



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

Marcantônio Soares Figueiredo

A Função de Green para domínios limitados do \mathbb{R}^2
Existência e exemplos de aplicações

Campina Grande, 2019

Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

Marcantônio Soares Figueiredo

A Função de Green para domínios limitados do \mathbb{R}^2
Existência e exemplos de aplicações

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda

Campina Grande, 2019

Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

A quem for apaixonado pela Matemática.

AGRADECIMENTOS

À minha família.

Ao Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos, por me indicar o tema e por me ajudar nas primeiras etapas do ensino superior.

Ao Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda, que pacientemente me orientou durante a elaboração desse trabalho.

Ao Prof. Msc. Ronaebson de Carvalho Ferreira, quem muito me instigou no estudo de matemática.

À banca examinadora, por todas as sugestões para melhoramento deste trabalho. Aos Professores Doutores José Fernando Leite Aires e Marco Aurélio Soares Souto pela disponibilidade e por todas as sugestões dadas para a melhoria do trabalho.

Ao CNPq, pela bolsa PICME que me foi fornecida.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos a existência da Função de Green (utilizando o método devido a Peter Lax) para um domínio limitado Ω contido no plano cuja fronteira cumpre as condições da esfera interior e exterior. Nessas condições, o Teorema de Poincaré garante a existência de uma Função de Green associada a Ω . A demonstração desse teorema será feita utilizando as Identidades de Green, a Solução Fundamental para o problema de Laplace, os Princípios do Máximo para funções harmônicas e o Teorema de Hahn-Banach. Dentre as aplicações da Função de Green, destaca-se a representação da solução u do problema de Dirichlet na região Ω e com valor de fronteira $f \in C^2(\partial\Omega)$ por meio da integral sobre $\partial\Omega$ do núcleo de Poisson, isto é, da derivada direcional da Função de Green na direção do vetor unitário normal a $\partial\Omega$. Mostraremos também alguns exemplos da Função de Green e da representação por meio de integral para funções em domínios particulares.

Palavras-chave: Função de Green, Laplaciano, Teorema de Hahn-Banach.

ABSTRACT

In this paper we study the existence of the Green's Function (using Peter Lax's method) for a bounded domain Ω contained in the plane and whose boundary satisfies the conditions of the inner and outer sphere. Under these conditions, the Poincaré Theorem guarantees the existence of a Green's Function associated with Ω . The proof done here uses the Green's Identities, the Fundamental Solution of the Laplace Equation, the Maximum Principles and the Hahn-Banach's Theorem. Among the applications of the Green Function, we highlight the possibility of write the solution u of the Dirichlet's problem in the region Ω and with the boundary value $f \in C^2(\partial\Omega)$ by means of the integral over $\partial\Omega$ of the Poisson's kernel, the directional derivative of the Green's Function in the direction of the normal unit vector at $\partial\Omega$. We also show some examples of the Green's Function and integral representations for functions in particular domains.

Key words: Green's Function, Laplacian, Hahn-Banach's theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 CONCEITOS PRELIMINARES	4
2.1 Solução Fundamental da Equação de Laplace	4
2.1.1 <i>Laplaciano para funções radialmente simétricas</i>	4
2.1.2 <i>Equação de Laplace</i>	4
2.2 Identidades de Green	6
3 FUNÇÃO DE GREEN	14
3.1 Definição.	14
3.2 Teorema de existência	18
4 EXEMPLOS EM DOMÍNIOS PARTICULARES	29
4.1 Bolas	29
4.1.1 <i>Bola unitária</i>	29
4.1.2 <i>Bolas centradas na origem</i>	38
4.1.3 <i>Bolas quaisquer.</i>	40
4.2 Semiplano	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46
Apêndice A: Princípio do Máximo Forte	47
Apêndice B: Teorema de Hahn-Banach	50

NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES

Geral

- \mathbb{R} é o conjunto dos números reais.
- \mathbb{R}_+ , é o conjunto dos números reais positivos.
- $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, são pontos do \mathbb{R}^2 .
- $(\varepsilon_n), (\zeta_n)$ e (γ_n) são sequências de números reais.
- Ω é um subconjunto de \mathbb{R}^2 .
- $f, g, u, v, \phi, \varphi, \mu$ são funções reais.
- $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2$ é o produto interno euclidiano de x por y .
- $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ é a norma euclidiana (ou simplesmente norma) de x .
- $\|u\| = \sup |u|$ é a norma de uma função $u \in C^2(\Omega)$, onde Ω é um conjunto limitado.

Topologia

- $B_\varepsilon(x) = B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2; |y - x| < \varepsilon\}$ é a bola aberta de centro x e raio $\varepsilon > 0$.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se, para todo $x \in \Omega$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.
- $\bar{\Omega}$ (fecho de Ω) é o conjunto dos limites das sequências convergentes de pontos de Ω .
- Ω é fechado se $\Omega = \bar{\Omega}$.
- Ω é um compacto se é limitado e fechado.
- Ω é um conexo se, dada qualquer decomposição $\Omega = A \cup B$ onde $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, tem-se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.
- Ω é um domínio se é aberto e conexo.
- $\partial\Omega$ (fronteira de Ω) é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^2$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$.

Derivação

- $\frac{dv}{dr}$ é a derivada de v em relação a r .
- $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}$ são as derivadas parciais de primeira ordem de u .
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ são as derivadas parciais de segunda ordem de u .
- $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$ é o gradiente de f .
- $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ é a derivada direcional de u em relação ao vetor unitário $\eta \in \mathbb{R}^2$.
- $\operatorname{div} F = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2}$ é o divergente do campo vetorial $F = (f, g)$.
- $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ é o laplaciano de u .

Integração

- $\int_{\Omega} u(x) dx$ pode representar tanto a integral de u em Ω (quando existir) quanto a integral imprópria de u em Ω (quando convergir).
- $\oint_{\partial\Omega} u(y) d\sigma, \int_{\partial\Omega} u(y) d\sigma$ representam a integral de u sobre $\partial\Omega$ quando Ω é limitado ou não limitado, respectivamente.
- $\oint_{\partial\Omega} u(y) d\sigma_y, \int_{\Omega} u(x) dx$ são as médias de u sobre os conjuntos $\partial\Omega$ e Ω , respectivamente.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é mostrar a existência da Função de Green em domínios limitados do plano que possuam fronteira regular (Teorema de Poincaré) e ilustrá-la em alguns domínios. Com tal função é possível expressar em forma de integral a solução, caso exista, do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $f \in C(\partial\Omega)$.

Este tipo de problema pode ser classificado como um problema elíptico ou problema de Dirichlet.

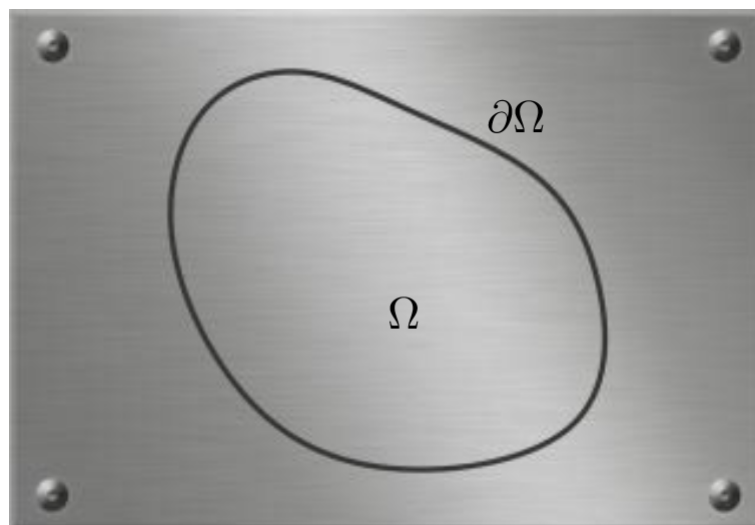
Mais adiante, veremos que a solução deste problema depende apenas da função f e da Função de Green.

O problema (1.1) pode ser visualizado na Física como obtenção da distribuição de

- densidade de uma substância
- temperatura
- potencial eletrostático

em uma região Ω quando conhecemos a distribuição pela fronteira. Para exemplificar, considere, numa placa metálica homogênea, um domínio limitado Ω com $\partial\Omega$ regular (**Figura 1**).

Figura 1: Placa de metal.



Fonte: Autoria própria, com uso do GeoGebra.

Sejam u e f funções reais de duas variáveis que representam as temperaturas da placa em $\bar{\Omega}$ e $\partial\Omega$, respectivamente. Assuma que:

- $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$;
- $f \in C(\partial\Omega)$;
- $u = f$ em $\partial\Omega$;
- u está em estado de equilíbrio.

Dada uma bola aberta qualquer $\mathcal{B} \subset \Omega$, sejam $y \in \partial\mathcal{B}$ e η_y o vetor unitário normal externo a $\partial\mathcal{B}$ no ponto y .

A equação da reta que passa por y na direção de η_y é

$$p(t) = y + t\eta_y.$$

Note que $p(0) = y$ e $p'(0) = \eta_y$.

Assim,

$$\nabla u(y) \cdot \eta_y = [(\nabla u) \circ p](0) \cdot p'(0) = [(u \circ p)'(0)] = \frac{d}{dt}u(y).$$

Segue daí que $\nabla u(y) \cdot \eta_y$ mede quanta energia térmica sai de \mathcal{B} pelo ponto y .

Dessa forma, a integral

$$\oint_{\partial\mathcal{B}} \nabla u(y) \cdot \eta_y d\sigma_y$$

representa a energia térmica total perdida por \mathcal{B} .

Como u está em equilíbrio, tal perda é nula, ou seja,

$$\oint_{\partial\mathcal{B}} \nabla u(y) \cdot \eta_y d\sigma_y = 0.$$

Para continuarmos, precisaremos do seguinte lema, cuja demonstração encontra-se em [3]:

Lema (Teorema do Divergente):

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira regular, $g, h \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, $F = (g, h)$ um campo vetorial e η o vetor unitário normal a $\partial\Omega$. Então,

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx = \oint_{\partial D} F \cdot \eta \, d\sigma. \quad (1.2)$$

Pelo Teorema do Divergente, fazendo $D = \mathcal{B}$ e $F = \nabla u$, tem-se

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\nabla u)(x) dx = 0.$$

Como $\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x)$, $\forall x \in \Omega$, obtemos

$$\int_{\mathcal{B}} \Delta u(x) dx = 0$$

Como $\Delta u \in C(\Omega)$ e a bola aberta $\mathcal{B} \subset \Omega$ foi tomada arbitrariamente, segue que

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega,$$

isto é, o problema (1.1) modela nosso exemplo.

Para maior clareza reuniremos os resultados que serão necessários para mostrar a existência da Função de Green. O mais importante dentre estes será o Teorema de Hahn-Banach.

Doravante, Ω sempre representará um domínio limitado do \mathbb{R}^2 .

2 CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 Solução Fundamental da Equação de Laplace

2.1.1 Laplaciano para funções radialmente simétricas

Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função radialmente simétrica, ou seja,

$$x, y \in \Omega \text{ e } |x| = |y| \Rightarrow u(x) = u(y).$$

Denote

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto v(r) = u(x), |x| = r. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2) = \frac{dv}{dr}(r) \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_1, x_2) = v'(r) \left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot 2x_i, i = 1, 2,$$

implicando em

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(r) \frac{x_i}{r}, i = 1, 2.$$

Note também que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} (v'(r)x_i) r - v'(r)x_i \cdot \frac{x_i}{r}}{r^2} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} (v'(r)) x_i}{r} - \frac{v'(r)x_i^2}{r^3} \\ &= \frac{v''(r) \cdot \frac{x_i}{r} x_i + v'(r)}{r} - \frac{v'(r)x_i^2}{r^3} \\ &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), i = 1, 2. \end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que

$$\Delta u(x) = v''(r) \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{2}{r} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^3} \right) = v''(r) + \frac{1}{r} v'(r)$$

para todo $r > 0$.

2.1.2 Equação de Laplace

Definição 2.1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e seja $u \in C^2(\Omega)$. A equação

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega. \tag{2.1}$$

é denominada **Equação de Laplace para Ω** .

Se a função u definida na seção anterior for uma solução de (2.1), tem-se

$$0 = v''(r) + \frac{1}{r}v'(r), \forall r > 0.$$

Supondo $v'(r) \neq 0$ para todo $r > 0$, segue

$$\frac{d}{dr}(\ln v') = \frac{v''(r)}{v'(r)} = -\frac{1}{r}.$$

Integrando com relação a r , temos

$$\ln v' = -\ln r + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Escolhendo $k = \ln c$, com $c > 0$,

$$\ln v' = -\ln r + \ln c = \ln\left(\frac{c}{r}\right).$$

Como o logaritmo é uma função injetora,

$$v'(r) = \frac{c}{r}.$$

Integrando novamente em r ,

$$v(r) = c \ln r + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Escolhendo $k_1 = 0$, tem-se

$$v(r) = c \ln r,$$

onde $c > 0$. Logo,

$$u(x) = c \ln |x|.$$

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 2.1.2. A função

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi(x) := \frac{1}{2\pi} \ln|x| \end{aligned}$$

é dita a **Solução Fundamental** da Equação de Laplace para $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, isto é, ϕ é tal que

$$\Delta\phi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Observação 2.1.3. O valor da constante c foi escolhido de modo a normalizar algumas estimativas.

2.2 Identidades de Green

A construção da Função de Green se dará a partir das Identidades de Green, as quais serão discutidas nesta seção.

Teorema 2.2.1 (Identidades de Green). *Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$(i) \int_{\Omega} (\nabla v \nabla u + v \Delta u) dx = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma_y \text{ (Primeira Identidade de Green),}$$

$$(ii) \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\sigma_y \text{ (Segunda Identidade de Green).}$$

Demonstração: Considerando $F = v \nabla u$ em (1.2), temos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) dx = \oint_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \eta d\sigma.$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \nabla u) &= \operatorname{div} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_1}, v \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + v \Delta u \\ &= \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u \end{aligned}$$

e

$$v \nabla u \cdot \eta = v (\nabla u \cdot \eta) = v \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

temos

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma, \quad (2.2)$$

mostrando a Primeira Identidade de Green.

Trocando os papéis de u e v nos cálculos acima, obtém-se

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma. \quad (2.3)$$

Subtraindo (2.3) de (2.2) segue-se que

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\sigma,$$

mostrando a Segunda Identidade de Green. ■

Para cada $x \in \Omega$ fixado, defina a função

$$\begin{aligned}\phi_x : \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \phi_x(y) := \phi(x-y)\end{aligned}$$

(onde ϕ é a Solução Fundamental da Equação de Laplace para $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$).

Esta função é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$. No entanto, ϕ_x é ilimitada em $\Omega \setminus \{x\}$ e portanto não tem integral definida nesse conjunto. Como Ω é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega.$$

Defina, então,

$$V_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}.$$

Nestas condições, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.2. *Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $\eta = \eta_y$ o vetor unitário normal externo à fronteira de Ω no ponto y . Então existe o limite*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} \phi(y-x) \Delta u(y) dy$$

e, utilizando a notação de integral imprópria, vale a representação

$$u(x) = - \oint_{\partial\Omega} \left(\phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - \frac{\partial \phi}{\partial \eta_y}(y-x) u(y) \right) d\sigma_y + \int_{\Omega} \phi(y-x) \Delta u(y) dy, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.4)$$

Observações 2.2.3. (2.4) merece uma atenção especial por fornecer uma representação para u em termos de integrais.

O diferencial $d\sigma_y$ e o vetor η_y são denotados desta forma para que não haja confusão com a variável x .

Demonstração: Dado $x \in \Omega$, seja $d = \frac{2}{3} \text{dist}(x, \Omega)$. Como, para $\varepsilon < d$, tem-se

$$V_\varepsilon = V_d \cup \{y \in \mathbb{R}^2; \varepsilon < |y-x| \leq d\}$$

e essa reunião é disjunta, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{V_\varepsilon} \phi(y-x) \Delta u(y) dy &= \int_{V_d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\varepsilon < |y-x| \leq d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy \\ &= \int_{V_d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\varepsilon}^d \oint_{|y-x|=t} \phi(y-x) \Delta u(y) d\sigma_y dt \\ &= \int_{V_d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\varepsilon}^d \oint_{|y-x|=t} \frac{1}{2\pi} \ln t \Delta u(y) d\sigma_y dt \\ &= \int_{V_d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\varepsilon}^d \frac{1}{2\pi} \ln t \oint_{|y-x|=t} \Delta u(y) d\sigma_y dt \\ &= \int_{V_d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\varepsilon}^d \frac{1}{2\pi} \ln t \oint_{|y-x|=1} \Delta u(ty) t d\sigma_y dt \\ &= \int_{V_d} \phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\varepsilon}^d \frac{1}{2\pi} t \ln t \oint_{|y-x|=1} \Delta u(ty) d\sigma_y dt.\end{aligned}$$

Considere a função

$$\begin{aligned} \mu : (0, d) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varepsilon &\mapsto \mu(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^d \frac{1}{2\pi} t \ln t \oint_{|y-x|=1} \Delta u(ty) d\sigma_y dt. \end{aligned}$$

Note que μ está bem definida, pois $u \in C^2(\Omega)$. Além disso, o

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} \phi(y-x) \Delta u(y) dy$$

existe se, e somente se, existir o $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(\varepsilon)$.

Dados quaisquer $\varepsilon, \zeta \in (0, d)$, temos

$$\begin{aligned} |\mu(\varepsilon) - \mu(\zeta)| &= \left| \int_{\varepsilon}^{\zeta} \frac{1}{2\pi} t \ln t \oint_{|y-x|=1} \Delta u(ty) d\sigma_y dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varepsilon}^{\zeta} |t \ln t| \left| \oint_{|y-x|=1} \Delta u(ty) d\sigma_y \right| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\varepsilon}^{\zeta} |t \ln t| \oint_{|y-x|=1} |\Delta u(ty)| d\sigma_y dt \right|. \end{aligned}$$

Como $\overline{B_d(x)} \subset \Omega$ é compacto, existe $M > 0$ tal que

$$|\Delta u(y)| \leq M, \forall y \in \overline{B_d(x)}.$$

Logo,

$$|\mu(\varepsilon) - \mu(\zeta)| \leq \frac{M}{2\pi} \left| \int_{\varepsilon}^{\zeta} |t \ln t| \oint_{|y-x|=1} d\sigma_y dt \right| \leq M \left| \int_{\varepsilon}^{\zeta} |t \ln t| dt \right|.$$

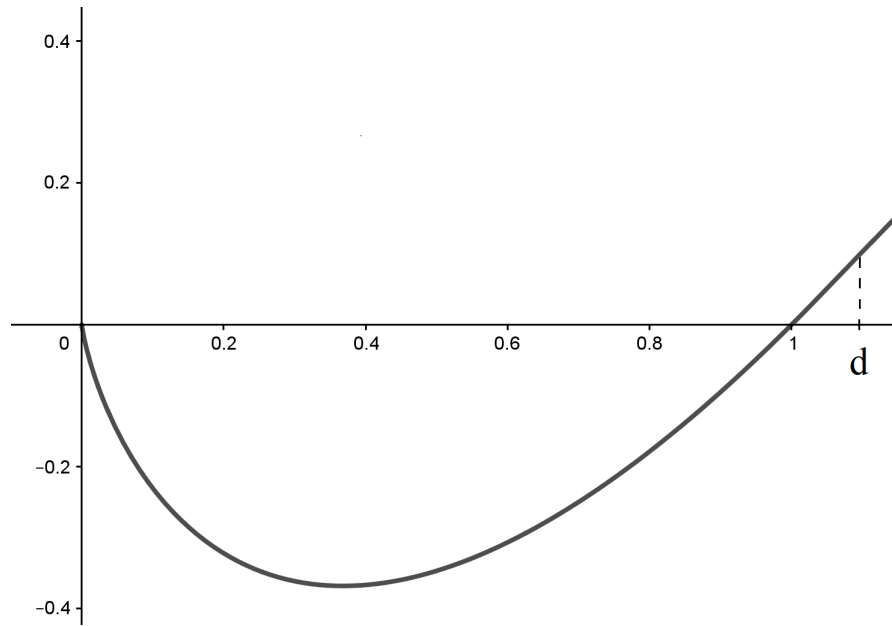
Uma vez que a função $t \mapsto t \ln t$ é limitada em $(0, d)$ (**Figura 2**), existe $N > 0$ tal que

$$|t \ln t| \leq N, \forall t \in (0, d),$$

donde

$$|\mu(\varepsilon) - \mu(\zeta)| \leq MN \left| \int_{\varepsilon}^{\zeta} dt \right| = MN|\varepsilon - \zeta|.$$

Figura 2: Gráfico de $t \ln t$.



Fonte: Autoria própria, com uso do GeoGebra.

Seja $(\varepsilon_n) \subset (0, d)$ uma sequência qualquer com $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Mostraremos que existe o $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\varepsilon_n)$. Como (ε_n) é uma sequência de Cauchy, dado qualquer $\xi > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j, k \in \mathbb{N}, j, k \geq n_0 \Rightarrow |\varepsilon_j - \varepsilon_k| < \frac{\xi}{MN}.$$

Assim,

$$j, k \in \mathbb{N}, j, k \geq n_0 \Rightarrow |\mu(\varepsilon_j) - \mu(\varepsilon_k)| \leq MN|\varepsilon_j - \varepsilon_k| < MN \frac{\xi}{MN} = \xi,$$

isto é, $\mu(\varepsilon_n)$ é sequência de Cauchy em \mathbb{R} e portanto converge. O limite de $(\mu(\varepsilon_n))$, por outro lado, não depende da sequência (ε_n) considerada. De fato, dadas duas sequências (ε_n) e (γ_n) de pontos de $(0, d)$ tais que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\gamma_n \rightarrow 0$, existem os limites

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\varepsilon_n) \text{ e } L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\gamma_n).$$

Podemos definir uma sequência (ζ_n) pondo

$$\zeta_n = \begin{cases} \varepsilon_n, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \gamma_n, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Temos $\zeta_n \rightarrow 0$ e, daí, existe o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\zeta_n).$$

Como o limite de uma subsequência de uma sequência convergente é igual ao limite da sequência, temos

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\zeta_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\varepsilon_{2n}) = L_1.$$

De maneira análoga, obtemos $L = L_2$. Segue que os limites de $(\mu(\varepsilon_n))$ conforme $n \rightarrow +\infty$ são iguais para todas as sequências

$$(\varepsilon_n) \subset (0, d) \text{ com } \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

ou seja, existe o $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(\varepsilon)$. Portanto, existe o

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} \phi_x(y) \Delta u(y) dy =: \int_{\Omega} \phi_x(y) \Delta u(y) dy,$$

mostrando a primeira parte do **Teorema 2.2.2**.

Para obter (2.4), note agora que, para $0 < \varepsilon < d$, o conjunto V_ε é aberto, limitado e tem fronteira suave, de sorte que as Identidades de Green são válidas nele. Fixado x , temos

$$\phi_x(y) = \phi(y - x) = \frac{1}{2\pi} \ln |y - x|, \quad \forall y \in V_\varepsilon.$$

Observe que ϕ_x é harmônica em V_ε , isto é

$$\Delta \phi_x(y) = 0 \text{ em } V_\varepsilon. \quad (2.5)$$

Daí, $\phi_x \in C^2(\overline{V_\varepsilon})$. Aplicando a Segunda Identidade de Green na região V_ε para as funções u e ϕ_x , temos

$$\int_{V_\varepsilon} (\phi_x(y) \Delta u - u(y) \Delta \phi_x(y)) dy = \oint_{\partial V_\varepsilon} \left(\phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}(y) \right) d\sigma_y$$

(onde η ou η_y denotam o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ no ponto y), implicando de (2.5) que

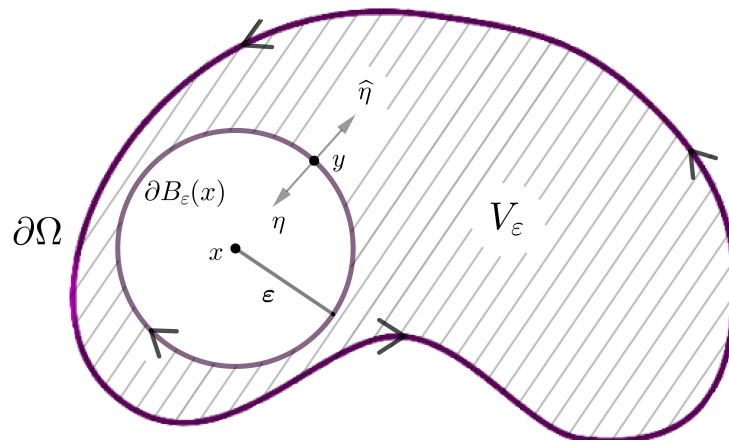
$$\int_{V_\varepsilon} \phi_x(y) \Delta u dy = \oint_{\partial V_\varepsilon} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) d\sigma_y - \oint_{\partial V_\varepsilon} u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}(y) d\sigma_y.$$

Observando que

$$\partial V_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x)$$

e esta união é disjunta para $\varepsilon < d$, segue-se (**Figura 3**)

$$\begin{aligned} \int_{V_\varepsilon} \phi_x(y) \Delta u(y) dy &= \oint_{\partial\Omega} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) d\sigma_y - \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}(y) d\sigma_y + \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) d\sigma_y \\ &\quad - \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Figura 3: Região V_ε e vetores η e $\widehat{\eta}$.

Fonte: Autoria própria.

Fazendo $\widehat{\eta} = -\eta$ obtém-se

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial \widehat{\eta}} = \nabla \phi_x \cdot \widehat{\eta} = \nabla \phi_x \cdot (-\eta) = -\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}, \forall y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

De modo análogo,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) = -\frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}}(y), \forall y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_{V_\varepsilon} \phi_x(y) \Delta u(y) dy &= \oint_{\partial \Omega} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta_y}(y) d\sigma_y - \oint_{\partial \Omega} u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}(y) d\sigma_y \\ &\quad - \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}}(y) d\sigma_y + \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \widehat{\eta}}(y) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Afirmção 1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}}(y) d\sigma_y = 0.$

De fato, observe que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}}(y) \right| \leq M, \forall y \in \overline{B_\varepsilon(x)}, \quad (2.7)$$

para algum $M > 0$, pois $\frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} \in C(\overline{\Omega})$ e $\overline{B_\varepsilon(x)}$ é compacto.

Veja que

$$\oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}}(y) d\sigma_y = \oint_{|y-x|=\varepsilon} \phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon \oint_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_y.$$

Segue de (2.7) que

$$\left| \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_y \right| \leq \frac{M}{2\pi} |\ln \varepsilon| \left| \oint_{|y-x|=\varepsilon} d\sigma_y \right| = \frac{M}{2\pi} |\ln \varepsilon| 2\pi \varepsilon = M \varepsilon |\ln \varepsilon|.$$

Passando ao limite de $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial B(x, \varepsilon)} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta_y}(y) d\sigma_y = 0,$$

mostrando a **Afirmção 1**.

Afirmção 2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}(y) u(y) d\sigma_y = u(x).$

Considerando $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ temos

$$\phi_x(y) = \frac{1}{2\pi} \ln|y - x| = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial y_1}(y) = \frac{y_1 - x_1}{2\pi|y - x|^2} = \frac{y_1 - x_1}{2\pi\varepsilon^2} \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial y_2}(y) = \frac{y_2 - x_2}{2\pi|y - x|^2} = \frac{y_2 - x_2}{2\pi\varepsilon^2}. \quad (2.9)$$

Observe que para cada $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ tem-se

$$\widehat{\eta}(y) = \frac{1}{|y - x|} (y - x) = \frac{1}{\varepsilon} (y - x),$$

de modo que, por (2.8) e (2.9) e para $y \in \partial B_\varepsilon(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}(y) &= \nabla \phi_x(y) \cdot \widehat{\eta}(y) \\ &= \left(\frac{y_1 - x_1}{2\pi\varepsilon^2}, \frac{y_2 - x_2}{2\pi\varepsilon^2} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} (y - x) \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon^3} (y - x) \cdot (y - x) \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon^3} |y - x|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}, \end{aligned}$$

implicando em

$$\oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}(y) u(y) d\sigma_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \oint_{|y-x|=\varepsilon} u(y) d\sigma_y = \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (2.10)$$

Uma vez que a média radial converge quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \oint_{|y-x|=\varepsilon} u(y) d\sigma_y = u(x)$$

(cf. **Apêndice A**). Assim, de (2.10),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}(y) u(y) d\sigma_y = u(x).$$

Passando ao limite de $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na expressão (2.6) obtemos, da primeira parte da demonstração e das **Afirmações 1 e 2**,

$$u(x) = - \oint_{\partial\Omega} \left(\phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) - u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta_y}(y) \right) d\sigma_y + \int_{\Omega} \phi_x(y) \Delta u(y) dy.$$

Mostrando (2.4). ■

Os dois teoremas a seguir serão necessários mais tarde. Suas demonstrações podem ser encontradas nos Apêndices A e B.

Teorema 2.2.4 (Princípio do Máximo Forte [4]). *Suponha $u \in C^2(\Omega)$ harmônica (isto é $\Delta u = 0$) em Ω . Suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\Omega} u(x)$ ou $u(x_0) = \inf_{\Omega} u(x)$. Então u é constante em Ω .*

Teorema 2.2.5 (Teorema de Hahn-Banach, Forma analítica [1]). *Seja X um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo:*

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$
- (ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Se $G \subset X$ é um subespaço X e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear que verifica

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G,$$

existe um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

- (I) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in G$;
- (II) $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

3 FUNÇÃO DE GREEN

3.1 Definição

Nesta seção, faremos a construção da definição da Função de Green. Para tal, dado $x \in \Omega$, considere uma função qualquer φ_x harmônica em Ω . Fazendo

$$v = \varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

na Segunda Identidade de Green, temos

$$0 = \oint_{\partial\Omega} \left(\varphi_x \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial \varphi_x}{\partial \eta} \right) d\sigma_y - \int_{\Omega} \varphi_x \Delta u dy. \quad (3.1)$$

Somando (3.1) à identidade (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} u(x) = & - \oint_{\partial\Omega} (\phi_x(y) - \varphi_x(y)) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) d\sigma_y + \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}(y) - \frac{\partial \varphi_x}{\partial \eta_y} \right) u(y) d\sigma_y \\ & + \left(\int_{\Omega} \phi_x(y) \Delta u(y) dy - \int_{\Omega} \varphi_x(y) \Delta u(y) dy \right), \end{aligned}$$

onde lembramos que a integral $\int_{\Omega} \phi_x \Delta u dy$ é imprópria.

Perceba que integral $\int_{\Omega} \varphi_x \Delta u dy$ existe, de modo que podemos escrevê-la como integral imprópria, isto é,

$$\int_{\Omega} \varphi_x \Delta u dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} \varphi_x \Delta u dy.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \phi_x \Delta u dy - \int_{\Omega} \varphi_x \Delta u dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} \phi_x \Delta u dy - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} \varphi_x \Delta u dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{V_\varepsilon} (\phi_x - \varphi_x) \Delta u dy$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} u(x) = & - \oint_{\partial\Omega} (\phi_x(y) - \varphi_x(y)) \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) d\sigma_y + \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}(y) - \frac{\partial \varphi_x}{\partial \eta_y} \right) u(y) d\sigma_y \quad (3.2) \\ & + \int_{\Omega} (\phi_x(y) - \varphi_x(y)) \Delta u(y) dy, \end{aligned}$$

onde a terceira integral é imprópria.

Nosso interesse agora é eliminar o termo $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, uma informação não dada no problema (1.1), da expressão (3.2). Para isso, devemos escolher $\varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica tal que

$$\varphi_x(y) = \phi(y - x), \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Com base nestas observações, temos a seguinte definição:

Definição 3.1.1 (Função de Green, Núcleo de Poisson [4]). A **Função de Green** associada ao problema de Dirichlet (1.1) em Ω é dada por

$$G(x, y) = \phi(y - x) - \varphi_x(y), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in \overline{\Omega}, \quad x \neq y,$$

onde ϕ é a Solução Fundamental da Equação de Laplace para Ω e $\varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é a **parte regular da Função de Green** que satisfaz, para cada $x \in \Omega$, o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_x(y) &= 0 \text{ em } \Omega \\ \varphi_x(y) &= \phi(y - x) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

O **Núcleo de Poisson** de Ω é a função

$$K(x, y) = \frac{\partial G}{\partial \eta_y} = \nabla_y G(x, y) \cdot \eta_y, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Observações 3.1.2. G é definida no conjunto

$$(\Omega \times \overline{\Omega}) \setminus \bigcup_{x \in \Omega} \{(x, x)\}.$$

A terminologia *parte regular da função* φ_x é devida a esta aplicação estar bem definida no ponto x (diferente do que ocorre para ϕ_x), como veremos a seguir.

A *Função de Green* fica bem definida quando sua parte regular existir.

Teorema 3.1.3. [5] *Suponha que existe uma função de Green* Ω . *Então:*

- (a) $G(x, y) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \overline{\Omega}, \quad x \neq y.$
- (b) $G(x, y) = G(y, x), \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega, \quad x \neq y.$

Demonstração: Para mostrar (a), fixe $x \in \Omega$ e note que

$$G(x, y) \rightarrow -\infty$$

quando $y \rightarrow x$, pois ϕ_x tem essa propriedade e φ_x é limitado numa vizinhança de x . Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação

$$y \mapsto G(x, y)$$

é harmônica em V_ε , pertence a $C^2(V_\varepsilon) \cap C(\overline{V_\varepsilon})$ e satisfaz

- $G(x, y) = 0, \quad \forall y \in \partial\Omega$ e
- $G(x, y) < 0, \quad \forall y \in \overline{B_\varepsilon(x)}.$

Com isso, o Princípio do Máximo Forte (**Teorema 2.2.4**) assegura que $G(x, y) < 0$ em V_ε (pois G não é constante).

Para mostrar (b), fixe $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)} \subset \Omega \text{ e } \overline{B_\varepsilon(x)} \cap \overline{B_\varepsilon(y)} = \emptyset.$$

Defina as funções

$$\begin{aligned} u : \Omega \setminus \{x\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto u(z) := G(x, z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v : \Omega \setminus \{y\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto v(z) := G(y, z). \end{aligned}$$

Então u e v são harmônicas no conjunto

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus (\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)}).$$

Aplicando a Segunda Identidade de Green para u e v em Ω_ε , temos

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega_\varepsilon} v \Delta u - u \Delta v dz &= \oint_{\partial \Omega_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_z \\ &= \oint_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_z - \oint_{\partial B_\varepsilon(x)} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_z - \oint_{\partial B_\varepsilon(y)} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_z. \end{aligned}$$

Daí, sendo $\widehat{\eta} = -\eta$,

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_z + \oint_{|z-x|=\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} - u \frac{\partial v}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_z \\ &\quad + \oint_{|z-y|=\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} - u \frac{\partial v}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ora, u e v são contínuas nos compactos $\overline{B_\varepsilon(y)}$ e $\overline{B_\varepsilon(x)}$, respectivamente, de modo que argumentos semelhantes aos utilizados para mostrar as Afirmações 1 e 2 na demonstração do **Teorema 2.2.2** nos dão as igualdades

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{|z-x|=\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_z &= 0, & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{|z-y|=\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_z &= u(y), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{|z-x|=\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_z &= v(x) & \text{ e } & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{|z-y|=\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial \widehat{\eta}} d\sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

Passando ao limite de $\varepsilon \rightarrow 0^+$ em (3.4), obtemos

$$0 = \oint_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_z + v(x) - u(y).$$

Lembrando que, dado qualquer $w \in \Omega$, tem-se

$$G(w, z) = 0, \forall z \in \partial\Omega,$$

concluimos que $u(y) = v(x)$.

Logo,

$$G(x, y) = G(y, x), \forall x, y \in \Omega, x \neq y.$$

■

Utilizando a definição da Função de Green na expressão (3.2), obtemos

$$u(x) = \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x, y) d\sigma_y + \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy.$$

Em particular, se u é harmônica, então

$$u(x) = \oint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x, y) d\sigma_y, \forall x \in \Omega,$$

onde a integral depende apenas dos valores de u sobre $\partial\Omega$.

Portanto, tem-se

$$u(x) = \oint_{\partial\Omega} K(x, y) f(y) d\sigma_y, \forall x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Concluimos, de (3.5), que a representação por meio de integral da solução do problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= f \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

depende da Função de Green associada ao domínio Ω . No entanto, encontrar a Função de Green significa encontrar sua parte regular, que satisfaz (3.3). Nesse contexto, duas perguntas que surgem de imediato:

- A função φ_x existe para todo $x \in \bar{\Omega}$?
- A função φ_x é regular (isto é $\varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$)?

As respostas para estas perguntas estão na próxima seção.

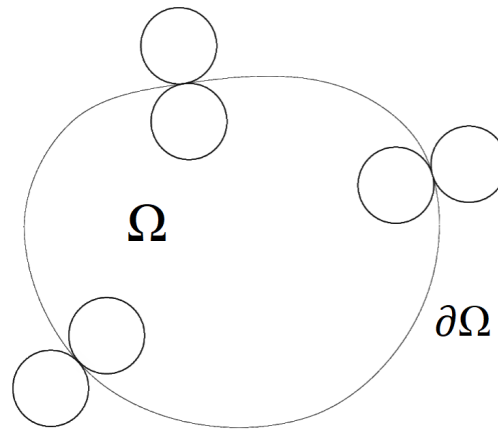
3.2 Teorema de existência

A existência da função de Green é garantida, sob hipótese de regularidade, pelo Teorema de Poincaré. Antes deste, precisaremos apresentar algumas definições e alguns resultados.

Definição 3.2.1. O domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisfaz a **condição da esfera interior e exterior** se existir $r > 0$ tal que, para todo $y_0 \in \partial\Omega$, existam $y_1 \in \Omega$ e $y_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ satisfazendo as seguintes condições (**Figura 4**):

- (a) $B_r(y_1) \subset \Omega$, $\partial B_r(y_1) \cap \partial\Omega = \{y_0\}$, (esfera interior), e
 (b) $B_r(y_2) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, $\partial B_r(y_2) \cap \partial\Omega = \{y_0\}$, (esfera exterior).

Figura 4: Condição da esfera interior e exterior.



Fonte: Autoria própria.

Definição 3.2.2. Dados $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, e $R > 0$, a **reflexão** de x com respeito a $\partial B_R(0)$ é o ponto

$$x' = \frac{R^2}{|x|^2}x.$$

Observe que x' pertence à semirreta partindo da origem na direção de x e é tal que $|x| |x'| = R^2$.

Em particular, $(x')' = x$. O ponto x' é chamado **ponto dual** a x com respeito a $\partial B_R(0)$. A aplicação $x \mapsto x'$ é a **inversão** pela esfera $\partial B_R(0)$.

Se $y, x_0 \in \mathbb{R}^2$, $y \neq x_0$, são pontos quaisquer, definimos a **reflexão** de y com respeito a $\partial B_R(x_0)$ como o ponto

$$y' = x_0 + x' = x_0 + \frac{R^2}{|y - x_0|^2}(y - x_0),$$

onde x' é a reflexão do ponto $y - x_0$ com respeito a $\partial B_R(0)$.

Observação 3.2.3. Esta definição é conhecida como princípio de reflexão de cargas eletrostáticas: dada uma carga pontual numa região Ω , devemos determinar a posição de outra carga, no exterior de Ω , gerando o mesmo potencial sobre $\partial\Omega$ [7].

Proposição 3.2.4. Se $x \neq 0$, então

$$\frac{|y - x|}{|y - x'|} = \frac{|x|}{R}, \quad \forall y \in \partial B_R(0).$$

Por outro lado, se $y \notin B_R(0)$ então

$$\frac{|y - x|}{|y - x'|} \geq \frac{|x|}{R}, \quad \forall x \in B_R(0), \quad \forall x \neq 0$$

e

$$\frac{|y - x|}{|y - x'|} \leq \frac{|x|}{R}, \quad \forall x \notin B_R(0).$$

Demonstração: Note que

$$\frac{|y - x|^2}{|y - x'|^2} = \frac{|y|^2 - 2y \cdot x + |x|^2}{|y|^2 - 2\frac{R^2}{|x|^2}y \cdot x + \frac{R^4}{|x|^2}} = \frac{|y|^2 - 2y \cdot x + |x|^2}{\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 - 2y \cdot x + R^2} \frac{|x|^2}{R^2}. \quad (3.6)$$

Tomando $y \in \partial B_R(0)$, tem-se $|y| = R$, donde

$$\frac{|y - x|^2}{|y - x'|^2} = \frac{R^2 - 2y \cdot x + |x|^2}{|x|^2 - 2y \cdot x + R^2} \frac{|x|^2}{R^2},$$

verificando-se a igualdade da proposição.

Para as desigualdades, considere $y \notin B_R(0)$ ($|y| \geq R$). Como

$$\left(|x|^2 + |y|^2\right) - \left(\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 + R^2\right) = \left(|y|^2 - R^2\right)\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right),$$

tem-se

$$\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 + R^2 = |x|^2 + |y|^2 - \left(|y|^2 - R^2\right)\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right).$$

Se $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, então $0 < |x| < R$, donde

$$\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 + R^2 \leq |x|^2 + |y|^2.$$

Dessa forma,

$$|y - x|^2 = |y|^2 - 2y \cdot x + |x|^2 \geq \frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 + R^2. \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7),

$$\frac{|y - x|^2}{|y - x'|^2} \geq \frac{|x|^2}{R^2},$$

implicando que

$$\frac{|y - x|}{|y - x'|} \geq \frac{|x|}{R}, \quad \forall x \in B_R(0), \quad x \neq 0.$$

A demonstração da última desigualdade, para $x \notin B_R(0)$, é análoga, bastando observar que, sendo $|x| \geq R$, tem-se

$$1 - \frac{|x|^2}{R^2} \leq 0.$$

.

■

Teorema 3.2.5 (Poincaré [7]). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisfaça a condição da esfera interior e exterior. Então, existe uma função de Green G associada a Ω .*

Demonstração: Aqui usaremos o Teorema de Hahn-Banach. Para tal, precisaremos de um subespaço vetorial não vazio do espaço $C(\partial\Omega)$.

Seja

$$B = \left\{ f \in C(\partial\Omega); \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u = f \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para algum } u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \right\},$$

isto é, B é um conjunto formado pelas funções $f \in C(\partial\Omega)$ tais que o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= f \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.8}$$

tem solução clássica (i.e. existe uma aplicação $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, com $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verificando (3.8)).

Afirmamos que B é um subespaço vetorial não vazio de $C(\partial\Omega)$.

Que B é não vazio é imediato, pois $f \equiv 0 \in C(\partial\Omega)$ e $u \equiv 0 \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema (3.8). Mostraremos agora que B é um subespaço vetorial de $C(\partial\Omega)$.

Sejam $f, g \in B$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então existem u_f e u_g em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tais que

$$\begin{aligned} \Delta u_f = \Delta u_g &= 0, \quad \text{em } \Omega \\ u_f = f \text{ e } u_g &= g, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Afirmção 1. *O problema*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ u &= f + \lambda g \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.9}$$

possui solução.

De fato, considere $w = u_f + \lambda u_g$. Observe que w é solução de (3.9), pois

$$\Delta w = \Delta u_f + \lambda \Delta u_g = 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$w_f = u_f + \lambda u_g = f + \lambda g \text{ sobre } \partial\Omega,$$

mostrando que $f + \lambda g \in B$. Portanto, B é um subespaço vetorial de $C(\partial\Omega)$.

Fixe $x \in \Omega$ e defina o funcional

$$\begin{aligned} L_x : B &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto L_x(f) = u_f(x). \end{aligned}$$

Observe que L_x está bem definido pois, para cada $f \in B$, existe uma única solução u_f para o problema (3.8). De fato, suponha que existam

$$u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

soluções do problema (3.8). Então, $w = u - v$ é solução do problema

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \text{ em } \Omega \\ w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Pelo **Teorema 2.2.4** temos $w \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto

$$u \equiv v \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Aqui mostraremos que L_x é um funcional linear contínuo. Para tal, note que

(I) L_x é linear.

Sejam $f, g \in B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$L_x(f + \lambda g) = u_{f+\lambda g}(x) = (u_f + \lambda u_g)(x) = L_x(f) + \lambda L_x(g).$$

(II) L_x é limitado.

Dada $f \in B$,

$$L_x(f) = u_f(x) \leq \max_{z \in \overline{\Omega}} u_f(z).$$

Pelo item (a) do Princípio do Máximo Fraco (cf. Apêndice A), segue que

$$L_x(f) \leq \max_{z \in \partial\Omega} u_f(z) \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)| = \|f\|. \quad (3.10)$$

Observe agora que

$$-L_x(f) = -u_f(x) \leq \max_{z \in \partial\Omega} (-u_f(z)) = \max_{z \in \partial\Omega} (-f(z)),$$

o que implica

$$-L_x(f) \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)| = \|f\|. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11)

$$|L_x(f)| \leq \|f\|, \quad \forall f \in B,$$

mostrando a continuidade do funcional L_x .

Afirmção 2. L_x é monótono não-decrescente, isto é

$$L_x(f_1) \leq L_x(f_2), \quad \forall f_1 \leq f_2, \quad f_1, f_2 \in B.$$

Se $f_1, f_2 \in B$, então, $f_1 - f_2 \in B$, donde existe

$$u_{12} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

tal que

$$L_x(f_1 - f_2) = u_{12}(x).$$

Suponha $f_1 \leq f_2$. Então, temos $f_1 - f_2 \leq 0$ (ou seja, $(f_1 - f_2)(y) \leq 0, \forall y \in \partial\Omega$). Daí e do Princípio do Máximo Fraco,

$$L_x(f_1 - f_2) \leq \max_{z \in \partial\Omega} (f_1 - f_2)(z) \leq 0,$$

implicando, pelo fato de L_x ser linear, em

$$L_x(f_1) \leq L_x(f_2),$$

mostrando a **Afirmção 2**.

Dividiremos o restante da demonstração em três etapas:

1ª etapa: *Existe uma extensão linear contínua de L_x em $C(\partial\Omega)$ que é monótona não-decrescente.*

Defina

$$\begin{aligned} p_x : C(\partial\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto p_x(g) = \inf_{\substack{f \in B \\ f \geq g}} L_x(f). \end{aligned}$$

Note que p_x está bem definida pois, para cada $g \in C(\partial\Omega)$, temos

$$L_x(f) = u_f(x) \geq \min_{z \in \Omega} u_f(z) = \min_{z \in \partial\Omega} f(z) \geq \min_{z \in \partial\Omega} g(z), \quad \forall f \in B, f \geq g.$$

Fazendo $c = \min_{z \in \partial\Omega} g(z)$, segue-se que

$$u_f(x) \geq c, \quad \forall f \in B, f \geq g,$$

isto é, o conjunto

$$\{L_x(f); f \in B, f \geq g\},$$

é limitado inferiormente, para cada $g \in C(\partial\Omega)$.

Afirmção 3. p_x é uma aplicação subaditiva, homogênea positiva e, além disso,

$$L_x(f) = p_x(f), \quad \forall f \in B.$$

De fato, dados $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$ e $f_1, f_2 \in B$ tais que

$$f_1 \geq g_1 \text{ e } f_2 \geq g_2,$$

temos $f_1 + f_2 \geq g_1 + g_2$. Observando que

$$L_x(f_1 + f_2) \in \{L_x(f); f \geq g_1 + g_2, f \in B\},$$

temos

$$L_x(f_1 + f_2) \geq p_x(g_1 + g_2).$$

Pela linearidade de L_x ,

$$p_x(g_1 + g_2) \leq L_x(f_1) + L_x(f_2), \forall f_1 \geq g_1 \text{ e } \forall f_2 \geq g_2,$$

donde segue, por propriedade de ínfimo, que

$$p_x(g_1 + g_2) \leq p_x(g_1) + p_x(g_2), \forall g_1, g_2 \in C(\partial\Omega),$$

mostrando assim que p_x é uma aplicação subaditiva.

Mostraremos agora que p_x é homogênea positiva. Note que, dado $\lambda > 0$, temos

$$\{u_h; h \geq \lambda f, h \in B\} = \left\{ u_{\tilde{h}}; \frac{1}{\lambda} \tilde{h} \geq f, \tilde{h} \in B \right\}.$$

Escrevendo $\tilde{h} = \frac{1}{\lambda} h$, vê-se que

$$\{u_h; h \geq \lambda f, h \in B\} = \lambda \{u_{\tilde{h}}; \tilde{h} \geq f, \tilde{h} \in B\},$$

e portanto

$$\inf_{\substack{h \geq \lambda f \\ h \in B}} u_h(x) = \lambda \inf_{\substack{\tilde{h} \geq f \\ \tilde{h} \in B}} u_{\tilde{h}}(x),$$

isto é

$$p_x(\lambda f) = \lambda p_x(f), \forall \lambda > 0.$$

Dado $f \in B$, temos

$$p_x(f) = \inf_{\substack{h \geq f \\ h \in B}} L_x(h).$$

Lembrando que L_x é monótona não-decrescente, temos

$$L_x(h) \geq L_x(f), \forall h \geq f, h \in B.$$

Daí e do fato de $f \in B$,

$$p_x(f) = \inf_{\substack{h \geq f \\ h \in B}} L_x(h) = L_x(f).$$

Assim, p_x e L_x satisfazem as hipóteses do Teorema de Hahn-Banach. Dessa forma, existe $\bar{L}_x : C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linear e contínuo que estende L_x é tal que

$$\bar{L}_x(g) = L_x(g), \forall g \in B, \tag{3.12}$$

e

$$\bar{L}_x(g) \leq p_x(g), \quad \forall g \in C(\partial\Omega).$$

(\bar{L}_x é contínua pois p_x é contínua).

Em particular, \bar{L}_x é monótona não-decrescente, pois $g \leq 0$ implica

$$\bar{L}_x(g) \leq p_x(g) \leq 0.$$

2ª etapa: Defina

$$\varphi_x(y) = \bar{L}_x(\phi_y|_{\partial\Omega}), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega. \quad (3.13)$$

Então, φ_x se estende continuamente como uma função em \mathbb{R}^2 .

Dado $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$, observe que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_y : \partial\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \phi_y(z) \end{aligned}$$

pertence a $C(\partial\Omega)$, pois $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Logo, φ_x está bem definida sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$. Ademais, se $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, então $\phi_y \in B$. De fato, basta observar que

$$\Delta\phi_y(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Sabendo disto temos, de (3.12),

$$\varphi_x(y) = \bar{L}_x(\phi_y|_{\partial\Omega}) = L_x(\phi_y|_{\partial\Omega}) = \phi_y(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}.$$

Consequentemente,

$$\varphi_x(y) = \phi(y - x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}, \quad x \in \Omega. \quad (3.14)$$

Seja $r > 0$ a constante da condição da esfera interior e exterior. Mostraremos que valem as desigualdades

$$\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|y - y_1|}{r}\right) + \phi_x(y') \leq \varphi_x(y) \leq \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|y - y_2|}{r}\right) + \phi_x(y''), \quad (3.15)$$

onde $x \in \Omega$ está fixado e $y \in \Omega$ é tal que $h := d(y, \partial\Omega) < r$.

Observe que existe um único ponto y_0 que minimiza a distância entre y e $\partial\Omega$ (pois $\partial\Omega$ é compacto). Sejam $y_1 \in \Omega$ e $y_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ tais que

$$\partial B_r(y_1) \cap \bar{\Omega} = \{y_0\}$$

e

$$\partial B_r(y_2) \cap \bar{\Omega} = \{y_0\}.$$

Note que

$$B_h(y) \subset B_r(y_1),$$

pois $h < r$ e $y \in [y_0, y_1]$.

Como $y \neq y_1$ e $y \neq y_2$, podemos definir as reflexões de y com relação a $\partial B_r(y_1)$ e a $\partial B_r(y_2)$:

- $y' := \frac{r^2}{|y-y_1|^2}(y-y_1) + y_1$;
- $y'' := \frac{r^2}{|y-y_2|^2}(y-y_2) + y_2$.

Note que

$$|y'' - y_2| = \frac{r^2}{|y - y_2|} < r,$$

o que implica $y'' \in B_r(y_2)$, donde segue-se que $y'' \notin \bar{\Omega}$.

Afirmção 4. Se $d(y, \partial\Omega) < r$, então $y' \notin \bar{\Omega}$.

Como y_0 é o ponto que minimiza a distância de y e $\partial\Omega$, tem-se $y \in [y_0, y_1]$. Mais precisamente,

$$y = y_1 + t(y_0 - y_1), \text{ para algum } 0 < t < 1. \quad (3.16)$$

Assim, como

$$y' = y_1 + \frac{r^2}{|y - y_1|^2}(y - y_1)$$

e observando que $|y_0 - y_1| = r$, tem-se, de (3.16),

$$y' = \frac{r^2}{|y - y_1|^2}(y - y_1) + y_1 = \frac{1}{t}(y_0 - y_1) + y_1, \text{ para algum } 0 < t < 1.$$

Equivalentemente,

$$y' = s(y_0 - y_1) + y_1, \text{ para algum } 1 < s,$$

mostrando a **Afirmção 4**.

Sejam

- $x' := \frac{r^2}{|y-y_1|^2}(y-y_1)$;
- $x'' := \frac{r^2}{|y-y_2|^2}(y-y_2)$.

Dado $z \in \partial\Omega$, note que $z \notin B_r(y_1)$ e $z \notin B_r(y_2)$. Aplicando a **Proposição 3.2.4**, temos

$$\frac{|(z - y_2) - (y - y_2)|}{|(z - y_2) - x''|} \leq \frac{|y - y_2|}{r}$$

(pois $(z - y_2) \notin B_r(0)$ e $(y - y_2) \notin B_r(0)$), implicando que

$$|z - y| \leq \frac{|z - (x'' + y_2)|}{r} |y - y_2|,$$

e portanto

$$|z - y| \leq \frac{|y - y_2|}{r} |z - y''|. \quad (3.17)$$

Aplicando novamente a **Proposição 3.2.4**, temos

$$\frac{|(z - y_1) - (y - y_1)|}{|(z - y_1) - x'|} \geq \frac{|y - y_1|}{r},$$

pois $(z - y_1) \notin B_r(0)$ e $(y - y_1) \in B_r(0)$, com $y \neq y_1$ (i.e. $y - y_1 \neq 0$), daí segue-se que

$$\frac{|z - y|}{|z - y'|} \geq \frac{|y - y_1|}{r},$$

implicando que

$$|z - y| \geq \frac{|y - y_1|}{r} |z - y'|. \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18)

$$\frac{|y - y_1|}{r} |z - y'| \leq |z - y| \leq \frac{|y - y_2|}{r} |z - y''|, \quad \forall z \in \partial\Omega, \quad (3.19)$$

onde estamos supondo $y \in \Omega$ e $0 < d(y, \partial\Omega) < r$.

Lembre-se que

$$\phi_y(z) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - y|$$

e que o logaritmo natural é uma função crescente. Aplicando o logaritmo a todos os membros da expressão (3.19) e multiplicando o resultado por $\frac{1}{2\pi} > 0$, tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_1|}{r} \right) + \phi_{y'}(z) \leq \phi_y(z) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_2|}{r} \right) + \phi_{y''}(z), \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Como, para $x \in \Omega$, \bar{L}_x é um funcional linear monótono não-decrescente, segue-se que

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_1|}{r} \right) \bar{L}_x(1) + \bar{L}_x(\phi_{y'}) \leq \bar{L}_x(\phi_y) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_2|}{r} \right) \bar{L}_x(1) + \bar{L}_x(\phi_{y''}),$$

onde 1 representa a função constante igual a 1 definida em $\partial\Omega$. Assim, de (3.13),

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_1|}{r} \right) + \varphi_x(y') \leq \varphi_x(y) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_2|}{r} \right) + \varphi_x(y''),$$

onde $x \in \Omega$. Ora, $y', y'' \notin \bar{\Omega}$. Consequentemente, de (3.14), obtemos **eq:39**):

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_1|}{r} \right) + \phi_x(y') \leq \varphi_x(y) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|y - y_2|}{r} \right) + \phi_x(y'').$$

Fixado $\bar{y} \in \partial\Omega$, veja que

$$y \rightarrow \bar{y} \Rightarrow |y - y_1|, |y - y_2| \rightarrow r,$$

e portanto $y' \rightarrow \bar{y}$, de maneira análoga também conseguimos

$$y'' \rightarrow \bar{y}, \text{ quando } y \rightarrow \bar{y}.$$

Sabendo disso, passando ao limite de $y \rightarrow \bar{y}$ em (3.15) obtemos:

$$\phi(\bar{y} - x) \leq \lim_{\substack{y \rightarrow \bar{y} \\ y \in \Omega}} \varphi_x(y) \leq \phi(\bar{y} - x), \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega.$$

Estendendo φ_x para \mathbb{R}^2 como

$$\varphi_x(\bar{y}) := \phi(\bar{y} - x), \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega, x \in \Omega,$$

vê-se que $\varphi_x \in C(\partial\Omega)$. Não obstante, temos $\varphi_x \in C(\mathbb{R}^2)$ pois, por definição,

$$\varphi_x(y) = \bar{L}_x(\phi_y), y \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega,$$

com $\bar{L}_x \in C^\infty(C(\partial\Omega))$ e $(\phi_y)_{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega} \subset C(\partial\Omega)$.

Observação 3.2.6. *O fato da parte regular da função de Green não ser necessariamente de classe C^1 passou despercebido até o final do século 19.*

Tal problema somente seria resolvido por Alexander Liapounoff em 1898, garantindo a possibilidade de extensão das derivadas de φ_x sobre $\bar{\Omega}$ desde que $\partial\Omega$ seja suficientemente regular.

3ª etapa: *A aplicação φ_x é a parte regular da função de Green de Ω .*

Pela 2ª etapa, sabemos que φ_x é contínua em \mathbb{R}^2 e

$$\varphi_x(\bar{y}) = \phi(\bar{y} - x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega. \quad (3.20)$$

Mostraremos agora que, dado $x \in \Omega$, tem-se $\varphi_x \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $\Delta_y \varphi_x(y) = 0$. Para tal, veremos antes que

$$\Delta_y \varphi_x(y) = \Delta_y (\bar{L}_x(\phi_y|_{\partial\Omega})), \quad \forall y \in \Omega.$$

Seja $y = (\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega$. Então $\phi_y \in C^\infty(\partial\Omega)$. Sendo \bar{L}_x linear, temos, para $h_1, h_2 \approx 0$ e $h_1, h_2 \neq 0$,

$$\frac{\bar{L}_x(\phi_{y_{h_i}}) - \bar{L}_x(\phi_y)}{h_i} = \bar{L}_x\left(\frac{\phi_{y_{h_i}} - \phi_y}{h_i}\right), \quad i = 1, 2,$$

onde $y_{h_1} = (\zeta_1 + h_1, \zeta_2)$ e $y_{h_2} = (\zeta_1, \zeta_2 + h_2)$. Usando a continuidade de \bar{L}_x , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{L}_x\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\zeta_i}\right) &= \bar{L}_x\left(\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\phi_{y_{h_i}} - \phi_y}{h_i}\right) \\ &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \bar{L}_x\left(\frac{\phi_{y_{h_i}} - \phi_y}{h_i}\right) \\ &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\bar{L}_x(\phi_{y_{h_i}}) - \bar{L}_x(\phi_y)}{h_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Dessa forma, existem as derivadas $\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \bar{L}_x(\phi_y)$ e

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \bar{L}_x(\phi_y) = \bar{L}_x \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial \zeta_i} \right), i = 1, 2.$$

Lembrando que $\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \phi_y \in C(\partial\Omega)$ e aplicando um cálculo análogo para $\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \bar{L}_x \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \phi_y \right)$, obtemos que existem as derivadas $\frac{\partial^2}{\partial \zeta_i^2} \bar{L}_x(\phi_y)$ e

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta_i^2} \bar{L}_x(\phi_y) = \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \bar{L}_x(\phi_y) = \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \bar{L}_x \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \phi_y \right) = \bar{L}_x \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \phi_y \right) = \bar{L}_x \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_i^2} \phi_y \right), i = 1, 2.$$

Consequentemente,

$$\Delta_y \varphi_x(y) = \Delta_y \left(\bar{L}_x(\phi_y)|_{\partial\Omega} \right) = \bar{L}_x \left(\Delta_y \phi_y|_{\partial\Omega} \right) = \bar{L}_x(0) = 0, \forall y \in \Omega.$$

Portanto,

$$\Delta_y \varphi_x(y) = 0, \forall y \in \Omega. \quad (3.21)$$

De (3.20) e (3.21), concluímos que, dado $x \in \Omega$, φ_x é solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= \phi_x \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mostrando assim a existência da função de Green $G(x, y)$ em Ω , como queríamos. ■

4 EXEMPLOS EM DOMÍNIOS PARTICULARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns exemplos de construção da solução do Problema de Dirichlet (1.1) para alguns casos particulares.

4.1 Bolas

Desejamos obter a solução para o problema de Dirichlet associado a $\Omega = B_r(y_0)$, onde $y_0 \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ e com uma função $g \in C(\partial\Omega)$. Para tal, começaremos com o caso particular da bola unitária $B_1(0)$.

4.1.1 Bola unitária

Fixe $x \in B_1(0)$, $x \neq 0$. Nosso método será encontrar uma função φ_x satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta\varphi_x(y) = 0 & \text{em } B_1(0) \setminus \{0\} \\ \varphi_x(y) = \phi(y-x) & \text{sobre } \partial B_1(0) \end{cases}$$

e assim definiremos

$$G(x, y) = \phi(y-x) - \varphi_x(y).$$

A rigor, tal função G não é necessariamente a função de Green associada a $B_1(0)$, pois a parte regular $\varphi_x(y)$ não é harmônica na origem. Veremos também que tampouco é possível garantir que G é a função de Green associada ao domínio com fronteira regular $B_1(0) \setminus \{0\}$, pois φ_x e ϕ_x podem não coincidir em $0 \in \partial(B_1(0) \setminus \{0\})$. Entretanto, a solução u obtida a partir de G , a princípio definida fora da origem, pode ser estendida regularmente neste ponto.

Dito isso, afim de obter G utilizaremos a reflexão pela esfera $\partial B_1(0)$ como na **Definição 3.2.2**:

$$x' = \frac{x}{|x|^2}.$$

A ideia agora é “inverter a singularidade” de $x \in B_1(0)$, $x \neq 0$ para $x' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}$. Assim, a aplicação $y \mapsto \phi(y-x')$ será harmônica para $y \neq x'$ (lembre-se que ϕ é solução do problema $(\Delta = 0, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$). Daí, a função

$$\varphi_x(y) := \phi(|x|(y-x'))$$

é harmônica em $B_1(0) \setminus \{0\}$. Além disso, se $y \in \partial B_1(0)$ e $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} (|x|(y-x'))^2 &= |x|^2|y-x'|^2 \\ &= |x|^2 \left(|y|^2 - 2y \cdot \frac{x}{|x|^2} + \frac{|x|^2}{|x|^4} \right) \\ &= |x|^2 \left(1 - \frac{2y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\ &= |x|^2 - 2y \cdot x + 1 = |x-y|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$(|x|(y - x')) = |x - y|, y \in \partial B_1(0), x \neq 0.$$

Consequentemente,

$$\varphi_x(y) = \phi(y - x), y \in \partial B_1(0), x \neq 0, \quad (4.1)$$

como desejado.

Note que, quando $y \in \partial B_1(0)$, a aplicação $x \rightarrow \phi(y - x)$ é harmônica em $B_1(0)$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(y - x) = \phi(y).$$

Daí, temos a seguinte definição:

Definição: A Função de Green para a bola unitária é dada por

$$\begin{cases} G(x, y) = \phi(y - x) - \phi(|x|(y - x')), x \in B_1(0), y \in \partial B_1(0), x \neq y, x \neq 0, \\ G(0, y) = \phi(y), y \in \partial B_1(0). \end{cases}$$

Suponha que u satisfaça o problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } B_1(0) \\ u = g \text{ sobre } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (4.2)$$

Usando (3.5), teremos

$$u(x) = \oint_{\partial B_1(0)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y) d\sigma_y. \quad (4.3)$$

De acordo com a fórmula (4.1),

$$G_{y_i}(x, y) = \phi_{y_i}(y - x) - \phi(|x|(y - x'))_{y_i}, i = 1, 2.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \phi_{y_i}(y - x) &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{2\pi} \ln|y - x| \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{(|y - x|)_{y_i}}{|y - x|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{2(y_i - x_i)}{2|y - x|}}{|y - x|} \\ &= \frac{y_i - x_i}{2\pi|x - y|^2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\phi(|x|(y - x'))_{y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{2\pi} \ln(|(|x|(y - x'))|) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{(|(|x|(y - x'))|)_{y_i}}{(|(|x|(y - x'))|)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{|(y|x|^2 - x)|_{y_i}}{|(y|x|^2 - x)|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\left(\sqrt{(y_1|x|^2 - x_1)^2 + (y_2|x|^2 - x_2)^2} \right)_{y_i}}{|(y|x|^2 - x)|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|(y|x|^2 - x)|} \frac{2(y_i|x|^2 - x_i)|x|^2}{2\sqrt{(y_1|x|^2 - x_1)^2 + (y_2|x|^2 - x_2)^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|(y|x|^2 - x)|} \frac{(y_i|x|^2 - x_i)|x|^2}{|y|x|^2 - x|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{(y_i|x|^2 - x_i)|x|^2}{|y|x|^2 - x|^2}.
\end{aligned}$$

Como, para $x \neq 0$ e $y \in \partial B_1(0)$,

$$\begin{aligned}
|x - y|^2 &= |(|x|(y - x'))|^2 \\
&= |x|^2 \left| \frac{y|x|^2 - x}{|x|^2} \right|^2 \\
&= \frac{|y|x|^2 - x|^2}{|x|^2},
\end{aligned}$$

tem-se

$$|y|x|^2 - x|^2 = |x|^2|x - y|^2.$$

Daí,

$$\phi(|x|(y - x'))_{y_i} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_i|x|^2 - x_i)|x|^2}{|y|x|^2 - x|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x - y|^2}$$

se $y \in \partial B_1(0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x, y) &= (y_1, y_2) \cdot \nabla G(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^2 y_i G_{y_i}(x, y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - y|^2} \sum_{i=1}^2 y_i \left((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - y|^2} \sum_{i=1}^2 y_i^2 (1 - |x|^2) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a fórmula (4.3) nos dá a representação

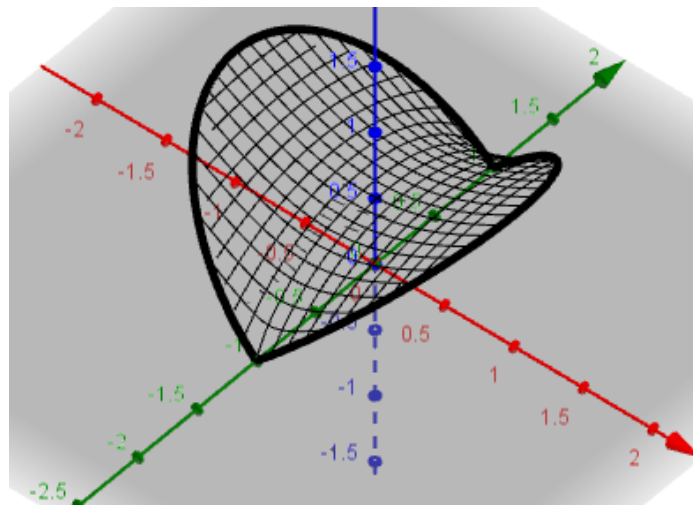
$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{g(y)}{|x - y|^2} d\sigma_y. \quad (4.4)$$

Fazendo $g(y_1, y_2) = |y_1|$, obtemos a solução

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{|y_1|}{|x - y|^2} d\sigma_y.$$

cujo gráfico é

Figura 5: Gráfico para a função módulo na bola unitária.



Fonte: Autoria própria, com uso do GeoGebra.

Fazendo $g(y_1, y_2) = \text{sen } y_1$, obtemos a solução

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{\text{sen } y_1}{|x - y|^2} d\sigma_y.$$

cujo gráfico é

Figura 6: Gráfico para a função seno na bola unitária.

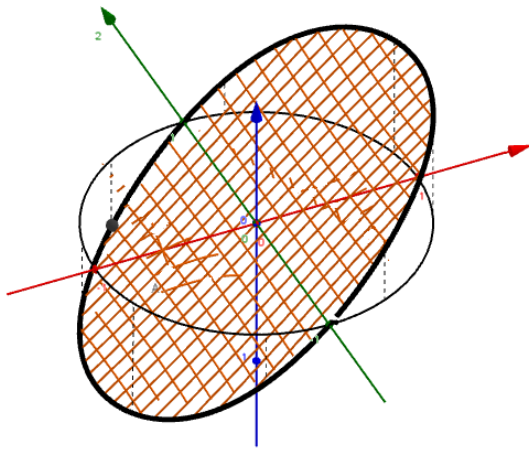
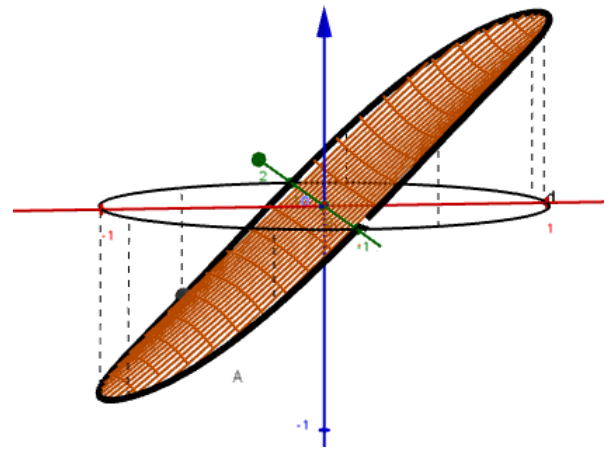


Figura 7: Gráfico para a função seno na bola unitária, vista lateral.



Fonte: Autoria própria, com uso do GeoGebra.

Fonte: Autoria própria, com uso do GeoGebra.

Mostraremos agora que a fórmula (4.4) de fato nos dá a solução (que sabemos que existe via Teorema de Poincaré) para (4.8).

Teorema: (Fórmula de Poisson para a bola unitária [2]).

Seja $g \in C(\partial B_1(0))$ e defina u como em (4.4). Então

- (i) $u \in C^\infty(B_1(0))$,
- (ii) $\Delta u = 0$ em $B_1(0)$,
- (iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in B(0;1)}} u(x) = g(x^0)$ para cada ponto $x^0 \in \partial B_1(0)$.

Demonstração:

(i) e (ii): Por construção, fixado $y \in \mathbb{R}^2$ qualquer, a aplicação

$$x \mapsto G(x, y)$$

é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, y\}$ e $y \neq \frac{x}{|x|^2}$. Daí, a derivada direcional

$$x \mapsto \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x, y)$$

é harmônica para $x \in B_1(0)$, $x \neq 0$ e $y \in \partial B_1(0)$. Defina

$$K(x, y) := \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \frac{1}{|x - y|^2}, \quad x \in B_1(0), y \in \partial B_1(0)$$

(núcleo de Poisson para a bola unitária). Pelo que já foi discutido, tem-se

$$K(x, y) = \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x, y), \quad \forall x \in B_1(0) \setminus \{0\}, \forall y \in \partial B_1(0),$$

donde a aplicação $x \mapsto K(x, y)$ é harmônica para $x \in B_1(0)$, $x \neq 0$ e $y \in \partial B_1(0)$. Além disso, note que, para $|y| = 1$, existe o

$$\lim_{x \rightarrow 0} K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y|^2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Podemos então estender continuamente $K(x, y)$ para $x = 0$ definindo $K(0, y) := \frac{1}{2\pi}$, $y \in \partial B_1(0)$. Para ver que tal extensão é harmônica (portanto suave) em $x = 0$, basta mostrar que $K(x, y)$ é suave em $x = 0$. Assim, para $|y| = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} K(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{-2x_i|x-y|^2 - (1-|x|^2)(2(x_i-y_i))}{|x-y|^4} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{2x_i|x-y|^2 + 2(1-|x|^2)(x_i-y_i)}{|x-y|^4} \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{x_i|x-y|^2 + (1-|x|^2)(x_i-y_i)}{|x-y|^4} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x_i}{|x-y|^2} + \frac{(1-|x|^2)(x_i-y_i)}{|x-y|^4} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} K(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{|x-y|^2 - 2x_i(x_i-y_i)}{|x-y|^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(-2x_i)(x_i-y_i) + 1 - |x|^2]|x-y|^4 - (1-|x|^2)(x_i-y_i)(2|x-y|^2)(2(x_i-y_i))}{|x-y|^8} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{|x-y|^2} - \frac{2x_i(x_i-y_i)}{|x-y|^4} + \frac{(-2x_i)(x_i-y_i) + 1 - |x|^2}{|x-y|^4} - \frac{4(1-|x|^2)(x_i-y_i)^2}{|x-y|^6} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{|x-y|^2} - \frac{4x_i(x_i-y_i)}{|x-y|^4} + \frac{1-|x|^2}{|x-y|^4} - \frac{4(1-|x|^2)(x_i-y_i)^2}{|x-y|^6} \right). \end{aligned}$$

Tais derivadas segundas são contínuas em $x = 0$. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} K(x, y) = -\frac{1}{\pi} (1 + 1 - 4y_i^2) = -\frac{2 - 4y_i^2}{\pi}.$$

Logo, $x \mapsto K(x, y)$ é C^2 por toda a bola $B_1(0)$, donde é harmônica (portanto de classe C^∞) em $B_1(0)$. Segue daí que

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B(0;1)} \Delta_x K(x, y) g(y) dy = 0, \quad x \in B_1(0),$$

onde a troca das posições de Δ_x e da integral é possível pois a integração tem relação somente com y . Logo, $u \in C^\infty(B_1(0))$.

(iii): Observe que, sendo g limitada em $\partial B_1(0)$, existe $C \geq 0$ tal que $g(y) \leq C$, $\forall y \in \partial B_1(0)$. Além disso, teremos

$$1 = \oint_{\partial B(0;1)} K(x, y) dy. \quad (4.5)$$

Com efeito, podemos calcular esta integral. Se $x = 0$, note que

$$\oint_{\partial B(0;1)} K(0, y) d\sigma_y = \oint_{\partial B(0;1)} \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma_y}{|y|^2} = \oint_{\partial B(0;1)} \frac{1}{2\pi} d\sigma_y = 1.$$

Suponha agora $0 < |x| < 1$. Temos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B(0;1)} K(x,y)d\sigma_y &= \frac{1-|x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^2} \\ &= \frac{1-|x|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{|x - (\cos s, \operatorname{sen} s)|^2} \\ &= \frac{1-|x|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{|x|^2 + 1 - 2x_1 \cos s - 2x_2 \operatorname{sen} s} \\ &= \frac{1-|x|^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{\frac{|x|^2+1}{2} - x_1 \cos s - x_2 \operatorname{sen} s}. \end{aligned}$$

Chame $C = \frac{|x|^2+1}{2}$ e faça a substituição $t = \operatorname{tg} \frac{s}{2}$. Observe que $t = 0$ quando $s = 0$, t percorre os números reais positivos quando $s \in (0, \pi)$ e t percorre os números reais negativos quando $s \in (\pi, 2\pi)$. Além disso, para $s \neq \pi$,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\operatorname{tg} \frac{s}{2} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{s}{2}}{\cos \frac{s}{2}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{s}{2} \operatorname{sen} \frac{s}{2}}{\cos^2 \frac{s}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} (\cos^2 \frac{s}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{2})}{\cos^2 \frac{s}{2}} \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

Também, para $s \neq \pi$,

$$t^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{s}{2}}{\cos^2 \frac{s}{2}} = \frac{1 - \cos^2 \frac{s}{2}}{\cos^2 \frac{s}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2}} - 1,$$

donde

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2}} = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cos^2 \frac{s}{2}} = \frac{1+t^2}{2}.$$

Então,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1+t^2}{2} \Rightarrow ds = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Lembrando das identidades

$$\operatorname{sen} s = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}} \text{ e } \cos s = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}},$$

temos

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B(0;1)} K(x,y) d\sigma_y &= \frac{1-|x|^2}{4\pi} \int_{[0,\pi)} \frac{ds}{C-x_1 \cos s - x_2 \operatorname{sen} s} + \frac{1-|x|^2}{4\pi} \int_{(\pi,2\pi)} \frac{ds}{C-x_1 \cos s - x_2 \operatorname{sen} s} \\
&= \frac{1-|x|^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{C-x_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} - x_2 \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1-|x|^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+t^2}{C(1+t^2) - x_1(1-t^2) - 2x_2 t} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1-|x|^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2(C+x_1) - 2tx_2 + C - x_1} dt \\
&= \frac{1-|x|^2}{2\pi(C+x_1)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2 - 2t \frac{x_2}{C+x_1} + \frac{C-x_1}{C+x_1}} dt,
\end{aligned}$$

pois $C+x_1 = \frac{|x|^2+1}{2} + x_1 = \frac{x_1^2+2x_1+1+x_2^2}{2} = \frac{(x_1+1)^2+x_2^2}{2} > 0$ para todo $x \in B_1(0)$.

Note que

$$\begin{aligned}
t^2 - 2t \frac{x_2}{C+x_1} + \frac{C-x_1}{C+x_1} &= \left(t - \frac{x_2}{C+x_1} \right)^2 - \frac{x_2^2}{(C+x_1)^2} + \frac{C-x_1}{C+x_1} \\
&= \left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{C+x_1} \right)^2 - \frac{x_2^2}{(C+x_1)^2} + \frac{C^2 - x_1^2}{(C+x_1)^2} \\
&= \left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{C+x_1} \right)^2 + \frac{C^2 - |x|^2}{(C+x_1)^2} \\
&= \left[\left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{C+x_1} \right)^2 \frac{(C+x_1)^2}{C^2 - |x|^2} + 1 \right] \frac{C^2 - |x|^2}{(C+x_1)^2} \\
&= \left[\left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{C+x_1} \frac{C+x_1}{\sqrt{C^2 - |x|^2}} \right)^2 + 1 \right] \frac{C^2 - |x|^2}{(C+x_1)^2} \\
&= \frac{C^2 - |x|^2}{(C+x_1)^2} \left[1 + \left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{\sqrt{C^2 - |x|^2}} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

onde $C^2 - |x|^2 = \frac{|x|^4 + 2|x|^2 + 1}{4} - |x|^2 = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} > 0$ para todo $x \in B_1(0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B(0;1)} K(x,y) d\sigma_y &= \frac{1-|x|^2}{2\pi(C+x_1) \frac{C^2 - |x|^2}{(C+x_1)^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{\sqrt{C^2 - |x|^2}} \right)^2} dt \\
&= \frac{(1-|x|^2)(C+x_1)}{2\pi(C^2 - |x|^2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \left(\frac{t(C+x_1) - x_2}{\sqrt{C^2 - |x|^2}} \right)^2} dt.
\end{aligned}$$

Faça a substituição

$$w = \frac{t(C+x_1) - x_2}{\sqrt{C^2 - |x|^2}}.$$

Como $C+x_1 \neq 0$, w percorre toda a reta quando t varre \mathbb{R} . Além disso,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C+x_1}{\sqrt{C^2 - |x|^2}} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{C^2 - |x|^2}}{C+x_1} dw.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B(0;1)} K(x,y) d\sigma_y &= \frac{(1-|x|^2)(C+x_1)}{2\pi(C^2-|x|^2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+w^2} \frac{\sqrt{C^2-|x|^2}}{C+x_1} dw \\
&= \frac{1-|x|^2}{2\pi\sqrt{C^2-|x|^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dw}{1+w^2} \\
&= \frac{1-|x|^2}{2\pi\frac{1-|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dw}{1+w^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dw}{1+w^2}.
\end{aligned}$$

Para esta última integral, observe que a função $w \mapsto \operatorname{tg}^{-1} w$ é uma primitiva de $w \mapsto \frac{1}{1+w^2}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{dw}{1+w^2} &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_c^c \frac{dw}{1+w^2} \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} (\operatorname{tg}^{-1} c - \operatorname{tg}^{-1}(-c)) \\
&= \lim_{c \rightarrow \infty} 2 \operatorname{tg}^{-1} c \\
&= 2 \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Portanto, tem-se (4.5).

Fixe $x^0 \in \partial B_1(0)$ e $\varepsilon > 0$. Tome $\delta > 0$ pequeno tal que

$$|g(y) - g(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } |y - x^0| < \delta, y \in \partial B_1(0). \quad (4.6)$$

Assim, se $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ e $x \in B_1(0)$, então

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x^0)| &= \left| \oint_{\partial B(0;1)} K(x,y) g(y) d\sigma_y - g(x^0) \oint_{\partial B(0;1)} K(x,y) d\sigma_y \right| \\
&= \left| \int_{\partial B(0;1)} K(x,y) [g(y) - g(x^0)] d\sigma_y \right| \\
&\leq \int_{\partial(B(0;1) \cap B(x^0; \delta))} K(x,y) |g(y) - g(x^0)| d\sigma_y \\
&\quad + \int_{\partial(B(0;1) \setminus B(x^0; \delta))} K(x,y) |g(y) - g(x^0)| d\sigma_y.
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Defina

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{\partial(B(0;1) \cap B(x^0; \delta))} K(x,y) |g(y) - g(x^0)| d\sigma_y \\
J &:= \int_{\partial(B(0;1) \setminus B(x^0; \delta))} K(x,y) |g(y) - g(x^0)| d\sigma_y.
\end{aligned}$$

De (4.6),

$$I \leq \frac{\varepsilon}{2} \oint_{\partial B(0;1)} K(x,y) d\sigma_y = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, se $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ e $|y - x^0| \geq \delta$, temos

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2} |y - x^0|;$$

e daí $|y - x| \geq \frac{1}{2} |y - x^0|$. Então, lembrando que g é limitada, com $|g(y)| \leq C$, $\forall y \in \partial B_1(0)$,

$$J \leq 2C \oint_{\partial(B(0;1) \setminus B(x^0, \delta))} K(x, y) dy \leq \frac{2C(1 - |x|^2)}{2\pi} \oint_{\partial(B(0;1) \setminus B(x^0, \delta))} |y - x|^{-2} d\sigma_y \rightarrow 0$$

conforme $x \rightarrow x^0$. Assim, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$J < \frac{\varepsilon}{2} \text{ quando } |x - x^0| < \delta_1.$$

Tomando $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$, obtemos, de (4.7),

$$|u(x) - u(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ quando } |x - x^0| < \delta_0.$$

■

4.1.2 Bolas centradas na origem

Suponha agora que, ao invés de (4.2), u resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } B_r(0) \\ u = g \text{ sobre } \partial B_r(0) \end{cases} \quad (4.8)$$

para $r > 0$. Para determinarmos u , note que, para $x \in B_1(0)$, a solução de (4.2) para $\tilde{g}(x) := g(rx)$ na fronteira, denotando $\tilde{x} := rx$, é

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{\tilde{g}(y)}{|x - y|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{g(ry)}{|x - y|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - r^2|x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{g(ry)}{|rx - ry|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |rx|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{g(ry)}{|rx - ry|^2} r d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |\tilde{x}|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{g(ry)}{|\tilde{x} - ry|^2} r d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |\tilde{x}|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;r)} \frac{g(y)}{|\tilde{x} - y|^2} d\sigma_y. \end{aligned}$$

Obtemos assim a fórmula de Poisson

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;r)} \frac{g(y)}{|x - y|^2} d\sigma_y, \quad x \in B_r(0). \quad (4.9)$$

A função

$$K(x, y) := \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \frac{1}{|x - y|^2}, x \in B_r(0), y \in \partial B_r(0),$$

é o núcleo de Poisson para a bola $B_r(0)$.

Mostraremos agora que a fórmula (4.9) de fato nos dá a solução de (4.8).

Teorema: (Fórmula de Poisson para uma bola centrada na origem).

Seja $g \in C(\partial B_r(0))$ e defina u como em (4.9). Então

(i) $u \in C^\infty(B_r(0))$,

(ii) $\Delta u = 0$ em $B_r(0)$,

(iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in B(0;r)}} u(x) = g(x^0)$ para cada ponto $x^0 \in \partial B_r(0)$.

Demonstração:

(i) e (ii): Dados $r > 0$ e $y \in B_r(0)$, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} K(x, y) &= \frac{1}{2\pi r} \frac{-2x_i|x - y|^2 - (r^2 - |x|^2)(2(x_i - y_i))}{|x - y|^4} \\ &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{2x_i|x - y|^2 + 2(r^2 - |x|^2)(x_i - y_i)}{|x - y|^4} \\ &= -\frac{1}{\pi r} \frac{x_i|x - y|^2 + (r^2 - |x|^2)(x_i - y_i)}{|x - y|^4} \\ &= -\frac{1}{\pi r} \left(\frac{x_i}{|x - y|^2} + \frac{(r^2 - |x|^2)(x_i - y_i)}{|x - y|^4} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} K(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{|x - y|^2 - 2x_i(x_i - y_i)}{|x - y|^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(-2x_i)(x_i - y_i) + r^2 - |x|^2]|x - y|^4 - (r^2 - |x|^2)(x_i - y_i)(2|x - y|^2)(2(x_i - y_i))}{|x - y|^8} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi r} \left(\frac{1}{|x - y|^2} - \frac{2x_i(x_i - y_i)}{|x - y|^4} + \frac{(-2x_i)(x_i - y_i) + r^2 - |x|^2}{|x - y|^4} - \frac{4(r^2 - |x|^2)(x_i - y_i)^2}{|x - y|^6} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi r} \left(\frac{1}{|x - y|^2} - \frac{4x_i(x_i - y_i)}{|x - y|^4} + \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^4} - \frac{4(r^2 - |x|^2)(x_i - y_i)^2}{|x - y|^6} \right) \\ \Delta_x K(x, y) &= -\frac{1}{\pi r} \left(\frac{2}{|x - y|^2} - \frac{4x \cdot (x - y)}{|x - y|^4} + \frac{2r^2 - 2|x|^2}{|x - y|^4} - \frac{4(r^2 - |x|^2)|x - y|^2}{|x - y|^6} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi r|x - y|^4} (2|x - y|^2 - 4x \cdot (x - y) + 2r^2 - 2|x|^2 - 4(r^2 - |x|^2)) \\ &= -\frac{1}{\pi r|x - y|^4} (2|x|^2 - 4x \cdot y + 2|y|^2 - 4|x|^2 + 4x \cdot y + 2r^2 - 2|x|^2 - 4r^2 + 4|x|^2) \\ &= -\frac{1}{\pi r|x - y|^4} (2r^2 - 2r^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde a aplicação

$$x \mapsto K(x, y)$$

é harmônica (portanto de classe C^∞).

Como $\partial B_r(0)$ é compacto e g é contínua, segue que $K(x, y)g(y)$ é limitada. Assim como antes, temos

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B(0;r)} \Delta_x K(x, y)g(y)d\sigma_y = 0, \quad x \in B_r(0).$$

(iii): Análogo ao caso (iii) de $B_1(0)$, bastando apenas trocar as curvas de integração e mostrar que

$$\oint_{\partial B(0;r)} K(x, y)d\sigma_y = 1.$$

Tome $\tilde{x} = rx$ e veja que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{1}{|x - y|^2} d\sigma_y = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{r^2}{|\tilde{x} - ry|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |\tilde{x}|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{1}{|\tilde{x} - ry|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |\tilde{x}|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;1)} \frac{1}{|\tilde{x} - ry|^2} r d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |\tilde{x}|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;r)} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^2} d\sigma_y \\ &= \oint_{\partial B(0;r)} K(\tilde{x}, y), \quad \forall \tilde{x} \in B(0, r). \end{aligned}$$

■

4.1.3 Bolas quaisquer

Para o problema (1.1) quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma bola de centro e raio quaisquer, teremos o seguinte Teorema:

Teorema:(Fórmula de Poisson para uma bola qualquer).

Sejam $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, $g \in C(\partial B_r(X_0))$ e defina u pondo

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - X_0|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(X_0;r)} \frac{g(y)}{|(x - X_0) - y|^2} d\sigma_y, \quad x \in B_r(X_0). \quad (4.10)$$

Então

(i) $u \in C^\infty(B_r(X_0))$,

(ii) $\Delta u = 0$ em $B_r(X_0)$,

(iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in B(X_0;r)}} u(x) = g(x^0)$ para cada ponto $x^0 \in \partial B_r(X_0)$.

Com efeito, seja $v \in C^2(B_r(X_0)) \cap C(\overline{B_r(X_0)})$ a solução do problema de Dirichlet associado ao domínio regular $B_r(X_0)$ com traço $g \in C(\partial B_r(X_0))$. Defina $h(x) := g(x + X_0)$ e $\tilde{v}(x) := v(x + X_0)$. Então $h \in C^2(\partial B_r(0))$ e $\tilde{v} \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ é tal que

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v}(x) = \Delta v(x + X_0) = 0, x \in B_r(0) \\ \tilde{v}(y) = v(y + X_0) = g(y + X_0) = h(y), y \in \partial B_r(0). \end{cases}$$

Do Teorema anterior, temos, para $x \in B_r(0)$,

$$\begin{aligned} v(x + X_0) = \tilde{v}(x) &= \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;r)} \frac{h(y)}{|x - y|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(0;r)} \frac{g(y + X_0)}{|x - y|^2} d\sigma_y \\ &= \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(X_0;r)} \frac{g(y)}{|x - (y - X_0)|^2} d\sigma_y. \end{aligned}$$

Se $\tilde{x} = x + X_0$, então $\tilde{x} \in B_r(X_0)$ e

$$v(\tilde{x}) = \frac{r^2 - |\tilde{x} - X_0|^2}{2\pi r} \oint_{\partial B(X_0;r)} \frac{g(y)}{|\tilde{x} - y|^2} d\sigma_y = u(\tilde{x}).$$

Da unicidade da solução, tem-se $v = u$.

4.2 Semiplano

Se considerarmos, no problema (1.1), $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, onde $\mathbb{R}_+^2 = \{x = (x_1, x_2); x_2 > 0\}$ e $g \in C(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ u = g & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Não podemos garantir, via o que já foi discutido, que tal problema admite solução. Em particular, não sabemos se existe uma função de Green associada a Ω (note que Ω é um domínio, mas não é limitado). Todavia, mostraremos aqui que

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x, y) = \frac{x_2}{\pi|x - y|^2}.$$

é o núcleo de Poisson associado a \mathbb{R}_+^2 .

Note que $\partial\mathbb{R}_+^2$ é o eixo das abscissas $x_2 = 0$. Dado $x \in \Omega$, sua “reflexão” em $\partial\Omega$ é o ponto $x' = (x_1, -x_2)$.

Vamos resolver o problema (4.11) para o semiplano pondo

$$\varphi_x(y) := \phi(y - x') = \phi(y_1 - x_1, y_2 + x_2), x, y \in \mathbb{R}_+^2.$$

Nossa intenção é, assim como no caso da bola aberta, que o corretor φ_x seja construído a partir de ϕ “refletindo a singularidade” de $x \in \mathbb{R}_+^2$ para $x' \notin \overline{\mathbb{R}_+^2}$. Note que, para $y \in \partial\mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned} |y - x'| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (-x_2)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ &= |y - x|. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{2\pi}$, obtemos

$$\varphi_x(y) = \phi(y - x), \text{ se } y \in \partial\mathbb{R}_+^2.$$

Como, $x' \notin \partial\mathbb{R}_+^2$, $\phi(y - x')$ está definida para todo $y \in \partial\mathbb{R}_+^2$. Assim,

$$\Delta\phi(y - x') = 0, \forall y \in \mathbb{R}_+^2$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} \Delta\varphi_x(y) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \varphi_x(y) = \phi(y - x) & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2, \end{cases}$$

como queríamos.

Definição. A Função de Green para o semiplano \mathbb{R}_+^2 é

$$G(x, y) := \phi(y - x) - \phi(y - x'), \quad x, y \in \mathbb{R}_+^2, x \neq y.$$

Observe que $G(x, y) = G(y, x)$, pois

$$\begin{aligned} (x_1 - y_1)^2 + (x_1 + y_1)^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_1 + x_1)^2 \\ \Rightarrow |x - y|^2 &= |y - x'|^2 \\ \Rightarrow |x - y| &= |y - x'|. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} G_{y_2}(x, y) &= \phi_{y_2}(y - x) - \phi_{y_2}(y - x') \\ &= \frac{1}{2\pi}(\ln|y - x|)_{y_2} - \frac{1}{2\pi}(\ln|y - x'|)_{y_2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y - x|} (|y - x|)_{y_2} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y - x'|} (|y - x'|)_{y_2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y - x|} \frac{y_2 - x_2}{|y - x|} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y - x'|} \frac{y_2 + x_2}{|y - x'|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{y_2 - x_2}{|y - x|^2} - \frac{y_2 + x_2}{|y - x'|^2} \right). \end{aligned}$$

Consequentemente, se $y \in \partial\mathbb{R}_+^2$, então $|y - x| = |y - x'|$ e assim

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \nabla G \cdot (0, -1) = -G_{y_2}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{|x - y|^2}.$$

Suponha agora que u satisfaz o problema (4.11). Então, de (3.5), é razoável supor que

$$u(x) = \frac{x_2}{\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \frac{g(y)}{|x - y|^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \quad (4.12)$$

seja uma representação de u . Com isso, a função

$$K(x, y) := \frac{x_2}{\pi} \frac{1}{|x - y|^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, y \in \mathbb{R}_+^2,$$

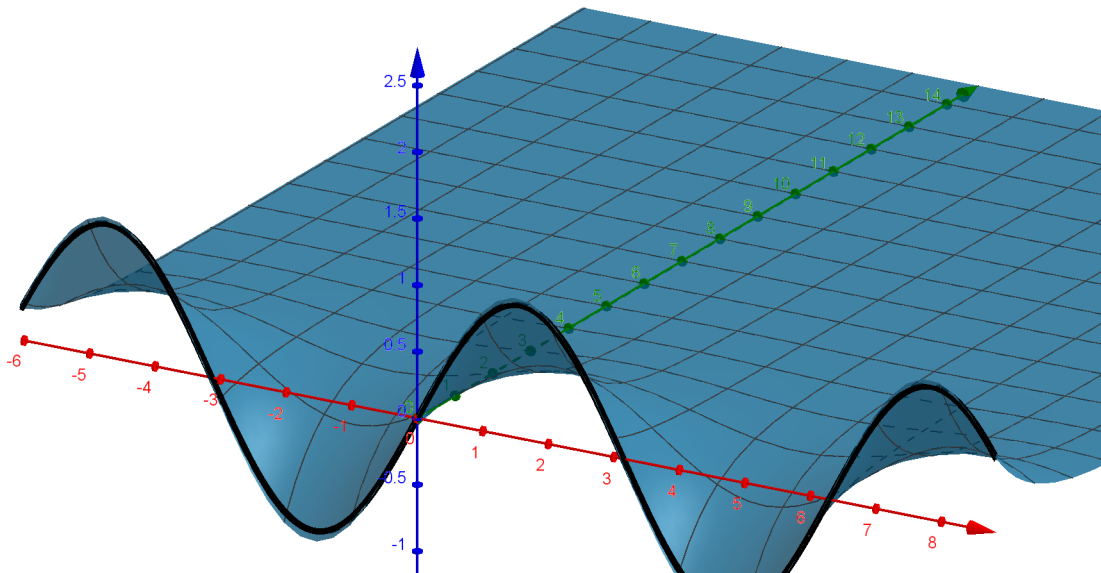
será o núcleo de Poisson para \mathbb{R}_+^2 . (4.12) é chamada fórmula de Poisson.

Fazendo $g(y_1, y_2) = 1 - |y|^2$, obtemos a solução

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \oint_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|x - y|^2} d\sigma_y.$$

cujo gráfico é

Figura 8: Gráfico para a função seno no semiplano.



Fonte: Autoria própria, com uso do GeoGebra.

Precisamos agora mostrar que a fórmula (4.12) de fato nos dá uma solução para (4.11).

Teorema: (Fórmula de Poisson para o semiplano [2]).

Sejam $g \in C(\mathbb{R})$ limitada e defina u como em (4.12). Então

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ e é limitada,

(ii) $\Delta u = 0$ em \mathbb{R}_+^2 ,

(iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in \mathbb{R}_+^2}} u(x) = g(x^0)$ para cada ponto $x^0 \in \partial\mathbb{R}_+^2$.

Demonstração:

(i) e (ii): Para cada x fixado, a aplicação

$$y \mapsto G(x, y)$$

é harmônica, exceto para $y = x$. Como $G(x, y) = G(y, x)$ para $x, y \in \mathbb{R}_+^2$, $x \neq y$, tem-se que

$$x \mapsto G(x, y)$$

é harmônica em $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{y\}$. Logo,

$$x \mapsto \frac{\partial G}{\partial y_2}(x, y) = K(x, y)$$

é harmônica para $x \in \mathbb{R}_+^2, y \in \partial\mathbb{R}_+^2$.

Mostraremos que u é limitada. Observe que, sendo g limitada, existe $C \geq 0$ tal que $g(y) \leq C, \forall y \in \partial\mathbb{R}_+^2$. Além disso,

$$1 = \int_{\mathbb{R}_+^2} K(x, y) dy. \quad (4.13)$$

Com efeito, temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} K(x, y) dy = \frac{x_2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{|x - y|^2} dy.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = (t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, temos $|y'(t)| = |(1, 0)| = 1$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{|x - y|^2} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(x_1, x_2) - (t, 0)|^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - x_1)^2 + x_2^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x_2^2 \left(\frac{t-x_1}{x_2}\right)^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Fazendo outra mudança de variáveis, desta vez $\gamma = \frac{t - x_1}{x_2}$, temos $d\gamma = \frac{1}{x_2} dt$, donde $dt = x_2 d\gamma$ e

$\gamma \rightarrow \pm\infty$ conforme $t \rightarrow \pm\infty$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x_2^2 \left(\frac{t-x_1}{x_2} \right)^2 + 1} dt &= \frac{x_2}{x_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 + 1} d\gamma \\
 &= \frac{1}{x_2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{-a} \frac{1}{\gamma^2 + 1} d\gamma \\
 &= \frac{1}{x_2} \lim_{a \rightarrow \infty} \text{tg}^{-1}(a) - \text{tg}^{-1}(-a) \\
 &= \frac{1}{x_2} \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \text{tg}^{-1}(a) \\
 &= \frac{2}{x_2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{x_2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} K(x, y) dy = \frac{x_2}{\pi} \frac{\pi}{x_2} = 1.$$

De (4.13), note que

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} K(x, y) g(y) dy \leq \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} |K(x, y)| |g(y)| dy \leq C \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} |K(x, y)| dy = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^2.$$

Portanto, u é limitada.

Como $x \mapsto K(x, y)$ é suave para $x \neq y$, verifica-se também que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$, com

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \Delta_x K(x, y) g(y) dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2,$$

onde a troca das posições dos sinais Δ_x e da integral é possível pois a integração é sobre y .

(iii): Análoga ao item (iii) do caso da bola.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle*, 2a ed. Masson, 1987.
- [2] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, ISSN 1965-7379, Volume 19, 1998.
- [3] Figueiredo, D. G. *Teoria Clássica do Potencial*, Editora Universidade de Brasília, Brasília 1963.
- [4] Gilbarg, D.; Trudinger, D. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York 1977.
- [5] Iório Jr., R.; Iório, V. M. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1988.
- [6] Lax, P. D. *On the Existence of Green's Function*, American Mathematical Society, Vol.3, No. 4, Aug., 1952, pp. 526.
- [7] Ponce, A.C. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

Apêndice A: Princípio do Máximo Forte

Seja $u \in C^2(\Omega)$ para um aberto não vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para $x \in \Omega$ fixado e para todo $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ (ou simplesmente $0 < r$ se $\partial\Omega = \emptyset$), definimos a média esférica de u pondo

$$m(r) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y.$$

Fazendo as mudanças de variáveis $y = x + z$, com $z \in \partial B_r(0)$, e em seguida $z = rw$, onde $w \in \partial B_1(0)$, tem-se

$$m(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_r(0)} u(x + z) d\sigma_z = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_1(0)} u(x + r\eta) r d\sigma_w = \int_{\partial B_1(0)} u(x + rw) d\sigma_w.$$

Utilizando a regra da cadeia, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} m(r) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B_1(0)} \frac{d}{dr} u(x_1 + rw_1, x_2 + rw_2) d\sigma_w = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x + rw) w_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x + rw) w_2 d\sigma_w \\ &= \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rw) \cdot w d\sigma_w \\ &= \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial w}(x + rw) d\sigma_w \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial u}{\partial w}(x + z) d\sigma_z \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial u}{\partial w}(x + z) d\sigma_z. \end{aligned}$$

Aplicando a Primeira Identidade de Green (**Teorema 2.2.1**, item (i)) para $v \equiv 1 \in C^2(B_r(0)) \cap C^1(\overline{B_r(0)})$, segue que

$$\frac{d}{dr} m(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(0)} \Delta u(y) dy.$$

Daí, o sinal do Laplaciano de u determina a monotonicidade da média esférica. Em particular, se $\Delta u = 0$ em Ω , então a média esférica é constante. Neste caso, a média é sempre igual a $u(x)$, uma vez que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} m(r) = u(x).$$

De fato, como $u \in C^2(\Omega)$, temos $u \in C(\overline{B_\varepsilon(x)})$ para qualquer $0 < \varepsilon < d$. Logo u é uniformemente contínua em $\overline{B_\varepsilon(x)}$. Assim, dado n natural, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$|u(y) - u(y')| < \frac{1}{\varepsilon n}, \quad \forall y, y' \in B_{\delta_n}(x). \quad (14)$$

Fixe $(\varepsilon_n) \subset (0, d)$, $d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, uma sequência qualquer com $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Então, dada uma subsequência $(\varepsilon_{n_k}) \subset (\varepsilon_n)$, tem-se $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$. Logo, existe $(\tilde{\varepsilon}_k) \subset (\varepsilon_{n_k})$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < \tilde{\varepsilon}_k < \delta_k.$$

Daí e de (14) observe que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |m(\tilde{\varepsilon}_k) - u(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi\tilde{\varepsilon}_k} \oint_{|y-x|=\tilde{\varepsilon}_k} u(y) d\sigma_y - \frac{1}{2\pi\tilde{\varepsilon}_k} \oint_{|y-x|=\tilde{\varepsilon}_k} u(x) d\sigma_y \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi\tilde{\varepsilon}_k} \oint_{|y-x|=\tilde{\varepsilon}_k} |u(y) - u(x)| d\sigma_y \\ &< \frac{1}{2\pi\tilde{\varepsilon}_k} \oint_{|y-x|=\tilde{\varepsilon}_k} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_k} d\sigma_y \\ &= \frac{1}{\varepsilon k}, \end{aligned}$$

passando ao limite de $k \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |m(\tilde{\varepsilon}_k) - u(x)| = 0.$$

Com isso, obtemos o seguinte: toda subsequência $(\varepsilon_{n_k}) \subset (\varepsilon_n)$ admite uma subsequência $(\tilde{\varepsilon}_k)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\tilde{\varepsilon}_k) = u(x).$$

Suponha que não seja válida a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\varepsilon_n) = u(x).$$

Então, existem $m \in \mathbb{N}$ e uma subsequência $(\xi_n) \subset (\varepsilon_n)$ tais que

$$|m(\xi_n) - u(x)| \geq \frac{1}{m}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\xi_n \rightarrow 0$, podemos obter $(\tilde{\xi}_n) \subset (\xi_n)$ tal que $0 < \tilde{\xi}_n < \delta_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pelo que discutimos, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|m(\tilde{\xi}_{n_0}) - u(x)| < \frac{1}{m},$$

uma contradição. Consequentemente, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\varepsilon_n) = u(x).$$

Como a sequência $(\varepsilon_n) \subset (0, d)$ foi tomada arbitrariamente, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m(\varepsilon) = u(x).$$

Teorema (do Valor Médio): *Sejam $u \in C^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$. Suponha que $\Delta u = 0$ em Ω . Então, para todo $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$,*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y.$$

Em particular a mesma igualdade vale para a média sólida, i.e., para todo $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Demonstração: A igualdade da média esférica segue do cálculo anterior. Para o caso da média sólida, escrevemos

$$2\pi t u(x) = \int_{\partial B_t(x)} u(y) d\sigma_y$$

e integramos com respeito a t de 0 a r . ■

Teorema (Princípio do Máximo Forte): *Suponha $u \in C^2(\Omega)$ harmônica (isto é $\Delta u = 0$) em Ω . Suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\Omega} u(x)$ ou $u(x_0) = \inf_{\Omega} u(x)$. Então, u é constante em Ω .*

Demonstração: Se $\Delta u = 0$, seja

$$\Omega' := \{y \in \Omega ; u(y) = \sup_{x \in \Omega} u(x)\}.$$

Por continuidade, Ω' é um conjunto fechado e por hipótese é não vazio. Será mostrado que Ω' é aberto. Seja $y \in \Omega'$. Pela desigualdade do valor médio e o fato que $u(y) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$, tem-se, para qualquer $0 < r < \text{dist}(y, \partial\Omega)$,

$$u(y) = \int_{B_r(y)} u(x) dx \leq u(y).$$

Daí, $u(y) = \int_{B_r(y)} u(x) dx$. Sendo u contínua em Ω , tem-se $u(x) = u(y)$, $\forall x \in B_r(y)$. Consequentemente, $B_r(y) \subset \Omega'$. ■

Corolário (Princípio do Máximo Fraco): *Seja Ω um domínio limitado e considere $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $\Delta u = 0$ em Ω . Então,*

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \text{ e } \min_{x \in \Omega} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Demonstração: Se u é constante, não há o que fazer. Se não for, segue como consequência do Teorema anterior e do fato de $\overline{\Omega}$ ser compacto que o máximo e o mínimo de u são atingidos em $\partial\Omega$. ■

Apêndice B: Teorema de Hahn-Banach

Para podermos demonstrar o **Teorema 2.2.5**, precisamos antes dos seguintes conceitos:

Definição: Um conjunto P é dito **parcialmente ordenado** se existe uma ordenação parcial definida em P , isto é, se existe uma relação binária “ \leq ” satisfazendo:

$$P_1) a \leq a, \forall a \in P$$

$$P_2) \text{ Se } a \leq b \text{ e } b \leq a, \text{ então } a = b$$

$$P_3) \text{ Se } a \leq b \text{ e } b \leq c, \text{ então } a \leq c$$

Um conjunto P é dito **parcialmente ordenado** (ou **cadeia**) se P é parcialmente ordenado e quaisquer dois elementos de P são comparáveis. Uma cota superior de um conjunto $W \subset P$ é um elemento $u \in P$ satisfazendo

$$x \leq u, \forall x \in W.$$

Um **elemento maximal** em P é um elemento $m \in P$ tal que

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

Axioma (Lema de Zorn): Seja $P \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que toda cadeia $Q \subset P$ tem cota superior. Então P tem um elemento maximal.

Teorema de Hahn-Banach, Forma analítica: *Seja X um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo:*

$$(i) p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$$

$$(ii) p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Se $G \subset X$ é um subespaço X e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear que verifica

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G,$$

existe um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

$$(I) f(x) = g(x), \forall x \in G;$$

$$(II) f(x) \leq p(x), \forall x \in X.$$

Demonstração: Considere o conjunto

$$P = \{h; h : D(h) \subset X \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } D(h) \text{ subespaço de } X, h \text{ linear, } G \subset D(h), h \text{ prolonga } g \text{ e } h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h)\}.$$

P está munido da relação de ordem

$$h_1 \leq h_2 := D(h_1) \subset D(h_2) \text{ e } h_2 \text{ prolonga } h_1.$$

Claramente $P \neq \emptyset$, pois $g \in P$. Mostraremos agora que toda cadeia $Q \subset P$ tem cota superior. Seja $Q \subset P$ uma cadeia, a qual denotaremos por

$$Q = (h_i)_{i \in I}.$$

Defina

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \text{ e } h(x) = h_i(x), x \in D(h_i).$$

Afirmção: $h \in P$ e h é uma cota superior para o conjunto Q .

Note primeiramente que h está bem definida pois, se $x \in D(h)$ pertence a $D(h_i)$ e $D(h_j)$ com $i \neq j$, então, sendo Q uma cadeia, devemos ter

$$h_i \leq h_j \text{ ou } h_j \leq h_i.$$

Vamos supor que $h_i \leq h_j$. Neste caso,

$$D(h_i) \subset D(h_j) \text{ e } h_j \text{ prolonga } h_i$$

i.e.,

$$h_j(x) = h_i(x), \forall x \in D(h_i),$$

mostrando dessa forma que h está bem definida.

Note que $D(h)$ é um subespaço vetorial de X , pois dados $x, y \in D(h)$, devemos ter

$$x \in D(h_i) \text{ e } y \in D(h_j).$$

Supondo que $h_i \leq h_j$, temos $x, y \in D(h_j)$ e portanto

$$x + y \in D(h_j).$$

Daí

$$h(x + y) = h_j(x + y) = h_j(x) + h_j(y) = h(x) + h(y).$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$h(\lambda x) = \lambda h(x), \forall x \in D(h).$$

Segue da definição de h que

$$G \subset D(h) \text{ e } h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h)$$

implicando que $h \in P$. Além disso, também temos

$$h_i \leq h, \forall h_i \in Q$$

mostrando que h é uma cota superior para Q .

Usando o Lema de Zorn, o conjunto P tem um elemento maximal f .

Afirmção: $D(f) = X$.

Suponha, por contradição, que $D(f) \neq X$. Então existe $x_0 \in X \setminus D(f)$. Defina $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ e

$$h(x + tx_0) = f(x) + tx$$

onde $x \in D(f)$, $t \in \mathbb{R}$ e α é uma constante que será definida de modo que $h \in P$.

Mostraremos primeiramente que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \end{cases} \quad (15)$$

De fato, recorde que

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - y_0).$$

Consequentemente,

$$f(y) - p(y - y_0) \leq p(x + x_0) - f(x), \forall x, y \in X,$$

e portanto

$$\sup_{y \in X} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{x \in X} \{p(x + x_0) - f(x)\}.$$

Considerando

$$\sup_{y \in X} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in X} \{p(x + x_0) - f(x)\},$$

tem-se que (15) ocorre.

Segue de (15) que

$$f(x + t\alpha) \leq p(x + tx_0), \forall x \in X \quad (16)$$

pois:

- Se $t > 0$,

$$f(x + t\alpha) = t \left[f\left(\frac{x}{t} + \alpha\right) \right] \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0)$$

- Se $t < 0$,

$$f(x + t\alpha) = -t \left[f\left(\frac{x}{-t} - \alpha\right) \right] \leq -tp\left(\frac{x}{-t} + x_0\right) = p(x + tx_0)$$

mostrando que (16) é verdadeiro e, portanto,

$$h(z) \leq p(z), \forall z \in D(h)$$

com h prolongando f e $h \neq f$, o que contradiz o fato de f ser elemento maximal. ■