ISSN 2764-2631

UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DA BORBOLETA

Natanael Silva Ribeiro [1] - natanael.s@aluno.uepb.edu.br
Aldo Trajano Lourêdo [1] - aldo@setor.uepb.edu.br

[1]Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande-PB, Brasil

Resumo: *Abordamos neste trabalho algumas maneiras de facilitar a aplicação de conceitos geométricos e melhorar a compreensão de estudantes e professores da Educação Básica em relação ao tema em tela. Nos propomos a contribuir com o tema em destaque de forma inovadora com o intuito de melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Apresentamos aqui o Teorema da Borboleta e uma aplicação, com o propósito de mostrar ao público a importância do uso das tecnologias no processo educativo, bem como despertar potenciais nos estudantes, fortalecendo seu raciocínio lógico dedutivo, suas habilidades e contribuindo de forma significativa para sua formação. Ao término da demonstração do teorema e da resolução do problema proposto temos um* ***link*** *de direcionamento para o acesso às construções e animações que fizemos com uso do software GeoGebra.*
Palavras-chave*: Geometria Plana; Teorema da Borboleta; Aplicações.*

1. Introdução

O Teorema da Borboleta é um resultado clássico da geometria plana que trata sobre o ponto médio de uma corda de uma circunferência. Em síntese, o teorema afirma que dada uma corda $\overline{AB}$ de uma circunferência podemos escolher quaisquer dois pontos sobre a circunferência, digamos F e H, e a partir destes pontos traçarmos outras duas cordas $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ passando por M, ponto médio da corda $\overline{AB}$.

Em seguida, ligamos o ponto E ao ponto H, formando outra corda, $\overline{EH}$ que corta a corda $\overline{AB}$ no ponto N. Do mesmo modo, ligamos G a H, formando a corda $\overline{GH}$ que por sua vez intercepta $\overline{AB}$ em L e assim $\overline{NM} = \overline{ML}$.

Apresentamos neste trabalho o Teorema da Borboleta e uma aplicação sua: **o problema 3 da Olimpíada de Matemática do Cone Sul.** A demonstração deste teorema foi realizada em três casos distintos na dissertação que apresentamos como trabalho de conclusão de curso ao (PROFMAT), aqui vamos tratar apenas do primeiro caso da demonstração, os demais seguem uma linha de raciocínio semelhante.

Na sequência, fizemos uma animação com o auxílio crucial do *software* GeoGebra tanto do primeiro caso da demonstração do teorema quanto do passo a passo da resolução do problema 3 citado anteriormente. enfatizamos uma maior clareza e uma melhor assimilação causadas por essas animações, principalmente naqueles estudantes que têm um maior grau de dificuldade quanto à visualização de figuras. Ao término de cada demonstração, temos o link de direcionamento para o acesso às construções e animações, em que utilizamos, simultaneamente, um tutorial sequencial e explicativo.

Nosso propósito é mostrar ao público a importância do uso das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, bem como despertar potenciais nos estudantes, fortalecendo seu raciocínio lógico dedutivo, suas habilidades e contribuir de forma significativa para a sua formação.

Ainda de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), várias habilidades alfanuméricas que concernem à Unidade Temática de **Geometria** são contempladas na Educação Básica, destacando a importância do uso de *softwares* de geometria dinâmica, como é o caso do GeoGebra.

Temos o objetivo de despertar em estudantes e professores da educação básica os conhecimentos que os conceitos matemáticos podem atingir, em particular, os da geometria plana. Tais conceitos formam uma base muito importante para diversos teoremas e resultados geométricos, como é o caso do Teorema da Borboleta e suas aplicações em olimpíadas de matemática.

2. O Teorema da Borboleta

A palavra francesa *papillon* significa **borboleta**, por esta razão, aqui no Brasil os teoremas de papillon são conhecidos como o **Teorema da Borboleta**.

Figura 1 – Teorema da Borboleta.

Fonte: Bastidas, 2025.

Isso se deve ao fato de que a figura que se obtém ao desenharmos o diagrama descrito a partir do enunciado do teorema tem uma notável semelhança com as asas de uma borboleta.

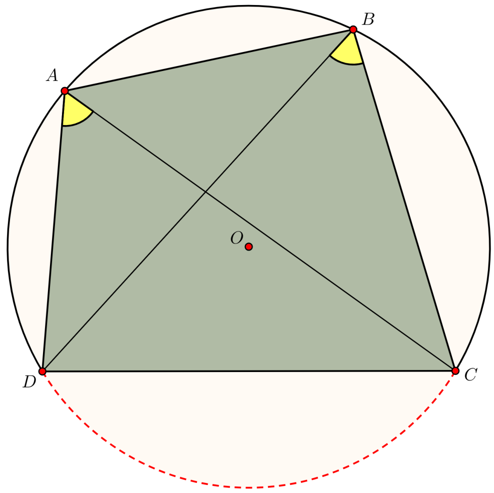
O Teorema da Borboleta só foi demonstrado pela primeira vez no ano de 1804, pelo matemático escocês William Wallace. Nesse período, a matemática passava por um momento de grande avanço, inclusive com a contribuição de Wallace na geometria projetiva e em outros ramos da matemática.

Atualmente diversas provas deste teorema já foram exploradas, como por exemplo nas áreas: analítica, geométrica e complexa.

Para nos auxiliar na demonstração deste teorema vamos fazer uso de um lema que nos apresenta um dos casos de quando um quadrilátero é inscritível.

Lema 2.1. *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Figura 2 – Quadrilátero inscritível.



Fonte: Elaboração própria.

Seguindo a referência Bastidas (2025), apresentamos o Teorema da Borboleta acompanhado de sua demonstração feita de maneira detalhada.

Teorema 2.2. ***(Borboleta).*** *Seja M o ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ de um círculo, através do qual outras duas cordas $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são traçadas; $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ cruzam a corda $\overline{AB}$ nos pontos N e L, respectivamente. Então M é o ponto médio de $\overline{NL}$.*

ISSN 2764-2631

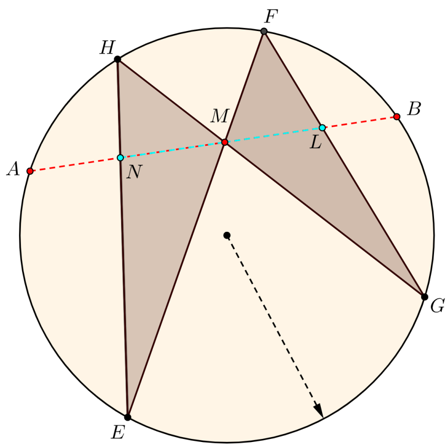
Demonstração. No primeiro caso, a corda $\overline{AB}$ está contida na circunferência e os pontos N e L também.

- **1º caso:** Se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então $\overline{NM} = \overline{ML}$.

  De fato, por hipótese, $\overline{AM} = \overline{MB}$ o que implica $\overline{AB} \perp \overline{MO}$, pois $\overline{MO}$ é um diâmetro que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.

  Observe a figura a seguir.

Figura 3 – Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

A próxima figura apresenta todos os dados necessários para a demonstração do 1º caso, vejamos:

A partir do ponto G traçamos o segmento $\overline{GS}$ de modo que $\overline{GS} \perp \mathcal{L}$, em que $\mathcal{L}$ é a reta que passa por O. Note que o ΔGMS é isósceles de base $\overline{GS}$, ou seja, $\overline{MS} = \overline{MG}$ e consequentemente os ângulos

$$M\hat{S}G = M\hat{G}S = \theta.$$

Por outro lado, o ângulo $S\hat{E}H$ é ângulo inscrito e tem em comum o mesmo arco que o ângulo $M\hat{G}S$, isto é,

$$\measuredangle S\hat{E}H = \measuredangle M\hat{G}S = \measuredangle M\hat{S}G = \theta.$$

No quadrilátero $EMNS$ são congruentes os ângulos $S\hat{E}N$ e $N\hat{M}S$, já que $N\hat{M}S$ e $M\hat{S}G$ são ângulos alternos internos, o que implica, pelo Lema que este quadrilátero é inscritível.

Sendo assim, existe uma circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero $EMNS$, ou seja, os ângulos $N\hat{S}M$ e $N\hat{E}M$ compartilham do mesmo arco, $\widehat{AB}$. Logo,

$$N\hat{S}M = N\hat{E}M = \alpha.$$

Portanto, os triângulos MNS e GLM são congruentes pelo **caso ALA**. Isto é, os lados $\overline{MN}$ e $\overline{LM}$ são iguais e, consequentemente, $a = b$, como queríamos demonstrar. □

A seguir temos o **link** de acesso à construção e animação feitas no GeoGebra:

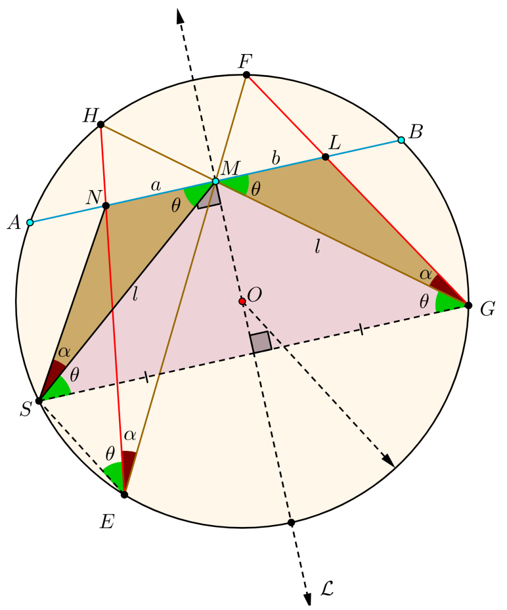
- https://www.geogebra.org/classic/uzcxcrdj

3. Uma Aplicação do Teorema da Borboleta: problema 3 da Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Nesta seção vamos trazer o exemplo do problema 3 da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, disponível no (Blog do Madeiro), site do professor Renato Madeira, acessado em 18/12/2024.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Figura 4 – Demonstração do 1º caso do Teorema da Borboleta.



Fonte: Bastidas, 2025.

Problema.

Seja ABC um triângulo acutângulo, com $\overline{AC} < \overline{BC}$ e Γ a circunferência que passa por A, B e C. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$. Seja F um ponto sobre o segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{CA} = \overline{CF}$ e seja E um ponto do segmento $\overline{BC}$ tal que $\overline{EB} = \overline{EF}$. A reta $\overleftrightarrow{AM}$ intersecta Γ no ponto D (diferente de A). A reta $\overleftrightarrow{DE}$ intersecta a reta $\overleftrightarrow{FM}$ em G. Demonstrar que G pertence a Γ.

Demonstração. Tracemos os segmentos $\overline{CX} \parallel \overline{AB}$, daí, $\overline{BX} = \overline{AC}$. Como por hipótese, $\overline{AC} = \overline{CF}$, logo, $\overline{BX} = \overline{AC} = \overline{CF}$. Ou seja, o quadrilátero $BXCF$ é um paralelogramo e o quadrilátero $BXCA$ é um trapézio isósceles.

Como as diagonais do paralelogramo $BXCF$ intersectam-se em seus respectivos pontos médios e por hipótese M é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{FX} \cap \overline{BC} = M$. Observe que $\measuredangle L\hat{C}X = \measuredangle E\hat{B}F = \alpha$, uma vez que $\overline{CX} \parallel \overline{BF}$ enquanto $\overline{BC}$ é uma transversal.

Ainda, como $\overline{EB} = \overline{EF}$, temos que o triângulo BEF é isósceles de base $\overline{BF}$ e daí, $\measuredangle B\hat{F}E = \measuredangle E\hat{B}F = \alpha$. Note também que o ângulo inscrito $E\hat{B}F$ compartilha o mesmo arco que o ângulo inscrito $C\hat{X}L$, isto é, $\measuredangle E\hat{B}F = \measuredangle C\hat{X}L = \alpha$. Ou seja, o triângulo CXL é isósceles de base $\overline{CX}$ e como o quadrilátero $BXCF$ é um paralelogramo temos que $\overline{CX} = \overline{BF}$, o que implica que os triângulos BEF e CXL são congruentes pelo **caso ALA**.

Logo, $\overline{XL} = \overline{CL} = \overline{BE} = \overline{FE}$, o que acarreta $\overline{BE} = \overline{CL}$ e como por hipótese M é ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{BM} = \overline{CM}$. Portanto, $\overline{EM} = \overline{ML}$. Dessa forma, podemos concluir pelo Teorema da Borboleta que o ponto $G \in \Gamma$, como queríamos demonstrar. □

Novamente deixamos o **link** de acesso à construção e animação realizadas com o *software* GeoGebra:

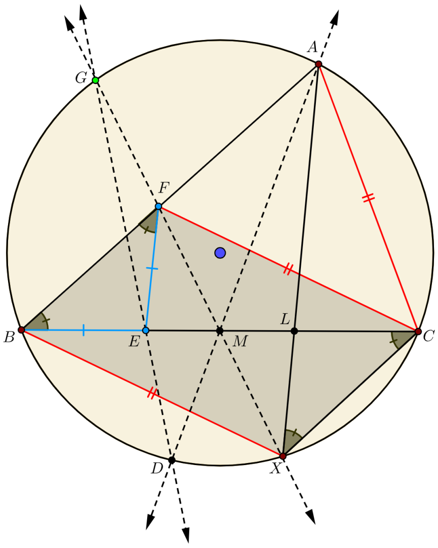
- https://www.geogebra.org/classic/bqxtr9mp

4. Conclusões

O ensino de Geometria tem se tornado, muitas vezes, de difícil transmissão e assimilação, quando nos referimos à visualização de figuras planas e espaciais, interpretação de gráficos, entre outros. Entretanto,

ISSN 2764-2631

Figura 5 – Olimpíada de Matemática do Cone Sul, 2020.



Fonte: Madeira, 18/12/2024.

podemos inferir ações estratégicas para resolver problemas e melhorar o processo de ensino-aprendizagem da Geometria na Educação Básica.

O uso do *software* GeoGebra nas aulas de Geometria as torna mais atrativas, interativas e eficazes, convencer os estudantes da importância dos resultados geométricos torna-se uma tarefa menos árdua, pois temos em mãos um instrumento de trabalho muito eficiente. Mais ainda, quando aplicamos o GeoGebra como uma ferramenta complementar no passo a passo das construções realizadas, tivemos a oportunidade de mostrar como o *software* pode enriquecer e fortalecer nossos conhecimentos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, à minha família e a todos os colegas e professores!

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), seu apoio foi fundamental para a realização desse Mestrado, sua pontualidade mostra o seu compromisso com a educação.

Referências

BASTIDAS, Julio Orihuela. **Circunferencia: teoría-demonstraciones trazos auxiliares**. Cuzcano.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CLASSIC, GeoGebra. **GeoGebra Classic.** Disponível em: https://www.geogebra.org/classic.

MADEIRA, Renato. **Blog do Madeiro.** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1riiJSoY5QVozwcPPNS5Ckg7fTH
Acesso em: 18/12/2024.