Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Algumas Equivalências Pouco Conhecidas sobre a Completude dos Números Reais

por

Daniela da Silva Enéas

sob orientação de

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Março de 2018

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Daniela da Silva Enéas

Algumas Equivalências Pouco Conhecidas sobre a Completude dos Números Reais

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB, Março de 2018
Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

Algumas Equivalências Pouco Conhecidas sobre a Completude dos Números Reais

Daniela da Silva Enéas

Comissão Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Orientador

Prof. Dr.Denilson da Silva Pereira
Examinador

Prof. Dr. José Fernando Leite Aires
Examinador

Agradecimentos

Na caminhada da vida encontramos muitos obstáculos, muitas dificuldades e muitas decepções. Porém, Deus, do alto da sua misericórdia põe em nossos caminhos pessoas especiais que tornam a nossa vida doce e cheia de momentos especiais, nos fazendo superar todos os momentos ruins.

Dessa forma, começo o meu texto agradecendo a Deus pelo dom da vida, pela saúde, pela força e por todas as pessoas que ele colocou em meu caminho para me ajudar, e para dividir todos os meus momentos, sejam eles bons ou ruins.

Como não poderia ser diferente, agradeço aos meus pais, Evanildo Enéas de Almeida e Erenilda da Silva Enéas, que me deram a vida, que me ensinaram, que me apoiaram, e nunca me abandonaram mesmo nos momentos mais difíceis da minha vida. Agradeço também por todo esforço que eles fizeram para que eu estudasse e conseguisse realizar meu sonho. E ainda agradeço, por terem me dado o melhor presente que eles podiam me dar, que foi o meu irmão Danilo da Silva Enéas, que é meu companheiro e a pessoa com quem eu menos arrengo nesse mundo. E não podia deixar de agradecer também aos meus avós, que sempre me derem muito carinho e aos meus tios.

Quero agradecer também a Lucas da Silva, um presente de Deus na minha vida, meu companheiro nos estudos e na vida, o qual foi umas das peças fundamentais para que eu conseguisse concluir o curso com êxito. Pois, foi ele que enxugou uma grande parte de minhas lágrimas e, em muitos momentos, segurou a minha mão, me ajudando a não desistir.

Não posso deixar de agradecer também a todas que fazem parte do Clube do Macarrão de Dona Nilda, são elas: Márcia Regina, Rubiane Farias, Aniete Andrade, Camila Paulino, Anna Karla Borba, Kaline Ambrósio, Stefanny Kelly, Flor Alves. Agradeço a elas por tornar minha vida mais especial em cada momento que estivemos juntas. Ainda tem as minhas galegas favoritas, Abigail e Atalia, agradeço pelos muitos e diferentes momentos que vivemos juntas, pelos chás da tarde, pelas paródias para aliviar o desespero. E por mesmo distantes, não terem esquecido de mim.

Agradeço também a todos os membros do PET - Matemática/UFCG, das diversas gerações pela ajuda em disciplinas, pelas conversas, pela hora do café, e por todos os momentos sejam eles de trabalho ou de descontração. Agradeço muito, pois boas companhias são fundamentais para manter a sanidade mental (ou pelo menos o que resta dela), depois de tantos entes abstratos. Em especial, gostaria de citar os nomes de Lucas da Silva, Emanuel Carlos, Tiago Alves, Renato de Melo, Ismael Sandro, Lucas Siebra e Caio Antony, pois esses são meus contemporâneos de PET e parceiros nas disciplinas. Agradeço ainda ao PET-Matemática e Estatística, em especial a José Lucas e ao professor José Lindonberg Possiano Barreiro, por todos os momentos e pelas contribuições acadêmicas.

Ao professor Daniel Cordeiro de Morais Filho, agradeço por todo seu empenho, e dedicação enquanto professor, tutor, orientador e amigo. Agradeço por não desistir de mim, na hora em que, até eu mesma, tinha desistido. E como fruto da sua insistência nasceu este trabalho. Agradeço também aos professores Bruno Sérgio Vasconcelos de Araújo, Aparecido Jesuíno de Souza, Severino Horácio da Silva meus orientadores de iniciação científica. E não poderia deixar de agradecer ao professor Claudianor Oliveira Alves, por seus conselhos, e por sua dedicação ao ensino. Por fim agradeço a todo o pessoal UAMat-UFCG, pelas contribuições na minha vida acadêmica.

Introdução

Muitos dos estudos da área de análise são realizados com os números reais, mas você já parou para pensar no porquê do corpo dos números reais receber tanto destaque nos estudos matemáticos?

E o porquê de não desses estudos não serem feitos apenas com o corpo dos racionais já que é um corpo menor? Será que isso não facilitaria os estudos? Isso ocorre porque além de ser ordenado, o corpo dos números reais também é completo e mais, ele é o único com essa característica, a menos de isomorfismo [6].

Usualmente para definir a completude dos números reais utiliza-se o axioma de Dedekind [2]. O que é pouco visto na Academia é que esse não é o único caminho para definir essa propriedade. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é apresentar um teorema, que segundo a nossa opinião, é pouco conhecido, que é a equivalência dos seguintes resultados: o postulado de Dedekind, o teorema dos intervalos encaixantes, a propriedade arquimediana dos números reais, o teorema de Heine-Borel, a definição de conexidade, o teorema de Bolzano-Weiestrass e a convergência das sequências de Cauchy. Mostraremos que quaisquer desses resultados anteriores definem a completude dos números reais.

Capítulo 1

Neste capítulo, vamos enunciar o teorema principal e os vários resultados que o compõem. E ainda, explicamos como será a disposição dos resultados e as abreviações usadas ao longo do texto.

O teorema principal chamaremos de O Grande Teorema, pois envolve muitos resultados importantes e famosos da análise. Podemos ver esse teorema esquematizado na Figura 1.1

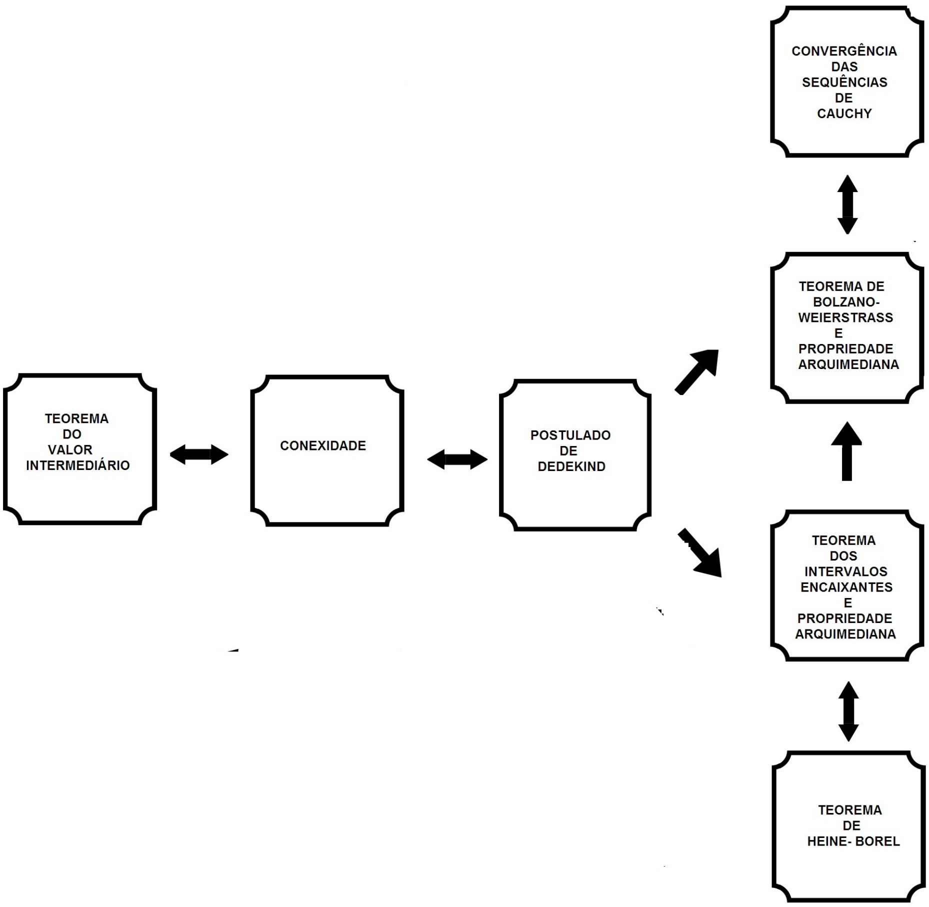


Figura 1.1

Vamos agora enunciar todos os resultados envolvidos no Grande Teorema.

Postulado de Dedekind: Se um subconjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ é limitado superiormente, então X possui um supremo que ainda pertence a $\mathbb{K}$.

Propriedade Arquimediana: O corpo $\mathbb{K}$ é munido da Propriedade Arquimediana, se dado $x > 0$ em $\mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.

Teorema 1.1 (Intervalos Encaixantes)**:** .

(i) *Dada uma sequência decrescente $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$, de intervalos fechados, limitados e não vazios. Então, a interseção desses intervalos é diferente de vazio;*

(ii) *Se o ínfimo do comprimento dos intervalos I_n é zero, então a interseção dos intervalos é um único ponto $p \in \mathbb{K}$.*

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass)**:** *Toda sequência $(x_n) \subseteq \mathbb{K}$ limitada, possui pelo menos uma subsequência convergente.*

Teorema 1.3 (Heine-Borel)**:** *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ é compacto se, e somente se, X possui a propriedade de subcobertura finita, isto é, toda cobertura de X admite uma subcobertura finita.*

Teorema 1.4 (Valor Intermediário)**:** *Se $f : X \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ é contínua e existem $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $a < b$ e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in X$ tal que $f(c) = 0$.*

Definição 1.5: *Dizemos que o conjunto X é conexo, quando ele só admite uma cisão trivial.*

Vejamos o enunciado do Grande Teorema:

Teorema 1.6 (O Grande Teorema)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então as seguintes sentenças são equivalentes:*

(a) $\mathbb{K}$ *cumpre o postulado de Dedekind;*

(b) $\mathbb{K}$ *é Arquimediano e cumpre o Teorema dos Intervalos Encaixantes;*

(c) $\mathbb{K}$ *é Arquimediano e cumpre o Torema de Bolzano-Weierstrass;*

(d) $\mathbb{K}$ *cumpre o Teorema de Heine-Borel;*

(e) $\mathbb{K}$ *é Arquimediano e todas as sequências de Cauchy convergem em* $\mathbb{K}$*;*

(f) $\mathbb{K}$ *é conexo;*

(g) $\mathbb{K}$ *cumpre o Teorema do Valor Intermediário.*

Por envolver muitos resultados e por facilidade, a demonstração desse teorema será dividida em cinco ciclos, mostrados ao longo dos próximos capítulos, da seguinte forma:

O primeiro ciclo é a equivalência entre os itens $(a), (b)$ e (c), no segundo ciclo é a equivalência entre os itens (c) e (e), terceiro ciclo equivalência entre os itens (b) e (d), no quarto ciclo a equivalência entre os itens (f) e (g) e por fim, no quinto ciclo concluiremos com a equivalência entre os itens (a) e (f). E, mais, para facilitar a citação dos teoremas vamos usar as seguintes abreviações para os resultados:

$$\begin{pmatrix} (PD) & \text{Postulado de Dedekind;} \\ (PA) & \text{Propriedade Arquimediana;} \\ (TEI) & \text{Teorema do Intervalos Encaixantes;} \\ (TBW) & \text{Teorema de Bolzano-Weierstrass;} \\ (THB) & \text{Teorema de Heine-Borel;} \\ (CSC) & \text{Convergência da Sequência de Cauchy;} \\ (C) & \text{Conexidade;} \\ (TVI) & \text{Teorema do Valor Intermediário.} \end{pmatrix}$$

Lembrando que todas as definições e resultados que são necessários ao decorrer dos capítulos, estão enunciados e demonstrados nos apêndices.

Capítulo 2

Primeiro Ciclo

Neste ciclo, é demonstrada equivalência entre o Postulado de Dedekind (PD), o Teorema de Bolzano-Weierstrass (TBW) e, o Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE) e a propriedade Arquimediana (PA), como mostrado na Figura 2.1.

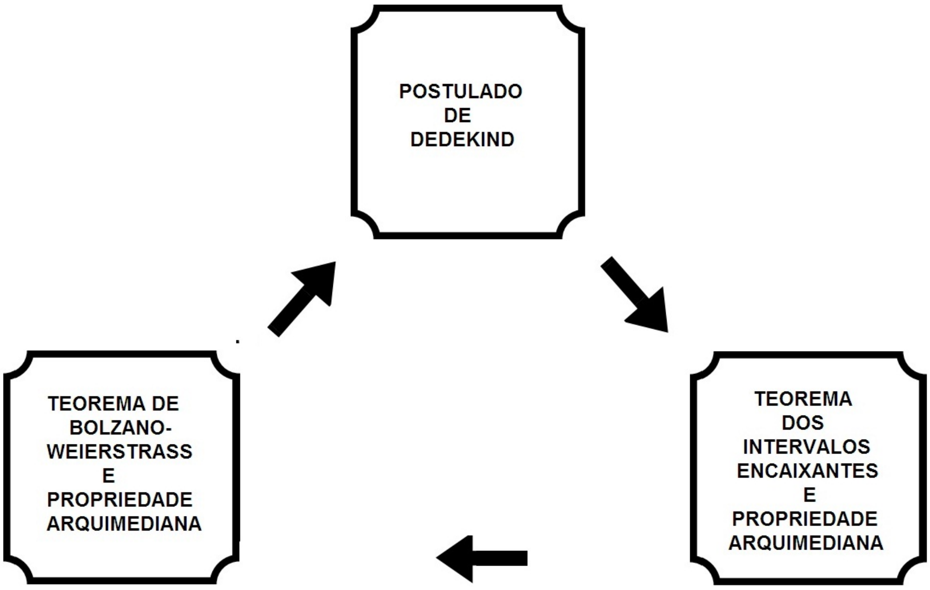


Figura 2.1

Teorema 2.1 (PD $\Rightarrow$ TIE e PA)**:** *Se* $\mathbb{K}$ *é um corpo ordenado que cumpre o Postulado de Dedekind, então* $\mathbb{K}$ *também é Arquimediano e cumpre o Teorema dos Intervalos Encaixantes.*

Demonstração:

Vamos começar provando o item **(i)** do Teorema dos Intervalos Encaixantes (ver Teorema 1.1). Para isso, consideremos uma sequência decrescente, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ de intervalos fechados, limitados e não- vazios. Assim podemos definir

$I_n := [a_n, b_n]$. Logo,

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Sejam $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. Como $I_n \neq \emptyset$, então A e B são não-vazios. Pela forma como estão dispostos os intervalos temos

$$a_i \leq b_j, \ \forall i, j \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Pela expressão (2.1), A é limitado superiormente por b_n, e B é limitado inferiormente por a_n. Assim, pelo Postulado de Dedekind, existem $\inf B, \sup A \in \mathbb{K}$.

E ainda, como $a_n \in A$ é cota inferior de B, pela definição de ínfimo , implica que $a_n \leq \inf B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\inf B$ é uma cota superior de A e pela definição de supremo, $\sup A \leq \inf B$ (ver Definição 7.11). Portanto,

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq \sup A \leq \inf B ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, temos $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq [\sup A, \inf B]$.

Dado $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, temos $a_n \leq x \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, x é uma cota superior para A e, portanto $\sup A \leq x$. Por outro lado, x é cota inferior para B e, logo $x \leq \inf B$. Implicando que $x \in [\sup A, \inf B]$. Provando que,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\sup A, \inf B] \neq \emptyset.$$

Vamos provar o item **(ii)** do Teorema 1.1. Suponha que $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, isto é, $a_n \leq x \leq y \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$0 \leq |y - x| \leq |b_n - a_n|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como $inf\{|b_n - a_n|; n \in \mathbb{N}\} = 0$, e $|y - x|$ é uma cota inferior para $\{|b_n - a_n|; n \in \mathbb{N}\}$, então

$$0 \leq |y - x| \leq 0 \Rightarrow x = y,$$

E portanto, concluímos que a interseção é unitária. E para finalizar a demonstração, falta mostrarmos que $\mathbb{K}$ é Arquimediano.

Suponha que o conjunto dos números naturais é limitado. Então, por hipótese, existe o $\sup \mathbb{N}$. Daí, $\sup \mathbb{N} \geq n+1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\sup \mathbb{N} - 1 > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de supremo (ver Definição 7.11), $\sup \mathbb{N} - 1 \geq \sup \mathbb{N}$, o que é um absurdo já que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado. E portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado, e pelo Teorema 7.5, $\mathbb{K}$ é arquimediano. Concluindo a demonstração do resultado.

$\blacksquare$

Teorema 2.2 ($TIE \Rightarrow TBW$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado e arquimediano e que cumpre o Teorema dos Intervalos Encaixantes, então $\mathbb{K}$ cumpre também o Teorema de Bolzano-Weierstrass .*

Demonstração: Seja $X \subseteq \mathbb{K}$ infinito e limitado. Como X é limitado, então ele possui cota superior e inferior (Ver Definição 7.10). Considere a_1 como sendo uma cota inferior e, b_1 como sendo uma cota superior, do conjunto X. Logo, $X \subseteq I_1 := [a_1, b_1]$. Tome, $X_1 := X$.

Note que,

$$I_1 = [a_1, \frac{b_1 - a_1}{2}] \cup [\frac{b_1 - a_1}{2}, b_1].$$

Definimos $I_{E_1} := [a_1, \frac{b_1 - a_1}{2}]$ e $I_{D_1} := [\frac{b_1 - a_1}{2}, b_1]$. Observe que, ou $I_{E_1} \cap X_1$ é infinito, ou $I_{D_1} \cap X_1$ é infinto, caso contrário o conjunto X_1 seria finito.

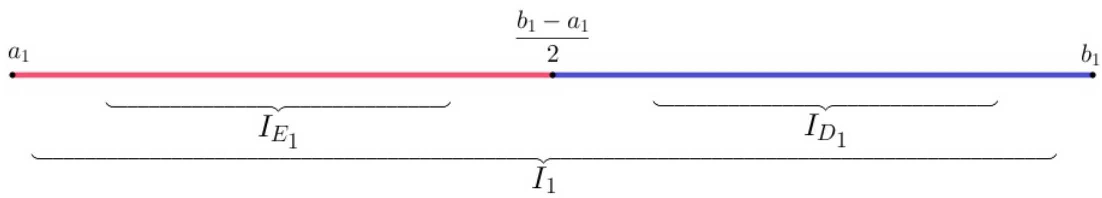


Figura 2.2

Suponha, sem perder a generalidade, que I_{E_1} é infinito, e defina $I_2 := I_{E_1}$. Neste caso, $a_2 := a_1$ e $b_2 := \frac{b_1 - a_1}{2}$.Definindo $X_2 := I_2 \cap X_1$, temos $X_2 \subseteq I_2$. Escrevendo o intervalo I_2 da seguinte forma:

$$I_2 = [a_2, \frac{b_1 - a_1}{2^2}] \cup [\frac{b_1 - a_1}{2^2}, b_2].$$

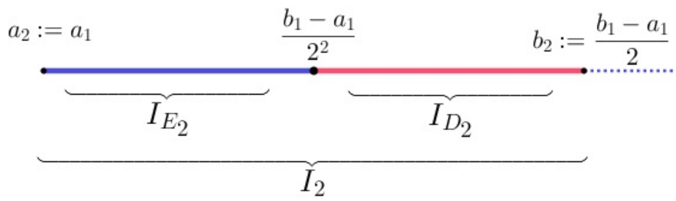


Figura 2.3

Definimos $I_{E_2} := [a_2, \frac{b_1 - a_1}{2^2}]$ e $I_{D_2} := [\frac{b_1 - a_1}{2^2}, b_2]$. Observe que, ou $I_{E_2} \cap X_2$ é infinito, ou $I_{D_2} \cap X_2$ é infinito, caso contrário, o conjunto X_2 seria finito. Suponha, sem perder a generalidade, que I_{D_2} é infinito, e defina $I_3 := I_{D_2}$. Neste caso, $a_3 := \frac{b_1 - a_1}{2^3}$, $b_3 := b_2$ e $X_3 := I_3 \cap X_2$. Assim, $X_3 \subseteq I_3$.

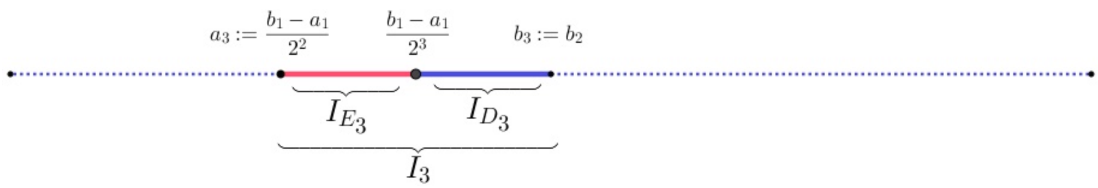


Figura 2.4

Repetindo esse processo, recursivamente, obtemos:

i. $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

ii. $X_n \subseteq X_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

iii. $|I_n| = \dfrac{b_1 - a_1}{2^n}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow inf\{|I_n|; n \in \mathbb{N}\} = 0.$

Como vemos na Figura 2.5 a seguir,

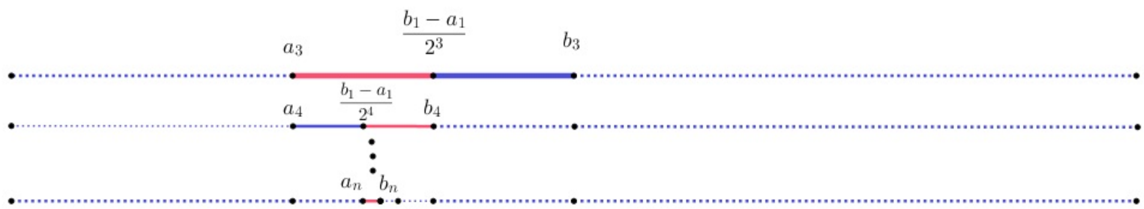


Figura 2.5

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, temos $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$. Para encerrar a demonstração, basta provar que $x \in X'$.

Segue, de **iii.** que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|I_{n_0}| < \varepsilon$. Como $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, em particular $x \in I_{n_0}$. Portanto, $I_{n_0} \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Como por construção $X_{n_0} \subseteq I_{n_0}$. Segue-se que,

$$X_{n_0} \subseteq I_{n_0} \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Como X_{n_0} é infinito, então a $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X_{n_0}$ é infinto. Sendo assim, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X$ é infinito. Pelo Teorema 7.24, x é um ponto de acumulação de X.

■

Teorema 2.3 ($TBW \Rightarrow PD$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado e Arquimediano e que cumpre o Teorema de Bolzano-Weierstrass, então $\mathbb{K}$ também cumpre o Postulado de Dedekind.*

Demonstração: Sejam $X \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente, e u_1 uma cota superior de X, de modo que exista $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_2 := u_1 - n_1$ ainda é uma cota superior de X, mas $u_2 - 1$ não é mais uma cota superior para X.

Figura 2.6

Considere o seguinte conjunto,

$$A_2 := \{n \in \mathbb{N}; u_2 - \frac{1}{n} \text{ é cota superior de } X\}.$$

Se $A_2 = \emptyset$, então $u_2 = \sup X$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela propriedade arquimediana de $\mathbb{K}$, temos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, $\varepsilon > \frac{1}{n_0}$. Sendo assim, como $A_2 = \emptyset$, então, existe $x \in X$

$$u_2 - \varepsilon < u_2 - \frac{1}{n_0} < x$$

Logo, $u_2 = \sup X$ (ver Teorema 7.12). Caso contrário (se $A_2 \neq \emptyset$), pelo Princípio da Boa Ordenação dos números naturais A_2 possui um menor elemento o qual será denotado por n_2 (Ver Teorema 7.7) . Isto significa que, $u_2 - \frac{1}{n_2 - 1}$ não é mais cota superior de X, já que n_2 é o menor elemento de A_2. Defina $u_3 := u_2 - \frac{1}{n_2}$.

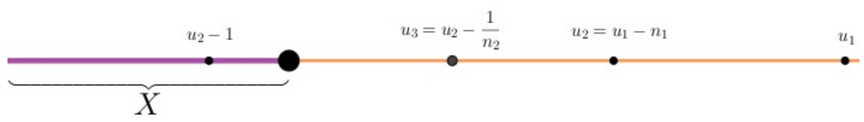


Figura 2.7

Considere o conjunto,

$$A_3 := \{n \in \mathbb{N}; u_3 - \frac{1}{n} \text{ é cota superior de } X\}.$$

Novamente, pela propriedade arquimediana de $\mathbb{K}$, se $A_3 = \emptyset$, então $u_3 = \sup X$, caso contrário A_3 possui um menor elemento. Seja n_3 o menor elemento de A_3, $u_4 := u_3 - \dfrac{1}{n_3}$ e defina $A_4 := \{n \in \mathbb{N}; u_4 - \dfrac{1}{n}$ é uma superior de $X\}$. Continuando esse mesmo argumento, indutivamente, obtemos uma sequência $(u_k) \subseteq \mathbb{K}$ tal que

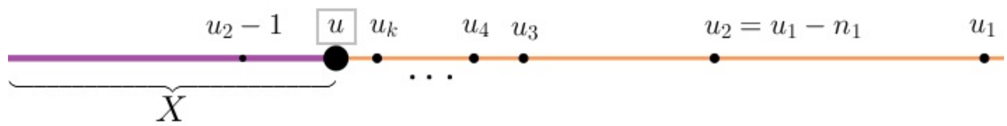
i. u_k é uma cota superior de X para todo $k \in \mathbb{N}$;

ii. $u_{k+1} = u_k - \dfrac{1}{n_k}, \forall\, n \geq 3$;

iii. $u_k - \dfrac{1}{n_k - 1}$ não é cota superior de X;

iv. $u_k \geq u_{k+1}, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Como mostrado na seguinte figura:



Note que, $\inf\{\dfrac{1}{n_k}; n \in \mathbb{N}\} = 0$. Isso ocorre por $\mathbb{K}$ ser arquimediano (Ver Observação 7.13).

Defina $U := \{u_k; k \in \mathbb{N}\}$. Temos , U infinito e limitado, pois os elementos de X limitam U inferiormente e u_1 limita superiormente. Então pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existe $u \in U'$ (ver Observação 7.27).

Veja que u é o supremo de X. De fato, vamos mostrar que u é cota superior de X.

Suponha que u não é cota superior de X, então existe $x \in X$ tal que $u < x$. Tome $\varepsilon = x - u > 0$. Daí, $(u - \varepsilon, u + \varepsilon) = (2u - x, x)$, e como U é o conjunto das cotas superiores de X, então $(u - \varepsilon, u + \varepsilon) \cap U = \emptyset$, e por isso u não poderia ser um ponto de acumulação de U, o que é um absurdo.

Para finalizar, basta que u seja a menor das cotas superiores. Observe que, $u < u_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, pois como (u_k) é não-crescente e limitada, então $\lim u_k = \inf U$ (Ver Teorema 7.15). E por u ser o ponto de acumulação de U, então, $u = \lim u_k$. Pela unicidade do limite de uma sequência (ver Teorema 7.14), $u = \inf U$.

Suponha que existe $d < u$ tal que d é uma cota superior de X. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_k - 1} < u - d \Rightarrow d < u - \frac{1}{n_k - 1} < u_k - \frac{1}{n_k - 1},$$

e como por **iii.** $u_k - \dfrac{1}{n_k - 1}$ não é cota superior para X, então d também não pode ser. Concluímos portanto que $u = \sup X$.

■

Capítulo 3

Segundo Ciclo

Neste ciclo, é demonstrada a equivalência entre a Convergência das Sequências de Cauchy (CSC) e o Teorema de Bolzano-Weierstrass (TBW), como vemos no diagrama abaixo:

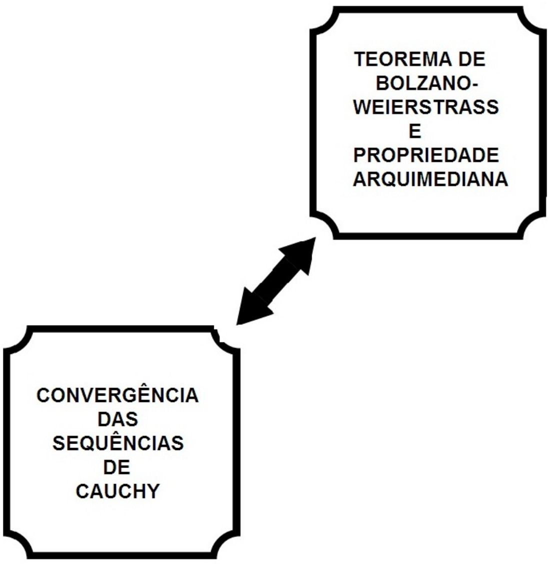


Figura 3.1

Teorema 3.1 ($TBW \Rightarrow CSC$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado que cumpre o Teorema de Bolzano-Weierstrass, então toda sequência de Cauchy converge para um elemento que ainda pertence a $\mathbb{K}$.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Portanto, (x_n) é limitada (ver Teorema 7.18). Como vale o Teorema de Bolzano- Weiestrass, então (x_n) possui uma subsequência limitada e (x_n) portanto é convergente (Ver Teorema 7.17).

■

Teorema 3.2 ($CSC \Rightarrow TBW$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado onde toda sequência Cauchy converge, então o Teorema de Bolzano-Weierstrass é válido em $\mathbb{K}$.*

Demonstração: Considere o conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ infinito e limitado. Defina $X_1 := X$. Pela limitação do conjunto X, existe um intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $X_1 \subseteq I_1$. E por X_1 ser infinito, em particular não-vazio, podemos tomar $x_1 \in X_1$. Seja c_1 o ponto médio do intervalo I_1.

Escrevendo o intervalo I_1 da seguinte forma

$$I_1 = [a_1, c_1] \cup [c_1, b_1].$$

Como X_1 é infinto e $X_1 \subseteq I_1$, então ou $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$ possui infinitos pontos de X_1. Considere I_2 como a metade do intervalo cuja a interseção com X_1 é infinita. Daí, $X_2 := I_2 \cap X_1$. Como X_2 é infinito então existe um $x_2 \in X_2$ tal que $x_2 \neq x_1$. Tome c_2 o ponto médio de I_2, dividimos o intervalo em dois de mesmo tamanho e escolhemos I_3 a metade que possui infinitos pontos de X.

Repetindo o argumento indutivamente, temos:

i. $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

ii. $X_n \subseteq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

iii. $x_n \in X_k, \forall n \geq k$;

iv. $x_n \neq x_m, \forall n \neq m$.

Como o ínfimo dos comprimentos dos intervalos é zero, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|I_{n_0}| < \varepsilon$. Se $n, m > n_0$ existem por **iii.** $x_m, x_n \in X_{n_0} \subseteq I_{n_0}$.Logo, $|x_n - x_m| < \varepsilon$. E portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy. Por hipótese, (x_n) converge. Daí, pela definição de convergência de sequências, existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $c := lim x_n$. Por **iv.** vemos que (x_n) não pode ser constante. Logo,

$$x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap X, \forall n \geq n_0,$$

isto é, $(c_\varepsilon, c + \varepsilon) \cap X$ é infinito. E portanto, c é um ponto de acumulação de X (Ver Teorema 7.24).

■

Capítulo 4

Terceiro Ciclo

Neste Ciclo, vamos mostrar a equivalência entre o Teorema de Heine-Borel (THB) e o Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE). Como vemos no diagrama abaixo.

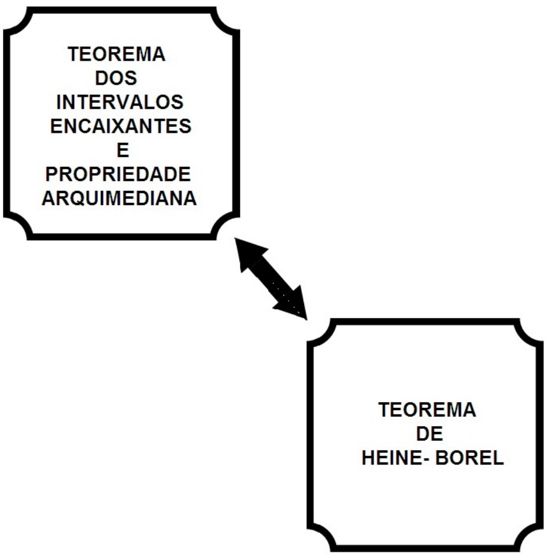


Figura 4.1

Teorema 4.1 ($TIE \Rightarrow THB$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, Arquimediano e cumpre o Teorema dos Intervalos Encaixantes, então cumpre também o Teorema de Heine-Borel.*

Demonstração: Suponha que o conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ admite a propriedade de subcobertura finita.

Seja $U_n := (-n, n)$, com $n \in \mathbb{N}$. Note que, U_n é uma cobertura para X, pois $\mathbb{K}$ é um corpo arquimediano. E como, por hipótese, X possui a propriedade de subcobertura finita, então podemos encontrar uma quantidade finita de índices tais que,

$$X \subseteq U_{n_0} \cup U_{n_1} \cup ... \cup U_{n_k}.$$

Note que, $\bigcup_{i=0}^{k} U_{n_i}$ é limitado, por $M := \max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$. Portanto, X também é limitado.

Falta provar que X é fechado, para isso vamos mostrar que se $p \notin X$, então $p \notin \overline{X}$.

Tome $p \notin X$. E considere agora $U_n = \mathbb{K} - [p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}]$.

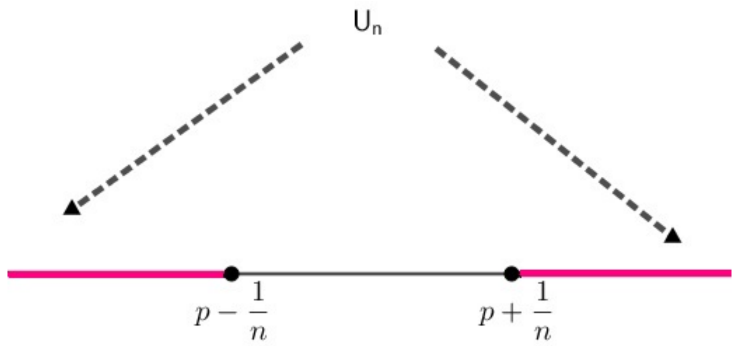


Figura 4.2

Pelas leis D'Morgan, temos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}])^c = (\{p\})^c = \mathbb{K} - \{p\}.$$

Além disso, U_n é aberto, uma vez que ele é o complementar de um fechado (ver Teorema 7.22). Como $p \notin X$ então U_n é uma cobertura para X. E por X possuir a propriedade de subcobertura finita, então existe uma coleção finita de U_n que cobre X.

Digamos que são k conjuntos que cobrem X. Então, $\bigcup_{i=0}^{k} U_{n_i}$ contém X, mas não contém $[p - \frac{1}{n_k}, p + \frac{1}{n_k}]$. Sendo assim, $[p - \frac{1}{n_k}, p + \frac{1}{n_k}] \cap X = \emptyset$. Implicando que p não é um ponto de acumulação de X. E como $\overline{X} = X \cup X'$ e, por $p \notin X$ (ver Proposição 7.25) e $p \notin X'$, temos $p \notin \overline{X}$. Daí, X é fechado.

Reciprocamente, tome $X \subseteq \mathbb{K}$ fechado e limitado. Supondo que X não admite a propriedade de subcobertura finita.

Como X é limitado, então podemos encontrar um intervalo fechado $I_1 := [a_1, b_1]$ tal que $X \subseteq I_1$. Tome c_1 o ponto médio do intervalo I_1, daí podemos escrever o intervalo I_1 da seguinte forma

$$I_1 = [a_1, c_1] \cup [c_1, b_1].$$

Como X não admite a propriedade de subcobertura finita então $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$ não admite subcobertura finita, já que $X \subseteq I_1$. Suponha que $[c_1, b_1]$ não admite subcobertura finita, então defina $a_2 := a_1$ e $b_2 := b_1$, e $I_2 := [a_2, b_2]$ e ainda $X_2 = I_2 \cap X$.

Tome c_2 um ponto médio de I_2. Novamente podemos dividi-lo em outros dois intervalos com a metade do comprimento. E que pelo menos um dois não possui a propriedade de subcobertura finita. Escolha o intervalo que não possui a propriedade de subcobertura finita que para ser o intervalo I_3 e repetindo o mesmo processo indefinidamente encontramos o seguinte:

i. $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

ii. $X_n \subseteq I_n \forall \in \mathbb{N}$;

iii. $inf\{|b_n - a_n|; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Logo, pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{s\}$. E como foi mostrado na demonstração do teorema de Bolzano-Weierstrass, mostrada nesse trabalho (ver Teorema 2.2), s é um ponto de acumulação de X . E como X é fechado, então $s \in X$.

Sendo assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s \in U_k$ da cobertura de X tal que $s \in U_k$. Como U_k é aberto então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq U_k$. Como $inf\{|I_n|; n \in \mathbb{N}\} = 0$ então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_{n_0} \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Daí, por **ii.**

$$X_{n_0} \subseteq I_{n_0} \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon).$$

O que é um absurdo pela construção dos intervalos. Logo, toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finta.

■

Teorema 4.2 ($THB \Rightarrow TIE$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado e que cumpre teorema de Heine-Borel, então $\mathbb{K}$ é Arquimediano e cumpre o Teorema dos Intervalos Encaixantes.*

Demonstração: Pela Observação 7.29, vemos que $\mathbb{N}$ não possui a propriedade de subcobertura finita, então ou $\mathbb{N}$ não é fechado ou não é limitado.

Como o conjunto dos números naturais é fechado (ver Exemplo 7.26), então concluímos que ele não pode ser limitado. E como a propriedade arquimediana equivale aos números naturais serem ilimitados, então $\mathbb{K}$ é um corpo arquimediano (Ver Teorema 7.5).

Suponha que $\mathbb{K}$ não cumpre a propriedade dos intervalos encaixantes. Ou seja, existe uma família $\{I_n\}$ de intervalos fechados e encaixados com $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Considere $U_n = \mathbb{K} - I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que, o U_n é aberto para todo $n \in \mathbb{N}$, já que é o complementar de conjuntos fechados (ver Teorema 7.22). E mais a união deles é uma cobertura para $\mathbb{K}$, de fato

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup(\mathbb{K} - I_n) = [\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n]^c = (\emptyset)^c = \mathbb{K}.$$

Em particular $\{U_n\}$ é uma cobertura para o I_1. Como I_1 é um intervalo fechado e limitado, então deveria possuir a propriedade de subcobertura finita. Mas, o ponto médio de I_{n_0} pertence a I_1, porém, não pertence U_{n_0}. Assim p intervalo I_1 não possui subcobertura finita e, portanto é fechado e limitado, mas não é compacto o que é um absurdo.

$\blacksquare$

Capítulo 5

Quarto Ciclo

Neste Ciclo, vamos mostrar a equivalência entre o Teorema do Valor Intermediário (TVI) e a definição de Conexidade (C). Como vemos no diagrama abaixo.

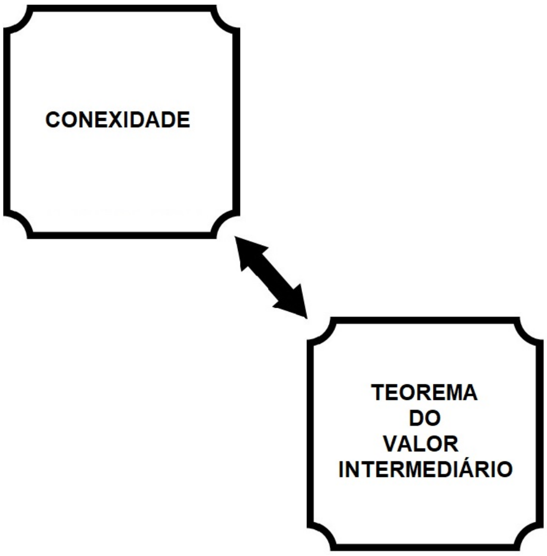


Figura 5.1

Teorema 5.1 (TVI $\Rightarrow$ C)**:** *Se o corpo $\mathbb{K}$ cumpre o Teorema do Valor Intermediário, então $\mathbb{K}$ é conexo.*

Demonstração: Sejam X conexo, $f : X \to \mathbb{K}$ uma função contínua e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $f(a) < 0 < f(b)$.

Considere os conjuntos $A = \{x \in X; f(x) > 0\}$ e $B = \{x \in X; f(x) < 0\}$. Note que, $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, pois $a \in A$ e $b \in B$.

Suponha que A e B é uma cisão não trivial. Então, temos que $X = A \cup B$ e $X = A \cup B$, e $A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Daí, $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$, contradizendo a hipótese. Logo, X é conexo.

$\blacksquare$

Teorema 5.2: *Se $\mathbb{K}$ é conexo, então também cumpre o Teorema do Valor Intermediário.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ uma função contínua. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $a < b$ e $f(a) < 0 < f(b)$, suponha que não exista $x \in \mathbb{K}$ tal que $f(x) = 0$. Defina os seguintes conjuntos $A = \{x \in \mathbb{K}; f(x) < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{K}; f(x) > 0\}$. Note que, $A \cup B$ é uma cisão não trivial para $\mathbb{K}$. De fato, pois A e B são não-vazios, já $a \in A$ e $b \in B$. Com $\mathbb{K} = A \cup B$ e $A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. O que é um absurdo, pois $\mathbb{K}$ é conexo.

$\blacksquare$

Capítulo 6

Quinto Ciclo

Neste Ciclo, vamos mostrar a equivalência entre o Teorema de Heine-Borel (THB) e o Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE). Como vemos no diagrama abaixo.

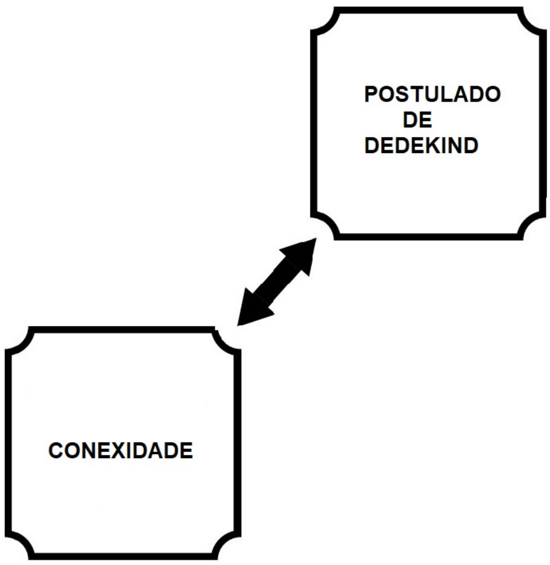


Figura 6.1

Teorema 6.1 $(PD \Rightarrow C)$**:** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado que cumpre o Postulado de Dedekind, então $\mathbb{K}$ é conexo.*

Demonstração: Sejam $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ uma função contínua e $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $a < b$ e $f(a) < 0 < f(b)$.

Considere os conjuntos $P = \{x \in \mathbb{K}; f(x) > 0\}$ e $N = \{x \in \mathbb{K}; f(x) < 0\}$. Note que P e N são conjuntos abertos, já que são a imagens inversas de conjuntos abertos por uma função contínua (ver Teorema 7.32).

Defina $B = \{x \in \mathbb{K}; x < b\}$. Veja que B é aberto, pois dado $x \in B$ podemos tomar $\varepsilon = \dfrac{b-x}{2} > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq B$.

Observe que, $N \cap B$ é um conjunto aberto, pois é uma interseção de abertos (ver Teorema 7.20). Além disso, $N \cap B$ é limitado superiormente por b e ainda não vazio, pois $a \in N \cap B$. E como $\mathbb{K}$ cumpre o Postulado de Dedekind, então existe $c = sup(N \cap B)$. E pela definição de supremo temos que $a \leq c \leq b$.

Note que, $c \notin P$. De fato, caso contrário, como P é aberto, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0) \subseteq P$. Dado $y \in (c-\varepsilon_0, c)$, temos $y < c$. Logo, pela definição de supremo y não pode ser cota superior de $N \cap B$, então existe $x \in N \cap B$ com $x > y$. Daí, $x \in (c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0)$ o que implica $f(x) > 0$, um absurdo, pois $x \in N$. Logo, $c \notin P$.

Por outro lado, temos que $c \notin N$, pois como $N \cap B$ é aberto então ele não pode conter seu supremo. Caso contrário, existiria um $\varepsilon > 0$ tal que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq N \cap B$. O que é um absurdo, pois todo $y \in (c, c+\varepsilon)$ é uma cota superior de $N \cap B$, implicando que $y \notin N \cap B$.

Sendo assim, concluímos que $f(c) = 0$, e portanto $\mathbb{K}$ cumpre a propriedade do valor intermediário implicando que é conexo.

$\blacksquare$

Teorema 6.2 ($C \Rightarrow PD$)**:** *Se $\mathbb{K}$ é conexo, então $\mathbb{K}$ cumpre o Postulado de Dedekind.*

Demonstração: Vamos supor que o postulado de Dedekind não é válido. Então considere $X \subseteq \mathbb{K}$ não vazio e limitado superiormente, que não tenha um supremo.

Considere os seguintes conjuntos $A = \{t \in \mathbb{K}; t < s, \text{com } s \in X\}$ e $B = \mathbb{K} - A$. Como X é não vazio e limitado então $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.

Tome $x \in A$, então $x < s$. Escolha $\varepsilon = s - x > 0$. Dado $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (2x-s, s)$, temos $y < s$ e portanto, $y \in A$. Mostrando que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$, implicando que A é aberto. E como B é o complementar de um aberto, concluímos que B é fechado.

Agora dado $x \in B$, temos $x \geq s$ para todo $s \in X$. Note que, $x \notin X$ temos que x é uma cota superior de X. E como X não possui supremo, nenhuma cota superior é atingida em X.

Assim, $x \neq s$. Portanto podemos escolher $\varepsilon = x - s$. Dado $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (s, 2x-s)$, temos $y < B$. Logo, $y \in B$. Ou seja, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq B$. Sendo assim, B é aberto. Como A é o complementar de B, concluímos que A é fechado.

Concluímos que, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{K}$ e, A e B são abertos e fechados ao mesmo tempo. Como A e B são não vazios, $\mathbb{K}$ não pode ser conexo (ver Teorema 7.34). Contradizendo a hipótese.

$\blacksquare$

Capítulo 7

Apêndices

Neste capítulo, são apresentados definições, resultados e observações fundamentais para um bom entendimento do trabalho como um todo.

Apêndice A

Um *corpo* é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações chamadas de *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas de *axiomas de corpo*. Os axiomas de corpo são:

i. Associatividade da Adição - Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x+y)+z = x + (y + z)$;

ii. Comutatividade da Adição- Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x + y = y + x$;

iii. Elemento Neutro da Adição- Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$. O elemento 0 chama-se zero;

iv. Inverso Aditivo- Todo elemento $x \in \mathbb{K}$ possui um inverso aditivo $x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$;

v. Associatividade da Multiplicação - Dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

vi. Comutatividade da Adição- Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$;

vii. Elemento Neutro da Multiplicação- Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$. O elemento 1 chama-se um;

viii. Inverso Multiplicativo- Todo elemento $x \in \mathbb{K}$ possui um inverso multiplicativo $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot (x)^{-1} = 1$.

Dizemos que $\mathbb{K}$ é um *corpo ordenado*, se existir um conjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ que cumpram as seguintes propriedades:

P_1**.** A soma e o produto de elementos positivos ainda é positivo;

P_2**.** Dado $x \in \mathbb{K}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$, ou $-x \in P$.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, sobre ele podemos definir a seguinte *relação de ordem*. Então dado $x, y \in \mathbb{K}$ definiremos que x é maior do que y, e denotaremos por $x > y$, se $x + (-y) \in P$.

Definição 7.1: *A característica de um corpo $\mathbb{K}$ é o menor inteiro positivo m tal que, sendo $a \in \mathbb{K}$,*

$$m \cdot a = \underbrace{a + a + ... + a}_{m\ \ parcelas} = 0.$$

Se não existir $m \in \mathbb{Z}$ que cumpra isso, diremos que a característica de $\mathbb{K}$ é zero.

Observação 7.2: *Todo corpo $\mathbb{K}$ com característica zero, contém um conjunto que é isomorfo ao dos números naturais.*

De fato, considere o conjunto $X = \{n \cdot 1 = \underbrace{1 + ... + 1}_{n\ parcelas};\ n \in \mathbb{N}\}$. Veja que, $X \subseteq \mathbb{K}$ já que $\mathbb{K}$ é um corpo e consequentemente é fechado com relação a soma.

Seja $\phi : X \to \mathbb{N}$ definida por $\phi(n \cdot 1) = n$. Vamos provar que ϕ é um isomorfismo. Note, que ϕ é sobrejetora, pois $\mathbb{K}$ tem característica zero.

Além disso ϕ é injetora. Pois, $\phi(n \cdot 1) = \phi(m \cdot 1)$ implica que $n = m$. E ainda, $\phi((n + m) \cdot 1) = n + m = \phi(n \cdot 1) + \phi(m \cdot 1)$. Concluímos que ϕ é um isomorfismo.

Proposição 7.3: *Todo corpo ordenado possui característica zero.*

Demonstração: Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Daí podemos definir P como o conjunto dos números positivos de $\mathbb{K}$.

Dado $a \in P$ temos,

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + ... + a}_{nvezes} \in P, \quad \forall\, n \in \mathbb{K},$$

ou seja, $n \cdot a \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Implicando que $\mathbb{N}$ tem característica zero.

Observação 7.4: *Pela Proposição 7.3, concluímos que qualquer corpo $\mathbb{K}$ ordenado contém uma cópia do conjunto dos números naturais dentro dele.*

Teorema 7.5: *Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i. *Os números naturais são é ilimitado superiormente em $\mathbb{K}$;*

ii. *Dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;*

iii. *(PA) Dado qualquer $a > 0$ em $\mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

Demonstração:

i. $\Rightarrow$ ii. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado, dados $a > 0$ e $b \in \mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$ e portanto, $b < n \cdot a$.

ii. $\Rightarrow$ iii. Agora dado $a > 0$ e tome $b = 1$, por ii. existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1$ e portanto, $0 < \frac{1}{n} < a$.

iii. $\Rightarrow$ i. Dado $b > 0$ por iii. existe, $n \in \mathbb{N}$ tal que $b > \frac{1}{n}$, ou seja, $n > \frac{1}{b}$. Logo, não existe um $b \in \mathbb{K}$ que limite $\mathbb{N}$.

Príncipio de Indução Se $X \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também que $n + 1 \in X$. Então, $X = \mathbb{N}$.

Proposição 7.6: *Dado $n \in \mathbb{N}$. Não existe um número natural entre n e $n + 1$.*

Demonstração: Suponha que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$. Logo, existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $m = n + r$ e $n + 1 = m + s$. Isso implica, $n = (m + s) - 1$. Daí, $m = (m + s) - 1 + r$. Logo, $r + s = 1$. O que é um absurdo, pois 1 não é o sucessor de nenhum número natural.

Teorema 7.7 (Propriedade da Boa Ordem)**:** *Todo subconjunto não-vazio $A \subseteq \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração: Defina $I_n = \{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n\}$ e considere o conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subseteq \mathbb{N} - A$. (Assim, dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A). Se tivermos $1 \in A$, o teorema estará demonstrado pois 1 será o menor elemento de A.

Se, porém, for $1 \notin A$ então $1 \in X$. Por outro lado, temos $X \neq \mathbb{N}$. Pois $X \subseteq \mathbb{N} - A$ e $A \neq \emptyset$. Assim, pelo Princípio de Indução X existe algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$.

Como não existe um número natural entre n e o seu sucessor (ver Proposição 7.6), concluímos que $n + 1$ é o menor elemento de A. Mostrando assim o resultado.

Observação 7.8: *Observe que nem todo corpo ordenado é arquimediano. Considere $\mathbb{Q}(t)$ o corpo das frações racionais $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios com coeficientes racionais, com $q(t)$ um polinômio não nulo.*

Dizemos que $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)} \in \mathbb{Q}(t)$ *é positiva se o coeficiente do maior grau do polinômio* $p(t) \cdot q(t)$ *é positivo. Defina* P *o conjunto de todas as frações positivas. Vamos provar que* P *cumpre as propriedades* P_1 *e* P_2*.*

De fato, dados $r(t), r_1(t) \in P$ *temos o coeficientes dos polinômios* $p(t) \cdot q(t)$ *e* $p_1(t) \cdot q_1(t)$ *são positivos. Daí, o coeficiente do maior grau do polinômio* $p(t) \cdot p_1(t) \cdot q(t) \cdot q_1(t)$ *é positivo e, então*

$$r(t) \cdot r_1(t) = \frac{p(t) \cdot p_1(t)}{q(t) \cdot q_1(t)} \in P$$

Da mesma forma na multiplicação, pois os coeficientes dos polinômios $q(t) \cdot q(t)$ *e* $q_1(t) \cdot q_1(t)$ *são positivos, então* $p(t) \cdot q(t) \cdot q_1(t) \cdot q_1(t) + p_1(t) \cdot q_1(t) \cdot q(t) \cdot q(t)$ *é positivo implicando*

$$r(t) + r_1(t) = \frac{p(t) \cdot q_1(t) + p_1(t) \cdot q(t)}{q(t) \cdot q_1(t)} \in P$$

Sendo assim, concluímos que $\mathbb{Q}(t)$ *é ordenado. Vamos ver agora que ele não é arquimediano. Pelo Teorema 7.5 só precisamos provar que* $\mathbb{N}$ *é limitado.*

Tome $r(t) = t$*. E como* $r(t)$ *tem denominador igual* 1*, então* $r(t) \in \mathbb{Q}(t)$*. Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $t - n$ *tem o coeficiente positivo, então* $t - n \in P$*. Logo,* $n < t$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e portanto* $r(t)$ *é uma cota superior de* $\mathbb{N}$*. Mostrando que* $\mathbb{Q}(t)$ *não é arquimediano.*

Apêndice B

Definição 7.9: *[Cota] Sejam* $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ *e* $a, b \in \mathbb{K}$ *dizemos que,*

a. a *é uma cota inferior de* X*, se* $a \leq x$ *para todo* $x \in X$*, ou seja, existe* $a \in \mathbb{K}$ *tal que* $a \leq x$ *para todo* $x \in X$*;*

b. b *é uma cota superior de* Y*, se* $y \leq b$ *para todo* $y \in Y$*, ou seja, existe* $b \in \mathbb{K}$ *tal que* $y \leq b$ *para todo* $y \in Y$*;*

Definição 7.10: *[Conjuntos Limitados] Sejam* $X, Y, Z \subseteq \mathbb{K}$ *dizemos que,*

a. X *é um conjunto limitado inferiormente se existir uma cota inferior para* X*;*

b. Y *é um conjunto limitado superiormente se existir uma cota superior para* Y*;*

c. *Dizemos que* Z *é um conjunto limitado se ele for limitado inferior e superiormente, ou seja, se existir* $c \in \mathbb{K}$ *tal que* $|z| \leq c$ *para todo* $z \in Z$*.*

Definição 7.11: *[Cotas Especiais] Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{K}$.*

a *Dizemos que $a \in \mathbb{K}$ é o ínfimo de X, e denotamos $\inf X$, se a é a maior das cotas inferiores;*

b. *Dizemos que $b \in \mathbb{K}$ é o supremo de Y, e denotamos $\sup Y$, se b é a menor da cotas superiores.*

Teorema 7.12: *Sejam o conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ limitado superiormente e, $c \in \mathbb{K}$ uma cota superior de X. Então $c = \sup X$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existir $x \in X$ tal que $x > \sup X - \varepsilon$.*

Demonstração: Suponha que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sup X - \varepsilon > x$ para todo $x \in X$. Sendo assim, $\sup X - \varepsilon$ é uma cota superior de x. Como $\sup X$ é a menor das cotas superiores, então $\sup X < \sup X - \varepsilon$. O que é um absurdo.

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $c - \varepsilon < x_\varepsilon$. Suponha que, $c > \sup X$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $c - \varepsilon_0 = \sup X$. Mas, por hipótese, $\sup X < x_\varepsilon$, um absurdo. E portanto, $c = \sup X$.

Observação 7.13: *Agora que definimos o que é o ínfimo de um conjunto, podemos ver que sendo $\mathbb{K}$ um corpo é Aquimediano então, $0 = \inf X := \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. De fato, note que 0 é uma cota inferior de X. Suponha que existe $c > 0$ tal que c também é cota inferior de X, ou seja, $\frac{1}{n} < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\mathbb{K}$ é Arquimediano, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{c}$. Daí, $c > \frac{1}{n_0}$. E portanto, c não pode ser uma cota inferior de X. Logo, 0 é a maior das cotas inferiores, isto é, $0 = \inf X$.*

Apêndice C

Uma *sequência* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definida por $x(n) = x_n$, onde x_n é dito o *n-ésimo* termo da sequência. E *subsequência* é uma restrição da função x a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Uma sequência é *limitada inferiormente* (respectivamente, *limitada superiormente*) quando existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $c \leq x_n$ (respectivamente, $c \geq x_n$), para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência (x_n) é *limitada* se (x_n) é limitada superior e inferiormente, isto é, existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $\in \mathbb{N}$.

Se existe $a \in \mathbb{K}$ para o qual dado um $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Chamamos a de limite da sequência, e é denotado por $\lim x_n = a$. E portanto, (x_n) é uma sequência convergente.

Teorema 7.14: *Seja (x_n) uma sequência convergente. Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração: Suponha que $a \neq b$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J := (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe n_0 implica $x_n \in I$. Então, para $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é b não é limite de (x_n).

Teorema 7.15: *Sejam (x_n) uma sequência e $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

(a) *Se (x_n) é monótona não-crescente e limitada inferiormente, então $\lim x_n = \inf X$*

(b) *Se (x_n) é monótona não-decrescente e limitada superiormente, então $\lim x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$;*

Demonstração:

(a) Dado $\varepsilon > 0$ temos $\inf X + \varepsilon$ não é mais cota inferior para X. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\inf X < x_{n_0} < \inf X + \varepsilon$. E por (x_n) ser não-crescente então para todo $n \leq n_0$ temos $x_n \in (\inf X, \inf X + \varepsilon)$. E portanto, $\lim x_n = \inf X$.

(b) A prova (b) é análoga a prova do item (a).

As sequências mais importante no estudo da completude de um corpo são as sequências de Cauchy. E definimos que uma sequência (x_n) é de *Cauchy* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

As três proposições a seguir são propriedades importantes sobre as sequências de Cauchy.

Teorema 7.16: *Uma sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente, então existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $a = \lim x_n$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, n \geq n_0$$

Então para todo $n, m \geq n_0$ temos que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Daí,

$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Sendo assim, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Teorema 7.17: *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Se alguma subsequência de (x_n) converge então (x_n) também converge para o mesmo limite.*

Demonstração: Sejam $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ uma subsequência convergente, e $a = \lim(x_{n_k})$. Por definição, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1.$$

E por (x_n) ser de Cauchy então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_2$$

.

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Daí,

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Logo, (x_n) converge.

Teorema 7.18: *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Tome $m = n_0 + 1$, então $x_n \in (x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1)$ para todo $n \geq n_0$. Considere $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|, |x_{n_0+1} - 1|, |x_{n_0+1} + 1|\}$. Logo, $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, (x_n) é limitada.

Apêndice D

Definição 7.19: *Diz-se que a é um ponto interior ao conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ quando existe um $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X.*

O conjunto dos pontos interiores a X é chamado por *interior de X* e é denotado por $intX$. Dizemos que se $a \in intX$ então X é uma *vizinhança* de a. E um conjunto A é *aberto* se $A = intA$.

Teorema 7.20: *Se A e B são conjuntos abertos, então a interseção $A \cap B$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Dado $x \in A \cap B$. Temos $x \in A$ e $x \in B$. Como A e B são conjuntos abertos, então existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq A \ \text{ e } \ (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq B$$

Tome $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Daí, $(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0) \subseteq A$ $(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0) \subseteq B$, ou seja, $(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0) \subseteq A \cap B$. Concluindo que $A \cap B$ é aberto.

Definição 7.21: *Dizemos que a é um ponto aderente ao conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ quando a é o limite de alguma sequência de pontos tal que $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Chama-se *fecho* o conjunto de todos os pontos aderentes ao conjunto X e é denotado por $\overline{X}$. Dizemos que um conjunto é *fechado* quando $X = \overline{X}$.

Teorema 7.22: *Um conjunto $F \in \mathbb{K}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{K} - F$ é aberto.*

Demonstração: Considere F fechado. Tome $a \in A$, temos que $a \notin F$ e por isso a não é um ponto aderente a X. Daí, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \neq \emptyset$, ou seja, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$, portanto A é aberto.

Reciprocamente, considere A é aberto e $a \in \overline{F}$, então dado $\varepsilon > 0$ temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Sendo assim, $a \notin intA$. Como A é aberto então $a \notin A$ e portanto $a \in F$. Mostrando assim que F é fechado.

Definição 7.23: *Dizemos que a é um ponto de acumulação do conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ quando dado $\varepsilon > 0$ temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.*

Chamamos o conjunto de todos os pontos de acumulação de *derivado de X* e denotamos por X'. Se $a \notin X'$ então dizemos que a é um ponto *isolado* e se todos os pontos do conjunto X são isolados então dizemos que X é um conjunto *discreto*.

Teorema 7.24: *Dados $X \subseteq \mathbb{K}$ e $a \in \mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *a é um ponto de acumulação de X;*

(2) *a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;*

(3) *dado $\varepsilon > 0$ temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de X.*

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Como $a \in X'$ então dado $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x_n \in X - a$, sendo assim $a = \lim x_n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha agora que $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X - \{a\}$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ para todo $n_0 \geq n$ e como o conjunto $\{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$ é infinito então existem infintos pontos de X em $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Como existe uma infinidade de pontos de X em $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, então $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$ e por definição $a \in X'$.

Proposição 7.25: *Seja X um subconjunto de $\mathbb{K}$. Temos, $\overline{X} = X \cup X'$.*

Demonstração: Dado $a \in \overline{X}$. Por $X \subseteq \overline{X}$, temos duas possibilidades: $a \in X$ ou $a \in \overline{X} - X$.

Se $a \in X$, então $X \cup X'$. Caso contrário, existe $(x_n) \subseteq X - \{a\}$ tal que $a = \lim x_n$. Pelo Teorema 7.24, $a \in X'$. Em ambos os casos, $\overline{X} \subseteq X \cup X'$.

Tome $b \in X \cup X'$. Temos $b \in X$ ou $b \in X'$. Se $b \in X$, então $b \in \overline{X}$, já que $X \subseteq \overline{X}$. Se $b \in X'$, então existe $(y_n) \subseteq X - \{b\}$ tal que $\lim y_n = b$. Logo $b \in \overline{X}$. Portanto, $X \cup X' \subseteq \overline{X}$. Pela dupla inclusão, concluímos o resultado.

Exemplo 7.26: *$\mathbb{N}$ é um conjunto fechado.*

Observe que, $X' = \emptyset$. Basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{4}$, então, dado $n \in \mathbb{N}$ temos $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \cap \mathbb{N} - \{n\} = \emptyset$. E pela Proposição 7.25, obtemos $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. Isto é, $\mathbb{N}$ é fechado.

Observação 7.27: *Existe outra versão do teorema de Bolzano-Weistress que usa sequência, cujo o enunciado diz o seguinte:*

"Dado $X \subseteq \mathbb{K}$. Se X for limitado e infinito, então X possui pelo menos um ponto de acumulação"

Vamos mostrar que ambos os enunciados são equivalentes.

De fato, considere por hipótese o enunciado do Teorema 1.2. Então dada (x_n) limitada, considere o conjunto $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Por (x_n) limitada implica que X também é limitado. Se X for finito temos que as subsequências de (x_n) são constantes e portanto convergentes. Caso X seja infinito então X possui pelo menos um ponto de acumulação. O que nos dá que (x_n) possui uma subsequência convergente.

Reciprocamente, seja X é um conjunto infinito e limitado. Tome $(x_n) \subseteq X$. Como X é limitado, então (x_n) é limitada também. Por hipótese, existe (x_{n_k}) convergente. Ou seja, existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $a = \lim x_{n_k}$. E portanto, a é um ponto de acumulação de X.

Definição 7.28: *Dizemos que um conjunto X é compacto se X é fechado e limitado.*

Chamamos de *cobertura* de um conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ uma família C de conjuntos C_λ tal que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}$, onde L é um conjunto qualquer. Se C_λ for aberto para todo $\lambda \in L$ então dizemos que é uma *cobertura aberta* e L for finito dizemos que C é uma *cobertura finita*. E ainda chamamos de *subcobertura* quando $X \subseteq \bigcup_{\lambda' \in L'}$ onde $L' \subseteq L$.

Dizemos que X cumpre a *Propriedade de Subcobertura Finita* quando para toda cobertura de X existe uma subcobertura finita.

Observação 7.29: *Observe que os números naturais não cumprem a propriedade de Subcobertura finita. De fato, tome* $I_n := (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$. *Note que,* $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. *Porém, não conseguimos escolher uma quantidade finita de intervalos* I_n *que cobre* $\mathbb{N}$.

Definição 7.30: *Dizemos que uma função* $f : X \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *é contínua quando dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que todo* $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$ *implica* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição 7.31: *Considere* $X \subseteq \mathbb{K}$. *Dizemos que* A *e* B *é uma cisão de* X *se* $X = A \cup B$, *e* $A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Teorema 7.32: *Se* $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *é contínua, então para qualquer* $B \subseteq \mathbb{K}$ *aberto, temos* $f^{-1}(B)$ *aberto.*

Demonstração: Dado $a \in f^{-1}(B)$, então $f(a) \in B$. Sendo B aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq A$.

Pela definição de função contínua, vai existir $\delta > 0$ tal que todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subseteq A$. Daí, $(a - \delta, a + \delta) \subseteq f^{-1}(A)$ e portanto $a \in int f^{-1}(A)$. Implicando que $f^{-1}(A)$ é aberto. Mostrando o resultado.

Observação 7.33: *Chamamos de cisão trivial quando* $A = \emptyset$ *e* $B = X$.

Proposição 7.34: *Se* X *é conexo, então* X *e* $\emptyset$, *são os únicos conjuntos que podem ser abertos e fechados ao mesmo tempo.*

Demonstração: Considere o conjunto $A \subseteq X$ não-vazio e $B = X - A$. Note que, $X = A \cup B$ e $A \cap B \neq \emptyset$.

Suponha que A e B são abertos e fechados simultaneamente. Então,

$$A = \overline{A} = intA \quad \text{e} \quad B = \overline{B} = intB.$$

Daí,

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Implicando que $A \cap B$ é uma cisão não-trivial para X. Um absurdo, pois X é conexo.

Referências Bibliográficas

[1] GARCIA, A.L.P. *Elementos de Álgebra*, 6ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015;

[2] ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*, 1ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1993;

[3] FIGUEIREDO, D.G. *Análise I*, 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 1996;

[4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise* volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012;

[5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real* volume 1, 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011;

[6] SCHRAMM, M.J. *Introduction to Real Analysis*, 1ª Ed. N.J.: Prentice Hall, 1996;

[7] SPIVAK, M. *Calculus*, 3ª edição. Publish or Perish, 1994;