 segundos.

Guarda: Mas, o que eu estou te dizendo são coisas equivalentes. O que vale é a *velocidade instantânea*, isto é, a velocidade no instante em que você passou pela lombada eletrônica. Então, quando você diz que a lombada está quebrada não faz muito sentido.

Estudante: Sr. Guarda, não me multe por favor! Estou a caminho da Universidade para assistir uma aula de Cálculo.

Guarda: Tenho certeza que você aprendeu alguma coisa de Cálculo com essa infração de trânsito. E sobre a multa..., não posso fazer nada! Da próxima vez que passar por aqui, dirija respeitando o limite de velocidade da via. Tenha um bom dia!

O diálogo que acabamos de analisar aborda o conceito de velocidade instantânea de forma intuitiva e descontraída. As falas do estudante durante a abordagem dão margem a duas interpretações distintas:

- (i) Ele pode não conhecer o conceito de velocidade instantânea;
- (ii) Ele estava se fazendo de desentendido para tentar se livrar da multa.

Não sabemos se o estudante é realmente leigo ou se fez de desentendido, mas fica evidente que ele apela para o conceito de velocidade média ao retrucar as observações feitas pelo guarda, o que não faz muito sentido, visto que, a lombada eletrônica registra a *velocidade instantânea*.

Por outro lado, o guarda foi bastante conciso e coerente durante a conversa. Ao realizar conversões entre as unidades de tempo e distância, e realizar cálculos para intervalos de tempo cada vez menores conseguiu mostrar que o estudante realmente ultrapassou o *limite* de velocidade permitida na via e a discussão foi encerrada.

É inegável que a velocidade de uma motocicleta ou até mesmo um carro não sofre nenhuma alteração significativa em intervalos de tempo muito pequenos, por exemplo, um intervalo de tempo inferior a 0,1 segundos. Em contrapartida, para calcular a *velocidade instantânea* com uma maior precisão devemos pensar em intervalos de tempo cada vez menores, por exemplo, intervalos da ordem de 10^{-2} s, 10^{-3} s, 10^{-4} s, e assim por diante, isto é, para intervalos de tempo cada vez menores, o quociente $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ aproxima-se cada vez mais da velocidade instantânea. Definimos intuitivamente, velocidade instantânea, como a velocidade que o velocímetro do veículo marca num determinado instante.

2. Metodologia

A realização deste trabalho seguiu as seguintes etapas:

- Inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica em livros que abordam essa temática, entre eles: (NUSSENZVEIG, 2002) e (STEWART, 2016);
- Em seguida, buscamos adaptar o tema e desenvolver estratégias para sua abordagem no Ensino Básico;
- Por fim, propusemos um problema, cuja resolução envolveu o uso de softwares computacionais, como o GeoGebra e a Planilha Excel, além da elaboração de uma história em quadrinhos (HQ), com o objetivo de apresentar o tema de forma lúdica e acessível.



3. Resultado e discussão

Abordar esse tema no Ensino Básico representa um grande desafio. Além de um planejamento cuidadoso e da gestão eficiente do tempo, o professor de Matemática pode necessitar revisar seu próprio entendimento sobre o conteúdo, selecionar os recursos didáticos mais adequados e preparar materiais específicos para a sua aplicação em sala de aula.

Como parte da estratégia adotada para a abordagem desse conceito, utilizamos o software GeoGebra, que permitiu realizar construções, explorar conceitos de forma dinâmica e intuitiva, bem como efetuar cálculos ilustrativos relacionados ao problema proposto. Paralelamente, empregamos a Planilha Excel com o objetivo de organizar as informações obtidas, automatizar cálculos, facilitar a visualização dos resultados e realizar aproximações numéricas de limites. A seguir, apresentamos um exemplo de problema que pode ser trabalhado em sala.

Problema. Uma bola é solta do topo de uma torre com 450 metros de altura, em queda livre, sem resistência do ar. Considerando a aceleração da gravidade $g = 10m/s^2$, qual é a velocidade da bola após 6 segundos de queda?

Como $t = 6$ s é nosso único instante de referência, podemos obter boas aproximações calculando a velocidade média V_m em intervalos de tempo tão pequenos quanto desejarmos. Para calcular V_m utilizamos a expressão

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

onde $\Delta S = S(t) - S(t_0)$ é a variação do espaço percorrido e $\Delta t = t - t_0$ é o intervalo de tempo para percorrer este espaço.

Na tabela, encontramos os registros das velocidades médias da bola em intervalos de tempo cada vez menores. A ideia é escolher um intervalo que esteja nas proximidades de $t = 6$, por exemplo, o intervalo $(6, 7]$. Observe:

Tabela 1: Calculando velocidades médias em intervalos cada vez menores.

$\Delta S = S(t) - S(t_0)$ (em metros)	$\Delta t = t - t_0$ (em segundos)	$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
$\Delta S = S(7) - S(6) = 65$	$\Delta t = 1$	65
$\Delta S = S(6,5) - S(6) = 31,25$	$\Delta t = 0,5$	62,5
$\Delta S = S(6,1) - S(6) = 6,05$	$\Delta t = 0,1$	60,5
$\Delta S = S(6,01) - S(6) = 0,6005$	$\Delta t = 0,01$	60,05
$\Delta S = S(6,001) - S(6) = 0,060005$	$\Delta t = 0,001$	60,005
$\Delta S = S(6,0001) - S(6) = 0,00600005$	$\Delta t = 0,0001$	60,0005
...

Fonte: O Autor.

À medida que fazemos o intervalo de tempo colapsar, isto é, $\Delta t \rightarrow 0$, notamos que a velocidade média aproxima-se cada vez mais de 60 m/s. Ao verificarmos os dados apresentados na tabela passamos a compreender melhor o conceito de velocidade instantânea.

Note que, $t = 6$ é o instante que gera a velocidade instantânea definida como o *valor limite* para essas velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores, isto significa que a velocidade instantânea após 6 segundos é exatamente 60 m/s.

Este valor é obtido como caso limite da sequência de aproximações, isto é, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(6 + \Delta t) - S(6) \\ \Rightarrow \Delta S &= 5(6 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 6^2 \\ \Rightarrow \Delta S &= 5 \cdot [36 + 12 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] - 5 \cdot 36 \\ \Rightarrow \Delta S &= 5 \cdot [36 + 12 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 - 36] \\ \Rightarrow \Delta S &= 5 \cdot [12 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] \\ \Rightarrow \Delta S &= 60 \cdot \Delta t + 5 \cdot (\Delta t)^2. \end{aligned}$$



Calculamos a velocidade instantânea fazendo $(6 + \Delta t) \rightarrow 6$. Com efeito,

$$V_{(6+\Delta t) \rightarrow 6} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(6 + \Delta t) - S(6)}{(6 + \Delta t) - 6} = \frac{60 \cdot \Delta t + 5 \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t} = 60 + 5 \cdot \Delta t.$$

Observe que, quando $\Delta t \rightarrow 0$ acarreta $60 + 5 \cdot \Delta t \rightarrow 60$. É fácil ver que quando fazemos $\Delta t \rightarrow 0$, conseqüentemente, $\Delta S \rightarrow 0$. Contudo, o quociente entre estes números resulta em um número finito. De maneira geral, calculamos a *velocidade instantânea* V utilizando a seguinte expressão:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Esta expressão nos permite aproximar-se tanto quanto quisermos do resultado desejado, basta tomar um valor Δt suficientemente pequeno.

Após apresentar a solução do problema proposto – apoiada em cálculos, fórmulas e apresentação da tabela com o intuito de facilitar a compreensão dos educandos – consideramos fundamental proporcionar aos discentes a oportunidade de revisar e consolidar os conhecimentos adquiridos de maneira mais lúdica e acessível. Com esse objetivo, foi desenvolvida uma história em quadrinhos (HQ) especialmente pensada para retomar os principais conceitos abordados. A seguir, será apresentado um resumo do seu conteúdo e a referência onde poderá ser encontrada.

Figura 1: Capa HQ.



Fonte: O Autor.

Ao realizar a leitura desta história em quadrinhos, o estudante poderá relembrar alguns conceitos da Cinemática estudados na disciplina de Física, geralmente abordados no 1º ano do Ensino Médio, a título de exemplo, os conceitos de Velocidade Média e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Após relembrar desses conteúdos, o estudante poderá dar os primeiros passos para compreender o conceito de velocidade instantânea.

A ideia de ilustrar uma situação real para investigar o problema tornou o texto mais acessível e atrativo. Com isso, conseguimos aplicar um modelo abstrato para resolver uma situação concreta do cotidiano. A principal ideia apresentada é a possibilidade de determinar intuitivamente a velocidade de um móvel em um determinado instante por meio de aproximações. Para cumprir com esse objetivo apresentamos o gráfico da função que descreve o movimento do móvel e tabelas onde os dados que obtemos por meio de cálculos foram organizados.

Recomendamos a leitura desse material textual no formato de história em quadrinhos em (PEREIRA et al., 2024), onde reunimos os produtos educacionais desenvolvidos a partir da dissertação de mestrado vinculada ao PROFMAT, intitulada Investigando Processos Infinitos: uma proposta de disciplina eletiva sob a ótica do Novo Ensino Médio. Nos anexos da dissertação incluímos uma história em quadrinhos sobre o problema da velocidade



instantânea, bem como outras duas HQs relacionadas ao estudo de processos infinitos, explorando abordagens lúdicas e acessíveis para o Ensino Básico.

Vale destacar que, neste trabalho, também apresentamos uma proposta didática para introduzir o problema da tangente de forma intuitiva no Ensino Básico. Essa abordagem foi realizada previamente à discussão sobre o problema da velocidade instantânea, o que se mostra pertinente, considerando a relação intrínseca entre ambos. Em essência, os dois tratam da determinação de uma taxa de variação em um ponto específico.

No caso da velocidade instantânea, busca-se a variação da posição em um dado instante de tempo, enquanto o problema da tangente envolve a determinação da inclinação da reta que tangencia uma curva em determinado ponto. Conceitualmente, observa-se que ambos os problemas convergem para o mesmo processo matemático: o cálculo do limite de uma razão de variação, que dá origem à noção de derivada. Assim, a abordagem inicial do problema da tangente contribui significativamente para a compreensão do problema da velocidade instantânea.

4. Conclusões

A partir da realização dessa sequência didática constatamos que é possível apresentar uma noção intuitiva do conceito de velocidade instantânea no Ensino Básico. Por meio de abordagens visuais e dinâmicas, como o uso de material textual em formato de história em quadrinhos e de softwares computacionais, o professor de Matemática pode proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa, ao estimular a investigação de conceitos mais aprofundados, como a noção intuitiva de limite.

Além disso, destaca-se o potencial de uma abordagem interdisciplinar entre os professores de Matemática e Física, especialmente no tratamento dessa temática. Essa colaboração pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, tornando os conteúdos mais conectados com a realidade dos estudantes e favorecendo uma compreensão mais ampla e aplicada dos conceitos matemáticos e físicos. A integração entre as disciplinas promove o desenvolvimento do pensamento crítico, da contextualização e da capacidade de transferir conhecimentos entre diferentes áreas do saber, contribuindo para uma formação mais completa e significativa.

Referências

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

PEREIRA, T. E. M. et al. Investigando processos infinitos: uma proposta de disciplina eletiva sob a ótica do novo ensino médio. Universidade Federal de Campina Grande, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 4.

STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2016. Citado na página 2.