



UMA ABORDAGEM DIDÁTICA DOS CÍRCULOS DE SODDY COM O USO DO GEOGEBRA

Gilson Pacífico da Costa¹ - gilson.costa@aluno.uepb.edu.br
Luciana Roze de Freitas² - lucianafreitas@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

²Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

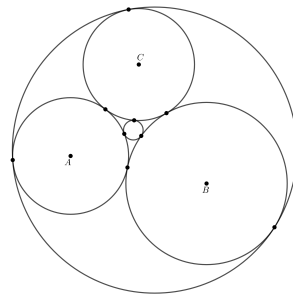
Resumo: No presente trabalho, apresentamos um estudo sobre os círculos de Soddy, articulando aspectos históricos, propriedades matemáticas e seus processos de construção. Os círculos de Soddy são dois círculos especiais associados a três círculos mutuamente tangentes. O estudo investiga as relações entre esses círculos, destacando propriedades relacionadas aos seus raios e explorando suas construções com o uso do GeoGebra, a fim de favorecer a compreensão dos conceitos geométricos e contribuir para práticas pedagógicas mais dinâmicas no ensino de Geometria.

Palavras-chave: Círculos de Soddy; Geometria; GeoGebra.

1. Introdução

Considerando três círculos coplanares, distintos e mutuamente tangentes externamente, existem exatamente dois círculos adicionais que são tangentes simultaneamente aos três círculos iniciais, denominados círculo de Soddy interno e círculo de Soddy externo. O círculo interno é tangente externamente aos três círculos dados, ocupando a região comum delimitada por eles, enquanto o círculo externo contorna os círculos iniciais, sendo tangente internamente a cada um deles (Figura 1). Esse problema geométrico envolve conceitos fundamentais da geometria euclidiana, como tangência, raio, curvatura e as relações entre os raios dos círculos envolvidos.

Figura 1: Círculos de Soddy interno e externo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2026.

A proposta deste trabalho consiste em apresentar a construção dos Círculos de Soddy com o auxílio do software *GeoGebra*, bem como discutir as propriedades geométricas relacionadas aos raios dos círculos tangentes. Nesse sentido, busca-se evidenciar como a exploração visual e investigativa pode favorecer a compreensão dessas relações, contribuindo para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais interativas, investigativas e significativas no processo de ensino e aprendizagem.

2. Metodologia

A metodologia fundamenta-se em revisão bibliográfica e experimentação com o uso de tecnologia educacional. Inicialmente, realizou-se um levantamento teórico acerca dos Círculos de Soddy, abordando seus aspectos históricos, matemáticos e suas relações com conceitos clássicos da Geometria Euclidiana. Posteriormente, desenvolveu-se a construção geométrica dos círculos tangentes com o auxílio do software *GeoGebra*, permitindo a



visualização dinâmica das propriedades envolvidas. A construção foi realizada a partir de um triângulo qualquer, explorando elementos notáveis como o incentro e pontos de tangência entre círculos.

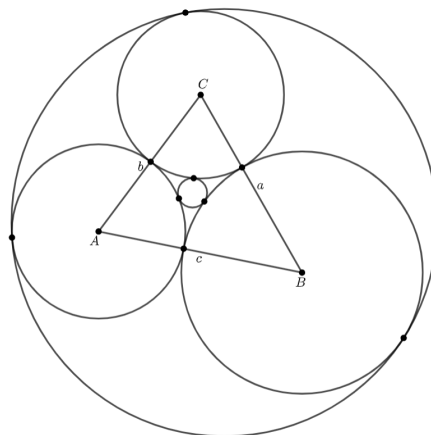
Durante o processo, foram investigadas as relações algébricas entre os raios dos círculos, utilizando o Teorema de Descartes. A análise buscou relacionar as construções com possibilidades de aplicação no ensino de Matemática, enfatizando o potencial investigativo e visual proporcionado pela geometria dinâmica.

3. Resultado e discussão

O estudo dos Círculos de Soddy tem origem no século XVII, quando o matemático e filósofo René Descartes formulou uma relação algébrica entre quatro círculos mutuamente tangentes, conhecida como Teorema de Descartes. Em 1936, o britânico e Nobel de Química, Frederick Soddy (1877 - 1956), publicou na revista Nature uma versão do Teorema de Descartes, em forma de um poema intitulado *The Kiss Precise* (SODDY, 1936). O poema usa a metáfora de “beijo” para descrever círculos que são tangentes, ou seja, que se tocam em um único ponto e explica como calcular o raio (ou curvatura) de um quarto círculo que toca outros três círculos mutuamente tangentes. Embora Soddy seja creditado por essa descoberta, René Descartes já havia estabelecido a relação entre os raios (ou curvaturas) dos círculos cerca de duzentos anos antes.

Dado um triângulo $\triangle ABC$ com lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, considere três círculos centrados nos vértices A , B e C , com raios r_A , r_B e r_C , respectivamente. Quando esses três círculos são mutuamente tangentes externamente, existe um quarto círculo tangente externamente aos três, denominado **círculo de Soddy interno**. Além dele, existe ainda um quinto círculo tangente internamente aos três círculos anteriores denominado **círculo de Soddy externo**.

Figura 2: Círculos de Soddy



Fonte: Elaborada pelo autor, 2026.

A condição de tangência externa mútua implica que $a = r_B + r_C$, $b = r_A + r_C$ e $c = r_A + r_B$. Resolvendo o sistema e considerando o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, obtém-se:

$$r_A = p - a, \quad r_B = p - b, \quad r_C = p - c.$$

Essa solução é única e garante a existência de apenas uma configuração de três círculos mutuamente tangentes com centros nos vértices de um triângulo. O raio r_S de um círculo de Soddy pode ser determinado através do Teorema de Descartes, cuja demonstração pode ser encontrada em (ULIANO, 2021). Dado círculo de raio r dizemos que a sua curvatura é $\kappa = \pm 1/r$.

Teorema de Descartes: Dados quatro círculos mutuamente tangentes, considere as curvaturas de cada círculo como $\kappa_A = \frac{1}{r_A}$, $\kappa_B = \frac{1}{r_B}$, $\kappa_C = \frac{1}{r_C}$ e $\kappa_S = \frac{1}{r_S}$. Então, a relação entre essas curvaturas é dada por

$$2(\kappa_A^2 + \kappa_B^2 + \kappa_C^2 + \kappa_S^2) = (\kappa_A + \kappa_B + \kappa_C + \kappa_S)^2.$$

A igualdade acima pode ser resolvida isolando κ_S , obtendo-se

$$\kappa_S = \kappa_A + \kappa_B + \kappa_C \pm 2\sqrt{\kappa_A\kappa_B + \kappa_A\kappa_C + \kappa_B\kappa_C}. \quad (1)$$

De onde segue a expressão para o raio do círculo de Soddy:

$$\frac{1}{r_S} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} \pm 2\sqrt{\frac{1}{r_A r_B} + \frac{1}{r_A r_C} + \frac{1}{r_B r_C}},$$

ou equivalentemente,

$$r_S = \frac{r_A r_B r_C}{r_A r_B + r_A r_C + r_B r_C \pm 2\sqrt{r_A r_B r_C (r_A + r_B + r_C)}}.$$

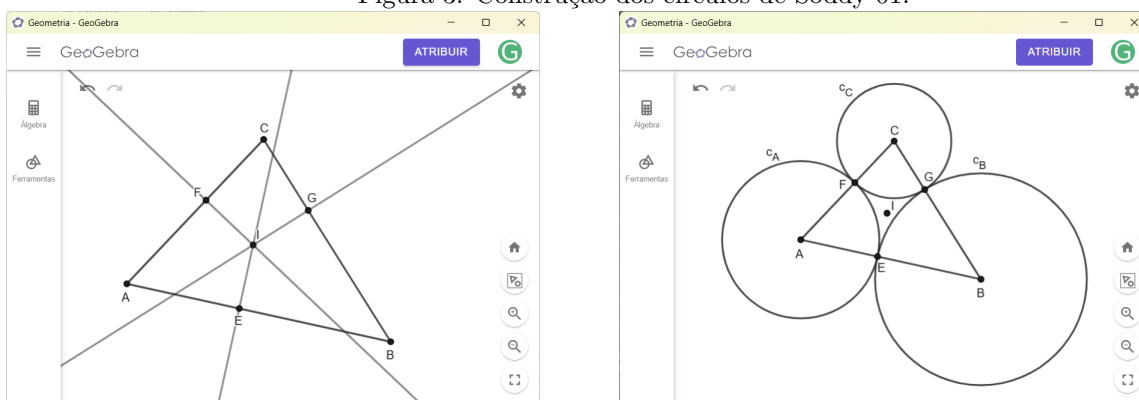
O sinal negativo será atribuído à curvatura de um círculo no problema de Descartes quando os outros três círculos tangentes a ele estiverem localizados em sua região interna. Por outro lado, o sinal positivo será associado à curvatura de um círculo quando os três círculos que a tangenciam estiverem situados externamente a ele. Por exemplo, o círculo de Soddy externo apresenta curvatura positiva, já o círculo de Soddy interno possui curvatura negativa.

O Teorema de Descartes e os Círculos de Soddy possuem estreita ligação. Entretanto, esse resultado não apresenta um método para construir o quarto círculo tangente aos três iniciais; ele estabelece, na verdade, uma relação matemática entre as curvaturas dos quatro círculos envolvidos. A seguir, apresentamos a construção dos círculos de Soddy com a utilização do software *GeoGebra*. Parte-se do pressuposto de que o leitor já possua familiaridade com as ferramentas do programa.

Construção dos círculos de Soddy

1. Construa um triângulo qualquer ABC ;
2. Trace as bissetrizes dos ângulos internos e considere I o ponto de interseção das bissetrizes (incentro);
3. Trace perpendiculares aos três lados do triângulo passando pelo incentro e marque os pontos $E \in AB$, $F \in AC$ e $G \in BC$, de interseção dessas retas com os lados do triângulo (Figura 3);
4. Construa os círculos: c_A com centro no vértice A , passando por E e F ; c_B com centro no vértice B , passando por E e G ; e, c_C com centro no vértice C , passando por F e G (Figura 3);

Figura 3: Construção dos círculos de Soddy 01.

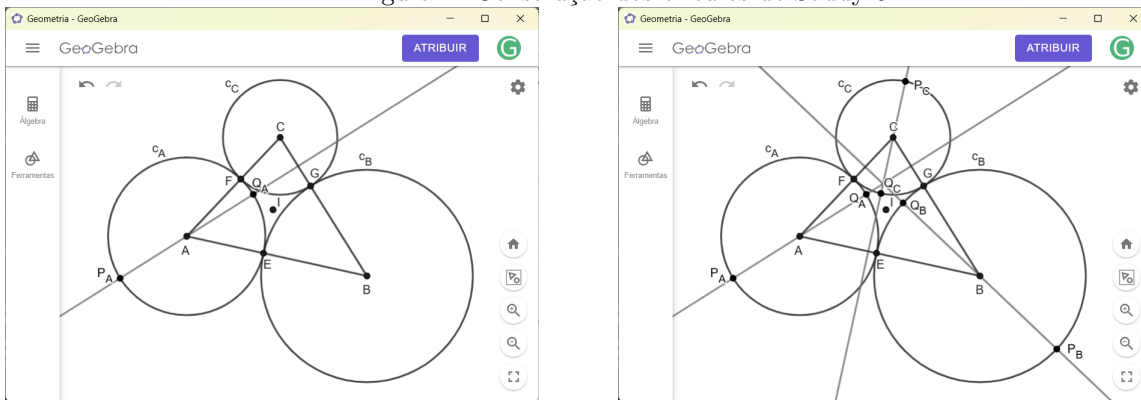


Fonte: Elaborada pelo autor, 2026.



5. Pelo vértice A do triângulo (centro do círculo c_A) trace a reta suporte da altura correspondente ao vértice A e marque os dois pontos P_A e Q_A de interseção dessa reta com o círculo c_A (P_A no exterior e Q_A no interior do triângulo) (Figura 4);
6. Repita o mesmo processo com os vértices B e C , obtendo os pontos P_B, Q_B, P_C e Q_C , respectivamente (Figura 4);

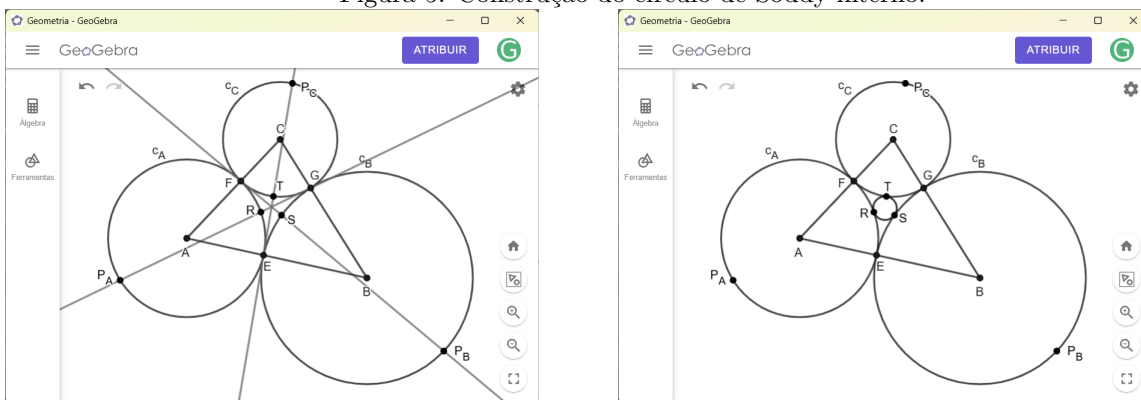
Figura 4: Construção dos círculos de Soddy 02.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2026.

7. Trace as retas $P_A G, P_B F$ e $P_C E$ (passam pelos pontos de tangência dos círculos). Essas retas cortam seus círculos em três pontos R, S e T (internos ao triângulo) (Figura 5);
8. Construa o círculo que passa por R, S e T (círculo de Soddy interno). Esse será tangente aos três círculos c_A, c_B e c_C (Figura 5).

Figura 5: Construção do círculo de Soddy interno.

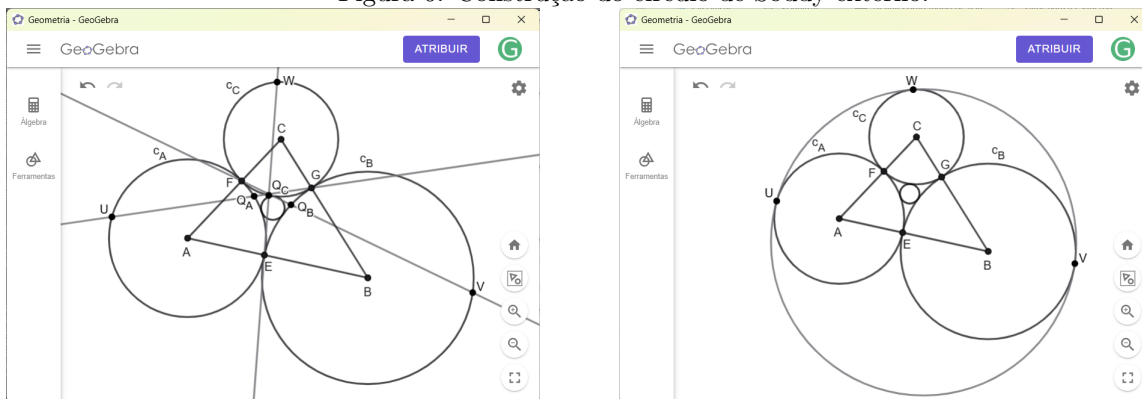


Fonte: Elaborada pelo autor, 2026.

Em seguida, procedemos à construção do círculo de Soddy externo, dando continuidade ao estudo proposto.

9. Trace as retas $Q_A G, Q_B F$ e $Q_C E$. Essas retas cortam seus círculos em três pontos U, V e W (externos ao triângulo) (Figura 6).
10. Construa o círculo que passa por U, V e W (círculo de Soddy externo). Esse será tangente aos três círculos c_A, c_B e c_C (Figura 6).

Figura 6: Construção do círculo de Soddy externo.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2026.

11. Com a ferramenta *Ponto Médio ou Centro*, localize os centros dos círculos de Soddy e, por meio do ícone *Distância, Comprimento ou Perímetro*, meça os raios dos cinco círculos construídos. Em seguida, defina as variáveis correspondentes às curvaturas, por exemplo, k_A, k_B, k_C, k_s e k_S .
12. No campo de entrada, insira a expressão correspondente ao lado direito da igualdade 1, a fim de compará-la com os valores das curvaturas dos círculos de Soddy k_s e k_S .

Ao movimentar os vértices do triângulo, observa-se que os círculos se ajustam mantendo a tangência. Além disso, verifica-se que, apesar das variações nos raios, a relação permanece válida, caracterizando uma validação experimental do Teorema de Descartes.

4. Conclusões

O estudo dos Círculos de Soddy evidencia a riqueza das relações entre círculos tangentes, especialmente no que se refere aos seus raios, que podem ser compreendidos tanto por construções geométricas quanto por expressões algébricas. A utilização do GeoGebra mostrou-se eficaz para a visualização e investigação das propriedades geométricas, favorecendo a validação de resultados.

Do ponto de vista didático, o tema apresenta potencial para o ensino de Geometria, ao articular teoria e prática, contribuindo para uma aprendizagem mais dinâmica, investigativa e significativa.

Referências

- SODDY, F. The kiss precise. *Nature*, London, v. 137, n. 3477, p. 1021, 1936. Citado na página 2.
- ULIANO, J. Trabalho de Conclusão de Curso, *Círculo de Soddy: uma abordagem geométrica*. Campina Grande: [s.n.], 2021. 52 f. Citado na página 2.