Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Fórmulas Integrais de Minkowski e o Teorema de Liebmann

por

Lucas Siebra Rocha

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Campina Grande - PB
26/07/2018

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Lucas Siebra Rocha

Fórmulas Integrais de Minkowski e o Teorema de Liebmann

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Campina Grande - PB, 26 de julho de 2018
Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

Fórmulas Integrais de Minkowski e o Teorema de Liebmann

Lucas Siebra Rocha

Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado em 26 de julho de 2018, pela Comissão Examinadora constituída pelos examinadores:

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima
Orientador

Prof. Dr. Jogli Gidel da Silva Araújo
Examinador

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez
Examinador

Nota: ____________.

Dedicatória

Aos meus pais e à minha irmã

RESUMO

Nosso trabalho tem o objetivo de apresentar as fórmulas integrais de Minkowski, as quais envolvem o conceito de curvatura média e Gaussiana em superfícies regulares. Como aplicação dessas fórmulas, nós provaremos o conhecido teorema de Liebmann, o qual garante que a única superfície regular compacta com curvatura Gaussiana constante do espaço Euclidiano é a esfera.

ABSTRACT

Our work has the goal of presenting the Minkowski integral formulas, which envolve the concepts of mean and Gaussian curvatures on regular surfaces. As application of these formulas, we prove the so-called Liebmann's theorem, which garantees that the only compact regular surfaces of the Euclidian space having constant Gaussian curvature are the totally umbilical round spheres.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Uma temática clássica da Geometria Diferencial é a caracterização de superfícies regulares com curvatura Gaussiana constante imersas em um espaço Riemanniano. Nesse ramo, há o famoso teorema de Liebmann, resultado que estabelece que toda superfície compacta conexa no espaço euclidiano com curvatura constante é necessariamente uma esfera totalmente umbílica. Diante disso, esse trabalho tem como objetivo apresentar as fórmulas integrais de Minkowski, as quais envolvem o conceito de curvatura média e gaussiana em superfícies regulares. A partir daí, aplicaremos essas fórmulas e apresentaremos uma elegante demonstração do teorema de Liebmann.

Seguiremos a mesma abordagem do livro *Análisis Geométrico y Geometria Global de Superficies: Una Intoduccion Elemental* de Luis J. Alías, principal referência do nosso trabalho. Iremos dispor da seguinte organização no decorrer desse trabalho: no Capítulo 2, estabeleceremos as noções de superfície regular, derivada de funções sobre superfícies e derivada de campo de vetores tangentes sobre superfícies, informações preliminares para o nosso estudo. No Capítulo 3, discutiremos fatos sobre superfícies convexas e enunciaremos o teorema de Hadamard, resultado que garante que um ovaloide é estritamente globalmente convexa em todos os seus pontos. Por fim, obteremos as fórmulas integrais de Minkowski e demonstraremos o Teorema de Liebmann.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Superfícies Regulares

Nessa seção, introduziremos alguns conceitos que se farão presentes no decorrer do nosso trabalho. As definições apresentados aqui foram retiradas de [1] e [2].

Primeiramente, definiremos superfície regular, de modo que possamos utilizar noções usuais do cálculo diferencial e que possamos falar sobre plano tangente em cada ponto da superfície, como segue.

Definição 2.1. *Um subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\boldsymbol{X} : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. $\boldsymbol{X}$ é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\boldsymbol{X} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U,$$

as funções $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U.
2. $\boldsymbol{X}$ é um homeomorfismo. Como $\boldsymbol{X}$ é contínua pela ***condição*** 1*, isto significa que $\boldsymbol{X}$ tem inversa $\boldsymbol{X}^{-1} : V \cap S \to U$ que é contínua.*
3. Para todo $q \in S$, a diferencial $d\boldsymbol{X}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Sendo Σ uma superfície regular como definida acima, o conjunto dos vetores tangentes à superfície em $p \in \Sigma$ é chamado plano tangente à superfície em p e denotado por $T_p\Sigma$. Sabendo disso, o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$ induz um produto interno em cada plano tangente da superfície regular Σ. Com o intuito de medir distâncias sobre a superfície, definimos a métrica de Σ como a aplicação que associa a cada ponto o produto interno correspondente no plano tangente, nos permitindo definir a primeira forma fundamental como segue:

Definição 2.2. *Definiremos a primeira forma fundamental como a forma quadrática correspondente a cada ponto $p \in \Sigma$, dada por*

$$\langle\ ,\ \rangle : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R},$$

aplicação bilinear, simétrica e positiva definida sobre $T_p\Sigma$, em que $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Diremos que uma superfície regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é orientável quando existe um campo de vetores diferenciável $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em Σ. Daí, seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável com uma orientação N tal que $\langle N, N\rangle = 1$, isto é, N é um campo de vetores normal unitário. Observe que, neste caso, a aplicação $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$\mathbb{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

e, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de Σ.

Para cada $p \in \Sigma$, da aplicação de Gauss em relação a um vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma$ é dada por

$$dN_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\, N(\alpha(t)),$$

em que $\alpha : I \to \Sigma$ é uma curva parametrizada em Σ tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = \vec{v}$. Daí, sendo N um campo normal unitário,

$$|N(p)|^2 = 1 \Rightarrow \langle dN_p(\vec{v}), N(p)\rangle = 0, \forall p \in \Sigma \quad \text{e} \quad \forall \vec{v} \in T_p\Sigma.$$

Portanto, a derivada de N determina uma aplicação linear $A_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ definida por

$$A_p(\vec{v}) = -dN_p(\vec{v}),$$

denominada endomorfismo de Weingarten ou Operador Forma de Σ.

Assim, como a derivada da aplicação de Gauss dN_p é autoadjunta (com respeito a primeira forma fundamental), também será o endomorfismo de

Weingarten A_p. Daí, segue de Algebra linear que A_p é diagonalizável, possuindo dois autovalores reais $k_1(p)$ e $k_2(p)$, denominados curvaturas principais de Σ em p. As direções associadas a cada um deles são chamadas de direções principais.

Por definição, dado $\vec{v} \in T_p\Sigma$ uma direção tangente a Σ em p tal que $\mid \vec{v} \mid= 1$, o valor

$$k(\vec{v}) = \langle A_p(\vec{v}), \vec{v}\rangle$$

representa a curvatura em p da curva obtida ao cortar a superfície Σ por o plano normal que passa por p gerado por $\vec{v}$ e $N(p)$. Denominamos $k(\vec{v})$ a curvatura normal de Σ em p na direção de $\vec{v}$.

As curvaturas principais k_1 e k_2 definidas anteriormente, são o mínimo e máximo das curvaturas normais em cada ponto $p \in \Sigma$, respectivamente, e as direções principais correspondem as direções máximas e mínimas da curvatura normal. Caso $k_1(p) = k_2(p)$, ou equivalentemente, $k(\vec{v})$ é constante para todo vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma$, diz-se que $p \in \Sigma$ é um ponto umbílico da superfície.

Associados ao endomorfismo de Weingarten, definiremos o traço de A_p como a curvatura média de Σ em p e o determinandte de A_p como a curvatura gaussiana, dadas, respectivamente, por

$$H(p) = \frac{1}{2}tr(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \tag{2.1}$$

e

$$K(p) = det(A_p) = k_1(p)k_2(p). \tag{2.2}$$

Podemos ainda, relacionar as curvaturas Média e Gaussiana como mostrado no lema seguinte.

Lema 2.3. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então*

$$H^2 \geq K. \tag{2.3}$$

Além disso, a igualdade (2.3) *ocorre em algum $p \in \Sigma$ se, e somente se, p é um ponto umbílico.*

Demonstração. Usando as relações em (2.1) e (2.2) concluímos que, para todo $p \in \Sigma$, vale

$$\begin{aligned} H^2(p) - K(p) &= \frac{(k_1(p) + k_2(p))^2}{4} - k_1(p)k_2(p) \\ &= \frac{k_1(p)^2 + 2k_1(p)k_2(p) + k_2(p)^2 - 4k_1(p)k_2(p)}{4} \\ &= \frac{(k_1(p) - k_2(p))^2}{4} \geq 0, \end{aligned}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $k_1(p) = k_2(p)$. □

2.2 Derivada Covariante em uma Superfície

Nessa seção, introduziremos a noção de derivada de funções sobre superfícies para depois apresentarmos a noção de derivada de um campo de vetores tangentes sobre superfícies.

Definição 2.4. *Seja $f \in C^\infty(\Sigma)$ uma função diferenciável sobre uma superfície Σ e seja $\vec{v} \in T_p\Sigma$ um vetor tangente a Σ em um ponto $p \in \Sigma$. A derivada de f em relação a $\vec{v}$ é dada por*

$$\vec{v}(f) = df_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}|_{t=t_o} f(\alpha(t)) \in \mathbb{R},$$

em que $\alpha : I \to \Sigma$ é uma curva parametrizada em Σ tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = \vec{v}$.

Segue da linearidade da derivada usando a definição acima que

(a) $(\vec{v} + \vec{w})(f) = \vec{v}(f) + \vec{w}(f)$,

(b) $(\lambda\vec{v})(f) = \lambda\vec{v}(f)$,

(c) $\vec{v}(f + g) = \vec{v}(f) + \vec{v}(g)$,

(d) $\vec{v}(fg) = \vec{v}(f)g(p) + f(p)\vec{v}(g)$,

para todo $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma, \lambda \in \mathbb{R}$ e$f, g \in C^\infty(\Sigma)$.

No que segue, um campo de vetores tangentes sobre Σ é uma aplicação X que associa a cada $p \in \Sigma$ um vetor tangente $X(p) \in T_p\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Consideraremos os campos de vetores tangentes diferenciáveis sobre Σ, ou seja, a aplicação $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ é diferenciável e denotaremos por $\mathfrak{X}(\Sigma)$ o conjunto desses campos. A partir daí, a derivada de um campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ em relação a um vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma, p \in \Sigma$, é dada por

$$dX_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}|_{t=t_o} X(\alpha(t)) \in \mathbb{R},$$

em que $\alpha : I \to \Sigma$ é uma curva parametrizada em Σ tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = \vec{v}$. Motivados por isso, trazemos a seguinte definição:

Definição 2.5. *Definiremos derivada covariante $\nabla_{\vec{v}} X$ do campo de vetores tangente X em relação ao vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma$ como a parte tangente da derivada definida anteriormente, ou seja,*

$$\nabla_{\vec{v}} X = dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) \in T_p\Sigma. \tag{2.4}$$

Desde que X é tangente e N é normal a Σ, então

$$\langle X, N \rangle = 0.$$

Daí,

$$\vec{v}(\langle X, N \rangle) = \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle + \langle X(p), dN_p(\vec{v}) \rangle = 0,$$

para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma$ e $p \in \Sigma$. Logo,

$$\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle = - \langle X(p), dN_p(\vec{v}) \rangle = \langle X(p), A_p(\vec{v}) \rangle .$$

Assim, podemos reescrever (2.4) como

$$dX_p(\vec{v}) = \nabla_{\vec{v}} X + \langle A_p(\vec{v}), X(p) \rangle N(p), \tag{2.5}$$

chamada fórmula de Gauss da superfície.

Da definição em (2.4), conseguimos as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{\vec{v}+\vec{w}} X = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{w}} X$,

(ii) $\nabla_{\lambda\vec{v}} X = \lambda \nabla_{\vec{v}} X$,

(iii) $\nabla_{\vec{v}}(X + Y) = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{v}} Y$,

(iv) $\nabla_{\vec{v}}(fX) = \vec{v}X(p) + f(p)\nabla_{\vec{v}}(X)$,

(v) $\vec{v}(\langle X, Y\rangle) = \langle \nabla_{\vec{v}} X, Y(p)\rangle + \langle X(p), \nabla_{\vec{v}} Y\rangle$,

para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma, \lambda \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$.

De fato, para verificar (i), vejamos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{v}+\vec{w}} X &= dX_p(\vec{v}+\vec{w}) - \langle dX_p(\vec{v}+\vec{w}), N(p)\rangle N(p) \\
&= dX_p(\vec{v}) + dX_p(\vec{w}) - \langle dX_p(\vec{v}) + dX_p(\vec{w}), N(p)\rangle N(p) \\
&= dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p)\rangle N(p) + dX_p(\vec{w}) - \langle dX_p(\vec{w}), N(p)\rangle N(p) \\
&= \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{w}} X.
\end{aligned}$$

A demonstração das demais propriedades segue de maneira análoga.

De uma maneira natural, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, teremos

$$\begin{aligned}
(X+Y)(p) &= X(p) + Y(p) \\
(fX)(p) &= f(p)X(p) \\
\langle X, Y\rangle (p) &= \langle X(p), Y(p)\rangle ,
\end{aligned}$$

para quaisquer $p \in \Sigma$. Daí, podemos agora definir derivada covariante de uma função em relação a um campo de vetores tangente, como segue:

Definição 2.6. *Dado um campo de vetores tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e uma função diferenciável $f \in C^\infty(\Sigma)$, define-se a derivada covariante de f em relação a X como a função diferenciável $X(f) \in C^\infty(\Sigma)$ dada por*

$$X(f)(p) = X(p)(f),$$

para $p \in \Sigma$.

A partir das propriedades da derivada de f em relação a $\vec{v}$, obtemos as seguintes propriedades:

(a') $(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$,

(b') $(fX)(g) = fX(g)$,

(c') $X(f+g) = X(f) + X(g)$,

(d') $X(fg) = X(f)g + fX(g)$,

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f, g \in C^\infty(\Sigma)$.

De maneira análoga, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a derivada covariante de Y em relação a X é o campo de vetores tangente $\nabla_X Y$ dado por

$$(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X(p)} Y \in T_p\Sigma,$$

para $p \in \Sigma$. Daí, a partir das propriedades de derivada covariante de campos de vetores, tem-se

(i') $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(ii') $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

(iii') $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iv') $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,

(v') $X(\langle Y, Z\rangle) = X(\langle \nabla_Y, Z\rangle) + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então para cada $p \in \Sigma$, tem-se, sabendo que A_p é auto adjunta e utilizando (2.5), que

$$\begin{aligned}
\langle dY_p(X(p)), N(p)\rangle &= \left\langle \triangledown_{X(p)} Y + \langle A_p(X(p)), X(p)\rangle N(p), N(p)\right\rangle \\
&= \langle A_p(X(p)), Y(p)\rangle \\
&= \langle X(p), A_p(Y(p))\rangle = \langle dX_p(Y(p)), N(p)\rangle .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\langle dY_p(X(p)), N(p)\rangle - \langle dX_p(Y(p)), N(p)\rangle = \langle dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p)), N(p)\rangle = 0$$

e $dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p))$ é tangente a Σ em p. Motivados pela discussão anterior, temos a seguinte definição:

Definição 2.7. *O campo $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ dado por*

$$[X, Y](p) = dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p))$$

*é chamado **colchete de Lie** dos campos X e Y.*

2.3 Operadores Diferenciáveis

Nessa seção, resgataremos alguns conceitos do cálculo diferencial que utilizaremos mais adiante.

Definição 2.8. *Seja $f \in C^{\infty}(\Sigma)$ uma função diferenciável sobre uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Para cada $p \in \Sigma$, define-se o gradiente de f em p como o vetor $\nabla f(p) \in T_p\Sigma$ determinado por*

$$\langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle = df_p(\vec{v}) = \vec{v}(f),$$

para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma$.

Daí, $\nabla f \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é um campo de vetores tangentes diferenciável sobre Σ cujas propriedades são:

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$,

(iii) $\nabla\phi(f) = \phi'(f)\nabla f$,

(iv) $\nabla f(p) = 0, \forall p \in \Sigma \Leftrightarrow$ f é constante em Σ,

para quaisquer $f, g \in C^{\infty}(\Sigma)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável.

Definição 2.9. *Seja $f \in C^{\infty}(\Sigma)$ uma função diferenciável sobre uma superfície Σ. Para cada $p \in \Sigma$, define-se o hessiano de f em p como a aplicação bilinear dada por*

$$\nabla^2 f_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \nabla_{\vec{v}} \nabla f, \vec{w} \rangle,$$

para todo par de vetores tangentes $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$.

Fazendo $X = \nabla f$ em (2.5), obtemos

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla f = d(\nabla f)_p(\vec{v}) - \langle A_p(\vec{v}), \nabla f(p) \rangle N(p),$$

para cada $\vec{v} \in T_p\Sigma$, donde

$$\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v}, \vec{w}) = \langle d(\nabla f)_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle.$$

Também podemos definir o hessiano de uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$ por

$$\nabla^2 f : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$$

dada por

$$\nabla^2 f : (X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle,$$

para todo par de campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Dessa definição, obtemos que o hessiano $\nabla^2 f$ é uma aplicação simétrica. De fato,

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = X(Y(f)) - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle$$

e, analogamente,

$$\nabla^2 f(Y, X) = Y(X(f)) - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle + \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle \\
&= [X, Y](f) - \langle \nabla f, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle \\
&= [X, Y](f) - \langle \nabla f, [X, Y] \rangle \\
&= [X, Y](f) - \langle \nabla f, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle \\
&= [X, Y](f) - [X, Y](f) = 0
\end{aligned}$$

Além disso, utilizando as propriedades de derivada covariante,

(i) $\nabla^2 f(X + Y, Z) = \nabla^2 f(X, Z) + \nabla^2 f(Y, Z)$,

(ii) $\nabla^2 f(gX, Y) = g \nabla^2 f(X, Y)$,

(iii) $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$ e $f, g \in C^\infty(\Sigma)$.

A prova do seguinte teorema, bastante conhecido em espaços euclidianos, pode ser vista em [3], a qual omitiremos no nosso trabalho.

Teorema 2.10. *Seja $p_0 \in \Sigma$ um ponto crítico da função $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ diferenciável sobre $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.*

a Se $\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v}, \vec{v}) > 0$, então p_0 é um ponto de mínimo local, *b Se* $\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v},\vec{v}) < 0$*, então* p_0 *é ponto de máximo local,*

c Se f *alcança em* p_0 *um mínimo local, então* $\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v},\vec{v}) \geq 0$*, para todo* $\vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$*,*

d Se f *alcança em* p_0 *um máximo local, então* $\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v},\vec{v}) \leq 0$*, para todo* $\vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$*.*

Definição 2.11. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ *um campo de vetores tangente sobre uma superfície* Σ*. Para cada ponto* $p \in \Sigma$*, define-se o divergente de* X *em um ponto* p *como o traço da aplicação*

$$(\nabla X)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

definida por

$$(\nabla X)_p(\vec{v}) = \nabla_{\vec{v}} X.$$

Ou seja,

$$divX(p) = tr(\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}} X).$$

Observação 2.12. *Em particular,* $divX \in C^\infty(\Sigma)$ *define uma função diferenciável sobre* Σ *e, para cada ponto* $p \in \Sigma$*,*

$$divX(p) = \langle \nabla_{\vec{e_1}} X, \vec{e_1} \rangle + \langle \nabla_{\vec{e_2}} X, \vec{e_2} \rangle,$$

com $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ *base ortonormal de* $T_p\Sigma$*.*

Da definição acima, obtemos as seguintes propriedades:

(i) $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$,

(ii) $div(fX) = X(f) + fdiv(X) = \langle \nabla f, X \rangle + fdiv(X)$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Em particular, quando $X = \nabla f$ é o gradiente de uma função diferenciável $f \in C^\infty(\Sigma)$, o divergente de ∇f é chamado laplaciano de f e é representado por Δf. Ou seja, $\Delta f \in C^\infty(\Sigma)$ é definida por

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= \langle \nabla_{\vec{e_1}} \nabla f, \vec{e_1} \rangle + \langle \nabla_{\vec{e_2}} \nabla f, \vec{e_2} \rangle \\ &= \nabla^2 f_p(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + \nabla^2 f_p(\vec{e_2}, \vec{e_2}) = tr(\nabla^2 f_p). \end{aligned}$$

Daí, o operador laplaciano $\Delta : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ possui as propriedades

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$,

(ii) $\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta(f)$,

(iii) $\Delta\phi(f) = \phi' \Delta(f) + \phi''(f)\|\Delta(f)\|^2$,

(iv) $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2\langle \Delta(f), \Delta(g) \rangle$,

para quaisquer $f, g \in C^\infty(\Sigma)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O teorema a seguir é consequência do Teorema de Stokes, podendo ser encontrado em [4]. Vejamos seu enunciado:

Teorema 2.13 (Teorema da Divergência)**.** *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ um campo de vetores tangentes sobre Σ. Então*

$$\int_\Sigma divX(p)d\Sigma = 0,$$

em que dp é o elemento de área de Σ. Em particular,

$$\int_\Sigma \Delta f(p)d\Sigma = 0,$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Agora estamos aptos a estudar exemplos que serão fundamentais na demonstração do teorema 4.1. Vejamos a seguir:

Exemplo 2.14. *Seja F uma função diferenciável definida em um aberto W de $\mathbb{R}^3$ e seja $\Sigma \subset W$ uma superfície regular contida em W. Denotemos F a restrição de F a Σ. Teremos $f \in C^\infty(\Sigma)$ e seu gradiente é a parte tangente do gradiente euclidiano (em $\mathbb{R}^3$) de F. Ou seja, para cada $p \in \Sigma$, tem-se*

$$\nabla f(p) = GradF(p) - \langle GradF(p), N(p) \rangle N(p), \tag{2.6}$$

em que $GradF$ denota o gradiente euclidiano de F dado por

$$GradF(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right), x = (x_1, x_2, x_3) \in W.$$

Já para calcular o hessiano de F em p, sabemos que

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle d(\nabla f)_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle$$

para todo $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$. Além disso, de (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} d(\nabla f)_p(\vec{v}) &= d(GradF)_p(\vec{v}) - \vec{v}(u)N(p) - u(p)dN_p(\vec{v}) \\ &= d(GradF)_p(\vec{v}) - \vec{v}(u)N(p) + u(p)A_p(\vec{v}), \end{aligned}$$

com $u(p) = \langle GradF(p), N(p)\rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) &= \langle d(GradF)_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle + \langle GradF(p), N(p)\rangle \langle A_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle \\ &= HessF_p(\vec{v}, \vec{w}) + \langle A_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle \langle GradF(p), N(p)\rangle, \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que $HessF_p$ é o hessiano euclidiano, em $\mathbb{R}^3$, de F em $p \in \Sigma$. Ou seja,

$$HessF_x(\vec{v}, \vec{w}) = \langle d(GradF)_x(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \sum_{i,j=1}^{3} v_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i,$$

para todo ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in W$ e para todo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.15. *Consideremos $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função diferenciável dada por $F(x) = \frac{1}{2}|x - c|^2$, para um ponto $c \in \mathbb{R}^3$ fixado.*

Do exemplo anterior, obtemos

$$GradF(x) = x - c$$

e

$$HessF_x(\vec{v}, \vec{v}) = |\vec{v}|^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, consideremos a função distância ao quadrado $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(p) = F(p) = \frac{1}{2}|p - c|^2$ para $p \in \Sigma$. De (2.6) e (2.7), segue que

$$\nabla f(p) = (p - c)^\top = p - c - \langle p - c, N(p)\rangle N(p), \tag{2.8}$$

para todo $p \in \Sigma$ e

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle + \langle A_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle \langle p - c, N(p)\rangle, \tag{2.9}$$

para todo $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$.

Exemplo 2.16. *Seja Π um plano afim de $\mathbb{R}^3$ que passa por um ponto $c \in \mathbb{R}^3$ e tem direção principal determinado por $\vec{a} \in \mathbb{R}^3, |\vec{a}| = 1$. Sendo $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ superfície, a função $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por*

$$h(p) = \langle p - c, \vec{a} \rangle, p \in \Sigma$$

determina a altura dos pontos de Σ ao plano Π. Daí, a função $h \in C^\infty(\Sigma)$ é a restrição a Σ da função diferenciável $\widetilde{h}$ em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\widetilde{h}(x) = \langle x - c, \vec{a} \rangle, x \in \mathbb{R}^3,$$

donde $Grad\widetilde{h}(x) = \vec{a}$ e $Hess\widetilde{h}(x) = 0$. Já de (2.6) e (2.7), obtemos

$$\nabla h(p) = \vec{a}^\top(p) = \vec{a} - \langle \vec{a}, N(p) \rangle N(p)$$

e

$$\nabla^2 h_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle A_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle \langle \vec{a}, N(p) \rangle, \tag{2.10}$$

para todo $p \in \Sigma$ e $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$.

2.4 Derivada Covariante de um Campo de Tensores

Para concluir o segundo capítulo, daremos uma noção de campo de tensores para, em seguida, obtermos a equação de Codazzi-Mainardi que utilizaremos na obtenção das fórmulas integrais de Minkowski.

Definição 2.17. *Um campo de tensores sobre uma superfície regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação S que a cada $p \in \Sigma$, associa um endomorfismo $S_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$. Diremos que um campo de tensores S é diferenciável sobre Σ quando para cada campo de vetores diferenciável $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, o campo de vetores SX definido por*

$$(SX)(p) = S_p(X(p)) \in T_p\Sigma, p \in \Sigma$$

é diferenciável.

Uma versão mais geral do lema a seguir, como sua demonstração, pode ser encontrado no capítulo 2 de [5].

Lema 2.18. *Se algum dos campos vetoriais* $X_1, X_2, ..., X_s$ *é nulo em* p*, então* $S(X_1, X_2, ..., X_s)(p) = 0$.

Se S é um campo de tensores diferenciável sobre Σ, então S determina uma aplicação $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ que verifica

(*i*) $S(X + Y) = SX + SY$,

(*ii*) $S(fX) = fS(X)$,

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Reciprocamente, suponhamos uma aplicação $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ cumprindo (*i*) e (*ii*). S determina um campo de tensores diferenciável sobre Σ, de modo que para cada $p \in \Sigma$, define-se $S_p : T_p(\Sigma) \to T_p(\Sigma)$ tal que

$$S_p(\vec{v}) = (SX)(p) \in T_p\Sigma,$$

para cada $\vec{v} \in T_p\Sigma$ e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ tal que $X(p) = \vec{v}$.

Vejamos que S_p está bem definido. Tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ tais que $X(p) = Y(p) = \vec{v}$, já que $X(p) - Y(p) = 0$, teremos pelo lema 2.18 que

$$\begin{aligned} (SX)(p) - (SY)(p) &= S(X - Y)(p) = 0 \\ &\Rightarrow (SX)(p) = (SY)(p), \end{aligned}$$

concluindo que a definição de S_p independe da parametrização.

Extenderemos mais uma vez os conceitos de derivada para obter a noção de derivada covariante de um capo de tensores diferenciável em relação a um campo de vetores diferenciável. A saber:

Definição 2.19. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ *um campo de vetores diferenciável e seja* $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ *um campo de tensores diferenciável sobre uma superfície* Σ*. Define-se a derivada covariante de* S *em relação a* X *como o campo de tensores diferenciável* $\nabla_X S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ *dado por*

$$(\nabla_X S)(Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y),$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Notemos que $\nabla_X S$ verifica (*i*) e (*ii*), sendo assim uma boa definição. Ademais, a aplicação $\nabla_{\vec{v}} S : T_p(\Sigma) \to T_p(\Sigma)$ dada por

$$\nabla_{\vec{v}} S(\vec{w}) = (\nabla_X S)(Y)(p), \vec{w} \in T_p(\Sigma),$$

com $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ campos tangentes quaisquer com $X(p) = \vec{v}$ e $Y(p) = \vec{w}$, está bem definida. Diante disso, prossegue a próxima proposição:

Proposição 2.20. *Seja* $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ *um campo de tensores diferenciável sobre uma superfície* Σ. *Então, para cada ponto* $p \in \Sigma$, *tem-se*

$$tr(\nabla_{\vec{v}} S) = \vec{v}(trS) = \langle \vec{v}, \nabla(trS)(p) \rangle\,,$$

em que $trS \in C^{\infty}(\Sigma)$ *é a função dada por* $(trS)(p) = tr(S_p)$.

Por fim, apresentaremos a equação de Codazzi Mainardi, fundamental na demonstração do teorema 4.1.

Teorema 2.21 (Equação de Codazzi-Mainardi)**.** *Seja* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *uma superfície regular. Para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, *verifica-se*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X),$$

definida como equação de Codazzi-Mainardi.

Capítulo 3

Superfícies Convexas

Neste capítulo, continuaremos a ver alguns resultados importantes para a obtenção das fórmulas integrais de Minkowski e de uma de suas aplicações.

3.1 Existência de Pontos Elípticos

Primeiramente, relembremos que um ponto $p \in \Sigma$ de uma superfície Σ é dito elíptico se $K(p) > 0$. Nos utilizaremos disso para provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Toda superfície regular em $\Sigma \in \mathbb{R}^3$, orientada e compacta tem pelo menos um ponto elíptico.*

Demonstração. Consideremos a função $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada no exemplo 2.15 fazendo $c = 0$, ou seja,

$$f(p) = \frac{1}{2} |p|^2, p \in \Sigma.$$

As expressões (2.8) e (2.9) agora serão dadas por

$$\nabla f(p) = (p)^\top = p - \langle p, N(p) \rangle N(p),$$

e

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle A_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle \langle p, N(p) \rangle .$$

Como Σ é compacta, então pelo teorema de Weierstrass para conjuntos compactos concluimos que f atinge um máximo global em Σ e, daí, existe um ponto $p_o \in \Sigma$ tal que

$$f(p_o) \geq f(p), \forall p \in \Sigma,$$

donde

$$\nabla f(p_o) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 f_{p0}(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0, \forall \vec{v} \in T_{p_0}\Sigma.$$

Logo, $p_0 = \langle p_0, N(p_0) \rangle N(p_0)$, sendo p_0 é um múltiplo escalar de $N(p_0)$. Como $N(p_0)$ é unitário, segue que

$$N(p_0) = \pm \frac{p_0}{|p_0|} = \varepsilon \frac{p_0}{|p_0|}, \varepsilon = \pm 1$$

com $|p_0|^2 = 2f(p_0) > 0$, o qual indica que a superfície Σ é tangente a uma esfera de raio $|p_0| > 0$ no ponto p_0. Já da fórmula da Hessiana obtida, temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_{p_0}(\vec{v}, \vec{v}) &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle A_{p_0}(\vec{v}), \vec{v} \rangle \langle p_0, N(p_0) \rangle \\ &= 1 + k(\vec{v}) \langle p_0, N(p_0) \rangle \\ &= 1 + \varepsilon k(\vec{v}) |p_0| \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $\vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$. Caso $\varepsilon = +1$,

$$k(\vec{v}) \leq -\frac{1}{|p_0|} < 0.$$

Em particular, $k_1(p_0)$ e $k_2(p_0)$ são negativas e

$$K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) > 0$$

Analogamente, caso $\varepsilon = -1$,

$$k(\vec{v}) \geq -\frac{1}{|p_0|} > 0,$$

sendo as curvaturas principais ambas positivas e novamente a curvatura gaussiana $K(p_0)$ em p_0 é positiva. Assim, p_0 é ponto elíptico.

□

3.2 O Teorema de Hadamard

Iniciemos a seção com as seguintes definições:

Definição 3.2. *Seja $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e orientada com aplicação de Gauss N. Para cada ponto $p \in \Sigma$, definamos Π_p o plano tangente afim que passa por p dado por*

$$\Pi_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, N(p) \rangle = 0 \right\}.$$

Esse plano divide o espaço $\mathbb{R}^3$ nos dois semiespaços

$$\Pi_p^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, N(p)\rangle \geq 0\right\}$$

e

$$\Pi_p^- = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, N(p)\rangle \leq 0\right\}.$$

Definição 3.3. *Dizemos que uma superfície regular e orientada $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é localmente convexa em $p_0 \in \Sigma$ se existe uma vizinhança V de p_0 em Σ tal que*

$$V \subset \Pi_{p_0}^+$$

ou

$$V \subset \Pi_{p_0}^-.$$

Caso p_0 seja o único ponto de $V \cap \Pi_{p_0}$, dizemos que Σ é estritamente localmente convexa em p_0. Ou seja

$$V - \{p_0\} \subset int\Pi_{p_0}^+$$

ou

$$V - \{p_0\} \subset int\Pi_{p_0}^-.$$

Podemos ainda generalizar essas definições da seguinte maneira:

Definição 3.4. *Diremos que uma superfície regular e orientada $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é globalmente convexa em um ponto $p_0 \in \Sigma$ se toda a superfície estiver inteiramente contida em um dos semiespaços $\Pi_{p_0}^+$ ou $\Pi_{p_0}^-$. Ademais, se p_0 é o único ponto de $\Sigma \cap \Pi_{p_0}$, diremos que Σ é estritamente globalmente convexa em p_0. Ou seja, $\Sigma - \{p_0\}$ está contido em $int\Pi_{p_0}^+$ ou $int\Pi_{p_0}^-$.*

Agora, desejamos relacionar os conceitos de convexidade com a curvatura da superfície. Vejamos:

Definição 3.5. *Façamos $c = p_0$ na função altura do Exemplo 2.16. Definiremos a função h_{p_0} altura em relação ao plano tangente afim Π_{p_0} como*

$$h_{p_0}(p) = \langle p - p_0, N(p_0)\rangle, p \in \Sigma.$$

É imediato que h_{p_0} anula-se em $\Sigma \cap \Pi_{p_0}$, $h_{p_0} > 0$ se $p \in \Sigma \cap \Pi_{p_0}^+$ e $h_{p_0} < 0$ se $p \in \Sigma \cap \Pi_{p_0}^-$. Daí, (*i*) Σ é (estritamente) localmente convexa em p_0 se e somente se a função altura h_{p_0} alcança extremo local (estrito) em p_0;

(*ii*) Σ é (estritamente) globalmente convexa em p_0 se e somente se a função altura h_{p_0} alcança extremo global (estrito) em p_0.

Proposição 3.6. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e orientada.*

(*i*) *Se Σ é localmente convexa em $p_0 \in \Sigma$, então $K(p_0) \geq 0$,*

(*ii*) *Se $p_0 \in \Sigma$ é um ponto elíptico de Σ ($K(p_0) > 0$), então Σ é estritamente localmente convexa em p_0.*

Demonstração. Se Σ é localmente convexa em p_0, vimos que a função h_{p_0} alcança em p_0 um extremo local. Suponhamos que seja mínimo local. Pela fórmula (2.10) obtida, temos

$$\nabla^2(h_{p_0})_{p_0}(\vec{v},\vec{v}) = \langle A_{p_0}(\vec{v}),\vec{v}\rangle \geq 0,$$

para todo $\vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$. Tomando $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ direções principais de Σ em p_0, temos

$$k_i(p_0) = \nabla^2(h_{p_0})_{p_0}(\vec{e_i},\vec{e_i}) \geq 0, i = 1, 2$$

e

$$K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) \geq 0,$$

provando (*i*).

Para (*ii*), supondo $Kp_0 > 0$, podemos escolher a aplicação normal de Gauss de modo que ambas as curvaturas principais sejam positivas em p_0. Daí,

$$\nabla^2(h_{p_0})_{p_0}(\vec{v},\vec{v}) = \langle A_{p_0}(\vec{v}),\vec{v}\rangle = k(\vec{v}) \geq 0, \tag{3.1}$$

para todo $\vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$ com $|\vec{v}| = 1$.

Ora, pelo o que foi visto anteriormente, p_0 é ponto crítico de h_{p_0}. Além disso, o hessiano $\nabla^2(h_{p_0})_{p_0}$ é positivo e, assim, h_{p_0} alcança em p_0 um mínimo local estrito.

□

Definição 3.7. *Definiremos ovalóide como sendo as superfícies regulares (conexas) e compactas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana $K > 0$.*

Supondo que a curvatura Gaussiana nunca é 0 em uma superfície Σ regular, orientada e compacta, vimos no Teorema 3.1 que existe ao menos um ponto elíptico em Σ. Daí, a continuidade de K nos garante $K(p) > 0$ para todo ponto na superfície.

Assim, pela proposição anterior, todo ovalóide é estritamente localmente convexo em todos os seus pontos. O próximo teorema garante mais que isso, afirmando que todo ovalóide é estritamente globalmente convexo em todos os seus pontos.

Teorema 3.8 (Teorema de Hadamard)**.** *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ um ovalóide. Então*

(*i*) *A aplicação normal de Gauss $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ é um difeomorfismo;*

(*ii*) *Σ é estritamente globalmente convexa em todos os seus pontos.*

Não apresentaremos a demonstração desse resultado, pois envolve o conceito de espaço de recobrimento que foge do objetivo do nosso trabalho. A prova desse resultado pode ser encontrada no Capítulo 2 de [1].

Capítulo 4

Resultados Principais

4.1 As fórmulas Integrais de Minkowski

Finalmente, vamos apresentar e demonstrar o resultado central do nosso trabalho. A saber,

Teorema 4.1. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, com aplicação de Gauss N. Para cada ponto fixo $c \in \mathbb{R}^3$ tem-se*

$$\int_{\Sigma} (1 + H(p)\langle p - c, N(p)\rangle) d\Sigma = 0, \tag{4.1}$$

e

$$\int_{\Sigma} (H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle) d\Sigma = 0, \tag{4.2}$$

em que H denota a curvatura média e K a curvatura Gaussiana de Σ. As expressões (4.1) e (4.2) são chamadas de primeira e segunda fórmula de Minkowski, respectivamente.

Demonstração. Fixado $c \in \mathbb{R}^3$, consideremos a função f diferenciável sobre Σ dada por

$$f(p) = \frac{1}{2}|p - c|^2$$

apresentada no exemplo 1.30. Vimos que seu *hessiano* é dado por (2.9). Daí,

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{v}) = 1 + k(\vec{v})\langle p - c, N(p)\rangle,$$

para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma$. Considerando $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ a base das direções principais de Σ em p, temos

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= (1 + k_1(p) \langle p - c, N(p) \rangle) + (1 + k_2(p) \langle p - c, N(p) \rangle) \\ &= 2 + (k_1(p) + k_2(p)) \langle p - c, N(p) \rangle \\ &= 2 + 2H(p) \langle p - c, N(p) \rangle . \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta f(p) = 2(1 + H(p)) \langle p - c, N(p) \rangle . \tag{4.3}$$

Assim, aplicando o Teorema 2.13,

$$\int_\Sigma 2(1 + H(p)) \langle p - c, N(p) \rangle \, d\Sigma = 0,$$

obtendo, portanto, (4.1).

Para a segunda fórmula, consideremos a função $g \in C^\infty(\Sigma)$ dada por

$$g(p) = \langle p - c, N(p) \rangle .$$

Desse modo,para cada $p \in \Sigma$ e $\vec{v} \in T_p\Sigma$, temos

$$\begin{aligned} \vec{v}(g) &= \langle \vec{v}, N(p) \rangle + \langle p - c, dN_p(\vec{v}) \rangle \\ &= -\left\langle (p - c)^\top, A_p(\vec{v}) \right\rangle . \end{aligned}$$

Logo, como A_p é autoadjunto,

$$\vec{v}(g) = -\left\langle A_p((p - c)^\top), \vec{v} \right\rangle = \left\langle -A_p((p - c)^\top), \vec{v} \right\rangle ,$$

donde, por (2.8)

$$\nabla g(p) = -A_p((p - c)^\top) = -A_p(\nabla f(p)),$$

para todo $p \in \Sigma$. Daí, para cada $\vec{v} \in T_p\Sigma$, temos

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla g = -\nabla_{\vec{v}}(A(\nabla f)) = -(\nabla_{\vec{v}} A)(\nabla f(p)) - A_p(\nabla_{\vec{v}} \nabla f),$$

em que $\nabla_{\vec{v}} A$ é a derivada covariante de A em relação a $\vec{v}$. Pela equação de Codazzi-Mainardi 2.21, obtemos

$$(\nabla_{\vec{v}} A)(\nabla f(p)) = (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}).$$

Dessa maneira, utilizando a expressão (2.9) da *hessiana* de f, encontramos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_p(\vec{v}, A_p(\vec{v})) &= \langle \vec{v}, A_p(\vec{v})\rangle + \langle A_p(\vec{v}), A_p(\vec{v})\rangle \langle p-c, N(p)\rangle \\ &= \langle \vec{v}, A_p(\vec{v})\rangle + \langle A_p(\vec{v}), A_p(\vec{v})\rangle g(p).\end{aligned}$$

Fazendo uso dessas informações, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v})) &= \langle \nabla_u \nabla g, \vec{v}\rangle \\ &= -\langle (\nabla_{\vec{v}} A)(\nabla f(p)), \vec{v}\rangle - \langle A_p(\nabla_{\vec{v}} \nabla f), \vec{v})\rangle \\ &= -\left\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v}\right\rangle - \langle \nabla_{\vec{v}} \nabla f, A_p(\vec{v})\rangle \\ &= -\left\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v}\right\rangle - \nabla^2 f_p(\vec{v}, A_p(\vec{v})) \\ &= -\left\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v}\right\rangle - \langle \vec{v}, A_p(\vec{v})\rangle - \langle A_p(\vec{v}), A_p(\vec{v})\rangle g(p).\end{aligned}$$

Assim, a *hessiana* de g é dada por

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v})) = -\left\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v}\right\rangle - k(\vec{v}) - |A_p(\vec{v})|^2 g(p),$$

para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma$. Tomando $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ base de direções principais de Σ em p,

$$\nabla^2 g_p(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = -\left\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{e_i}), \vec{e_i}\right\rangle - k_i(p) - (k_i)^2(p) g(p).$$

Como

$$\begin{aligned}\Delta g(p) &= \nabla^2 g_p(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + \nabla^2 g_p(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \\ &= -tr(\nabla_{\nabla f(p)} A) - (k_1(p) + k_2(p)) - (k_1^2(p) + k_1^2(p)) g(p),\end{aligned}$$

então segue da Proposição 2.20 que

$$\begin{aligned}\Delta g(p) &= -\langle tr(\nabla f(p), \nabla(tr A_p)\rangle - (k_1(p) + k_2(p)) - (k_1^2(p) + k_1^2(p)) g(p) \\ &= -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle - 2H(p) - ((k_1(p) + k_2(p))^2 - 2k_1(p)k_2(p)) g(p) \\ &= -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle - 2H(p) - (4H^2(p) - 2K(p)) g(p).\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta g(p) = -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle - 2H(p) - 2(2H^2(p) - K(p)) g(p). \qquad (4.4)$$

Por outro lado, já que as propriedades de divergente nos garantem que

$$2div(H\nabla f)(p) = 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle + 2H(p)\Delta f(p),$$

por (4.3), teremos

$$2div(H\nabla f)(p) = 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle + 4H(p)(1 + H(p)g(p)),$$

de maneira que, por (4.4),

$$2(H(p) + K(p)g(p)) = div(2H\nabla f)(p) + \Delta g(p).$$

Finalmente, integrando a igualdade acima, concluímos pelo Teorema da Divergência que

$$\int_\Sigma 2(H(p) + K(p)g(p))d\Sigma = \int_\Sigma div(2H\nabla f)(p) + \Delta g(p)d\Sigma = 0,$$

provando (4.2).

□

4.2 O teorema de Liebmann

Karl Otto Heinrich Liebmann (1874-1939), em 1899, provou que as únicas superfícies compactas convexas do espaço Euclidiano com curvatura gaussiana constante são as esferas. Esse resultado ficou conhecido como Teorema de Liebmann e, 50 anos depois, o matemático Heinz Hopf (1894-1971) apresentou uma nova demonstração para o caso de superfícies imersas no $\mathbb{R}^3$. Ambas as demonstrações citadas requerem uma abordagem de conceitos que habitualmente não são vistos em cursos básicos. Motivados por isso, trouxemos uma demonstração, atribuída a Sebastián Montiel, que envolve as Fórmulas Integrais de Minkowski estudadas por nós nesse trabalho. Vejamos a seguir:

Teorema 4.2. *Se uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ regular (conexa) e compacta tem curvatura Gaussiana constante K, então Σ é uma esfera.*

Demonstração. Primeiramente, utilizaremos o fato de que toda superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ compacta é o bordo de um domínio regular compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^3, \partial\Omega = \Sigma$ e, consequentemente, é orientável com aplicação de Gauss $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$. Ademais, pelo Teorema 3.1, K é positiva e podemos escolher a orientação de Σ de modo que ambas as curvaturas principais sejam positivas. Em particular, a curvatura média H será positiva e, daí, por (2.3),

$$H \geq \sqrt{K} > 0, \tag{4.5}$$

ocorrendo a igualdade apenas nos pontos umbílicos de Σ. Já que $K > 0$, o Teorema 3.8 afirma que Σ é estritamente globalmente convexa em todos os seus pontos. Além disso, por (3.1), $k(\vec{v}) > 0$ para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma$ e para todo $p \in \Sigma$.

Daí, (3.1) nos garante que h_p é positivo e, assim, a função h_p alcança em p um mínimo global estrito para cada ponto $p \in \Sigma$. Ou seja, para todo ponto $p \in \Sigma$, $\Sigma - \{p\}$ está inteiramente contido no semi espaço aberto $int(\Pi_p^+)$, acarretando também que $int(\Omega) \subset int(\Pi_p^+)$ e

$$\langle x - p, N(p) \rangle > 0,$$

para todo $x \in int(\Omega)$ e $p \in \Sigma$.

Seja $c \in int(\Omega)$ de modo que

$$\langle x - p, N(p) \rangle > 0, \forall p \in \Sigma.$$

Multiplicando a primeira fórmula de Minkowski (4.1) por $\sqrt{K}$, obtemos

$$\int_\Sigma (\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)) \langle p - c, N(p) \rangle) d\Sigma = 0.$$

Somando essa igualdade a segunda fórmula de Minkowski dada em (4.2), temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (\sqrt{K} \quad &+ \quad \sqrt{K}H(p) + H(p) + K(p)) \langle p - c, N(p) \rangle) d\Sigma \\ &= \quad \int_\Sigma (H(p) - \sqrt{K})(1 + \sqrt{K} \langle p - c, N(p) \rangle) d\Sigma \\ &= \quad 0,\end{aligned}$$

em que $(1 + \sqrt{K} \langle p - c, N(p) \rangle) > 0$. Daí,

$$(H - \sqrt{K}) = 0 \Rightarrow H = \sqrt{K}.$$

Por (2.3), a superfície Σ é totalmente umbílica. Ora, as esferas são as únicas superfícies, em $\mathbb{R}^3$, regulares compactas totalmente umbílicas, o que conclui a demonstração do teorema.

$\square$

Há outras versões desse teorema, considerando, por exemplo, Σ uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana positiva e curvatura média constante. Podemos também considerar Σ uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana positiva e $k_2 = f(k_1)$ em Σ, com f sendo função decrescente de k_1, $k_1 \geq k_2$. Essas versões, bem como suas demonstrações podem ser encontradas em [2].

Referências Bibliográficas

[1] Alías, L. J. *Análisis Geométrico y Geometría Global de Superficies: Una Intoducción Elemental.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[2] do Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[3] Lima, E. L. *Análise Real, vol. 2.* 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[4] Lima, E. L. *Curso de Análise, vol. 2.* 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[5] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* San Diego: Academic Press, 1983.