ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

O INFINITO EM π: UMA EXPERIÊNCIA GEOMÉTRICA E COMPUTACIONAL

Leandro Vieira dos Santos[1] **- leandro.vdsantos@professor.educacao.pe.gov.br**
Romildo Nascimento de Lima[1] **- romildo@mat.ufcg.edu.br**
Alânnio Barbosa Nobrega[1] **- alannio@mat.ufcg.edu.br**

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Este trabalho apresenta um recorte da dissertação Do Enumerável ao Não Enumerável: uma abordagem formativa sobre o infinito (PROFMAT), voltada à formação de professores. O texto consiste em uma análise conceitual, geométrica e computacional em torno do número π. No texto é feita aproximações de π de forma geométrica, por poligonais traçadas sobre a semicircunferência de raio 1; por estimativa computacional usando contagem de pontos em um quadrado com círculo inscrito, as duas abordagens com apoio de Python; e uma discussão de um argumento visual que parece aproximar π de 4, utilizado para explicitar limites da intuição e o papel do conceito de limite. As duas abordagens produzem valores que convergem para π e ajudam a compreender o infinito como processo, enquanto o paradoxo atua como dispositivo formativo para problematizar rigor e linguagem.*
Palavras-chave*: número π; infinito; ensino de Matemática; formação de professores*

1. Introdução

O presente trabalho constitui um recorte da dissertação intitulada *Do Enumerável ao Não Enumerável: uma abordagem formativa sobre o infinito*, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). A pesquisa original teve como propósito ampliar a compreensão do conceito de infinito entre professores da Educação Básica, articulando dimensões históricas, filosóficas e matemáticas da sua construção. Ao abordar o infinito como ideia central do pensamento matemático e como desafio à sua formalização, a dissertação buscou favorecer uma leitura crítica da própria Matemática, convidando o professor a percebê-la como campo de criação, questionamento e diálogo com a história das ideias.

Neste resumo, o foco recai sobre um dos eixos centrais do trabalho: o estudo do número π. As definições exploradas na dissertação evidenciam seu duplo caráter (o linear, quando π é entendido como o comprimento de uma semicircunferência de raio 1, e o superficial, quando representa a área de um círculo de raio 1). A partir dessas definições, investigam-se formas de aproximação de π que destacam sua origem como limite de processos infinitos. A primeira abordagem é geométrica: constrói-se uma sequência de poligonais sobre o arco de um círculo de raio 1, cujos comprimentos convergem para o valor de π. Essa construção visualiza a passagem do discreto ao contínuo, materializando a noção de limite e revelando o infinito como processo de refinamento e aproximação. Em seguida, propõe-se uma abordagem experimental, baseada na geração de pontos aleatórios sobre um quadrado contendo um círculo inscrito. A razão entre os pontos tomados aleatoriamente no interior do círculo e o total de pontos fornece estimativas sucessivas de π. O uso da linguagem *Python* nessa etapa reforça o caráter formativo e investigativo da proposta, aproximando o raciocínio matemático da experimentação computacional e da realidade da sala de aula.

A discussão apresentada também se relaciona ao produto educacional derivado da dissertação. O material retoma a lógica das aproximações geométricas e propõe experimentações que envolvem perímetro, área e convergência, integrando Geometria, História e Cálculo. O estudo de π assume, assim, um papel formativo: permite discutir o infinito em situações concretas e destacar como ideias matemáticas se ampliam a partir de problemas simples, aproximando professor e estudante de uma visão mais reflexiva da Matemática.

2. Metodologia

O trabalho foi desenvolvido a partir de uma abordagem exploratória e formativa, combinando procedimentos geométricos, computacionais e conceituais. A pesquisa fundamenta-se em dois princípios complementares: a

ISSN 2764-2631

compreensão do número π como resultado de processos de aproximação sucessiva e a análise de interpretações equivocadas que emergem do uso intuitivo de construções infinitas.

Na primeira etapa, investigamos a definição de π como comprimento de uma semicircunferência de raio 1. Utilizamos a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para modelar o arco superior do círculo e, a partir de subdivisões do intervalo $[-1,1]$, construímos poligonais cujos comprimentos convergem para π. Essa análise foi conduzida com o auxílio da linguagem *Python*, que permitiu calcular sistematicamente as somas envolvidas e visualizar graficamente o comportamento das aproximações. Na segunda etapa, adotamos a definição de π como área de um círculo de raio 1. Para isso, elaboramos um experimento computacional no qual foram gerados pontos aleatórios dentro de um quadrado de lado 2, verificando-se a proporção dos pontos localizados no interior do círculo inscrito. Essa razão, aproximando-se de $\pi/4$, forneceu um procedimento probabilístico de estimativa para o número π.

Por fim, realizamos uma análise conceitual a partir de um paradoxo visual que sugere que $\pi = 4$. Essa terceira etapa teve caráter interpretativo, buscando discutir as limitações da intuição geométrica e o papel dos conceitos de continuidade e limite no tratamento rigoroso de processos infinitos. O diálogo entre os três métodos permitiu compreender π como um objeto de fronteira entre o finito e o infinito, cuja natureza só se revela plenamente sob uma perspectiva analítica.

3. Resultado e discussão

Barbosa (2012, p. 179) apresenta o número π como o comprimento de uma semicircunferência de raio 1. A partir dessa definição, buscamos um método de aproximações para o número em questão. O método envolve a função $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, cujo gráfico (Figura 1) é o arco superior de uma circunferência de raio 1 centrada na origem do plano cartesiano.

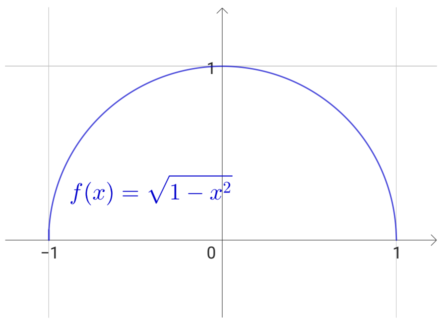

Figura 1: Gráfico da função f.
Fonte: o autor.

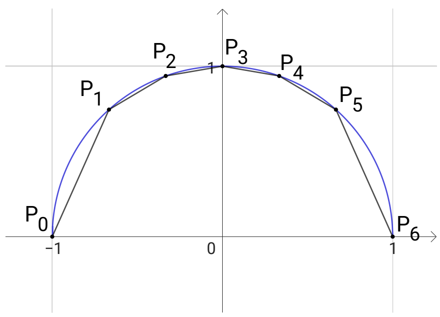

Figura 2: Pontos sobre o gráfico de f.
Fonte: o autor.

Como a curva é uma semicircunferência de raio 1, seu comprimento é π. Marquemos sobre o gráfico de f pontos igualmente espaçados na horizontal. Para cada ponto da Figura 2, tomamos $P_i = (x_i, f(x_i))$ com $x_{i+1} - x_i = \Delta x$. No intervalo $[-1,1]$, escolhendo n subdivisões iguais, obtemos $n+1$ pontos $(x_i, 0)$ dados por $x_i = -1 + i \cdot \Delta x$, onde $\Delta x = \dfrac{2}{n}$ e $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Assim, $P_i = (x_i, f(x_i))$, com $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, e a união desses segmentos consecutivos formam uma poligonal que aproxima a semicircunferência no intervalo, gráfico de f, que denotaremos por $P_0, \ldots, P_n$. À medida que aumentamos o número de subdivisões n, o valor de Δx diminui e a poligonal ajusta-se melhor à curvatura, permitindo aproximações cada vez mais precisas para o comprimento da curva, e portanto para π. Na Figura 2, traçamos a poligonal para os pontos $P_0, \ldots, P_6$; nessa situação, $n = 6$ e

$$P_i = \left(-1 + i\,\frac{2}{n},\, f\left(-1 + i\,\frac{2}{n}\right)\right), \qquad \text{com } i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

O comprimento da poligonal $P_0 P_1 \cdots P_6$ é obtido somando as medidas dos $n = 6$ segmentos:

$$\sum_{i=0}^{5} \overline{P_i P_{i+1}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5} + \overline{P_5P_6}. \tag{2}$$

ISSN 2764-2631

Cada termo é dado por

$$\overline{P_iP_{i+1}} = \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(y_{i+1} - y_i\right)^2}, \qquad y_i = f(x_i), \tag{3}$$

onde (x_{i+1}, y_{i+1}) e (x_i, y_i) são, respectivamente, as coordenadas de P_{i+1} e P_i (ambos no formato (1)). Uma forma prática de calcular a soma (2) é usar a linguagem Python; obtém-se o número 3,0842528502040896, que é uma aproximação por baixo de $\pi = 3{,}141592653589793$, coerente com a construção: os segmentos retos subestimam o arco. Aumentando a quantidade de pontos, os segmentos seguem com mais precisão o contorno da curva e os valores se aproximam do comprimento verdadeiro.

Na Figura 3, apresentamos a aproximação com 9 segmentos.

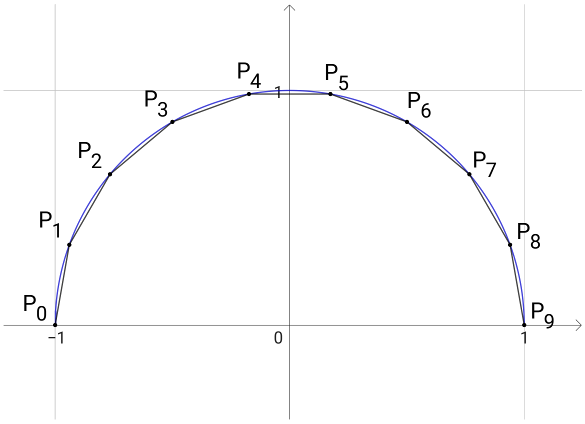

Figura 3: Aproximação da curva $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ com 9 segmentos.
Fonte: o autor.

Para a poligonal $P_0 \ldots P_9$ (isto é, $n = 9$ segmentos), obtemos 3,11054173693886, ainda inferior a π, porém superior ao obtido com menos subdivisões. A Tabela 1 resume alguns valores do comprimento da poligonal $P_0 \ldots P_n$ construída sobre o gráfico de f:

Quantidade de segmentos	**Comprimento da poligonal**
10	3,115105950558346
100	3,1407605898424658
1.000	3,141566356216479
10.000	3,1415918220397847

Tabela 1: Comprimento da poligonal $P_0 \ldots P_n$ para alguns valores de n.
Fonte: o autor.

Os números aproximam-se de $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ à medida que n cresce. Por exemplo, quando tomamos $n = 1.000.000$ obtemos 3,141592652758248 e para $n = 10.000.000$ obtemos 3,1415926535632894. Podemos, assim, admitir que π surge no limite quando $n \to \infty$ na soma (2):

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_iP_{i+1}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots \tag{4}$$

Outra maneira de definir π leva em consideração a ideia de área. Conforme autores como Lima (2012, p. 232) e Muniz Neto (2013, p. 234), π pode ser entendido como a área de um círculo de raio 1. A partir dessa definição, apresentamos um método experimental para calcular aproximações de π, considerando o círculo Π, representado na Figura 4, que tem área π e está inscrito no quadrado $ABCD$, de lado 2, cuja área é 4. Ao gerar aleatoriamente n pontos no interior do quadrado e observar quantos deles, digamos c, estão dentro do

ISSN 2764-2631

círculo Π, a razão entre as áreas indica que a proporção esperada é $\frac{c}{n} \simeq \frac{\pi}{4}$, ou equivalentemente, $\pi \simeq \frac{4c}{n}$. Essa equivalência decorre do fato de que, ao distribuir pontos de forma aleatoria a frequência relativa dos pontos que caem dentro do círculo tende a reproduzir a razão entre as áreas do círculo e do quadrado. Em outras palavras, quanto maior o número de pontos distribuídos, mais próxima a razão $\frac{c}{n}$ estará de $\frac{\pi}{4}$, expressando experimentalmente a relação geométrica entre ambas as figuras.

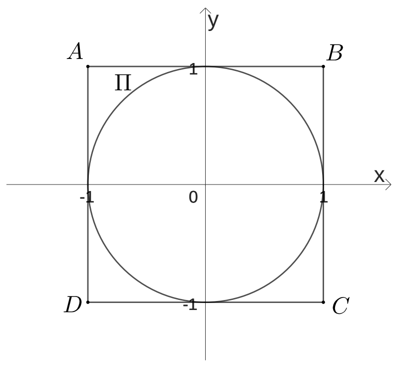

Figura 4: Círculo e quadrado centrados na origem do plano cartesiano.
Fonte: o autor.

Utilizando a linguagem *Python*, realizamos simulações com diferentes quantidades de pontos n, cujas aproximações estão apresentadas na Tabela 2.

Número de pontos	**Aproximação de π**
100	3,32
1.000	3,188
10.000	3,1288
100.000	3,1444
1.000.000	3,141432

Tabela 2: Aproximações de π obtidas por amostragem de pontos aleatórios.
Fonte: o autor.

As Figuras 5, 6 e 7 ilustram o processo de aproximação para três valores distintos de n. Os pontos que caem no interior do círculo estão destacados em laranja, enquanto os pontos externos aparecem em azul.

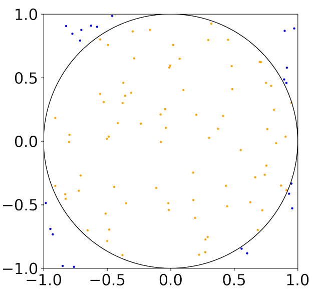

Figura 5: 100 pontos aleatórios.
Fonte: o autor.

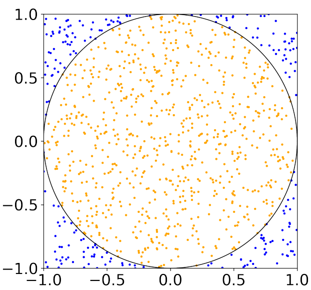

Figura 6: 1.000 pontos aleatórios.
Fonte: o autor.

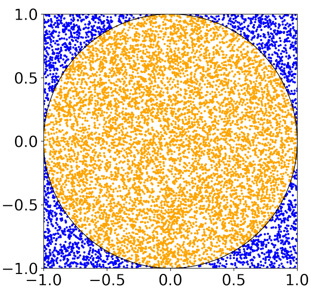

Figura 7: 10.000 pontos aleatórios.
Fonte: o autor.

Os resultados mostram que, embora possamos obter valores muito próximos de 3,14, jamais atingimos o valor exato de π. Essa característica, ligada à sua definição como limite de processos infinitos, evidencia o aspecto inatingível do número e reforça sua natureza conceitualmente infinita. Quando essa ideia é mal interpretada,

ISSN 2764-2631

podem surgir raciocínios aparentemente corretos, mas enganosos. Um exemplo notável é o argumento visual que, à primeira vista, parece demonstrar que $\pi = 4$. A construção consiste em transformar progressivamente um quadrado em uma figura que se assemelha cada vez mais a um círculo, mantendo o mesmo perímetro. O raciocínio, embora sedutor, conduz a uma conclusão absurda e nos oferece uma excelente oportunidade para discutir os limites da intuição geométrica, o papel das aproximações e a importância de conceitos como continuidade e limite no tratamento rigoroso de objetos infinitos.

Consideremos um círculo inscrito em um quadrado de lado 1, conforme ilustrado nas Figuras 8, 9 e 10. O perímetro do quadrado é 4 e o círculo nele inscrito possui diâmetro 1; portanto, determinar sua circunferência equivale a determinar o valor de π. Para aproximar o círculo, modificamos a forma do quadrado obtendo figuras de mesmo perímetro, mas com contorno progressivamente mais próximo ao da circunferência.

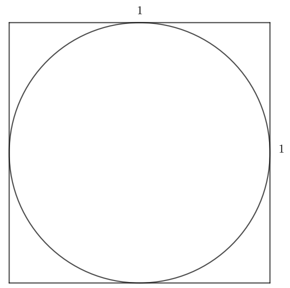

Figura 8: Quadrado de lado 1.
Fonte: o autor.

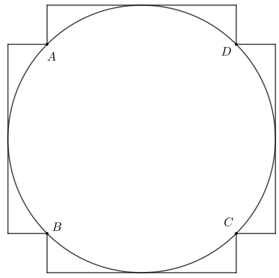

Figura 9: Polígono de 12 lados.
Fonte: o autor.

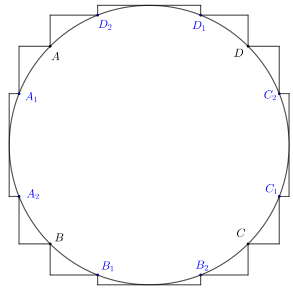

Figura 10: Polígono de 28 lados.
Fonte: o autor.

Tomando quatro pontos A, B, C e D sobre o círculo e traçando por eles perpendiculares aos lados do quadrado, obtemos um polígono de doze lados, mostrado na Figura 9. Esse polígono tem área menor que a do quadrado da Figura 8, mas o mesmo perímetro, igual a 4. Seguindo o mesmo processo, marcamos dois pontos adicionais em cada arco formado pelos vértices A, B, C e D, construindo assim um polígono de vinte e oito lados (Figura 10). Novamente, sua área é menor que a do quadrado, mas o perímetro permanece inalterado. Podemos continuar esse processo indefinidamente, obtendo polígonos com número crescente de lados, todos de perímetro 4. Visualmente, essas figuras tornam-se quase indistinguíveis de um círculo. Se admitirmos o limite desse processo, teríamos então uma figura com perímetro 4 coincidente com o círculo de diâmetro 1; logo, sua circunferência mediria 4, e portanto $\pi = 4$.

4. Conclusões

A dissertação que deu origem a este trabalho teve como propósito contribuir para a formação de professores de Matemática da Educação Básica, promovendo uma reflexão sobre o infinito em suas dimensões histórica, filosófica e matemática. O recorte aqui apresentado, além da dissertação, integra o produto educacional derivado dessa pesquisa e centra-se no estudo do número π, explorado por meio de aproximações geométricas, experimentais e reflexões conceituais. A escolha de π mostrou-se especialmente produtiva por articular ideias de geometria, probabilidade, limites e continuidade, revelando o potencial formativo de um único conceito quando investigado em profundidade. Aplicado em sala de aula, o material despertou o interesse e a participação dos estudantes, que puderam compreender a noção de aproximação e discutir o caráter infinito de certos processos matemáticos. O estudo de π, enquanto número que nasce do finito e aponta para o infinito, sintetiza essa perspectiva e reafirma a relevância de abordagens que valorizem o pensamento investigativo e o diálogo entre diferentes linguagens na Educação Matemática.

Referências

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 2.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 3.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria.* Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 3.