



O MÉTODO DE HIRANO PARA A CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR

Wedes Junior Gomes de Oliveira¹ - wedes.junior@aluno.uepb.edu.br
Arlandson Matheus Silva Oliveira² - arlandsonm@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

¹Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas - Patos, PB, Brasil

Resumo: Utilizando um método desenvolvido pelo matemático japonês Yoshifusa Hirano, dividimos, apenas com compasso e régua não graduada, uma circunferência em cinco partes iguais e, com isso, podemos construir um pentágono regular. Apresentamos a justificativa matemática para a precisão do método de Hirano, demonstrando como a construção se baseia em certas propriedades trigonométricas, como o valor de $\sin 18^\circ$. Essa construção conecta-se à habilidade EF08MA15 da Base Nacional Comum Curricular, ressaltando sua relevância pedagógica para o ensino de polígonos regulares.

Palavras-chave: Pentágono regular; Divisão da circunferência; Geometria euclidiana.

1. Introdução

A primeira maneira sistematizada de dividir uma circunferência em cinco arcos congruentes, usando um compasso e uma régua não marcada, é derivada da Proposição 11 contida no Livro IV d'Os Elementos de Euclides, no tópico denominado "Inscrever, no círculo dado, um pentágono tanto equilátero quanto equiângulo" (EUCLIDES, 2009). O método de Euclides estabelece a base teórica para essa construção, garantindo a precisão da divisão.

No entanto, a História da Geometria oferece outras abordagens. O matemático japonês Yoshifusa Hirano é creditado com um método alternativo para dividir uma circunferência em cinco partes iguais, conforme documentado por (FUKAGAWA, 1997). A beleza desse processo é sua aplicabilidade: uma vez que a circunferência é dividida em cinco, é um passo simples dividi-la em dez ou até vinte partes iguais.

A divisão de uma circunferência em cinco partes é mais do que uma demonstração de habilidades. É um elo entre diferentes culturas e épocas, unindo o pensamento de Euclides com as inovações de matemáticos posteriores, como Hirano, e revelando a beleza intrínseca e universal da Matemática.

A habilidade EF08MA15 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) requer que os alunos sejam capazes de "Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 60° e polígonos regulares" (BRASIL, 2018). Embora a construção do pentágono não seja explicitamente mencionada, a habilidade de construir polígonos regulares engloba essa tarefa. Além disso, a sua realização prática envolve a aplicação de conceitos de mediatriz e ângulos, estabelecendo uma conexão direta entre o conhecimento histórico e a aplicação pedagógica atual.

Nosso trabalho faz parte de uma pesquisa de mestrado, já concluída (OLIVEIRA, 2025), no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), no qual o primeiro autor foi orientado pelo segundo.

2. Construção do pentágono regular por Y. Hirano

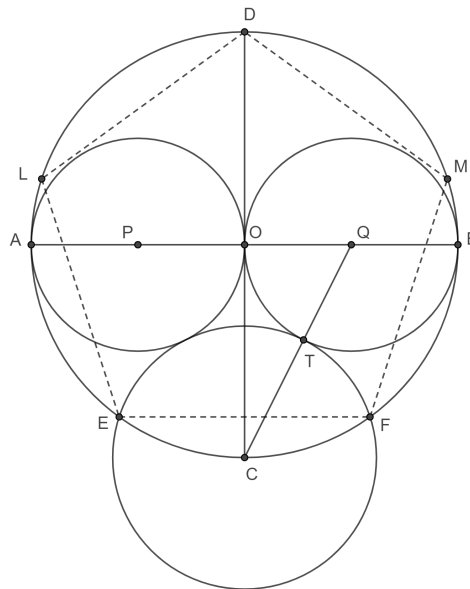
2.1 Passos para construção

1. Construa a circunferência de raio r e centro O ;
2. Trace os diâmetros \overline{AB} e \overline{CD} perpendiculares;
3. Trace os pontos médios de \overline{AO} e \overline{BO} , obtendo os pontos P e Q , respectivamente;
4. Com a ponta seca do compasso em P e comprimento \overline{PO} , trace a circunferência de diâmetro \overline{AO} ;



5. Com a ponta seca do compasso em Q com abertura \overline{PO} , trace a circunferência de diâmetro \overline{BO} ;
6. Trace o segmento \overline{CQ} interceptando a circunferência do passo anterior em T ;
7. Com a ponta seca do compasso em C com abertura \overline{CT} , trace uma circunferência, interceptando a circunferência inicial em E e F , que são vértices consecutivos de um pentágono regular inscrito na circunferência inicial;
8. Com abertura do compasso de E a F construindo os vértices M, D e L . Unindo todos os vértices, encontramos o pentágono regular;
9. Bissecando os ângulos obtemos um decágono, e assim sucessivamente.

Figura 1: Divisão de uma circunferência em 5 partes iguais



2.2 Justificativa

O triângulo COQ é retângulo em O , donde:

$$\overline{CQ} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por construção,

$$\overline{CE} = \overline{CF} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Por outro lado, seja o ângulo $\gamma = \widehat{CDF}$. Então:

$$\text{sen } \gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

O valor $\gamma = 18^\circ$, cuja relação $\text{sen } \gamma = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$ é um resultado fundamental da geometria do pentágono regular, é estabelecido em (KHAN, 2020). Pelo teorema do ângulo inscrito, $\widehat{COF} = 2 \cdot \widehat{CDF} = 36^\circ$; logo, $\widehat{EOF} = 72^\circ$, como queríamos mostrar.



Figura 2: Divisão de uma circunferência em 5 partes iguais.

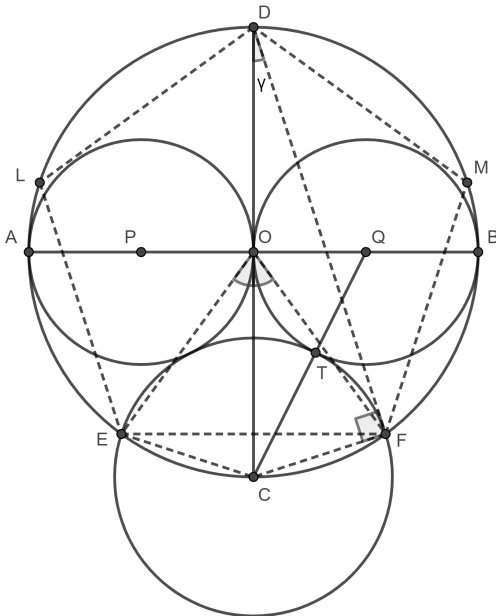
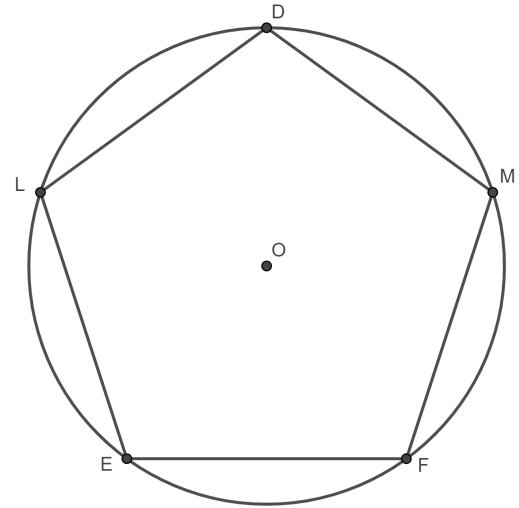


Figura 3: Pentágono regular inscrito correspondente.



Justificativa de que $\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Para mostrarmos que $\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, observe os dois triângulos isósceles abaixo de base 1 (Figura 4 e Figura 5).

Do triângulo BCD , temos:

$$\frac{n}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{1}{\text{sen } 72^\circ}. \quad (1)$$

Mas

$$\text{sen}(2x) = 2 \cdot \text{sen } x \cos x \implies \text{sen } 72^\circ = \text{sen}(2 \cdot 36^\circ) = 2 \cdot \text{sen } 36^\circ \cos 36^\circ. \quad (2)$$

Substituindo a equação (2) na equação (1), obtemos:

$$\frac{n}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \text{sen } 36^\circ \cos 36^\circ} \implies \cos 36^\circ = \frac{1}{2n}. \quad (3)$$

Por semelhança,

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{n+1} \implies n^2 + n - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação anterior, obtemos:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies 2n = -1 + \sqrt{5}. \quad (4)$$

Substituindo a equação (4) na equação (3), obtemos:



$$\cos 36^\circ = \frac{1}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Por outro lado,

$$\cos 72^\circ = \cos(2 \cdot 36^\circ) = 2 \cdot \cos^2 36^\circ - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Pela propriedade que envolve senos e cossenos de ângulos complementares, temos:

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

como queríamos mostrar.

Figura 4: Triângulo isósceles de base 1

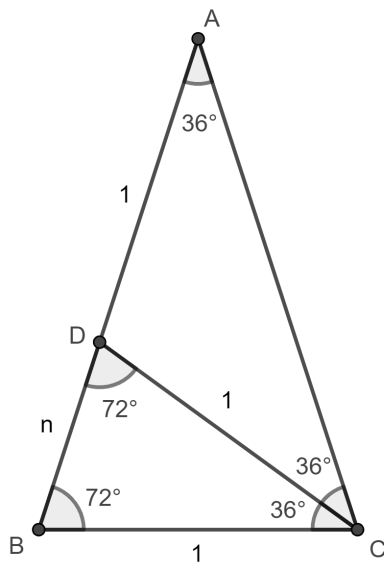
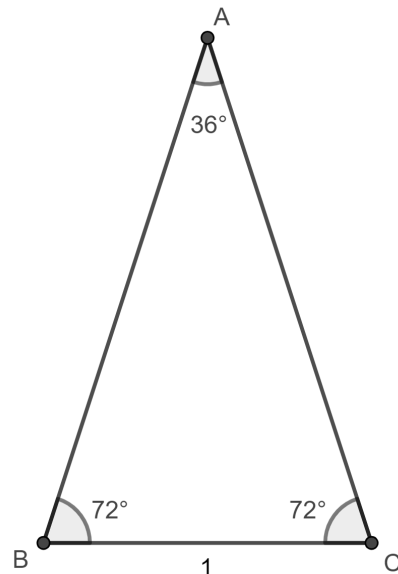


Figura 5: Triângulo isósceles de base 1



3. Conclusões

A escolha pelo método de Hirano para a construção do pentágono regular revela-se especialmente vantajosa em comparação ao método clássico de Euclides. Sua maior rapidez, precisão e clareza fazem dele não apenas uma alternativa eficiente para aplicações práticas, mas também uma excelente ferramenta didática.

A abordagem direta e intuitiva do método de Hirano, se levada para a sala de aula, pode ajudar a transformar o ensino de Geometria em uma experiência mais dinâmica e significativa. Ao eliminar etapas excessivamente complexas, ele favorece a assimilação dos conteúdos e estimula o engajamento dos estudantes, criando um ambiente de aprendizagem mais acessível e motivador.

Como recurso pedagógico, o método se destaca por sua capacidade de tornar conceitos abstratos mais concretos e visualmente compreensíveis. Isso permite que professores conduzam aulas mais assertivas e que alunos desenvolvam uma compreensão sólida dos fundamentos geométricos, mesmo em níveis iniciais de formação. Sua simplicidade não compromete a profundidade matemática, mas, sim, potencializa o aprendizado ao tornar a construção geométrica mais clara e objetiva.



Por esses motivos, a adoção do método de Hirano representa não apenas um avanço na prática geométrica, mas também uma contribuição valiosa para a formação educacional, reforçando seu papel como ferramenta didática de excelência.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Citado na página 1.

EUCLIDES. *Os elementos*. São Paulo: Editora da UNESP, 2009. Citado na página 1.

FUKAGAWA, H. Symmetry in traditional japanese mathematics. *Symmetry: Culture and Science*, v. 8, n. 1, p. 24–54, 1997. Citado na página 1.

KHAN, S. A. Trigonometric ratios using geometric methods. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, v. 9, n. 10, p. 8685–8702, 2020. Citado na página 2.

OLIVEIRA, W. J. G. *Métodos para divisão de segmentos, circunferências, áreas e ângulos em partes (quase) iguais usando apenas régua e compasso*. Campina Grande: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, 2025. Citado na página 1.