ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

DUAS APLICAÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA: O ORÇAMENTO E O FINANCIAMENTO

Wilton dos Santos[1] - wiltonsantos130@gmail.com
Romildo Nascimento de Lima[2] - romildo@mat.ufcg.edu.br

[1,2]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *A Modelagem Matemática é um ramo da Matemática que vem em crescente repercussão e estudo em nosso país. Dessa forma, neste trabalho, produzido a partir de pesquisas para uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, buscamos apresentar duas aplicações de modelos matemáticos a situações do cotidiano: o orçamento familiar e o financiamento. Para tanto, utilizamos a metodologia da pesquisa bibliográfica, em um livro e dois artigos, que discorrem sobre o tema. Após a análise dos materiais, fora possível construir o alicerce de fundamentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Com isso, o objetivo principal desse trabalho é apresentar informações acerca da modelagem Matemática, que pode ser uma forte aliada para o ensino da Matemática.*
Palavras-chave: *Modelagem Matemática; Aplicação; Orçamento; Financiamento.*

1. Introdução

A Modelagem Matemática é um ramo da Matemática que vem em crescente repercussão e estudo em nosso país. Muitos pesquisadores, sobretudo da área de Educação Matemática, estão buscando se aprofundar nessa temática. Com isso, já encontramos diversos trabalhos, dissertações e teses acerca desse tema. Segundo FERREIRA et al. (2013),

> "O fato de a modelagem matemática romper as barreiras entre as ciências propondo, de certa forma, uma multidisciplinaridade chamou a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática, sendo atualmente uma grande área de pesquisa no processo de ensino-aprendizagem em matemática."

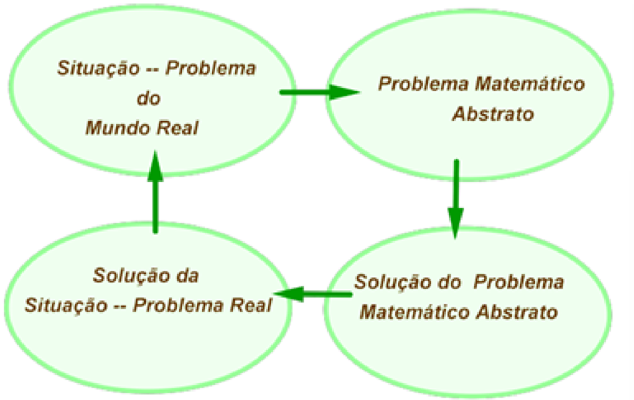
Desse modo, alguns nomes se destacaram por suas grandes contribuições para a área. Por exemplo, Aristides Camargo Barreto - responsável pela orientação das duas primeiras dissertações de modelagem da Pós-Graduação da PUC-RJ; Ubiratan D'Ambrósio - responsável pela criação do 1º Mestrado em ensino de Ciências e Matemática do Brasil, que deu origem a vários trabalhos sobre Modelagem; Rodney Carlos Bassanezi - que escreveu livros que detalham a Modelagem Matemática e é responsável pelo 1º curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática.

Sob esse viés, existem muitas formas de definir o que é Modelagem Matemática. Segundo BASSANEZI (2002), "a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Dessa forma, por meio dela, podemos repensar os métodos de estudar e de ensinar Matemática, uma vez que essa pode ser vista como um método científico e, também, como uma estratégia para o ensino-aprendizagem.

Uma boa maneira de exemplificar o que é a Modelagem Matemática é observando o seguinte diagrama:

ISSN 2764-2631

Figura 1: Diagrama da Modelagem Matemática



Fonte: BERTONE et al. (2014)

Mas como esse diagrama pode ajudar? Em muitas situações, existem problemas da realidade em que não é possível enxergar uma solução rápida. Através da Modelagem, buscamos transformar esse problema em algo matemático, que pode ser uma equação, um sistema, uma função que modele certo comportamento, dentre outras possibilidades. Feito isso, consegue-se ver o problema com um novo olhar. Busca-se agora resolver o problema matematicamente, e consequentemente, teremos a solução do problema inicial. É o que representa o diagrama.

Além disso, de acordo com FERREIRA et al. (2013), "A modelagem matemática, então, serviu e serve como a principal ferramenta para uso principalmente das outras ciências, promovendo uma inter-relação da Matemática com as outras áreas do conhecimento humano". Desse modo, temos a conhecida Matemática Aplicada. Essa última é uma área da Matemática que busca aplicar conceitos matemáticos à solução de problemas reais, que podem ser de grande complexidade e das mais diversas áreas das ciências, como a Física, Química, Astronomia, Engenharia, Medicina, entre outras. "A Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar a Matemática a situações problemáticas, usando o processo comum a modelagem Matemática" (BASSANEZI, 2002).

2. Metodologia

O presente trabalho foi desenvolvido através de pesquisas realizadas para uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande (PROFMAT - UFCG), ainda em fase inicial.

A metodologia que utilizamos para estudo do tema e desenvolvimento deste trabalho foi a pesquisa bibliográfica, em um livro que discorre sobre Modelagem Matemática, e alguns artigos que abordam esse mesmo tema. Todos podem ser encontrados nas referências deste trabalho. Para tanto, foram analisados os tópicos existentes nas obras citadas e, dessa forma, foi possível selecionar os de maior relevância para o contexto da pesquisa.

Após a análise dos materiais, fora possível construir o alicerce de fundamentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

3. Resultado e discussão

É comum surgir a dúvida de como começaram as aplicações de modelos Matemáticos para solucionar problemas. No entanto, a resposta para essa pergunta não é tão precisa. Sabe-se que a Matemática evoluiu ao longo da história, por meio da necessidade de resoluções de situações reais das civilizações antigas e modernas,

ISSN 2764-2631

em que essas foram feitas através de modelagens. Isso mostra que "a atividade de aplicar Matemática é tão antiga quanto a própria Matemática"(BASSANEZI, 2002).

Ademais, a utilização dos modelos matemáticos se estende a diversas áreas. É possível encontrar aplicações da modelagem na compreensão do crescimento de uma população, no mercado financeiro, no movimento dos planetas, no trânsito de uma grande cidade ou até mesmo na propagação de uma doença.

Quando se inicia uma pesquisa em modelagem Matemática, abre-se um leque muito grande de aplicações, porém, aqui nos interessa modelos mais próximos da realidade da maioria. Abaixo, apresentaremos duas aplicações de modelos matemáticos a situações comuns no cotidiano. Essas e muitas outras podem ser encontradas em (BASSANEZI, 2002).

Aplicação 1 - Orçamento familiar:

Antes de apresentarmos o primeiro problema, é importante destacar um conceitoque será utilizado posteriormente. Uma recorrência linear de 1ª ordem é da forma.

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} \\ y_0 \text{ dado} \end{cases}.$$

Podemos verificar que a solução dessa recorrência é

$$y_{n+1} = a y_n + b.$$

Com y_0 dado, temos

$$\begin{cases} y_n = y_0 + bn \\ y_n = y_0 a^n + b\dfrac{1-a^n}{1-a} \end{cases}. \tag{1}$$

Agora, considere uma familia na qual a renda mensal r_n é proveniente de um salário fixo r_0 mais o rendimento da caderneta de poupança p_n do mês anterior.

Além disso, vamos supor que o consumo mensal c_n dessa família seja proporcional à sua renda mensal.

O modelo que estabelece relações entre as variáveis renda, poupança e consumo, dependentes do tempo e tomados em meses, é dado por:

i) poupança: $p_{n+1} =$ (poupança do mês anterior n)+(sobra do mês $n+1$)

$$p_{n+1} = p_n + (r_{n+1} - c_{n+1}); \tag{2}$$

ii) renda: $r_{n+1} =$ (salário) + (rendemento da poupança do mês anterior)

$$r_{n+1} = r_0 + \alpha p_n, \tag{3}$$

em que α é o juro da poupança;

iii) consumo

$$c_{n+1} = \beta r_{n+1}, \tag{4}$$

com $0 < \beta < 1$.

A partir das três equações, obtemos

$$p_{n+1} = (1-\beta) r_0 + [(1-\beta)\alpha + 1] p_n.$$

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Considerando que p_0 é dado, podemos usar a solução (1) para escrever as soluções:

$$p_n = p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} = [(1-\beta)\alpha + 1]^n p_0 + (1-\beta)r_0 \frac{1-[(1-\beta)\alpha+1]^n}{1-[(1-\beta)\alpha+1]}. \tag{5}$$

Sendo assim,

$$r_n = r_0 + \alpha p_0 a^{n-1} + \alpha b \frac{1-a^{n-1}}{1-a} \tag{6}$$

e

$$c_n = \beta r_0 + \alpha\beta p_0 a^{n-1} + \alpha\beta\frac{1-a^{n-1}}{1-a}. \tag{7}$$

Aplicação 2 - Financiamento:

Na compra de uma casa, é feito um financiamento do valor c_0, que deve ser pago em 15 anos, em parcelas mensais fixas e iguais a k. Devemos determinar o juro mensal α cobrado nesse empreendimento.

Seja c_0 a dívida inicial. Então, a dívida c_n em um mês n é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, isto é,

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n - k = (1+\alpha)c_n - k. \tag{8}$$

Podemos encontrar a solução de (8) por recorrência:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (1+\alpha)c_0 - k\\
c_2 &= (1+\alpha)c_1 - k = (1+\alpha)^2 c_0 - (1+\alpha)k - k\\
c_3 &= (1+\alpha)c_2 - k = (1+\alpha)^3 c_0 - (1+\alpha)^2 k - (1+\alpha)k - k\\
&\vdots\\
c_n &= (1+\alpha)^n c_0 - k[1 + (1+\alpha) + (1+\alpha)^2 + \cdots + (1+\alpha)^{n-1}]).
\end{aligned}$$

Observe que o termo dentro dos colchetes é a soma de uma progressão geométrica. Portanto,

$$c_n = (1+\alpha)^n c_0 - k\frac{1-(1+\alpha)^n}{-\alpha}. \tag{9}$$

Se considerarmos que a dívida estará quitada em t meses, devemos ter em (9) que $c_t = 0$, desse modo

$$(1+\alpha)^t c_0 = k\frac{1-(1+\alpha)^t}{-\alpha}$$

ou

$$\frac{\alpha c_0}{k} = \frac{(1+\alpha)^t - 1}{(1+\alpha)^t} = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^t}$$

Conhecidos os valores da dívida inicial c_0, do pagamento parcelado k e do tempo necessário t para a liquidação dessa dívida, o cálculo de α pode ser feito usando-se algum método numérico. Considere, por exemplo, $c_0 = 30.000, k = 500$ **e** $t = 15$ anos (180 meses).

Então

$$60\alpha = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^{180}}. \tag{10}$$

Para determinar o valor de α em (10), vamos utilizar o método da bisseção.

ISSN 2764-2631

Sejam $y = 60\alpha$ e $z = 1 - \dfrac{1}{(1+\alpha)^{180}}$. Então devemos encontrar α de modo que $y = z$:

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow y = 0.6 \text{ e } z = 0.833 \Rightarrow z > y$$
$$\alpha = 0.02 \Rightarrow y = 1.2 \text{ e } z = 0.97 \Rightarrow z < y$$
$$\alpha = \frac{0.01 + 0.02}{2} = 0.015 \Rightarrow y = 0.9 \text{ e } = 0.93 \Rightarrow z > y.$$

Então, α deve estar entre 0.015 e 0.02. Continuando o processo, obtemos $\alpha \simeq 0.0156$ ou 1.56% ao mês.

4. Conclusões

Em suma, como fora apresentado ao longo deste trabalho, a Modelagem Matemática é uma poderosa ferramenta para resolver problemas de diversas situações da realidade cotidiana. Unindo isso a sua fácil aplicabilidade, obtemos um ótimo aparato para trabalhar no Ensino Básico.

Esse trabalho é fruto do início da pesquisa para uma dissertação do ProfMat. Sendo assim, na dissertação vamos nos aprofundar ainda mais no tema, trazendo diversos outros modelos e também buscaremos desenvolver metodologias para o ensino de Matemática no ensino básico através de Modelagem Matemática.

Além das aplicações apresentadas aqui, existem muitas outras, nas mais diversas áreas. Recomendamos a procura dessas, ao leitor interessado, nas referências deste trabalho.

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002. 188 p. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 3.

BERTONE, A. et al. *Modelagem Matemática*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2014. 187 p. Citado na página 2.

FERREIRA, G. P. et al. A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelação matemática no brasil. *XII Encontro Nacional da Educação Matemática*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.