



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA – UAMat

**Sistemas de Equações Diferenciais e Aplicações a Problemas Clássicos e à
Dinâmica da COVID-19**

por

Ellen Cristina Barbosa dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Campina Grande - PB

Abril, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA – UAMat

Ellen Cristina Barbosa dos Santos

**Sistemas de Equações Diferenciais e Aplicações a Problemas Clássicos e à
Dinâmica da COVID-19**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em
Matemática da Universidade Federal de Campina
Grande como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Matemática.

Orientado por Severino Horácio da Silva

Campina Grande - PB
Curso de Matemática, modalidade Bacharelado

Agradecimentos

Agradeço, em especial, a Deus e à virgem Maria. Obrigada pela vida, e por sempre me guiarem para os caminhos do bem. Apesar de ser uma tarefa difícil, com a presença de Deus nas nossas vidas, podemos conseguir tudo aquilo que sonhamos.

Agradeço a toda minha família, principalmente aos meus pais, Maria do Carmo e Expedito, e ao meu marido, Jozeilton. Ao meu irmão João Pedro e cunhada Marta, e à minha sobrinha Maria, a qual sempre me faz feliz. Quero dizer que o ensejo de todo o nosso sucesso se dá pela união familiar.

Ao corpo docente, pela dedicação e responsabilidade no que diz respeito ao melhor aprendizado dos graduandos. Aos funcionários que fazem parte da Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG, campus Campina Grande.

Ao meu professor e orientador, do presente trabalho, Severino Horácio da Silva. Obrigada pelo incentivo e paciência que sempre demonstrou.

Finalmente, agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram e torceram pelo meu sucesso acadêmico.

Resumo

Nosso trabalho é dedicado ao estudo de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares e não Lineares. A priori, revisamos alguns conceitos e resultados da Álgebra Linear que de alguma maneira estão relacionados às soluções dos sistemas de equações diferenciais ordinárias. A posteriori, usamos exponenciais de matrizes para encontrar soluções de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, bem como estudamos algumas aplicações clássicas, a saber: Lei do Resfriamento de Newton, O Oscilador Harmônico e O Problema da Mistura. Estudamos também um Modelo Epidemiológico Aplicado à Evolução da COVID-19 no Brasil, uma aplicação referente a Sistemas de Equações Diferenciais não Lineares.

Abstrat

Our work is dedicated to the study of Systems of Linear and Nonlinear Differential Equations. A priori, we review some concepts and results of Linear Algebra that are somehow related to the solutions of systems of ordinary differential equations. A posteriori, we use matrix exponentials to find solutions of systems of linear differential equations with constant coefficients, as well as studying some classical applications, namely: Newton's Law of Cooling, The Harmonic Oscillator and The Mixture Problem. We also studied an Epidemiological Model Applied to the Evolution of COVID-19 in Brazil, an application referring to Systems of Nonlinear Differential Equations.

Sumário

1	Alguns Conceitos da Álgebra Linear	10
1.1	Definições Preliminares	10
1.2	Espaços Vetoriais	13
1.3	Dimensão de um Espaço Vetorial	16
1.4	Autovalores com Autovetores	23
1.5	Forma Canônica de Jordan	27
2	Exponencial de Matrizes	36
3	Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias	48
3.1	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares	50
3.2	O Método dos Autovalores e dos Autovetores para Determinar Soluções	57
3.3	O Método dos Autovalores Complexos e Autovetores Complexos para Determinar Soluções	60
3.4	Sistemas Lineares Conjugados	67
4	Resolvendo Sistemas por meio de Exponencial de Matrizes	76
4.1	Soluções Matrizes Fundamentais	84
5	Alguns Modelos Matemáticos	87
5.1	Aplicações Referentes a Sistemas Lineares	87
5.1.1	Lei do Resfriamento de Newton	87
5.1.2	O Oscilador Harmônico	90
5.1.3	O problema da Mistura	91
5.2	Aplicação Referente a Sistema Não Linear	94
5.2.1	Um Modelo Epidemiológico Aplicado à Evolução da COVID-19	94
5.2.2	Existência e Unicidade de Solução	96
5.2.3	Estimando os Parâmetros Utilizados no Modelo	99
5.2.4	Evolução Temporal da COVID-19 no Brasil	102
A		107
A.1	Teorema do Ponto Fixo de Banach	107

Introdução

As equações diferenciais modelam vários fenômenos físicos, químicos e biológicos. Muitas vezes, na modelagem desses fenômenos, são necessárias mais de uma equação diferencial, ou seja, é necessário um sistema de equações diferenciais. Instigados na interpretação de tais fenômenos, formulados por essas equações, é que se iniciou o seu estudo a partir dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, por seus precursores Newton e Leibniz, durante o século XVII. Com a consolidação gradual desses métodos, nasceu um novo ramo da Matemática intitulada Teoria das Equações Diferenciais, que no século XVIII, tornou-se uma disciplina independente de suma importância e como método mais efetivo para pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace, entre outros, expandiram notavelmente o conhecimento dentro do Cálculo de Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica dos Fluidos, etc (ver [18]).

A princípio, o processo de expressar as soluções iniciou em representá-las em termos de funções elementares: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais. A posteriori, quando a relação inversa entre diferenciação e integração tinha sido percebida, passou-se a também expressar tais soluções em termos de uma integral (*quadratura*). No entanto, foi se verificando que apenas um número pequeno de equações diferenciais podiam ser resolvidas em termos de funções elementares, necessitando de engenhosas substituições ou algoritmos para sua resolução (ver [4]).

O objetivo deste trabalho consiste em estudar os sistemas de equações diferenciais lineares e não lineares, no que tange à existência e caracterização das soluções e fazer algumas aplicações a problemas do cotidiano como, por exemplo, para encontrarmos a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t , dados que eles se encontram interligados (ver na 5.1.3), para sistemas lineares e o modelo compartimental usado para estudar a dinâmica da COVID-19 (ver na 5.2.1).

Nosso trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1, revisamos alguns conceitos e resultados da Álgebra Linear que de alguma forma estão relacionados às soluções dos sistemas de equações diferenciais ordinárias. No Capítulo 2, apresentamos o conceito de exponencial de uma matriz no espaço $M(n)$ das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais. No Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e resultados da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, mais especificamente no que diz respeito ao estudo de soluções de sistemas de equações diferenciais, bem como alguns exemplos e aplicações desta teoria. No Capítulo

4, estudamos a resolução de sistemas de equações diferenciais por meio de exponencial de matrizes. No Capítulo 5, veremos algumas aplicações importantes referentes a sistemas de equações diferenciais lineares e ao sistema de equações não linear que modela o comportamento da evolução da COVID-19. Finalmente, no Apêndice, apresentamos alguns resultados que são utilizados, em algum momento, no nosso trabalho.

Capítulo 1

Alguns Conceitos da Álgebra Linear

Neste capítulo revisamos alguns conceitos e resultados da Álgebra Linear os quais estão, de alguma forma, relacionados com o estudo de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias. Para isso, utilizamos as referências [5] e [11].

1.1 Definições Preliminares

Nesta seção introduzimos alguns conceitos preliminares para o estudo das matrizes abordados em [5].

Definição 1.1. Denotamos um *vetor*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

para a sequência de números x_1, x_2, \dots, x_n . Os números x_1, x_2, \dots, x_n são chamados as *coordenadas* de x . Se $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, onde $x_j : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, então

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

é chamada uma função com valores vetoriais. Se cada x_j é diferenciável, a derivada de $x(t)$,

$\frac{dx(t)}{dt}$ é a função cujos valores vetoriais são

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.2. Denotamos uma *matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

como um quadro de números a_{ij} dispostos em m linhas e n colunas. O elemento que está na i -ésima linha e na j -ésima coluna é indicado por a_{ij} , o primeiro índice identificando sua linha e o segundo, sua coluna. Dizemos que A é uma matriz quadrada se $m = n$.

Definição 1.3. Seja A uma matriz quadrada de ordem n com elementos a_{ij} e seja x um vetor com coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n . Definimos o produto de A por x , o qual indicamos por Ax , como o vetor cuja i -ésima componente é

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Em outras palavras, a i -ésima coordenada de Ax é a soma dos produtos dos termos correspondentes da i -ésima linha de A pelo vetor x . Ademais,

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 1.4. Seja c um número real e x um vetor com n coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n . Definimos multiplicação por escalar, denotado por cx , como o vetor cujas coordenadas são $cx_1, cx_2,$

\dots, cx_n , isto é,

$$cx = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se

$$c = 3 \text{ e } x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ então } 3x = 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.5. Sejam x e y vetores com coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n , respectivamente. Definimos adição vetorial, denotada por $x + y$, como o vetor cujas coordenadas são $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$, isto é,

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ então } x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Lema 1.1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Para quaisquer dois vetores x e y e qualquer constante c ,

(a) $A(cx) = cAx$;

(b) $A(x + y) = Ax + Ay$.

Demonstração. (a) Mostramos a igualdade de dois vetores quando as coordenadas correspondentes de ambos são iguais. Agora, podemos observar que a i -ésima coordenada do vetor cAx é

$$ca_{i1}x_{i1} + ca_{i2}x_{i2} + \dots + ca_{in}x_{in} = c(a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \dots + a_{in}x_{in}),$$

e a i -ésima componente de $A(cx)$ é

$$a_{i1}(cx_{i1}) + a_{i2}(cx_{i2}) + \dots + a_{in}(cx_{in}) = c(a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \dots + a_{in}x_{in}).$$

Conclusão: $A(cx) = cAx$.

(b) Podemos observar que a i -ésima coordenada do vetor $A(x + y)$ é

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n).$$

O que implica na igualdade da i -ésima coordenada do vetor $Ax + Ay$; pelo fato de a i -ésima coordenada de Ax ser $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ e a i -ésima coordenada de Ay ser $a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n$. Portanto, $A(x + y) = Ax + Ay$. \square

1.2 Espaços Vetoriais

Dizemos que um conjunto V é um **espaço vetorial**, cujos elementos são denominados **vetores**, quando pudermos definir duas operações: a **adição**, que a cada par de vetores $x, y \in V$ faz corresponder um novo vetor $x + y \in V$, chamado a soma de x e y , e a **multiplicação** por um número real, que a cada a real e a cada vetor $y \in V$ faz corresponder o vetor ay , chamado o produto de a por y . Essas operações devem satisfazer para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in V$ as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vetorial:

(i) lei comutativa:

$$x + y = y + x;$$

(ii) lei associativa:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(ab)x = a(bx);$$

(iii) vetor nulo: existe um vetor $0 \in V$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que

$$v + 0 = 0 + v = v;$$

(iv) inverso aditivo: para cada $x \in V$ existe um vetor $-x \in V$, chamado o inverso aditivo, ou simétrico, de x tal que

$$-x + x = x + (-x) = 0;$$

(v) multiplicação por 1:

$$1 \cdot x = x;$$

(vi) distributividade:

$$a(x + y) = ax + ay,$$

$$(a + b)x = ax + bx.$$

Observação 1.1. Está implícito nos axiomas acima o fato de que se x e y estão em V , então a combinação linear $ax + by$ está em V para quaisquer a e b constantes reais.

Observação 1.2. Os números a e b são usualmente números reais, exceto em certos casos especiais onde serão números complexos.

Exemplo 1.1. Seja V o conjunto de vetores

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tais que $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$. Definimos $x + y$ e cx como a adição vetorial e a multiplicação por escalar vistas na Definição 1.5. Então V é um espaço vetorial com essas operações. De fato, podemos observar que o vetor zero é a sequência

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o vetor $-x$ é o vetor

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}.$$

Para quaisquer a e b reais e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ pertencentes a V , temos que

$$ax + by = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} by_1 \\ by_2 \\ \vdots \\ by_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix} \in V.$$

Este espaço é usualmente chamado o espaço euclidiano $n - dimensional$ e é denotado por \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.2. Seja V o conjunto de vetores

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tais que $x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$. Definimos $x + y$ e cx , para qualquer número complexo c , como a adição vetorial e a multiplicação por escalar vistas na Definição 1.5. Verifica-se, sem dificuldades, que estas operações fazem de V um espaço vetorial. Este espaço é usualmente chamado o espaço complexo $n - dimensional$ e é indicado por \mathbb{C}^n .

Exemplo 1.3. Seja V o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n . Definimos a soma de duas matrizes A e B como a matriz obtida somando os elementos correspondentes de A e B , e a matriz cA como a matriz obtida multiplicando por c cada elemento de A . Em outras palavras,

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$cA = c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}.$$

O conjunto V é um espaço vetorial com essas operações de adição de matrizes e multiplicação por escalar. De fato, os axiomas (i) , (ii) , (v) e (vi) são automaticamente verificados, pois tudo que estamos fazendo ao adicionar duas matrizes ou multiplicar por um número real é adicionar ou multiplicar números reais. O vetor zero, ou a matriz nula, é a matriz cujos elementos são

todos iguais a 0, e a matriz simétrica de qualquer matriz A é a matriz

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Comumente, denotamos este espaço vetorial por $M(n)$.

1.3 Dimensão de um Espaço Vetorial

Nesta seção estudamos alguns conceitos e resultados relacionados à dimensão de um espaço vetorial. Para isso, seguimos [5].

Definição 1.6. Dizemos que um conjunto de vetores x^1, x^2, \dots, x^n gera V se todo elemento de V for escrito como uma combinação linear de x^1, x^2, \dots, x^n .

Exemplo 1.4. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e suponhamos que e^j indique o vetor com 1 na j -ésima posição e zeros em todas as outras posições, isto é,

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de vetores e^1, e^2, \dots, e^n gera \mathbb{R}^n , pois qualquer vetor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

pode ser escrito sob a forma

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \cdots + x_n e^n.$$

Definição 1.7. Dizemos que um conjunto de vetores x^1, x^2, \dots, x^n em V é **linearmente dependente** se um desses vetores é uma combinação linear dos demais. Equivalentemente, dizemos que um conjunto de vetores x^1, x^2, \dots, x^n é linearmente dependente se existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n , não todas nulas, tais que

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0.$$

De fato, se x^j é uma combinação linear de $x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n$, isto é,

$$x^j = c_1x^1 + \dots + c_{j-1}x^{j-1} + c_{j+1}x^{j+1} + \dots + c_nx^n,$$

então a combinação linear

$$c_1x^1 + \dots + c_{j-1}x^{j-1} - x^j + c_{j+1}x^{j+1} + \dots + c_nx^n = 0$$

e nem todas as constantes são zero. Reciprocamente, se

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$$

e $c_j \neq 0$ para algum j , então podemos dividir por c_j e escrever x^j como combinação linear de $x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n$. Podemos considerar, por exemplo, $c_1 \neq 0$. Com isso,

$$x^1 = -\frac{c_2}{c_1}x^2 - \frac{c_3}{c_1}x^3 - \dots - \frac{c_n}{c_1}x^n.$$

Definição 1.8. Dizemos que os vetores x^1, x^2, \dots, x^n são **linearmente independentes** se nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos demais. A maneira mais precisa de dizer isso é que os vetores x^1, x^2, \dots, x^n são linearmente independentes se a equação

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$$

implica, necessariamente, em que todas as constantes c_1, c_2, \dots, c_n são nulas.

Exemplo 1.5. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e sejam e^1, e^2, \dots, e^n os vetores

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinarmos se e^1, e^2, \dots, e^n são linearmente dependentes ou linearmente indepen-

admitem uma solução não trivial. Existem, portanto, constantes c_1, c_2, \dots, c_n , não todas nulas, tais que

$$c_1 y^1 + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n = 0.$$

Isso nos diz que y^1, y^2, \dots, y^n são linearmente dependentes. \square

Teorema 1.4. *Se n vetores linearmente independentes geram V , então $\dim V = n$.*

Demonstração. Sejam n vetores independentes que geram V , então, por definição de dimensão de um espaço, $\dim V \leq n$. Pelo Lema 1.3, $n \leq \dim V$. Conclusão: $\dim V = n$. \square

Exemplo 1.6. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Então $\dim V = n$. De fato, vimos no Exemplos 1.4 e 1.5 que os vetores e^1, e^2, \dots, e^n são linearmente independentes e geram $V = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.7. Seja $V = M(3)$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

e indiquemos por E_{ij} a matriz com 1 na i -ésima linha e j -ésima coluna e zeros em todas as demais posições. Por exemplo,

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para verificarmos se essas matrizes são linearmente dependentes ou linearmente independentes, consideremos a equação

$$\sum_{i,j=1}^3 c_{ij} E_{ij} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Ora, podemos observar que o primeiro membro de (1.7) é a matriz

$$c_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + c_{33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Igualando essa matriz à matriz zero, concluímos que $c_{ij} = 0, i, j = 1, 2, 3$. Conclusão: As 9 matrizes E_{ij} são linearmente independentes. Além disso, essas 9 matrizes também geram $V = M(3)$, pois toda matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

pode ser escrita sob a forma

$$A = \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} E_{ij}.$$

Portanto, $\dim V = 9$.

Definição 1.10. Uma **base** para um espaço V é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram V .

Os números a e b são usualmente números reais, exceto em certos casos especiais onde serão números complexos. Uma base pode também ser chamada um **sistema de coordenadas**.

Exemplo 1.8. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Então os vetores

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } e^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são uma base para \mathbb{R}^4 . De fato, se

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

então

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3 + x_4 e^4,$$

e, relativamente a esta base, os x_i são chamados coordenadas.

Corolário 1.1. *Num espaço de dimensão finita, quaisquer duas bases têm o mesmo número de vetores e este número é a dimensão do espaço.*

O teorema a seguir é importante para determinar se um conjunto de vetores é uma base para V .

Teorema 1.5. *Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes num espaço V de dimensão n também deverá gerar V . Mais precisamente, quaisquer n vetores linearmente independentes em um espaço n -dimensional V formam uma base para V .*

Demonstração. Sejam x^1, x^2, \dots, x^n n vetores linearmente independentes em um espaço n -dimensional V . Devemos mostrar que qualquer vetor x em V é escrito como uma combinação linear de x^1, x^2, \dots, x^n . Para isso, seja $x \in V$, e consideramos o conjunto de vetores $x, x^1, x^2, \dots,$

x^n . Este conjunto possui $(n + 1)$ vetores no espaço n -dimensional V e, pelo Lema 1.3, eles devem ser linearmente dependentes. Com isso, existem constantes, c, c_1, c_2, \dots, c_n não todas nulas, tais que

$$cx + c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0. \quad (1.8)$$

Ora, $c \neq 0$, pois, do contrário, o conjunto de vetores x^1, x^2, \dots, x^n seria linearmente dependente. Portanto, podemos dividir ambos os membros de (1.8) por c para obtermos

$$x = -\frac{c_1}{c}x^1 - \frac{c_2}{c}x^2 - \dots - \frac{c_n}{c}x^n.$$

Conclusão: Quaisquer n vetores linearmente independentes num espaço n -dimensional V devem também gerar V . \square

Exemplo 1.9. Mostre que os vetores

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

formam uma base para \mathbb{R}^2 .

Demonstração. De fato, para determinarmos se x^1 e x^2 são linearmente dependentes ou linearmente independentes, consideremos a seguinte equação

$$c_1x^1 + c_2x^2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

A equação (1.9) implica que $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 - c_2 = 0$. Somando as duas equações encontramos $c_1 = 0$, e subtraindo-as encontramos $c_2 = 0$. Conclusão: x^1 e x^2 são dois vetores linearmente independentes no espaço \mathbb{R}^2 , e, portanto, pelo Teorema 1.5, eles geram o \mathbb{R}^2 . \square

1.4 Autovalores com Autovetores

Nesta seção, seguindo [5], estudamos alguns conceitos e resultados relacionados aos autovalores e autovetores de uma matriz.

Definição 1.11. Dados uma matriz real $A \in M(n)$ e um número real $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que λ é um **autovalor** de A se existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, tal que

$$Av = \lambda v.$$

Nesse caso, dizemos que v é um **autovetor** associado a λ .

Seja uma matriz $C \in M(n)$. Definimos o **núcleo** de C por

$$Nuc(C) = \{x \in \mathbb{R}^n; Cx = 0\}.$$

Podemos notar que v é um autovetor de A associado a λ se, e somente se,

$$Av = \lambda v,$$

ou equivalentemente,

$$(\lambda I - A)v = 0,$$

isto é,

$$v \in Nuc(\lambda I - A).$$

Se λ é um autovalor de $A \in M(n)$, dizemos que

$$V_\lambda = Nuc(\lambda I - A) = \{v \in \mathbb{R}^n; Av = \lambda v\}$$

é um *autoespaço* associado ao autovalor λ .

Lema 1.6. *Sejam $A \in M(n)$ uma matriz real e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) λ é um autovalor de A ;
- (2) existe um autovetor associado de A com autovalor associado λ ;
- (3) $Nuc(\lambda I - A) \neq \{0\}$;
- (4) a matriz $\lambda I - A$ não é invertível;
- (5) $\det(\lambda I - A) = 0$.

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) Seja λ um autovalor de A . Por definição, $\exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, tal que $Av = \lambda v$. Logo, v é um autovetor associado a λ .

(2) \Rightarrow (3) seja v um autovetor de A com autovalor associado λ . Com isso, para

$$Av = \lambda v,$$

temos

$$Av - \lambda v = 0.$$

Logo,

$$(\lambda I - A)v = 0,$$

e, portanto,

$$v \in Nuc(\lambda I - A).$$

Donde, $Nuc(\lambda I - A) \neq \{0\}$, pelo fato de v ser um autovetor de A .

(3) \Rightarrow (4) Suponhamos que $Nuc(\lambda I - A) \neq \{0\}$, então a matriz $\lambda I - A$ é não inversível.

(4) \Rightarrow (5) Seja $\lambda I - A$ uma matriz não inversível, então

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

(5) \Rightarrow (1) Se $\det(\lambda I - A) = 0$, então $\exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, tal que

$$(\lambda I - A)v = 0,$$

isto é,

$$\lambda v = Av.$$

Conclusão: v é um autovetor de A associado ao autovalor λ . □

Em virtude do Lema 1.6, podemos encontrar os autovalores de A encontrando as raízes do polinômio

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

o qual é denominado **polinômio característico** da matriz $A \in M(n)$.

Observação 1.3. Seja v um autovetor de $A \in M(n)$ com autovalor λ . Podemos observar que

$$A(cv) = cAv = c\lambda v = \lambda(cv)$$

para qualquer constante real c . Assim, qualquer múltiplo constante ($c \neq 0$) de um autovetor de A é também um autovetor de A , com o mesmo autovalor associado.

Teorema 1.7 (Teorema de Cayley-Hamilton). *Uma matriz $A \in M(n)$ anula seu polinômio característico, isto é,*

$$p_A(A) = 0 \in M(n).$$

Demonstração. Seja $A \in M(n)$ arbitrária e $p(t)$ o seu polinômio característico, digamos,

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(tI - A) \\ &= t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0. \end{aligned}$$

Agora, seja $B(t)$ a adjunta clássica da matriz $tI - A$. Os elementos de $B(t)$ são os cofatores da matriz $tI - A$, e, portanto, representam polinômios em t de grau no máximo $n - 1$. Assim,

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1t + B_0,$$

onde os $B_i, i = 1, \dots, n - 1$, são matrizes quadradas de ordem n com entradas reais as quais

são independentes de t . Pela propriedade fundamental da adjunta clássica

$$(tI - A)B(t) = \det(tI - A)I,$$

isto é,

$$(tI - A)(B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1t + B_0) = (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0)I.$$

Desenvolvendo os parênteses, obtemos

$$\begin{aligned} t^n B_{n-1} + t^{n-1} B_{n-2} + \cdots + t^2 B_1 + t B_0 - t^{n-1} A B_{n-1} - t^{n-2} A B_{n-2} - \cdots - t A B_1 - A B_0 \\ = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0. \end{aligned}$$

Logo, agrupando os coeficientes de t de potências correspondentes, segue que

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - A B_{n-1} &= a_{n-1} I \\ B_{n-3} - A B_{n-2} &= a_{n-2} I \\ &\dots \dots \dots \\ B_0 - A B_1 &= a_1 I \\ -A B_0 &= a_0 I. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação matricial acima por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} A^n B_{n-1} &= A^n \\ A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} &= a_{n-1} A^{n-1} \\ A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-1} B_{n-2} &= a_{n-2} A^{n-2} \\ &\dots \dots \dots \\ A B_0 - A^2 B_1 &= a_1 A \\ -A B_0 &= a_0 I. \end{aligned}$$

Somando as equações matriciais acima, segue que

$$0 = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Mais especificamente, $p(A) = 0$ e, portanto, A é um zero de seu polinômio característico. \square

Lema 1.8. *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Demonstração. De fato, sejam v^1, v^2, \dots, v^k os k autovetores de A , com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ seus autovalores associados, respectivamente. Provaremos o Lema 1.8 por indução sobre k . Pelo fato de qualquer autovetor ser não nulo, então nenhum autovetor é linearmente dependente, portanto o resultado segue para $k = 1$. A seguir, admitiremos que seja válido para $k = j$,

isto é, admitiremos que o conjunto com j autovetores de A seja linearmente independente. Devemos mostrar que qualquer conjunto de $j + 1$ autovetores de A com autovalores distintos seja também linearmente independente. Para isso, sejam v^1, v^2, \dots, v^{j+1} os $j + 1$ autovetores de A com autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j+1}$, respectivamente. Para determinarmos se esses vetores são linearmente dependentes ou linearmente independentes, consideremos a seguinte equação

$$c_1v^1 + c_2v^2 + \dots + c_{j+1}v^{j+1} = 0. \quad (1.10)$$

Aplicando A a ambos os membros de (1.10), obtemos

$$A(c_1v^1) + A(c_2v^2) + \dots + A(c_{j+1}v^{j+1}) = 0. \quad (1.11)$$

Logo,

$$\lambda_1c_1v^1 + \lambda_2c_2v^2 + \dots + \lambda_{j+1}c_{j+1}v^{j+1} = 0. \quad (1.12)$$

Assim, se multiplicarmos em ambos os membros de (1.10) por λ_1 e subtrairmos a equação resultante de (1.12), obtemos

$$(\lambda_2 - \lambda_1)c_1v^1 + (\lambda_3 - \lambda_1)c_2v^2 + \dots + (\lambda_{j+1} - \lambda_1)c_{j+1}v^{j+1} = 0. \quad (1.13)$$

Ora, v^2, \dots, v^{j+1} são j autovetores de A com autovalores distintos $\lambda_2, \dots, \lambda_{j+1}$, respectivamente. Por hipótese de indução, eles são linearmente independentes. Consequentemente,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)c_2 = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda_1)c_3 = 0, \dots, \quad \text{e} \quad (\lambda_{j+1} - \lambda_1)c_{j+1} = 0.$$

Pelo fato de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j+1}$ serem todos distintos, temos

$$(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0, i = 2, 3, \dots, j + 1,$$

e, portanto, concluímos que c_2, c_3, \dots, c_{j+1} são todos nulos. Da equação (1.10) também concluímos que $c_1 = 0$. Conclusão: v^1, v^2, \dots, v^{j+1} são linearmente independentes e, então, o resultado segue demonstrado. \square

1.5 Forma Canônica de Jordan

Vamos estudar agora, utilizando [7], uma maneira mais simples para representarmos uma matriz $A \in M(n)$ associada a um operador linear T_A . Se A_1, A_2, \dots, A_k são matrizes quadra-

das, então

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

denota a matriz quadrada que tem as matrizes quadradas A_1, A_2, \dots, A_k dispostas ao longo da diagonal, com todos os elementos fora dessas matrizes iguais a zero. Dizemos que A é uma **matriz diagonal em blocos**, onde cada A_i um bloco de A .

Definição 1.12. Definimos, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $l \geq 1$, o **bloco de Jordan real** de autovalor λ e tamanho l a matriz $J_\lambda(l) \in M(l)$ que tem λ na diagonal principal, 1 na diagonal imediatamente abaixo da diagonal principal e os demais elementos iguais a 0, isto é, a matriz da forma

$$J_\lambda(l) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definição 1.13. Definimos, para $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $l \geq 1$, o **bloco de Jordan complexo** de autovalor $\gamma = a + ib$ e tamanho $2l$ a matriz $J_{a,b}(l) \in M(2l)$ que tem $J_{a,b}$ na diagonal principal, I na diagonal imediatamente abaixo da diagonal principal e os demais elementos iguais a 0, isto é, a matriz da forma

$$J_{a,b}(l) = \begin{pmatrix} J_{a,b} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & J_{a,b} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & J_{a,b} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & J_{a,b} \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $0, I, J_{a,b} \in M(2)$ são dadas por

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Diz-se que uma matriz está na **forma canônica de Jordan** quando ao longo da sua diagonal principal tiver blocos de Jordan, tais blocos como nas Definições 1.12 e 1.13, e os demais elementos iguais a zero.

Teorema 1.9 (Forma Canônica de Jordan 2×2). *Seja $A \in M(2)$ uma matriz real e λ_1 e λ_2 as*

raízes do polinômio característico $p_A(\lambda)$. Então ocorre exatamente um dos seguintes casos de classes de equivalência de semelhança de matrizes:

1. se λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por quaisquer autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 ;

2. se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ é real e

a) $\dim \text{Nuc}(\lambda_0 I - A) = 2$, então

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I;$$

b) $\dim \text{Nuc}(\lambda_0 I - A) = 1$, então

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por qualquer vetor u fora do autoespaço $\text{Nuc}(\lambda_0 I - A)$ e o autovetor $v = Au - \lambda_0 u$ de A associado ao autovalor λ_0 ;

3. se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, são números complexos conjugados, então

$$A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas pelas partes real e imaginária de qualquer autovetor complexo de A associado ao autovalor λ_1 .

Demonstração. Para o caso 1, vamos considerar que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sejam as raízes distintas do polinômio característico de A , com seus respectivos autovetores associados $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Pelo Lema 1.8, temos que v_1 e v_2 são 2 vetores linearmente independentes. Pelo Teorema 1.5 eles formam uma base para \mathbb{R}^2 . Com isso, seja $Av_j = \lambda_j v_j$ para cada vetor v_j da base $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 , então a matriz D do operador $T = T_A$ nessa base é simplesmente a matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Com isso, se Q é a matriz de colunas v_1, v_2 , então

$$\begin{aligned} AQe_j &= Av_j \\ &= \lambda_j v_j \\ &= \lambda_j Qe_j \\ &= Q\lambda_j e_j \\ &= QDe_j \end{aligned}$$

para $j \in \{1, 2\}$. Assim,

$$AQv = QDv, \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$AQ = QD,$$

isto é, A e D são conjugadas por Q .

Para o caso 2, vamos supor que as raízes do polinômio característico de A sejam reais e iguais a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, de modo que

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2.$$

a) se $\dim Nuc(\lambda_0 I - A) = 2$, então, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (ver [11]), $\dim Im(\lambda_0 I - A) = 0$, isto é,

$$\lambda_0 I - A = 0 \Rightarrow A = \lambda_0 I;$$

b) se $\dim Nuc(\lambda_0 I - A) = 1$, então $\dim Im(\lambda_0 I - A) = 1$, mas, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos

$$(\lambda_0 I - A)(\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A)^2 = p_A(A) = 0 \in M(2).$$

Assim,

$$\dim Nuc(\lambda_0 I - A)^2 = 2 \quad \text{e} \quad (\lambda_0 I - A)[(\lambda_0 I - A)u] = 0 \in \mathbb{R}^2, \text{ para cada } u \in \mathbb{R}^2,$$

isto quer dizer que

$$Im(\lambda_0 I - A) \subseteq Nuc(\lambda_0 I - A).$$

Como esses dois espaços vetoriais têm a mesma dimensão, decorre que

$$\text{Im}(\lambda_0 I - A) = \text{Nuc}(\lambda_0 I - A).$$

Consideremos um vetor qualquer $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{Nuc}(\lambda_0 I - A)$, então $u \neq 0$ e $(\lambda_0 I - A)u \neq 0$.

Definindo

$$v = -(\lambda_0 I - A)u,$$

concluimos que $v \neq 0$ e $Au = \lambda_0 u + v$, e, pelo que vimos acima,

$$v \in \text{Im}(\lambda_0 I - A) = \text{Nuc}(\lambda_0 I - A).$$

Assim, v é um autovetor de A associado ao autovalor λ_0 e $\{u, v\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 . Ademais, a matriz $Q \in M(2)$ de colunas $Qe_1 = u$ e $Qe_2 = v$, é inversível. Escrevendo

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

temos

$$Je_1 = \lambda_0 e_1 + e_2 \quad \text{e} \quad Je_2 = \lambda_0 e_2$$

e, portanto,

$$\begin{cases} AQe_1 = Au = \lambda_0 u + v = \lambda_0 Qe_1 + Qe_2 = Q(\lambda_0 e_1 + e_2) = QJe_1 \\ AQe_2 = Av = \lambda_0 v = \lambda_0 Qe_2 = Q\lambda_0 e_2 = QJe_2 \end{cases},$$

de modo que $AQ = QJ$, ou seja, $A \sim J$.

Para o caso 3, suponhamos que as raízes do polinômio característico de A sejam complexas conjugadas $\lambda_1 = a + ib = \gamma$ e $\lambda_2 = a - ib = \bar{\gamma}$, com a, b reais e $b \neq 0$. Seja $w \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de A com autovalor complexo γ e seja $w = u + iv$ a decomposição de w dada em (3.13), com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Provaremos na Proposição 3.2 que $\{u, v\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^2 , portanto a matriz real $Q \in M(2)$ de colunas $Qe_1 = u$ e $Qe_2 = v$ é inversível e

$$Au = au - bv \quad \text{e} \quad Av = bu + av.$$

Escrevendo

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

temos

$$Je_1 = ae_1 - be_2 \quad \text{e} \quad Je_2 = be_1 + ae_2$$

e, portanto,

$$\begin{cases} AQe_1 = Au = au - bv = aQe_1 - bQe_2 = Q(ae_1 - be_2) = QJe_1 \\ AQe_2 = Av = bu + av = bQe_1 + aQe_2 = Q(be_1 + ae_2) = QJe_2 \end{cases},$$

de modo que $AQ = Q$, isto é, $A \sim J$. □

O caso mais geral do Teorema da Decomposição de Jordan é dado no teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada no Apêndice de [11] para matrizes complexas; e a versão que utilizaremos aqui, para matrizes reais, pode ser encontrada em [9].

Teorema 1.10 (Forma Canônica de Jordan). *Se $A \in M(n)$, então A é linearmente conjugada a uma matriz real*

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \in M(n),$$

onde cada J_i é um bloco de Jordan, real ou complexo. A matriz J é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.

Exemplo 1.10. Seja a matriz identidade de $M(n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é da forma

$$p_I(\lambda) = (\lambda - 1)^n,$$

então, $\lambda = 1$ é um autovalor de I com multiplicidade algébrica n . Com isso,

$$(\lambda I - I) = 0,$$

implica em que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde temos que os autovetores de I são da forma (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_i \neq 0$. Logo,

$$\text{Nuc}(1I - I) = [(e^1, e^2, \dots, e^n)].$$

Portanto, a matriz identidade $I \in M(n)$ coincide com sua forma canônica de Jordan, isto é,

$$I = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.11. Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é da forma

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2,$$

então $\lambda = 2$ é um autovalor de A de multiplicidade algébrica 2. Daí,

$$(\lambda I - A)v = 0,$$

o que implica em que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $x = y$. Com isso, os autovetores de A são da forma (x, x) , $x \neq 0$. Logo,

$$\text{Nuc}(2I - A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Portanto, a forma canônica de Jordan de A é dada por

$$J = \text{diag}(J_2(2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e a matriz Q de conjugação linear tem como colunas w e v , com v sendo um autovetor de A e w um vetor fora do subespaço $\text{Nuc}(2I - A)$. Ademais,

$$(2I - A)^2 w = 0, \quad (2I - A)w \neq 0.$$

Como

$$(2I - A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos

$$(2I - A)^2 w = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por simplicidade, podemos escolher

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por conseguinte, a matriz de conjugação Q é dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.12. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix},$$

temos que seu polinômio característico $p_A(\lambda)$ é dado por

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 5 & \lambda - 6 & -11 \\ -5 & 5 & \lambda + 10 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i). \end{aligned}$$

Com isso, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2 + i$ e $\lambda_3 = -2 - i$. É fácil verificar que os autovetores de A associados a $\lambda = 1$ são da forma $(x, x, 0)$, $x \neq 0$. Logo,

$$\text{Nuc}(1I - A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Para obtermos um autovetor complexo de A , consideramos um vetor $w = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$

qualquer e , escolhendo $\lambda_2 = -2 + i$, calculamos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ((-2 + i)I - A)w = \begin{pmatrix} -3 + 1 & 0 & 2 \\ 5 & -8 + i & -11 \\ -5 & 5 & 8 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} (-3 + i)z_1 + 2z_3 \\ 5z_1 + (-8 + i)z_2 - 11z_3 \\ -5z_1 + 5z_2 + (8 + i)z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando $z_1 = 2$, obtemos $z_3 = 3 - i$ e, então, $z_2 = -3 + i$, de modo que

$$w = (2, -3 + i, 3 - i) = (2, -3, 3) + i(0, 1, -1) = u + iv \in \mathbb{C}^3$$

é um autovetor complexo de A de autovalor complexo associado $-2 + i$. Em vista disso, a forma canônica de Jordan de A é dada por

$$J = \text{diag}(J_1(1), J_{-2,1}(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

sendo as colunas da matriz de conjugação linear Q dadas pelo autovetor de A associado a $\lambda_1 = 1$ e as partes real e imaginária do autovetor complexo de A associado ao autovalor $\lambda_2 = -2 + i$, isto é,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

Exponencial de Matrizes

Vimos acima que o espaço $M(n)$ das matrizes quadradas de ordem n , munido das operações de adição e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial real. Nesta seção, com base em [5], introduzimos o conceito de exponencial no espaço vetorial $M(n)$.

Definição 2.1. Dada uma matriz $A \in M(n)$, definimos a **norma de A** por

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Aqui, a norma $|\cdot|$ corresponde à norma euclidiana de \mathbb{R}^n .

Não é difícil de verificar que $\|\cdot\|$ define uma norma no espaço das matrizes $M(n)$.

Teorema 2.1. Dados $A, B \in M(n)$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

(i) $|Ax| \leq \|A\||x|$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;

(iii) $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (i) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq 0$, temos

$$\left| \frac{1}{|x|}x \right| = 1$$

e, portanto,

$$\frac{1}{|x|}|Ax| = \left| A \left(\frac{1}{|x|}x \right) \right| \leq \|A\|,$$

de modo que segue o primeiro item.

(ii) Sejam $A, B \in M(n)$. Do item anterior, temos

$$|(AB)x| = |A(Bx)| \leq \|A\||Bx| \leq \|A\|\|B\||x| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

vale para cada $x \in \mathbb{R}^n$, com $|x| \leq 1$. Daí, considerando o supremo, obtemos

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

(iii) Em particular, do item anterior, se $B = A$, obtemos

$$\|A^2\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2.$$

Escrevendo

$$A^0 = I, \quad A^1 = A \quad \text{e} \quad A^{m+1} = A^m A$$

para as potências de $A^m \in M(n)$, por recorrência, concluímos que

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m.$$

□

Definição 2.2. Definimos a matriz **exponencial** de uma matriz $A \in M(n)$ por

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j, \end{aligned}$$

onde convencionamos $e^0 = I$.

Também podemos denotar por $\exp(A) = \exp A = e^A$.

Visto isso, agora nossa meta é sabermos se esse conceito de exponencial de uma matriz está bem definido, isto é, se a série que define a exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ converge ou diverge no espaço de matrizes $M(n)$. No caso $j = 1$, temos $e^{(a)} = (e^a)$ que é a série de Taylor da exponencial escalar, a qual é convergente. No caso geral, sendo a norma $\|\cdot\|$ no espaço $M(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!}A^j \right\| &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A^j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j \\ &= e^{\|A\|}, \end{aligned}$$

utilizando de maneira primordial o item (iii) do Teorema 2.1. A série que define a exponencial é, portanto, absolutamente convergente, e, conseqüentemente, convergente. Isso comprova que

a exponencial de uma matriz está bem definida.

Exemplo 2.1. Seja D a matriz diagonal

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que

$$A^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j)$$

vale para cada $j \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \text{diag} \left(\frac{1}{j!} \lambda_1^j, \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \frac{1}{j!} \lambda_n^j \right) \\ &= \text{diag} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_n^j \right) \\ &= \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}). \end{aligned}$$

Em particular, obtemos $e^I = \text{diag}(e, e, \dots, e) = eI$.

Exemplo 2.2. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, com $c \in \mathbb{R}$. Podemos notar que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e que, dessa forma, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}^j = 0 \in M(3)$, para cada $j \geq 3$, de modo que

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = \frac{1}{0!} A^0 + \frac{1}{1!} A^1 + \frac{1}{2!} A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais geralmente, para toda matriz real $N_c(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \end{pmatrix} \in M(n)$ desse

tipo “subdiagonal”, podemos sempre calcular a sua exponencial. Matrizes dessa natureza são denominadas **Matrizes Nilpotentes**, pois $N_c(n)^n = 0$. Por exemplo, seja $N_c \in M(4)$. Assim,

$$\begin{aligned} N_c(4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, & N_c(4)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N_c(4)^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & N_c(4)^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de exponencial de uma matriz, concluímos que

$$\begin{aligned}
e^{N_c(4)} &= I + N_c(4) + \frac{1}{2!}N_c(4)^2 + \frac{1}{3!}N_c(4)^3 + \frac{1}{4!}N_c(4)^4 + \dots \\
&= I + N_c(4) + \frac{1}{2!}N_c(4)^2 + \frac{1}{3!}N_c(4)^3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por indução finita, prova-se, sem dificuldades, que

$$e^{N_c(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{c^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{c^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & \frac{c^2}{2!} & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3. Seja a matriz $\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$. Podemos observar que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^3 \\ c^3 & 0 \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} c^4 & 0 \\ 0 & c^4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & c^5 \\ -c^5 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por indução, prova-se que

$$A^{2j} = (-1)^j \begin{pmatrix} c^{2j} & 0 \\ 0 & c^{2j} \end{pmatrix},$$

para potências pares e

$$A^{2j+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 0 & c^{2j+1} \\ -c^{2j+1} & 0 \end{pmatrix},$$

para potências ímpares. Lembrando que as séries de Taylor para \cos e \sin são dadas por

$$\begin{aligned}\cos c &= 1 - \frac{1}{2!}c^2 + \frac{1}{4!}c^4 - \frac{1}{6!}c^6 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}c^{2j}, \\ \sin c &= c - \frac{1}{3!}c^3 + \frac{1}{5!}c^5 - \frac{1}{7!}c^7 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}c^{2j+1},\end{aligned}$$

temos que

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}c_{11} &= 1 - \frac{1}{2!}c^2 + \frac{1}{4!}c^4 - \frac{1}{6!}c^6 + \dots = \cos c; \\ c_{12} &= c - \frac{1}{3!}c^3 + \frac{1}{5!}c^5 - \frac{1}{7!}c^7 + \dots = \sin c; \\ c_{21} &= -c + \frac{1}{3!}c^3 - \frac{1}{5!}c^5 + \frac{1}{7!}c^7 - \dots = -\sin c; \\ c_{22} &= 1 - \frac{1}{2!}c^2 + \frac{1}{4!}c^4 - \frac{1}{6!}c^6 + \dots = \cos c.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & \sin c \\ -\sin c & \cos c \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2. *Se $A, B, Q \in M(n)$ são tais que $AQ = QB$, então $e^A Q = Q e^B$. Em particular, se as matrizes A e B de $M(n)$ são conjugadas, então as matrizes e^A e e^B também são conjugadas e, além disso, podemos usar a mesma matriz de conjugação; ou seja, se $Q \in M(n)$ é invertível e $A = QBQ^{-1}$, então*

$$e^A = e^{QBQ^{-1}} = Q e^B Q^{-1}.$$

Demonstração. Pelo fato de $AQ = QB$, segue que

$$\begin{aligned}A^2 Q &= AAQ \\ &= AQB \\ &= QBB \\ &= QB^2\end{aligned}$$

e, por recorrência,

$$A^j Q = Q B^j, \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^A Q &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \right) Q \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j Q \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Q B^j \\ &= Q \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) \\ &= Q e^B. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.4. Seja a equação $x' = Ax$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é da forma

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

e, portanto, os autovalores de A são 1, -1 e -2 . Agora, considerando

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

verificamos que

$$\begin{aligned}
 AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = QD,
 \end{aligned}$$

de modo que satisfazem $A = QDQ^{-1}$. Assim, calculando a exponencial da matriz diagonal D , obtemos

$$e^D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.2, concluímos que

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Fixada uma matriz $A \in M(n)$ e dado $t \in R$, temos

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j.$$

Nosso objetivo agora é calcular a exponencial de uma matriz qualquer na forma canônica de Jordan, apresentada na Seção 1.5. Para isso, precisamos calcular a exponencial de uma matriz em blocos como também calcular a exponencial de uma matriz nilpotente.

Para uma matriz de Jordan cujos blocos são de ordem 1×1 , temos que

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} A_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^j \end{pmatrix},$$

cada bloco de Jordan é de ordem 1, então a matriz de Jordan é uma matriz diagonal. Assim, a

sua exponencial é

$$e^{\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)} = \text{diag}(e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_k}),$$

ou seja, a exponencial de uma matriz diagonal em blocos é obtida considerando a exponencial de cada bloco individualmente ao longo da diagonal. Podemos observar que sempre conseguimos decompor o bloco de Jordan real $J_\lambda(l)$ de autovalor λ na soma de uma matriz diagonal com o autovalor na diagonal, isto é, $\lambda I \in M(l)$, com uma matriz “subdiagonal” nilpotente:

$$J_\lambda(l) = \lambda I + N_1(l).$$

Foi demonstrado no Exemplo 2.1 como calcular a exponencial de uma matriz diagonal e no Exemplo 2.2 como calcular a exponencial de uma matriz nilpotente. Podemos observar que essas duas matrizes comutam, isto é,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Como consequência disso, veremos no Corolário 4.1 que

$$e^{J_\lambda(l)} = e^{\lambda I + N_1(l)} = e^{\lambda I} e^{N_1(l)} = e^\lambda e^{N_1(l)}$$

e, assim,

$$e^{J_\lambda(l)} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-3)!} & \dots & \frac{1}{2!} & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(l).$$

Agora consideraremos os blocos associados a autovalores complexos. Escrevemos, como foi visto acima, na seguinte soma

$$J_{a,b}(l) = J_{a,b}^0(l) + N_{1,I}(l),$$

com $J_{a,b}^0(l) = \text{diag}(J_{a,b}, J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) \in M(2l)$ e

$$N_{c,I}(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ cI & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & cI & 0 \end{pmatrix} \in M(2l).$$

Não é difícil verificar que $N_{1,I}(l)^l = 0$, portanto essa matriz é nilpotente. Pelo Exemplo 2.2, temos

$$e^{N_{c,I}(l)} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ cI & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!}I & cI & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!}I & \frac{c^2}{2!}I & cI & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!}I & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!}I & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!}I & \dots & \frac{c^2}{2!}I & cI & I \end{pmatrix} \in M(2l).$$

Agora, pelo Exemplo 2.3, sabemos que $e^{J_{a,b}} = e^a R_b \in M(2)$, onde

$$R_b = \begin{pmatrix} \cos b & \text{sen } b \\ -\text{sen } b & \cos b \end{pmatrix},$$

concluimos assim,

$$\begin{aligned} e^{J_{a,b}^0(l)} &= \text{diag}(e^{J_{a,b}}, e^{J_{a,b}}, \dots, e^{J_{a,b}}) \\ &= (e^a R_b, e^a R_b, \dots, e^a R_b) \\ &= e^a (R_b, R_b, \dots, R_b). \end{aligned}$$

Pelo fato de $J_{a,b}^0(l)$ ser diagonal em blocos, é fácil verificar que as matrizes $J_{a,b}^0(l)$ e $N_{1,I}(l)$ comutam, de modo que obtemos

$$\begin{aligned} e^{J_{a,b}(l)} &= e^{J_{a,b}^0(l) + N_{1,I}(l)} \\ &= e^{J_{a,b}^0(l)} e^{N_{1,I}(l)}, \end{aligned}$$

e, assim,

$$e^{J_{a,b}(l)} = e^a \begin{pmatrix} R_b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ R_b & R_b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!}R_b & R_b & R_b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!}R_b & \frac{1}{2!}R_b & R_b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!}R_b & \frac{1}{(l-2)!}R_b & \frac{1}{(l-3)!}R_b & \cdots & \frac{1}{2!}R_b & R_b & R_b \end{pmatrix} \in M(2l).$$

Explicitamos acima a exponencial de cada um dos dois tipos de blocos que podem aparecer na forma canônica de Jordan. Sabendo que qualquer matriz A é linearmente conjugada a uma matriz J em forma de Jordan, o Teorema 2.2 afirma que a exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ qualquer é dada pela exponencial de J conjugada pela mesma matriz que conjugua A e J , ou seja,

$$e^A = Qe^JQ^{-1}.$$

Exemplo 2.5. O polinômio característico de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

é dado por $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ e o único autovalor -1 fornece apenas um autovetor linearmente independente associado $(-1, 1)$. Com isso, $\dim Nuc(-I - A) = 1$. Portanto, a forma canônica de Jordan de A é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = J_{-1}(2)$$

e, de maneira análoga ao Exemplo 1.11, a matriz Q de conjugação linear é dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, a exponencial de A é dada por

$$\begin{aligned} e^A &= Qe^JQ^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-1} e^{N_1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De fato, podemos notar que $\frac{dx_1}{dt} = 1$ e $\frac{dx_2}{dt} = 2t = 2x_1$.

Além das equações (3.1), frequentemente consideraremos condições iniciais sobre as funções $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Estas serão da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0. \quad (3.2)$$

Referimo-nos às equações (3.1), junto com as condições (3.2), como um problema de valor inicial. Uma solução desse problema de valor inicial são n funções reais deriváveis $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ que satisfazem (3.1) e as condições iniciais (3.2).

Exemplo 3.2. $x_1(t) = e^t$ e $x_2(t) = 1 + \frac{e^{2t}}{2}$ é uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1, \quad x_1(0) = 1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2, \quad x_2(0) = \frac{3}{2},$$

pois

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = e^t = x_1(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = e^{2t} = x_1^2,$$

$$x_1(0) = 1 \text{ e } x_2(0) = \frac{3}{2}.$$

Observação 3.1. Equações diferenciais de ordem superior numa única variável $y(t)$ também originam sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Por exemplo, para convertermos a equação diferencial

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0$$

num sistema de n equações de primeira ordem basta considerarmos

$$x_1(t) = y, x_2(t) = \frac{dy}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}.$$

Com isso,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,$$

e

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_{n-1}(t)x_n + a_{n-2}(t)x_{n-1} + \dots + a_0 x_1}{a_n(t)}.$$

então $x(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(t_0) = x^0, \quad \text{onde } x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Exemplo 3.3. O sistema de equações

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 7x_2 + 9x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 15x_1 + x_2 - x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 7x_1 + 6x_3$$

pode ser escrito sob a forma matricial

$$x' = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 15 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} x, \quad \text{onde } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.4. O problema de valor inicial

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \quad x_1(0) = 1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_2 - x_3, \quad x_2(0) = 0$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + 7x_3, \quad x_3(0) = -1$$

pode ser escrito sob a forma matricial

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Facilitamos nosso trabalho ao escrever (3.4) sob a forma mais manejável (3.5). A partir de agora, nosso objetivo é determinar as soluções desse sistema linear homogêneo de equações diferenciais a coeficientes constantes, ou autônomas. Mais especificamente, trata-se do estudo dos **campos lineares**

$$f(x) = T_A(x) = Ax,$$

onde o operador linear $f = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado pela ação $A \cdot x = Ax$ da matriz real $A = (a_{ij})_{n \times n}$ sobre o vetor x , isto é, pelo produto da matriz A com o vetor coluna $n \times 1$ formado pelas coordenadas canônicas de $x \in \mathbb{R}^n$. Seguimos nossos estudos para resolvermos o sistema linear homogêneo de equações diferenciais

$$x' = \frac{dx}{dt} = Ax, \text{ onde } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Teorema 3.1. *Sejam $x(t)$ e $y(t)$ duas soluções de (3.7). Então*

- (a) $cx(t)$ é uma solução de (3.7), para qualquer constante c ;
- (b) $x(t) + y(t)$ é também uma solução de (3.7).

Demonstração. (a) Seja $x(t)$ uma solução de (3.7), então

$$\frac{d}{dt}(cx(t)) = c \frac{dx(t)}{dt} = cAx(t) = A(cx(t)).$$

Conclusão: $cx(t)$ é também uma solução de (3.5).

(b) Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções de (3.7), então

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} = Ax(t) + Ay(t) = A(x(t) + y(t)).$$

Conclusão: $x(t) + y(t)$ é também solução de (3.7). □

Corolário 3.1. *Qualquer combinação linear $c_1x_1(t) + \cdots + c_jx_j(t)$, onde $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t)$ são soluções de (3.7) e qualquer escolha de constantes c_1, c_2, \dots, c_j , é também uma solução de (3.7).*

Veremos à frente que cada solução de (3.7) pode ser expressa como uma combinação linear de um número finito de soluções. Equivalentemente, nosso intuito será o de determinar quantas soluções devemos encontrar a fim de obtermos todas as soluções de (3.7).

Observação 3.2. É fácil verificar que o conjunto V de todos os vetores

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

que são soluções da equação vetorial diferencial (3.7), temos que o mesmo é um espaço vetorial com as operações usuais de adição vetorial e multiplicação por escalar.

Teorema 3.2. *A dimensão do espaço V de todas as soluções do sistema linear homogêneo de equações diferenciais (3.7) é n .*

Demonstração. De fato, para determinarmos que $\dim V = n$ temos que exibir uma base para V que contenha exatamente n elementos. Para isso, seja $\phi^j(t), j = 1, 2, \dots, n$ a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = e^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ - } j\text{-ésima coluna da matriz identidade.} \quad (3.8)$$

Por exemplo, $\phi^1(t)$ é a solução da equação diferencial (3.8) que satisfaz a condição inicial

$$\phi^1(0) = e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que, pelo Teorema de Existência e Unicidade (ver Apêndice), $\phi^1(t)$ existe para todo t e é única. Para determinarmos se $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ são vetores linearmente dependentes ou linearmente independentes em V , consideremos a equação

$$c_1\phi^1 + c_2\phi^2 + \dots + \phi^n = 0, \quad (3.9)$$

onde o zero do segundo membro de (3.9) representa o vetor nulo em V . Calculando ambos os membros de (3.9) para $t = 0$, obtemos

$$c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + \dots + \phi^n(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$c_1e^1 + c_2e^2 + \dots + c_n e^n = 0.$$

Pelo fato de e^1, e^2, \dots, e^n serem linearmente independentes em \mathbb{R}^n , têm-se

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Portanto, $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ são vetores linearmente independentes em V .

Afirmção: $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ também geram V . Para verificarmos isso, devemos mostrar que qualquer solução $x(t)$ de (3.7) pode ser escrita como uma combinação linear de $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$. Para isso, seja x um vetor qualquer em V e seja

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

o valor de x em $t = 0$, isto é, $x(0) = c$. Com essas constantes c_1, c_2, \dots, c_n , construímos a função com valores vetoriais

$$\phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t).$$

Sabemos que $\phi(t)$ é uma solução de (3.7), pois é uma combinação linear de soluções. Ademais,

$$\begin{aligned} \phi(0) &= c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + \dots + c_n\phi^n(0) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= x(0). \end{aligned}$$

Ora, concluímos que $x(t)$ e $\phi(t)$ satisfazem ao mesmo sistema linear homogêneo de equações diferenciais, e que ambas têm o mesmo valor em $t = 0$. Pelo Teorema de Existência e Unicidade, $x(t)$ e $\phi(t)$ devem ser idênticas, ou seja,

$$x(t) \equiv \phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t).$$

Portanto, $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ também geram V . Pelo Teorema 1.4, $\dim V = n$. □

Teorema 3.3 (Teste para Independência Linear). *Sejam x^1, x^2, \dots, x^k k soluções de $x' = Ax$. Escolhamos um conveniente t_0 . Então, x^1, x^2, \dots, x^k são soluções linearmente independentes se, e somente se, $x^1(t_0), x^2(t_0), \dots, x^k(t_0)$ são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que x^1, x^2, \dots, x^k sejam soluções linearmente dependentes. Com isso, existem constantes c_1, c_2, \dots, c_k não todas nulas, tais que

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_kx^k = 0.$$

Para $t = t_0$, obtemos

$$c_1x^1(t_0) + c_2x^2(t_0) + \cdots + c_kx^k(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclusão: $x^1(t_0), x^2(t_0), \dots, x^k(t_0)$ são vetores linearmente dependentes em \mathbb{R}^n . Reciprocamente, suponhamos que os valores de x^1, x^2, \dots, x^k em algum instante t_0 são vetores linearmente dependentes em \mathbb{R}^n . Com isso,

$$c_1x^1(t_0) + c_2x^2(t_0) + \cdots + c_kx^k(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

para c_1, c_2, \dots, c_k constantes não todas nulas. Com essa escolha de constantes c_1, c_2, \dots, c_k , escrevemos a função com valores vetoriais

$$\phi(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \cdots + c_kx^k(t).$$

Essa função satisfaz (3.7), pois é uma combinação linear de soluções. Ademais, $\phi(t_0) = 0$. Portanto, pelo Teorema de Existência e Unicidade, $\phi(t) = 0$ para todo t . Conclusão: x_1, x_2, \dots, x^k são soluções linearmente dependentes. \square

Exemplo 3.5. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

e tentemos resolver a equação linear $x' = Ax$. Para o sistema linear

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

associado à equação linear, fazemos $x_1 = y$ e $x_2 = \frac{dy}{dt}$. Esse sistema de equações procede da única equação de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0. \quad (3.12)$$

Para resolvermos uma equação dessa natureza, aprendemos em livros de Cálculo, ou o leitor pode ver [5], a utilizar a *equação característica* e o método de *redução da ordem*. Isso significa

que a equação característica $r^2 + 2r + 1 = 0$ tem 2 raízes reais iguais $r_1 = r_2 = -1$. Portanto,

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} = e^{-t}$$

é uma solução da equação diferencial (3.12). Então,

$$u(t) = \frac{e^{-\int 2dt}}{(e^{-t})^2} = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}} = 1.$$

Assim,

$$y_2(t) = y_1(t) \int dt = te^{-t}$$

é uma segunda solução de (3.12). Logo,

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

e

$$x^2(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

são duas soluções de (3.11). Para verificarmos se $x^1(t)$ e $x^2(t)$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes, verificamos se seus valores iniciais

$$x^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$x^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são vetores linearmente dependentes ou linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Portanto, consideramos a equação

$$c_1x^1(0) + c_2x^2(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta equação implica em que ambos os c_1 e c_2 são nulos. Por conseguinte, $x^1(0)$ e $x^2(0)$ são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Pelo Teorema 3.3, $x^1(t)$ e $x^2(t)$ são soluções linearmente independentes de (3.11). Consequentemente, toda solução $x(t)$ de (3.11) pode ser

escrita sob a forma

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1 + c_2t)e^{-t} \\ (c_2 - c_1 - c_2t)e^{-t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.2 O Método dos Autovalores e dos Autovetores para Determinar Soluções

Dando continuidade aos nossos estudos referentes às soluções da equação diferencial linear $x' = Ax$, utilizaremos os conceitos de autovalores e autovetores vistos no Capítulo 1. Vimos que dados uma matriz real $A \in M(n)$ e um número real $\lambda \in \mathbb{R}$; λ será um autovalor de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, o qual denominamos por autovetor, tal que $Av = \lambda v$.

Proposição 3.1. *Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de $A \in M(n)$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, $x(t) = e^{\lambda t}v, t \in \mathbb{R}$, é a solução de $x' = Ax, x(0) = v$.*

Demonstração. Seja v um autovetor de A com autovalor associado $\lambda \in \mathbb{R}$. Com isso,

$$Av = \lambda v.$$

Considerando $x(t) = e^{\lambda t}v$, temos

$$\begin{aligned}x'(t) &= \lambda e^{\lambda t}v \\ &= e^{\lambda t}\lambda v \\ &= e^{\lambda t}Av \\ &= Ae^{\lambda t}v \\ &= Ax(t).\end{aligned}$$

Conclusão: $x(t) = e^{\lambda t}v$ é a solução de $x'(t) = Ax(t)$. Além disso, $x(0) = v$. □

Exemplo 3.6. Determine todas as soluções da equação

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Solução: O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

é dado por

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) - 2 - 12 - 8(\lambda - 2) + (\lambda - 1) + 3(\lambda + 1) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

e, portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -2$. Agora, podemos encontrar os autovetores de A com seus respectivos autovalores associados λ_1 , λ_2 e λ_3 .

(i) $\lambda_1 = 1$: Procuramos um vetor não nulo v tal que

$$(I - A)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica em que

$$v_2 - 4v_3 = 0, \quad -3v_1 - v_2 + v_3 = 0 \quad \text{e} \quad -2v_1 - v_2 + 2v_3 = 0.$$

Fazendo os cálculos necessários e tirando o valor de v_1 e v_2 em função de v_3 a partir das duas primeiras equações acima, obtemos $v_1 = -v_3$ e $v_2 = 4v_3$. Portanto, cada vetor

$$v = c \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é um autovetor de A com autovalor $\lambda_1 = 1$ associado. Consequentemente,

$$ce^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma solução da equação diferencial para qualquer constante c . Consideramos por sim-

plicidade

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(ii) $\lambda_2 = 3$: Procuramos um vetor não nulo v tal que

$$(3I - A)v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica em que

$$2v_1 + v_2 - 4v_3 = 0, \quad -3v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad \text{e} \quad -2v_1 - v_2 + 4v_3 = 0.$$

Fazendo os cálculos necessários e tirando o valor de v_1 e v_2 em função de v_3 por meio das duas primeiras equações acima, obtemos $v_1 = v_3$ e $v_2 = 2v_3$. Consequentemente, cada vetor da forma

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } c \text{ constante}$$

é um autovetor de A com autovalor associado $\lambda_2 = 3$. Assim,

$$x^2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma segunda solução da equação diferencial;

(iii) $\lambda_3 = -2$: Procuramos um vetor não nulo v tal que

$$(-2I - A)v = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica em que

$$-3v_1 + v_2 - 4v_3 = 0, \quad -3v_1 - 4v_2 + v_3 = 0 \quad \text{e} \quad -2v_1 - v_2 - v_3 = 0.$$

Fazendo os cálculos necessários e tirando o valor de v_1 e v_2 em função de v_3 por meio das

duas primeiras equações acima, obtemos $v_1 = -v_3$ e $v_2 = v_3$. Portanto, cada vetor

$$c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é um autovetor de A com autovalor associado $\lambda_3 = -2$. Consequentemente,

$$x^3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma terceira solução da equação diferencial. Essas soluções devem ser linearmente independentes, pois A tem autovalores distintos. Ademais, toda solução $x(t)$ deve ser da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^t + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.3 O Método dos Autovalores Complexos e Autovetores Complexos para Determinar Soluções

Nesta seção vamos estudar soluções de equações diferenciais lineares por meio do método de autovalores complexos associados à matriz do sistema $x' = Ax$.

Definição 3.1. Um vetor não nulo $w \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor complexo de uma matriz real $A \in M(n)$ se existe $\gamma = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo não real de A que é associado a w , isto é, se $Aw = \gamma w \in \mathbb{C}^n$.

Observação 3.3. Seja $A \in M(n)$. Um autovalor complexo não real $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$, de A é uma raiz do polinômio característico $p_A(\lambda)$ de A .

Proposição 3.2. Dados uma matriz $A \in M(n)$, com entradas reais, um número complexo não real γ e um vetor não nulo $w \in \mathbb{C}^n$, temos:

- γ é um autovalor complexo de A se, e somente se, $\bar{\gamma}$ é um autovalor complexo de A ;
- w é um autovetor complexo de A com autovalor γ se, e somente se, \bar{w} é um autovetor complexo de A com autovalor $\bar{\gamma}$;

- se w é um autovetor complexo de A , então $\{w, \bar{w}\}$ é linearmente independente em \mathbb{C}^n .

Demonstração. Seja A uma matriz real. Seu polinômio característico $p_A(z)$ tem coeficientes reais e, portanto,

$$\overline{p_A(z)} = p_A(\bar{z}).$$

Se γ é um autovalor complexo de A , resulta que

$$p_A(\bar{\gamma}) = \overline{p_A(\gamma)} = \bar{0} = 0.$$

Isso nos diz que $\bar{\gamma}$ também é um autovalor complexo de A . Suponhamos agora $w \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo de A com autovalor γ associado, isto é,

$$Aw = \gamma w,$$

então, usando o fato de A ser uma matriz real, temos

$$A\bar{w} = \overline{Aw} = \overline{\gamma w} = \bar{\gamma} \bar{w},$$

pelo fato de A ser uma matriz real e, portanto, \bar{w} é um autovetor complexo de A com $\bar{\gamma}$ autovalor complexo associado. Ademais, seja $\{w, \bar{w}\}$. Queremos mostrar que w e \bar{w} são linearmente independentes em \mathbb{C}^n . De fato, suponhamos, por contradição, que w e \bar{w} sejam vetores linearmente dependentes em \mathbb{C}^n , associados aos seus respectivos autovalores γ e $\bar{\gamma}$. Assim, existe $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que

$$w = \bar{w}a.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \gamma w &= Aw \\ &= A\bar{w}a \\ &= a\bar{\gamma}\bar{w} \\ &= \bar{\gamma}a\bar{w} \\ &= \bar{\gamma}w. \end{aligned}$$

Donde,

$$\gamma w - \bar{\gamma}w = 0,$$

e, como $w \neq 0$, temos que

$$\gamma - \bar{\gamma} = 0,$$

isto é,

$$\gamma = \bar{\gamma}.$$

Contradição, pois se γ é um número complexo não real, então $\gamma \neq \bar{\gamma}$. Conclusão: $\{w, \bar{w}\}$ é linearmente independente em \mathbb{C}^n . \square

Observação 3.4. Dado $w \in \mathbb{C}^n$, podemos escrever

$$w = u + iv, \text{ com } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, pelo fato de u, v serem vetores reais, é imediato que

$$\bar{w} = \overline{u + iv} = u - iv.$$

Com isso, para $w + \bar{w}$, obtemos

$$\begin{aligned} w + \bar{w} &= (u + iv) + (u - iv) \\ &= 2u, \end{aligned}$$

isto é,

$$u = \frac{1}{2}(w + \bar{w}).$$

Agora, para $w - \bar{w}$, obtemos

$$\begin{aligned} w - \bar{w} &= (u + iv) - (u - iv) \\ &= u + iv - u + iv \\ &= 2iv, \end{aligned}$$

isto é,

$$v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$$

Podemos concluir, assim, que dado $w \in \mathbb{C}^n$,

$$u = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \text{ e } v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) \tag{3.13}$$

são os únicos vetores em \mathbb{R}^n tais que $w = u + iv$.

Proposição 3.3. *Sejam $A \in M(n)$ uma matriz real e $w \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo de A associado ao autovalor complexo não real $a + ib \in \mathbb{C}$. Escrevendo $w = u + iv$ com $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$ e $v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$, temos que $\{u, v\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n e*

$$\begin{aligned} Au &= au - bv \\ Av &= bu + av. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja w um autovetor complexo de A e sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $w = u + iv$, com $u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$ e $v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$. Vamos supor que $\{u, v\}$ seja linearmente dependente em \mathbb{R}^n , isto é, que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \alpha u.$$

De

$$v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}),$$

temos que

$$\begin{aligned} w - \bar{w} &= 2iv \\ &= 2i\alpha u \\ &= 2i\alpha \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \\ &= i\alpha(w + \bar{w}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$w - i\alpha w = \bar{w} + i\alpha \bar{w}.$$

Donde,

$$w(1 - i\alpha) = \bar{w}(1 + i\alpha).$$

Pelo fato de $1 - i\alpha \neq 0$ e $1 + i\alpha \neq 0$; isso significa que $\{w, \bar{w}\}$ é linearmente dependente em \mathbb{C}^n , contrariando a Proposição 3.2. Segue assim, que $\{u, v\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n . Seja agora, $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$, o autovalor associado a w . Pela unicidade da decomposição

(3.13), a segunda afirmação da proposição decorre da igualdade

$$\begin{aligned}
 Au + iAv &= A(u + iv) \\
 &= Aw \\
 &= \lambda w \\
 &= (a + ib)(u + iv) \\
 &= (au - bv) + i(bu + av),
 \end{aligned}$$

pelo fato de a matriz A ser real, temos $Au, Av \in \mathbb{R}^n$. □

Corolário 3.2. *Seja $w \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo de A com autovalor complexo associado $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$. Seja $w = u + iv$ a decomposição de w dada pela Observação 3.4, com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] \\
 y(t) &= e^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v]
 \end{aligned}$$

definam as únicas soluções reais de $x' = Ax$, com $x(0) = u$ e $y(0) = v$, respectivamente.

Demonstração. De fato, seja $w \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo de $A \in M(n)$ com autovalor complexo associado λ , temos

$$Aw = \lambda w.$$

Escrevendo $z = e^{\lambda t}w$, obtemos

$$\begin{aligned}
 z'(t) &= \lambda e^{\lambda t}w \\
 &= e^{\lambda t}\lambda w \\
 &= e^{\lambda t}Aw \\
 &= Ae^{\lambda t}w \\
 &= Az(t),
 \end{aligned}$$

de modo que $z(t)$ é uma solução complexa de $x' = Ax$. Fazendo $w = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$, e $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$ a fórmula de Euler garante que

$$\begin{aligned}
 z(t) &= e^{(a+ib)t}w \\
 &= e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(u + iv) \\
 &= e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] + ie^{at}[(\cos bt)v + (\sin bt)u],
 \end{aligned}$$

de modo que, escrevendo $z(t) = x(t) + iy(t)$, resulta

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{at}[(\cos bt)u - (\operatorname{sen} bt)v] \\y(t) &= e^{at}[(\operatorname{sen} bt)u + (\cos bt)v].\end{aligned}$$

Essas partes real e imaginária da solução complexa $z(t)$ de $x' = Ax$ são, de fato, soluções de $x' = Ax$. Para provarmos isso, basta observarmos que $Au = au - bv$ e $Av = bu + av$, pela Proposição 3.3, e desenvolver:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ae^{at}[(\cos bt)u - (\operatorname{sen} bt)v] - e^{at}[(b \operatorname{sen} bt)u + (b \cos bt)v] \\&= e^{at} \cos bt(au - bv) - e^{at} \operatorname{sen} bt(bu + av) \\&= e^{at}(\cos bt)Au - e^{at}(\operatorname{sen} bt)Av \\&= A[e^{at}(\cos bt)u - e^{at}(\operatorname{sen} bt)v] \\&= Ax(t).\end{aligned}$$

Analogamente, para $y(t) = e^{at}[(\operatorname{sen} bt)u + (\cos bt)v]$, obtemos

$$\begin{aligned}y'(t) &= ae^{at}[(\operatorname{sen} bt)u + (\cos bt)v] + e^{at}[(b \cos bt)u - (b \operatorname{sen} bt)v] \\&= e^{at} \cos bt(av + bu) + e^{at} \operatorname{sen} bt(au - bv) \\&= e^{at}(\cos bt)Av + e^{at}(\operatorname{sen} bt)Au \\&= A[e^{at}(\cos bt)v + (\operatorname{sen} bt)u] \\&= Ay(t).\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.7. Seja a equação diferencial $x' = Ax$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Vimos no Exemplo 1.12 que seu polinômio característico $p_A(\lambda)$ é dado por

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i).$$

Com isso, os autovalores de A são 1 e $-2 \pm i$. Associado ao autovalor 1 , obtemos um autovetor

$v = (1, 1, 0)$. Portanto, pela Proposição 3.1, temos que

$$x^1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é a solução da equação diferencial $x' = Ax$, $x^1(0) = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Agora, também pelo

Exemplo 1.12 obtemos um autovetor complexo de A de autovalor complexo associado $-2 + i$ da forma

$$w = (2, -3 + i, 3 - i) = (2, -3, 3) + i(0, 1, -1) = u + iv \in \mathbb{C}^3.$$

Com isso, pelo Corolário 3.2,

$$x(t) = e^{-2t} \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-2t} \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$y(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-2t} \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

definem as soluções reais de $x' = Ax$, com condições iniciais

$$x(0) = u = (2, -3, 3) \quad \text{e} \quad y(0) = v = (0, 1, -1).$$

Exemplo 3.8. Seja a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

temos que $a \pm ib$ são autovalores complexos associados a $w = (1, i)$ e $\bar{w} = (1, -i)$, respectivamente. Pelo Corolário 3.2, temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{at} \operatorname{sen} bt \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{at}(\cos bt, -\operatorname{sen} bt) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{at} \operatorname{sen} bt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{at} \operatorname{cos} bt \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{at}(\operatorname{sen} bt, \operatorname{cos} bt)\end{aligned}$$

são as soluções de $x' = Ax$, com $x(0) = (1, 0)$ e $y(0) = (0, 1)$. Ademais, se $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são soluções de $x' = Ax$, então $s_1(t) + cs_2(t)$, para qualquer constante real c , é também solução de $x' = Ax$. De fato, sejam $s'_1(t) = As_1(t)$ e $s'_2(t) = As_2(t)$, e derivando

$$s_1(t) + cs_2(t),$$

obtemos

$$\begin{aligned}s'_1(t) + cs'_2(t) &= As_1(t) + cAs_2(t) \\ &= A(s_1(t) + cs_2(t)),\end{aligned}$$

na qual concluímos que $s_1(t) + cs_2(t)$ é solução de $x' = Ax$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Assim, segue que $k_1x(t) + k_2y(t)$ é solução de $x' = Ax$, mais especificamente, que

$$\begin{aligned}e^{at}(k_1 \operatorname{cos} bt + k_2 \operatorname{sen} bt, -k_1 \operatorname{sen} bt + k_2 \operatorname{cos} bt) &= \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \operatorname{cos} bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \operatorname{cos} bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

corresponde à única solução de $x' = Ax$, $x(0) = (k_1, k_2)$.

3.4 Sistemas Lineares Conjugados

Nesta seção obtemos a solução de um sistema linear a partir de um sistema linearmente conjugado, cuja matriz encontra-se de uma forma mais simples.

Definição 3.2. Dizemos que duas matrizes $A, B \in M(n)$ são **linearmente conjugadas**, ou **semelhantes**, se existe uma matriz $Q \in M(n)$ inversível tal que $AQ = QB$, isto é,

$$A = QBQ^{-1}.$$

Neste caso, dizemos que Q **conjuga** A e B e podemos escrever $A \sim B$ para indicar a existência de uma conjugação.

Proposição 3.4. Se Q conjuga as matrizes reais $A, B \in M(n)$, então Q transforma as soluções $y' = By$ nas soluções de $x' = Ax$. Mais precisamente, se $A = QBQ^{-1}$, então são equivalentes as afirmações:

- $y(t)$ é uma solução de $y' = By$;
- $Qy(t)$ é uma solução de $x' = Ax$.

Demonstração. De fato, seja $y(t)$ uma solução de $y' = By$. Podemos observar que a matriz Q independe de t , portanto derivando $x(t) = Qy(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} x'(t) &= Qy'(t) \\ &= QBy(t) \\ &= ABy(t) \\ &= Ax(t). \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = Qy(t)$ é uma solução de $x' = Ax$. Reciprocamente, seja $x(t) = Qy(t)$ uma solução de $x' = Ax$. Como Q é invertível, podemos considerar $y(t) = Q^{-1}x(t)$, e, portanto,

$$\begin{aligned} y'(t) &= Q^{-1}x'(t) \\ &= Q^{-1}Ax(t) \\ &= BQ^{-1}x(t) \\ &= By(t). \end{aligned}$$

Logo, $y(t)$ é solução de $y' = By$. □

Lembrando que uma matriz quadrada de ordem n é **diagonal** se ela é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz $D = (d_{ij})$ é diagonal se $d_{ij} = 0$ para quaisquer $i \neq j$, com $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nesse caso, escrevemos

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

se $d_{ii} = \lambda_i$, para $i \in 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 3.9. Seja $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ uma matriz diagonal, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ constantes reais. Considerando coordenada, observemos que para cada $1 \leq j \leq n$, a equação $x'_j(t) = \lambda_j x_j(t)$ do sistema linear associado à equação diferencial vetorial $x' = Dx$ determina a solução $x_j = k_j e^{\lambda_j t}$ e, portanto, a solução geral da equação diferencial

$$x'(t) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)x, \quad x(0) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

é dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) x(0) \\ &= \text{diag}(k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, k_n e^{\lambda_n t}).\end{aligned}$$

Definição 3.3. Uma matriz $A \in M(n)$ é dita **diagonalizável** se A é conjugada a uma matriz diagonal.

Exemplo 3.10. Seja a equação $x' = Ax$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é da forma

$$\begin{aligned}p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

e, portanto, os autovalores de A são 1, -1 e -2 . Agora, considerando

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

verificamos que

$$\begin{aligned}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = QD,\end{aligned}$$

de modo que $A \in M(3)$ é diagonalizável, por ser conjugada a uma matriz diagonal D . Pelo

visto no Exemplo 3.9, a solução geral da equação $y' = Qy$, com $y(0) = (l_1, l_2, l_3)$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{diag}(e^{1t}, e^{(-1)t}, e^{(-2)t}) y(0) \\ &= (l_1 e^t, l_2 e^{-t}, l_3 e^{-2t}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pela Proposição 3.4, a solução geral de $x' = Ax$ é dada por $x(t) = Qy(t)$, isto é,

$$\begin{aligned} x(t) &= Qy(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 e^t \\ l_2 e^{-t} \\ l_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_1 e^t + l_2 e^{-t} \\ -2l_2 e^{-t} + l_3 e^{-2t} \\ -2l_2 e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos obter as coordenadas cartesianas da condição inicial $x(0) = Qy(0)$, resolvendo o sistema linear

$$x(0) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = Qy(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ l_3 - 2l_2 \\ -2l_2 \end{pmatrix}.$$

De modo que $l_1 = k_1 + \frac{1}{2}k_3$, $l_2 = -\frac{1}{2}k_3$ e $l_3 = k_2 - k_3$. Assim, conseguimos concluir que

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} l_1 e^t + l_2 e^{-t} \\ -2l_2 e^{-t} + l_3 e^{-2t} \\ -2l_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \left((k_1 + \frac{1}{2}k_3)e^t - \frac{1}{2}k_3 e^{-t}, k_3 e^{-t} + (k_2 - k_3)e^{-2t}, k_3 e^{-2t} \right) \end{aligned}$$

é a solução explícita de $x' = Ax$, $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$.

Proposição 3.5. *Sejam $A \in M(n)$ uma matriz diagonalizável, com $Q, D \in M(n)$ tais que Q é inversível e $Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Então, dado $1 \leq i \leq n$ e escrevendo $Qe_i = v_i$, o caminho $s_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por*

$$s_i(t) = e^{\lambda_i t} Qe_i = e^{\lambda_i t} v_i, t \in \mathbb{R},$$

é a solução de $x' = Ax$ com valor inicial $x(0) = v_i$. Além disso, qualquer solução $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

de $x' = Ax$ é uma combinação linear de s_1, s_2, \dots, s_n , a saber,

$$x(t) = \sum_{j=1}^n l_j s_j(t) = \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} v_j$$

define a única solução de $x' = Ax$, $x(0) = \sum l_j v_j = Q(l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Demonstração. Seja a equação diferencial $y' = Dy$. Pelo fato de D ser uma matriz diagonal, vimos no Exemplo 3.9 que a solução geral é dada por

$$y(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) y(0).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{diag}(l_1 e^{\lambda_1 t}, l_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, l_n e^{\lambda_n t}) \\ &= l_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + l_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + l_n e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} e_j, \end{aligned}$$

com $y(0) = \sum_{j=1}^n l_j e_j$. Pela Proposição 3.4, a solução geral de $x' = Ax$ é dada por $x(t) = Qy(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} x(t) &= Qy(t) \\ &= Q \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} Q e_j \\ &= \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} v_j, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}x(0) &= Qy(0) \\ &= Q \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j 0} v_j \\ &= \sum_{j=1}^n l_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^n l_j Q e_j \\ &= \sum_{j=1}^n Q(l_j e_j) \\ &= Q(l_1, l_2, \dots, l_n).\end{aligned}$$

Em particular, considerando $y(0) = e_i$, a solução básica $y(t) = e^{\lambda_i t} e_i$ de $y' = Dy$ fornece a solução básica $s_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ de $x' = Ax$. \square

Proposição 3.6. *Uma matriz $A \in M(n)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base de \mathbb{R}^n constituída de autovetores de A . Mais precisamente, dadas matrizes $A, Q \in M(n)$, temos: as colunas de Q formam uma base de autovetores de A se, e somente se, Q é invertível e $Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal.*

Demonstração. Se $Av_j = \lambda_j v_j$ para cada vetor v_j de uma base de \mathbb{R}^n , então a matriz D do operador $T = T_A$ nessa base é simplesmente a matriz diagonal

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Com isso, se Q é a matriz de colunas v_1, v_2, \dots, v_n , então

$$\begin{aligned}AQe_j &= Av_j \\ &= \lambda_j v_j \\ &= \lambda_j Qe_j \\ &= Q\lambda_j e_j \\ &= QDe_j\end{aligned}$$

para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Assim,

$$AQv = QDv, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Logo,

$$AQ = QD,$$

isto é, A e D são conjugadas por Q . Reciprocamente, pelo fato de $De_j = \lambda_j e_j$ para cada vetor e_j da base canônica de \mathbb{R}^n , resulta que

$$\begin{aligned} Av_j &= AQe_j \\ &= QDe_j \\ &= Q\lambda_j e_j \\ &= \lambda_j Qe_j \\ &= \lambda_j v_j, \end{aligned}$$

isto é, cada vetor coluna v_j da matriz de conjugação Q de A com a matriz diagonal D é necessariamente um autovetor de A . \square

Teorema 3.4. *Se a matriz $A \in M(n)$ tem n autovetores distintos, então A é diagonalizável.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ os n autovalores de A , com seus respectivos autovetores associados $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Pelo Lema 1.8, temos que v_1, v_2, \dots, v_n são n vetores linearmente independentes. Pelo Teorema 1.5 eles formam uma base para \mathbb{R}^n e, pela Proposição 3.6, A é diagonalizável. \square

Exemplo 3.11. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vimos no Exemplo 3.10 que seu polinômio característico é

$$p_A(t) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

e, portanto, as raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ são todas distintas. Pelo teorema acima, concluímos que A é diagonalizável, e, pela Proposição 3.6, A é conjugada à matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Agora, em consonância com a Proposição 3.6, os elementos da matriz de conjugação Q são justamente os vetores colunas v_1 , v_2 e v_3 dados pelos autovetores de A com seus respectivos autovalores associados λ_1 , λ_2 e λ_3 .

(i) Para $\lambda_1 = 1$: Procuramos um vetor não nulo $v = (a, b, c)$ tal que

$$\lambda_1 v = Av.$$

Diante disso,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c \\ -2b + c \\ -c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando as coordenadas correspondentes e fazendo os cálculos necessários, obtemos $c = 0 = b$ e a livre. Considerando $a = 1$, segue que $v = (1, 0, 0)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$;

(ii) $\lambda_2 = -1$: procuramos um vetor não nulo $v = (a, b, c)$ tal que

$$\lambda_2 v = Av.$$

Diante disso,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c \\ -2b + c \\ -c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Novamente, igualando as coordenadas correspondentes e fazendo os cálculos necessários, obtemos a livre, $b = -2a$ e $c = -2a$. Considerando $a = 1$, segue que $v = (1, -2, -2)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$;

(iii) $\lambda_3 = -2$: procuramos um vetor não nulo $v = (a, b, c)$ tal que

$$\lambda_3 v = Av.$$

Diante disso,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c \\ -2b + c \\ -c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, igualando as coordenadas correspondentes e fazendo os cálculos necessários, obtemos $c = 0$, $a = 0$ e b livre. Considerando $b = 1$, segue que $v = (0, 1, 0)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_3 = -2$.

Pelo fato de v_1, v_2 e v_3 serem os vetores colunas da matriz de conjugação Q , temos

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $AQ = QD$, como já explicitamos no Exemplo 3.10.

Exemplo 3.12. Se $A \in M(2)$ tem dois autovalores complexos conjugados, digamos $a \pm ib$, $b \neq 0$, então, pela forma canônica de Jordan, existe uma matriz real $Q \in M(2)$ tal que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

De fato, decorre da Proposição 3.4, que a solução de $x' = Ax$ é dada por

$$x(t) = e^{at}Q \begin{pmatrix} \cos bt & \text{sen } bt \\ -\text{sen } bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \text{ com } x(0) = Q(k_1, k_2).$$

Se quisermos ser mais explícitos, podemos considerar $Q = (u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2 = M(2)$; tais que $u, v \in \mathbb{R}^2$ são as partes real e imaginária do autovetor complexo $w = u + iv$ dado por $Aw = (a + ib)w$. Em particular, obtemos as soluções explícitas

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}[(\cos bt)u - (\text{sen } bt)v], \\ y(t) &= e^{at}[(\text{sen } bt)u + (\cos bt)v] \end{aligned}$$

de $x' = Ax$, com $x(0) = u$, $y(0) = v$, já verificadas, mesmo no caso n - dimensional \mathbb{R}^n (ver 3.2).

Capítulo 4

Resolvendo Sistemas por meio de Exponencial de Matrizes

Nosso intuito agora é estudarmos o conceito central da teoria de equações lineares, o de exponencial de uma matriz. Vimos que $x(t) = e^{at}c$ é uma solução da equação diferencial escalar $x' = ax$, para qualquer constante c . Pensando dessa forma, gostaríamos de que $x(t) = e^{tA}v$ fosse uma solução da equação diferencial vetorial

$$x' = Ax \tag{4.1}$$

para todo vetor constante v . Para confirmarmos a veracidade da extensão da exponencial escalar para a exponencial de uma matriz, podemos observar que, usando a expansão em série de Taylor

$$e^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a^j$$

da exponencial escalar, é necessário trabalharmos com o conceito de norma no espaço de matrizes, visto na Definição 2.1, para a convergência de séries de matrizes. Consequentemente, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Dados uma matriz $A \in M(n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, os caminhos $t \mapsto e^{tA}$ em $M(n)$ e $t \mapsto e^{tA}x_0$ em \mathbb{R}^n são deriváveis e*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \in M(n), \quad \frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. De fato, dados $A \in M(n)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos $\|tA\| = |t|\|A\|$, de modo que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| &= \left\| \frac{(e^{tA} - I) - tA}{t} \right\| \\ &= \frac{1}{|t|} \|(e^{tA} - I) - tA\| \\ &= \frac{1}{|t|} \left\| \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{t^4 A^4}{4!} + \dots \right) - I - tA \right\| \\ &= \frac{1}{|t|} \left\| \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{t^4 A^4}{4!} + \dots \right\|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, obtemos

$$\left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| \leq \frac{1}{|t|} \left(\frac{\|t^2 A^2\|}{2!} + \frac{\|t^3 A^3\|}{3!} + \frac{\|t^4 A^4\|}{4!} + \dots \right).$$

Usando $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| &\leq \frac{1}{|t|} \left(\frac{\|tA\|^2}{2!} + \frac{\|tA\|^3}{3!} + \frac{\|tA\|^4}{4!} + \dots \right) \\ &\leq \frac{1}{|t|} \left(\|tA\|^2 + \|tA\|^3 + \frac{\|tA\|^4}{2!} + \frac{\|tA\|^5}{3!} \dots \right) \\ &= \frac{1}{|t|} \|tA\|^2 \left(1 + \|tA\| + \frac{\|tA\|^2}{2!} + \frac{\|tA\|^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{|t|} \|tA\|^2 e^{\|tA\|} \\ &= \frac{|t|^2}{|t|} \|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \\ &= |t| \|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \\ &\leq |t| \|A\|^2 e^{\|A\|} \end{aligned}$$

para $|t| < 1$. Escrevendo $X(t) = e^{tA}$, temos $X(0) = I$ e, da desigualdade acima, segue que, por definição, que $X'(0) = A$. Fixemos $t, u \in \mathbb{R}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, pela lei do Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!}(t+u)^j &= \frac{1}{j!} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} t^l u^{j-l} \\ &= \sum_{l=0}^j \frac{t^l u^{j-l}}{l!(j-l)!} \\ &= \sum_{r+s=j} \frac{t^r u^s}{r!s!}, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!}(tA + uA)^j &= \frac{1}{j!}(t + u)^j A^j \\ &= \left[\sum_{r+s=j} \frac{t^r u^s}{r! s!} \right] A^j \\ &= \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} A^r \frac{u^s}{s!} A^s. \end{aligned}$$

Com isso, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}(tA + uA)^j &= \sum_{j=0}^n \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} A^r \frac{u^s}{s!} A^s \\ &= \left(\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!}(tA)^r \right) \left(\sum_{s=0}^n \frac{1}{s!}(tA)^s \right). \end{aligned}$$

Passando ao limite com $n \rightarrow +\infty$, resulta $e^{tA+uA} = e^{tA}e^{uA}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} X(t+u) &= e^{(t+u)A} \\ &= e^{tA+uA} \\ &= e^{tA}e^{uA} \\ &= X(t)X(u), \end{aligned}$$

isto é,

$$X(t+u) = X(t)X(u) \in M(n),$$

para qualquer $t, u \in \mathbb{R}$. Disso decorre que $X(t)$ é derivável em \mathbb{R} , valendo

$$X'(t) = X'(0)X(t) = AX(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Ademais, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, podemos aplicar todas essas matrizes em x_0 para concluirmos que o caminho $x(t) = X(t)x_0 = e^{tA}x_0$, com $x'(t) = Ax(t)$, é derivável para cada $t \in \mathbb{R}$. \square

Corolário 4.1. Dadas as matrizes $A, B \in M(n)$, valem as seguintes propriedades:

- (1) se $AB = BA$, então $e^A e^B = e^{AB} = e^B e^A$;
- (2) a matriz e^A sempre é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Demonstração. Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $BA = AB$, então $B(tA) = (tA)B$ e, pelo Teorema 2.2, temos $Be^{tA} = e^{tA}B$. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definindo $x(t) = e^{tA}e^{tB}x_0$ e

derivando, concluímos que

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= Ae^{tA}e^{tB}x_0 + e^{tA}Be^{tB}x_0 \\
 &= Ae^{tA}e^{tB}x_0 + Be^{tA}e^{tB}x_0 \\
 &= (A + B)e^{tA}e^{tB}x_0 \\
 &= (A + B)x(t);
 \end{aligned}$$

isso nos mostra que $x(t)$ é solução de $x' = (A + B)x$ com condição inicial $x(0) = x_0$. No entanto, pela Proposição 4.1, $t \mapsto e^{t(A+B)}x_0$ é também solução de $x' = (A + B)x$ com condição inicial $x(0) = x_0$. Assim, $e^{tA}e^{tB}x_0 = e^{t(A+B)}x_0$. Considerando $t = 1$, obtemos

$$e^{A+B}x_0 = e^Ae^Bx_0.$$

Ademais, como isso vale para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos que as matrizes e^{A+B} e e^Ae^B são iguais.

Em particular, pelo fato de $A - A = 0$ e $e^0 = I$, concluímos que

$$e^{-A}e^A = e^{-A+A} = e^0 = I = e^0 = e^{A-A} = e^Ae^{-A}.$$

□

Exemplo 4.1. Consideremos as matrizes comutativas

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que, pelos Corolário 4.1 e Exemplos 2.1 e 2.2, temos que

$$\begin{aligned}
 \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ce^a & e^a \end{pmatrix} \\
 &= e^a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Sejam as matrizes comutativas

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente, os Corolário 4.1 e Exemplos 2.1 e 2.3, garantem que

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sen b \\ -\sen b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sen b \\ -\sen b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Corolário 4.2. Se $A \in M(n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então o caminho

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

define a única solução de $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

Para calcularmos a exponencial e^{tA} de tA basta sabermos calcular a exponencial e^{tB} para alguma matriz B linearmente conjugada a A .

Lema 4.1. Se $B, Q \in M(n)$ e Q invertível, então

$$e^{t(QBQ^{-1})} = Qe^{tB}Q^{-1}.$$

Demonstração. A afirmação decorre imediatamente do Teorema 2.2, a partir do momento em que temos $t(QBQ^{-1}) = Q(tB)Q^{-1}$. \square

Explicitando a exponencial e^{tJ} das matrizes em forma canônica de Jordan apresentadas na Seção 1.5, vemos que $tJ_\lambda(l) = \lambda tI + tN_1(l)$ e que qualquer matriz comuta com a identidade, o item 1 do Corolário 4.1 assegura que

$$e^{tJ_\lambda(l)} = e^{\lambda tI} e^{tN_1(l)} = e^{\lambda t} e^{tN_1(l)} \in M(l),$$

sendo a matriz $N_1(l)$ apresentada no Capítulo 2. Passamos agora aos blocos associados a autovalores complexos. Podemos observar que $tJ_{a,b} = J_{ta,tb}$ e, portanto,

$$tJ_{a,b}(l) = tJ_{a,b}^0(l) + tN_{1,I}(l) = tJ_{a,b}^0(l) + N_{t,I}(l)$$

e como a matriz em blocos $N_{t,I}(l)$ comuta com a matriz $tJ_{a,b}^0(l)$, o Corolário 4.1 (item 1) garante que

$$e^{tJ_{a,b}(l)} = e^{tJ_{a,b}^0(l)} e^{N_{t,I}(l)} = e^{at} \text{diag}(R_{bt}, R_{bt}, \dots, R_{bt}) e^{N_{t,I}(l)}$$

$$= e^{at} \begin{pmatrix} R_{bt} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ tR_{bt} & R_{bt} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!}R_{bt} & tR_{bt} & R_{bt} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!}R_{bt} & \frac{t^2}{2!}R_{bt} & tR_{bt} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}R_{bt} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}R_{bt} & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!}R_{bt} & \cdots & \frac{t^2}{2!}R_{bt} & tR_{bt} & R_{bt} \end{pmatrix}.$$

A matriz $N_{t,I}$ pode ser conferida no Capítulo 2.

Exemplo 4.3. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Seja a equação $x' = Ax$, com $x(0) = x_0$. Como já sabemos calcular a exponencial de uma matriz diagonal, então

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x_0 \\ &= \exp \begin{pmatrix} t\lambda_1 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 \end{pmatrix} x_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} x_0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 4.2, $x(t) = e^{tA}x_0$ é a solução de $x' = Ax$, com $x(0) = x_0$.

Exemplo 4.4. Considere o problema de valor inicial

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = x_0$$

definida pela matriz A do Exemplo 2.5; a partir da forma canônica de Jordan $J = J_{-1}(2)$ dessa matriz, obtemos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Qe^{tJ}Q^{-1} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e explicitando a solução de $x' = Ax$, com $x(0) = x_0$, temos, pelo Corolário 4.2, que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x_0 \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x_0. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5. Vejamos a exponencial e^{tA} que fornece a solução geral $x(t) = e^{tA}x(0)$ da equação diferencial linear $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$, definida pela matriz A do Exemplo 1.12 tal que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Já vimos que a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \text{diag}(J_1(1), J_{-2,1}(1)) = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Separando J em dois blocos, obtemos

$$J_1(1) = (1) \quad \text{e} \quad J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pelo Exemplo 2.1, temos

$$e^{J_1(1)} = e^1$$

e pelo Exemplo 4.2, segue que

$$\begin{aligned} e^{J_{-2,1}(1)} &= e \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2} \begin{pmatrix} \cos 1 & \text{sen } 1 \\ -\text{sen } 1 & \cos 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$e^J = e^{-2} \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & \text{sen } 1 \\ 0 & -\text{sen } 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.2, obtemos

$$e^A = Qe^JQ^{-1}.$$

Consequentemente, pelo Lema 4.1, a exponencial e^{tA} é dada por

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Qe^{tJ}Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos t & e^{-2t} \sin t \\ 0 & -e^{-2t} \sin t & e^{-2t} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos t + 3e^{-2t} \sin t & e^t - e^{-2t} \cos t - 3e^{-2t} \sin t & e^t - e^{-2t} \cos t - 5e^{-2t} \sin t \\ -5e^{-2t} \sin t & e^t + 5e^{-2t} \sin t & e^t - e^{-2t} \cos t + 8e^{-2t} \sin t \\ 5e^{-2t} \sin t & -5e^{-2t} \sin t & e^{-2t} \cos t - 8e^{-2t} \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.6. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

De maneira análoga ao Exemplo 4.2, temos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \exp \left[t \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \begin{pmatrix} at & bt \\ -bt & at \end{pmatrix} \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De modo que, pelo Corolário 4.2,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x_0 \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} x_0 \end{aligned}$$

é a solução da equação diferencial $x' = Ax$, com valor inicial $x(0) = x_0$.

4.1 Soluções Matrizes Fundamentais

Se $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são n soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$x' = Ax, \quad (4.2)$$

então toda solução $x(t)$ pode ser escrita sob a forma

$$x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t), \quad (4.3)$$

para constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Seja $X(t)$ a matriz cujas colunas coincidem com $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Então, a Equação (4.3) pode ser reescrita de maneira concisa como $x(t) = X(t)c$, onde

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Definição 4.1. Uma matriz $X(t)$ é denominada uma **Solução Matriz Fundamental** de (4.2) se suas colunas formam um conjunto de n soluções linearmente independentes de (4.2).

Exemplo 4.7. Para determinarmos uma solução matriz fundamental do problema de valor inicial

$$x' = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)x, \quad x(0) = e_i,$$

temos que a solução é dada por $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}$, isto é, seja

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

temos que

$$x_i = c_i e^{a_i t}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ademais, para $x(0) = e_i$, obtemos

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = e_i,$$

e, portanto, analogamente ao Exemplo 4.3,

$$\begin{aligned} x(t) &= (e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t}) \cdot e_i \\ &= (e_1 e^{a_1 t}, \dots, e_n e^{a_n t}) \end{aligned}$$

é a solução de $x' = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)x$, $x(0) = e_i$, donde,

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

é uma solução matriz fundamental de $x' = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)x$, $x(0) = e_i$.

Lema 4.2. *Uma matriz $X(t)$ é uma solução matriz fundamental de (4.2) se, e somente se, $X'(t) = AX(t)$ e $\det X(t) \neq 0$. (A derivada de uma função com valores matriciais $X(t)$ é a matriz cujas coordenadas são as derivadas das coordenadas correspondentes de $X(t)$).*

Demonstração. De fato, sejam $x_1(t), \dots, x_n(t)$ as n colunas de $X(t)$. Podemos observar que

$$X'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

e

$$AX(t) = (Ax_1(t), \dots, Ax_n(t)).$$

Portanto, as n equações vetoriais $x_1'(t) = Ax_1(t), \dots, x_n'(t) = Ax_n(t)$ são equivalentes à única equação matricial $X'(t) = AX(t)$. Ademais, as soluções $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de (4.2) são linearmente independentes se, e somente se, $x_1(0), \dots, x_n(0)$ são vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^n . Esses vetores, por sua vez, são linearmente independentes se, e somente se, $\det X(0) \neq 0$. Conclusão: $X(t)$ é uma solução matriz fundamental de (4.2) se, e somente se, $X'(t) = AX(t)$ e $\det X(t) \neq 0$. \square

Lema 4.3. *A função com valores matriciais*

$$e^{tA} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots$$

é uma solução matriz fundamental de (4.2).

Demonstração. Vimos na Proposição 4.1 que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Então, e^{tA} é uma solução da equação matricial diferencial $X'(t) = AX(t)$. Além disso, seu determinante, calculado em $t = 0$ é igual a 1, pois $e^{0A} = e^0 = I$. Pelo Lema 4.2, e^{tA} é uma solução matriz fundamental de (4.2). \square

Lema 4.4. *Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ duas soluções matrizes fundamentais de (4.2). Então, existe uma matriz constante $C \in M(n)$ tal que $Y(t) = X(t)C$.*

Demonstração. De fato, por definição, as colunas $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de $X(t)$ e $y_1(t), \dots, y_n(t)$ de $Y(t)$ são linearmente independentes de (4.2). Em particular, dessa forma, cada coluna de $Y(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear das colunas de $X(t)$; isto é, existem constantes c_1^j, \dots, c_n^j tais que

$$y^j(t) = c_1^j x_1(t) + c_2^j x_2(t) + \dots + c_n^j x_n(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Seja C a matriz (c^1, c^2, \dots, c^n) , de modo que

$$c^j = \begin{bmatrix} c_1^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{bmatrix}.$$

Conclusão: As n equações de (4.4) são equivalentes à única equação matricial

$$Y(t) = X(t)C. \quad (4.5)$$

□

Teorema 4.5. *Seja $X(t)$ uma solução matriz fundamental da equação diferencial $x' = Ax$. Então*

$$e^{tA} = X(t)X^{-1}(0).$$

Demonstração. De fato, seja $X(t)$ uma solução matriz fundamental da equação diferencial $x' = Ax$. Assim, pelos Lemas 4.3 e 4.4 existe uma matriz constante C tal que

$$e^{tA} = X(t)C. \quad (4.6)$$

Considerando $t = 0$ em (4.6), obtemos $I = X(0)C$, o que implica em que $C = X^{-1}(0)$.

Conclusão: $e^{tA} = X(t)X^{-1}(0)$. □

Capítulo 5

Alguns Modelos Matemáticos

Nosso objetivo, neste capítulo, consiste em estudar algumas aplicações importantes das Equações Diferenciais em problemas do cotidiano. Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de **modelo matemático** do processo. Vale a pena observar que mesmo as equações diferenciais mais simples muitas vezes modelam processos físicos importantes.

5.1 Aplicações Referentes a Sistemas Lineares

Nesta seção abordaremos apenas aplicações que podem ser modeladas por meio de Equação Diferencial Linear ou de um Sistema de Equações Diferenciais Lineares.

5.1.1 Lei do Resfriamento de Newton

O processo da condução do calor tem um modelo simples. Trata-se da troca de calor de um corpo com o meio ao seu redor. Pela lei de resfriamento de Newton, a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à taxa do meio em que está inserido (a temperatura do ar ambiente, na maior parte dos casos). Esse processo satisfaz às seguintes hipóteses:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende apenas do tempo t ;
2. A temperatura do meio T_A é constante;
3. A temperatura $T(t)$ de um corpo satisfaz à equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A), \quad (5.1)$$

onde $k > 0$ é a constante positiva que depende da propriedade física do corpo.

O sinal $-$ em (5.1) se explica pelo fato que o calor flui da fonte quente para fonte fria. Assim, se $T > T_A$, então o corpo está resfriando. Se $T < T_A$, então $\frac{dT}{dt}$ cresce e o corpo está se aquecendo (ver [15]).

Para resolver a Equação Diferencial Linear (5.1), podemos reescrevê-la na forma

$$\frac{dT}{T - T_A} = -k. \quad (5.2)$$

Pela regra da cadeia, a expressão à esquerda da igualdade na Equação (5.2) é a derivada com relação a t do $\ln |T - T_A|$. Com isso, obtemos

$$\frac{d}{dt} \ln |T - T_A| = -k. \quad (5.3)$$

Integrando as expressões na Equação (5.3), temos que

$$\ln |T - T_A| = -kt + C, \quad (5.4)$$

onde C é uma constante de integração arbitrária. Portanto, aplicando a exponencial à Equação (5.4), vemos que

$$|T - T_A| = e^{(-kt)+C} = e^C e^{-kt}, \quad (5.5)$$

ou

$$T - T_A = \pm e^C e^{-kt}, \quad (5.6)$$

e, finalmente,

$$T = T_A + ce^{-kt}, \quad (5.7)$$

onde $c = \pm e^C$ é, também, uma constante não nula arbitrária.

Exemplo 5.1. Suponha que uma xícara de café obedece à lei de resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de $200^\circ F$ (cerca de $93^\circ C$) ao ser colocado na xícara e, 1 minuto depois, esfriou para $190^\circ F$ em uma sala a $70^\circ F$, determine quando o café atinge a temperatura de $150^\circ F$.

Resolução:

Considerando T_A o valor da temperatura da sala e T o valor da temperatura do café no instante t , temos, pela lei de resfriamento de Newton, que a equação que representa esse modelo é dada por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A),$$

a qual a solução é dada por

$$T = T_A + ce^{-kt}.$$

Mais especificamente, utilizando as hipóteses dadas acima, no instante $t = 0$, a temperatura do café é $T = 200^\circ F$. Assim,

$$\begin{aligned}200 &= 70 + ce^{-k \cdot 0} \\200 - 70 &= c \\130 &= c.\end{aligned}$$

No instante $t = 1$, a temperatura do café é $T = 190^\circ F$, então, obtemos

$$\begin{aligned}190 &= 70 + 130e^{-k \cdot 1} \\190 - 70 &= 130e^{-k} \\120 &= 130e^{-k} \\\frac{120}{130} &= e^{-k} \\\ln \frac{12}{13} &= \ln e^{-k} \\\ln \frac{12}{13} &= -k \\\ln \frac{13}{12} &= k.\end{aligned}$$

A equação da temperatura do café na xícara é dada, portanto, por $T = 70 + 130e^{\ln \frac{12}{13} t}$. Para obtermos o instante em que o café atinge uma temperatura de $150^\circ F$, calculamos

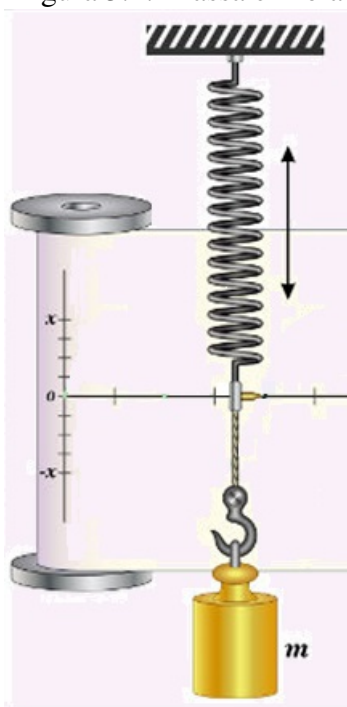
$$\begin{aligned}150 &= 70 + 130e^{\ln \frac{12}{13} t} \\80 &= 130e^{\ln \frac{12}{13} t} \\\frac{8}{13} &= e^{\ln \frac{12}{13} t} \\\ln \frac{8}{13} &= \ln e^{\ln \frac{12}{13} t} \\\ln \frac{8}{13} &= \ln \frac{12}{13} t \\t &= \frac{\ln \frac{8}{13}}{\ln \frac{12}{13}} \\t &\approx 6,07 \text{ minutos,}\end{aligned}$$

isto é, em aproximadamente $6,07$ minutos o café atinge uma temperatura de $150^\circ F$.

5.1.2 O Oscilador Harmônico

O estudo de oscilações, fenômeno de suma importância na física, diz respeito a estudar vibrações localizadas. Para tal estudo, vamos agora considerar, por exemplo, um corpo com massa $m > 0$ preso a uma mola vertical (ver Figura 5.1). Aqui, trata-se de um sistema mecânico vibratório do qual não é submetido a forças externas oscilatórias, isto é, o mesmo estabelece seu próprio período de oscilação, determinado pelos parâmetros que o caracterizam (ver [15]). Representaremos por x o deslocamento do corpo a partir da posição de repouso da mola em $x = 0$.

Figura 5.1: Massa e Mola



Fonte:

<<https://s1.static.brasile escola.uol.com.br/be/2020/02/movimento-harmonico-simples.jpg>>.

Acesso em: 05 jan. 2022.

Pela Lei de Hooke (ver [14]), ao esticar ou comprimir uma mola, a força restauradora é proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio. Descrevemos esse sistema dinâmico a partir da Segunda Lei de Newton (massa vezes aceleração é igual à força), pela equação de movimento

$$mx'' = F(x) = -kx, \quad (5.8)$$

onde k é a *constante da mola*, isto é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad (5.9)$$

com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Denominamos o sistema descrito pela equação de movimento (5.9) por *oscilador harmônico simples*. Fazendo a mudança de variável $y = \frac{x'}{\omega}$, obtemos

$$\begin{aligned}x' &= \omega y \\y' &= \frac{1}{\omega} x'' \\&= -\frac{\omega^2}{\omega} x \\&= -\omega x.\end{aligned}$$

Dessa forma, reescrevermos (5.9) como um sistema de duas equações de primeira ordem tal que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Procedendo como no Exemplo 3.8, a solução do sistema (5.10) que satisfaz às condições iniciais $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

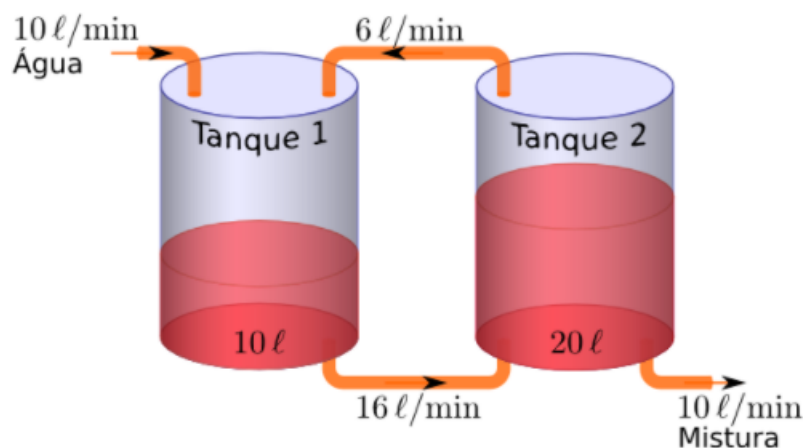
5.1.3 O problema da Mistura

Vamos considerar agora dois tanques que se encontram interligados como ilustra a Figura 5.2. No instante de tempo $t = 0$, o Tanque 1 contém 10 litros de água pura e o Tanque 2 contém 20 litros de uma mistura de água com 12kg de sal. A água pura está sendo constantemente bombeada para dentro de Tanque 1 a uma taxa de 10 litros por minuto, as misturas salinas são trocadas entre os dois tanques como na figura abaixo, e a mistura escoo do Tanque 2 a uma taxa de 10 litros por minuto. Para encontrarmos a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t , podemos perceber que a quantidade de líquido que entra no tanque é a mesma quantidade que sai, e assim, o volume de mistura em cada tanque permanece constante. Então, o Tanque 1 contém sempre 10 litros de mistura e o Tanque 2 contém sempre 20 litros de mistura.

Agora, sejam

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \text{quantidade de sal no Tanque 1 no instante } t, \\x_2(t) &= \text{quantidade de sal no Tanque 2 no instante } t.\end{aligned}$$

Figura 5.2: Dois tanques interligados



Fonte:

<<https://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/sourceforge/pngtest.php>>.

Acesso em: 18 mar. 2022.

Temos que as taxas de variação instantânea da quantidade de sal em cada tanque são, respectivamente,

$$x_1'(t) = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{e} \quad x_2'(t) = \frac{dx_2}{dt}.$$

Cada uma dessas taxas deve ser igual à diferença entre a taxa à qual o sal está entrando menos a taxa à qual o sal está saindo do seu respectivo tanque. Assim, para o Tanque 1, a taxa à qual o sal está entrando é dada por

$$6 \frac{l}{min} \cdot \frac{x_2(t) \text{ kg}}{20 \text{ l}} = \frac{3}{10} x_2(t) \text{ kg/min},$$

enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$16 \frac{l}{min} \cdot \frac{x_1(t) \text{ kg}}{10 \text{ l}} = \frac{8}{5} x_1(t) \text{ kg/min}.$$

Portanto,

$$x_1'(t) = \left(\frac{3}{10} x_2(t) - \frac{8}{5} x_1(t) \right) \text{ kg/min}.$$

No Tanque 2, a taxa à qual o sal está entrando é igual a

$$16 \frac{l}{min} \cdot \frac{x_1(t) \text{ kg}}{10 \text{ l}} = \frac{8}{5} x_1(t) \text{ kg/min},$$

enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$(10 + 6) \frac{l}{min} \cdot \frac{x_2(t) kg}{20} \frac{kg}{l} = \frac{4}{5} x_2(t) kg/min.$$

Portanto,

$$x_2'(t) = \left(\frac{8}{5} x_1(t) - \frac{4}{5} x_2(t) \right) kg/min.$$

Considerando que os dados iniciais são $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 12kg$, segue que as quantidades desejadas de sal $x_1(t)$ e $x_2(t)$ no instante t podem ser obtidas resolvendo-se o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{8}{5}x_1(t) + \frac{3}{10}x_2(t) \\ x_2'(t) = \frac{8}{5}x_1(t) - \frac{4}{5}x_2(t) \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 12 \end{cases} \quad (5.11)$$

Com isso, a matriz dos coeficientes associada ao sistema (5.11) é dada por

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

de tal forma que é fácil perceber que os autovalores dessa matriz são $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$ e $\lambda_2 = -2$, dos quais seus respectivos autovetores associados são $\mathbf{v}_1 = (1, 4)$ e $\mathbf{v}_2 = (-3, 4)$. Vimos no Corolário 4.2 que $x(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ define a única solução para o nosso problema de valor inicial. Além disso, pelo fato de A possuir dois autovalores independentes, segue que A é linearmente conjugada à matriz diagonal D . Logo,

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

á a matriz de conjugação. Daí, e pelo Lema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= Qe^DQ^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{5}t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1/4)e^{-\frac{2}{5}t} + (3/4)e^{-2t} & (3/16)e^{-\frac{2}{5}t} - (3/16)e^{-2t} \\ e^{-\frac{2}{5}t} + e^{-2t} & (3/4)e^{-\frac{2}{5}t} + (1/4)e^{-2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, fazendo os cálculos necessários, encontramos

$$e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4}e^{-2t} \\ 9e^{-\frac{2}{5}t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

5.2 Aplicação Referente a Sistema Não Linear

Nesta seção abordaremos uma aplicação referente a sistema de Equações Diferenciais não Lineares.

5.2.1 Um Modelo Epidemiológico Aplicado à Evolução da COVID-19

Seguimos [1] e [2] para estudarmos um modelo epidemiológico que generaliza o clássico modelo SIR, introduzido na literatura em 1927 por Kermack e McKendrick [10]. O SIR é um modelo compartimental usado para estudar a evolução de algumas doenças infecciosas. Conforme [10], a sigla SIR dar-se-à pelo fato de os indivíduos serem divididos em três populações (ou classes), a saber:

- **Suscetíveis (S):** pessoas que podem ser contaminadas pela doença;
- **Infectados (I):** pessoas que foram contaminadas pela doença e podem contagiar outros indivíduos;
- **Recuperados/Removidos (R):** pessoas recuperadas da doença ou que morreram decorrentes à mesma.

O modelo SIR original, [10], é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias não linear:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\kappa \cdot S(t) \cdot I(t) \\ \frac{dI}{dt} = -\kappa \cdot S(t) \cdot I(t) - \frac{I(t)}{\tau} \\ \frac{dR}{dt} = \frac{I(t)}{\tau}, \end{cases} \quad (5.12)$$

com $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ representando, respectivamente, os indivíduos suscetíveis, infectados e os indivíduos removidos (recuperados ou mortos), κ representando a taxa de contágio e τ o tempo médio de infecção (período em que uma pessoa que foi infectada pode infectar outras pessoas).

Modelos epidemiológicos do tipo SIR têm sido aplicados em várias situações epidemiológicas que acometem a sociedade. Como exemplos podemos citar: a evolução de uma gripe numa escola (ver [19]), a incidência de infectados por dengue numa cidade (ver [16]) e a evolução da COVID-19 (ver [1], [2] e [8]). Esses estudos são muito importantes no que diz respeito à tomada de decisões para controlar as doenças em foco.

A COVID-19 é uma doença causada pelo vírus SARS-CoV-2 que surgiu em 2019 na China, disseminando-se por meio do contato entre pessoas; o que acabou provocando uma pandemia que perdura até os dias atuais.

O modelo da evolução epidemiológica que vamos estudar foi deduzido em [1] e é determinado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \nu(S + I + R) - \mu S - \kappa(t)SI \\ \frac{dI}{dt} = -(\mu + \frac{1}{\tau})I + \kappa(t)SI \\ \frac{dR}{dt} = \rho(t)I - \mu R \\ \frac{dM}{dt} = \lambda(t)I, \end{cases} \quad (5.13)$$

onde $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são, respectivamente, as populações normalizadas de suscetíveis, infectados e recuperados em um dado tempo t . $M(t)$ corresponde ao número normalizado de mortes acumuladas devido à COVID-19. O parâmetro ν é a taxa de natalidade da população, μ é a taxa de mortalidade endêmica da população, $\kappa(t)$ é a função que determina a taxa de contágio, $\rho(t)$ é a taxa de recuperação, e $\lambda(t)$ é a taxa de letalidade da epidemia. A normalização das variáveis dar-se-á dividindo-as pelo total inicial da população P_0 que, no nosso caso, será referente ao total da população do Brasil. Dessa forma, $k(t)$ deve ser multiplicado por P_0 , o que se verifica a sua independência em relação à P_0 . Ressalta-se também que não obstante $\rho(t)$ e $\lambda(t)$ sejam

mudados ao longo do tempo, $\tau^{-1} = \rho(t) + \lambda(t)$ é mantido constante.

A importância de trabalharmos com o modelo (5.13) ao invés do modelo original (5.12) está no fato de a COVID-19 já perdurar por mais de um ano. Então, faz-se necessário acrescentar algumas variáveis, para que o modelo teórico fique o mais próximo de refletir a realidade quando comparado com os dados reais.

As diferenças entre o modelo original (5.12) e o modelo (5.13) são que há variações na população total, aceitando as contribuições das taxas de natalidade e de mortalidade para a evolução populacional e que é analisado de forma explícita a evolução do número de mortos em consequência da pandemia.

No modelo proposto (5.13) é considerado que todos os indivíduos têm a mesma probabilidade de serem infectados, como também todos têm a mesma probabilidade de virem a óbito em consequência da enfermidade. Supõe-se também que a população evolua de maneira que os novos nascidos são todos suscetíveis e que os recuperados são todos imunes.

É importante também observarmos a variação da taxa de contágio $\kappa(t)$ conforme o tempo, o que reflete o comportamento da população com relação ao distanciamento social e à utilização de equipamentos de proteção individual.

5.2.2 Existência e Unicidade de Solução

Nesta subseção, seguindo [1], vamos provar que, para um determinado tempo $T > 0$, para cada valor inicial (S_0, I_0, R_0, M_0) , com $\kappa(t)$, $\rho(t)$ e $\lambda(t)$ variando continuamente no intervalo limitado $[0, T]$ e com os demais parâmetros fixos, pode-se mostrar que o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (5.13) admite existência e unicidade de solução no intervalo de tempo $[0, T]$. Além disso, provamos que as soluções são continuamente dependente dos dados iniciais e dos parâmetros κ , ρ e λ .

Para provar a existência e unicidade de solução de (5.13), no espaço euclidiano \mathbb{R}^4 , é suficiente verificar que as funções dadas pelo lado direito de (5.13) são Lipschitz contínuas em relação à variável espacial (ver Teorema A.3).

Para isso, seja $\xi(t) = (S(t), I(t), R(t), M(t))$ e definamos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ como

$$g(t, \xi) = (g_1(t, \xi), g_2(t, \xi), g_3(t, \xi), g_4(t, \xi)), \quad (5.14)$$

onde os $g_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de g dadas por

$$g_1(t, \xi) = \nu(S + I + R) - \mu S - \kappa(t)SI,$$

$$g_2(t, \xi) = -\left(\mu + \frac{1}{\tau}\right)I + \kappa(t)SI,$$

$$g_3(t, \xi) = \rho(t)I - \mu R,$$

e

$$g_4(t, \xi) = \lambda(t)I,$$

com $\kappa, \rho, \lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções contínuas.

Portanto, a existência e unicidade de solução de (5.13) segue da proposição abaixo.

Proposição 5.1. *A função dada por (5.14) é Lipschitz contínua com relação à segunda variável.*

Demonstração. Inicialmente vamos denotar

$$\kappa_{max} = \sup_{t \in [0, T]} \kappa(t) \text{ e } \rho_{max} = \sup_{t \in [0, T]} \rho(t)$$

e considerarmos em \mathbb{R}^4 a norma da soma, ou seja, para $\xi = (S, I, R, M)$, fazemos

$$\|\xi\| = |S| + |I| + |R| + |M|,$$

onde $|S| \leq S_{max}, |I| \leq I_{max}, |R| \leq R_{max}$ e $|M| \leq M_{max}$. Denotamos

$$S_{1max} = \sup_{t \in [0, T]} S_1(t), \quad I_{2max} = \sup_{t \in [0, T]} I_2(t).$$

Com isso, podemos ver que

$$\begin{aligned} |g_1(t, \xi_1) - g_1(t, \xi_2)| &\leq |\nu - \mu||S_1 - S_2| + \nu|I_1 - I_2| + \nu|R_1 - R_2| + \kappa(t)|S_1I_1 - S_2I_2| \\ &\leq |\nu - \mu||S_1 - S_2| + \nu|I_1 - I_2| + \nu|R_1 - R_2| + \kappa(t)|S_1||I_1 - I_2| \\ &\quad + \kappa(t)|I_2||S_2 - S_1| \\ &\leq |\nu - \mu||S_1 - S_2| + \nu|I_1 - I_2| + \nu|R_1 - R_2| + \kappa_{max}S_{max}|I_1 - I_2| \\ &\quad + \kappa_{max}I_{max}|S_1 - S_2| \\ &\leq (|\nu - \mu| + \kappa_{max}I_{max})|S_1 - S_2| + (\nu + \kappa_{max}S_{max})|I_1 - I_2| \\ &\quad + \nu|R_1 - R_2|. \end{aligned}$$

Assim, escrevendo $L_1 = \sup\{|\nu - \mu| + \kappa_{max}I_{max}, \nu + \kappa_{max}S_{max}\}$, obtemos

$$\begin{aligned} |g_1(t, \xi_1) - g_1(t, \xi_2)| &\leq L_1 (|S_1 - S_2| + |I_1 - I_2| + |R_1 - R_2|) \\ &\leq L_1 \|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
|g_2(t, \xi_1) - g_2(t, \xi_2)| &\leq \left(\mu + \frac{1}{\tau}\right) |I_2 - I_1| + \kappa(t) |S_1 I_1 - S_2 I_2| \\
&\leq \left(\mu + \frac{1}{\tau}\right) |I_2 - I_1| + \kappa(t) |S_1| |I_2 - I_1| + \kappa(t) |I_2| |S_1 - S_2| \\
&\leq \kappa_{max} I_{max} |S_1 - S_2| + \kappa_{max} S_{max} |I_1 - I_2| + \left(\mu + \frac{1}{\tau}\right) |I_2 - I_1|;
\end{aligned}$$

assim, escrevendo $L_2 = \max\{\kappa_{max} I_{max}, \kappa_{max} S_{max} + \mu + \frac{1}{\tau}\}$, temos

$$\begin{aligned}
|g_2(t, \xi_1) - g_2(t, \xi_2)| &\leq L_2 (|S_1 - S_2| + |I_1 - I_2|) \\
&\leq L_2 \|\xi_1 - \xi_2\|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g_3(t, \xi_1) - g_3(t, \xi_2)| &\leq \rho(t) |I_1 - I_2| + \mu |R_2 - R_1| \\
&\leq \rho_{max} |I_1 - I_2| + \mu |R_1 - R_2| \\
&\leq L_3 (|I_1 - I_2| + |R_1 - R_2|) \\
&\leq L_3 \|\xi_1 - \xi_2\|,
\end{aligned}$$

com $L_3 = \max\{\rho_{max}, \mu\}$, e,

$$|g_4(t, \xi_1) - g_4(t, \xi_2)| \leq \lambda(t) |I_1 - I_2|.$$

Desde que $\frac{1}{\tau} = \rho(t) + \lambda(t)$, segue que $\lambda(t) = \frac{1}{\tau} - \rho(t)$. Portanto,

$$\lambda_{max} = \sup_{t \in [0, T]} \left(\frac{1}{\tau} - \rho(t) \right) < \tau^{-1}.$$

Por conseguinte,

$$|g_4(t, \xi_1) - g_4(t, \xi_2)| \leq \frac{1}{\tau} |I_1 - I_2| \leq \frac{1}{\tau} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

Finalmente,

$$\|g(t, \xi_1) - g(t, \xi_2)\| \leq L \|\xi_1 - \xi_2\|,$$

onde $L = \max\{L_1, L_2, L_3, \frac{1}{\tau}\}$. Ficando concluída a demonstração. \square

Observação 5.1. Pela Proposição 5.1 e Teorema de Picard (A.3) (ver Apêndice), segue que, para cada valor inicial $\xi_0 = (S_0, I_0, R_0, M_0)$, com $\kappa(t)$, $\rho(t)$ e $\lambda(t)$ variando continuamente no intervalo $[0, T]$, o sistema de Equações Diferenciais (5.13) admite a existência e unicidade de solução no intervalo de tempo $[0, T]$, que é dada, para $t \in [0, T]$, por

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t g(s, \xi(s)) ds. \quad (5.15)$$

Ademais, usando (5.15) e a desigualdade de Gronwall (ver [6]), obtemos a sensibilidade com respeito aos dados iniciais.

Com efeito, seja $\xi(t, \xi_0)$ a solução do sistema (5.13), onde $t = 0$ é ξ_0 . Então,

$$\begin{aligned} \|\xi(t, \xi_0^1) - \xi(t, \xi_0^2)\| &\leq \|\xi_0^1 - \xi_0^2\| + \int_0^t \|g(s, \xi(s, \xi_0^1)) - g(s, \xi(s, \xi_0^2))\| ds \\ &\leq \|\xi_0^1 - \xi_0^2\| + \int_0^t L \|\xi(s, \xi_0^1) - \xi(s, \xi_0^2)\| ds. \end{aligned}$$

Com isso, da desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned} \|\xi(t, \xi_0^1) - \xi(t, \xi_0^2)\| &\leq \|\xi_0^1 - \xi_0^2\| e^{\int_0^t L ds} \\ &\leq e^T \|\xi_0^1 - \xi_0^2\| \rightarrow 0, \text{ quando } \|\xi_0^1 - \xi_0^2\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

A próxima proposição faz menção ao fato da continuidade da solução $(S(t), I(t), R(t), M(t))$ de (5.13) em relação aos parâmetros $\kappa(t)$, $\rho(t)$ e $\lambda(t)$, e sua demonstração pode ser vista em [1].

Proposição 5.2. *Sob as mesmas suposições e notação da Proposição (5.1), a solução $(S(t), I(t), R(t), M(t))$ é contínua em relação aos parâmetros $\kappa(t)$, $\rho(t)$ e $\lambda(t)$ presentes no sistema (5.13).*

5.2.3 Estimando os Parâmetros Utilizados no Modelo

Em consonância com [1] e [2], faremos agora as estimativas para os parâmetros presentes no sistema dinâmico do modelo (5.13).

5.2.3.1 Número de Reprodução

Quando um vírus se propaga em uma população, estudos e modelos matemáticos são considerados para a tomada de decisões, no que diz respeito ao controle da doença. Projeções sobre a evolução da doença são sempre bem vindas, pois podem ajudar para que o sistema de saúde não entre em colapso.

No surgimento de uma doença é sempre importante saber se tal doença vai ganhar força a ponto de sair do controle ou se a doença será facilmente controlada. Isto pode ser verificado analisando o termo $\frac{dI}{dt}$ em (5.13). Note que

$$\frac{dI}{dt} \leq 0 \Rightarrow -\left(\mu + \frac{1}{\tau}\right) + \kappa S(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{\kappa S(t)}{\mu + \frac{1}{\tau}} \leq 1. \quad (5.16)$$

No início da epidemia é considerado o valor da razão

$$R_0 = \frac{\kappa S_0}{\mu + \frac{1}{\tau}},$$

o qual é denominado como o número de reprodução básico (apud **MURRAY**, 2007). Esta razão indica se iremos ter ou não uma epidemia. Quando $R_0 > 1$, teremos que a doença se espalhará, enquanto que quando $R_0 < 1$, a doença perde forças e, então, conseguimos o controle da disseminação do vírus. A partir da normalização considerada, temos $S_0 = 1$ e $S(t) \leq 1$. Com isso, a qualquer momento após o início da epidemia, a doença não se espalhará se tivermos

$$R_0(t) = \frac{\kappa(t)S(t)}{\mu + \frac{1}{\tau}} \leq 1.$$

É suficiente termos $R_0 < 1$ para o recuo da epidemia, no entanto, o necessário mesmo é que tenhamos $R_0(t) < 1$. Levando em consideração [1], no início da epidemia ainda não se tinha tratamento eficaz contra a COVID-19, tinha-se $M(t) \ll 1$ e $S(t) \approx 1$, a condição crítica ainda era aproximadamente $R_0 = 1$ e o valor crítico de $\kappa(t)$ é $\kappa^* = \mu + \frac{1}{\tau}$. E mais, percebe-se ainda que não foi possível alterar facilmente o tempo médio de infecção τ . Pelo fato de $1/\tau \gg \mu$, portanto a única maneira possível de diminuir $R_0(t) \approx \kappa(t)\tau$ era reduzindo o valor de $\kappa(t)$. Por isso, era recomendado o distanciamento social e o uso de equipamentos de proteção.

5.2.3.2 Taxas de Recuperação e Letalidade

Vamos considerar o modelo probabilístico apresentado em [1], do qual encontram-se boas estimativas para as taxas de recuperação e de letalidade. Nesse modelo, consideram-se que esses parâmetros se mantenham constantes ao longo dessa epidemia. Assim, supondo que uma pessoa esteja infectada num dado momento n (pode ser considerado dia, hora ou minuto, por exemplo). Assim, no momento seguinte $n + 1$, q representa a probabilidade de ela ainda estar doente, p é a probabilidade de ela se recuperar no momento seguinte e de vir a óbito s , de forma que $p + q + s = 1$. Dessa maneira, temos a seguinte tabela de probabilidade:

Tabela 5.1: Modelo probabilístico

Situação \ Instante	0	1	2	...	n	...
Recuperado	p	qp	q^2p	...	$q^n p$...
Óbito	s	qs	q^2s	...	$q^n s$...

Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n p + \sum_{n=0}^{\infty} q^n s = \frac{p + s}{1 - q} = 1,$$

implicando na boa definição desse modelo probabilístico.

Para n suficientemente grande, temos que ou o indivíduo se recupera ou vai à óbito. Então, em vista da Tabela 5.1, obtemos a probabilidade de recuperação de um indivíduo infectado $P_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n = \frac{p}{1 - q}$ e a probabilidade de óbito $P_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} sq^n = \frac{s}{1 - q}$.

Por meio dessas probabilidade encontramos que o número médio de dias de infecção é dado por

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (p+s)nq^n = (p+s)F(q) = (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} nq^n,$$

em que a somatória $F(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ é tal que

$$qF(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)q^n = \sum_{n=2}^{\infty} nq^n - \sum_{n=2}^{\infty} q^n = F(q) - \sum_{n=2}^{\infty} q^n = F(q) - \frac{q}{1-q}.$$

Com isso, obtemos que

$$F(q) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Dessa maneira, o número médio de dias de infecção é dado por

$$\bar{n} = \frac{q}{1-q},$$

de onde temos que $q = \bar{n}/(1+\bar{n})$. Para o número médio de dias até a recuperação encontramos

$$\bar{n}_\rho = pF(q) = \frac{pq}{(1-q)^2} = P_\rho \bar{n},$$

enquanto ao número de dias até o óbito, encontramos

$$\bar{n}_\lambda = sF(q) = \frac{sq}{(1-q)^2} = P_\lambda \bar{n}.$$

Podemos notar assim, que $\bar{n} = \bar{n}_\rho + \bar{n}_\lambda$. Esses processos resultam à seguinte equação de diferenças para o número de infectados

$$I(n+1) = I(n) - (p+s)I(n) = I(n) - (1-q)I(n) = I(n) - \frac{1}{1+\bar{n}}I(n).$$

Vamos considerar n sendo um pequeno intervalo de tempo, tal como 1 hora, de tal forma que as quantidades S, I, R e M tenham pouca variação, para obter a aproximação

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{1}{(1+\bar{n})\Delta t} I(t_n),$$

com $t_n = n\Delta t$. Ademais, considerando $\Delta t = 1 \text{ hora} = 1 \text{ dia}/24$, o tempo médio de infecção é

obtido da seguinte equação

$$\frac{1}{\tau} = \lambda + \rho = \frac{1}{(1 + \bar{n})\Delta t}.$$

Pensado assim, encontramos as seguintes expressões para as taxas de letalidade e recuperação

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\bar{n}_\lambda}{\bar{n}_\tau} = \frac{P_\lambda}{\tau}, \\ \rho &= \frac{\bar{n}_\rho}{\bar{n}_\tau} = \frac{P_\rho}{\tau}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

5.2.3.3 Taxa de Natalidade e de Mortalidade

Os dados utilizados para a taxa de natalidade anual (TNA) e a taxa de mortalidade anual (TMA) foram obtidos dos mais recentes dados publicados pelo IBGE em 2018. No caso da natalidade foi dividido o número de nascidos vivos pela estimativa de população do ano de 2018, para o da mortalidade foi dividido o número de óbitos pela estimativa de população de 2018. Os números de nascidos vivos foram considerados do site <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2609>, os de óbito do site <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>, enquanto as estimativas populacionais do site <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>.

Considerando esses dados e as equações de progressões geométricas (equivalentes à composição de juros compostos), obtemos

$$\begin{aligned}(1 + \nu)^{365} &= 1 + TNA, \\ (1 - \mu)^{365} &= 1 - TMA;\end{aligned}$$

nas quais as taxas da natalidade e mortalidade são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\nu &= (1 + TNA)^{1/365} - 1 = e^{\frac{1}{365}\ln(1+TNA)} - 1 \\ \mu &= 1 - (1 - TMA)^{1/365} = 1 - e^{\frac{1}{365}\ln(1-TMA)}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

No Brasil temos $TNA = 0.0139/ano$ e $TMA = 6.1560 \times 10^{-3}/ano$. Com isso, $\nu = 3.7844 \times 10^{-5}/dia$ e $\mu = 1.6918 \times 10^{-5}/dia$.

5.2.4 Evolução Temporal da COVID-19 no Brasil

Em consonância com [1], utilizamos a biblioteca Odeint do pacote científico SciPy do Python (apud VIRTANEN *et al.*, 2020) para integrarmos o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (5.13) com o passo de integração de $dt = 1.0/24$, correspondente a uma hora, já que a unidade de tempo é um dia. Os códigos utilizados para a construção dos gráficos

foram os mesmos utilizados em [1] e estão disponibilizados em https://github.com/Jeffhenri/codigos_e_graficos/blob/main/gr%C3%Alficos.ipynb. Utilizamos também a taxa $\tau = 14$ dias como o tempo médio de infecção. Supondo que este parâmetro não muda sensivelmente durante o período de tempo do surto da pandemia até agora. A população inicial será de $P_0 = 211.049.527$. Os valores iniciais são: $S(0) = 1 - C_0/P_0$, $I(0) = A_0/P_0$, $R(0) = \mathcal{R}_0/P_0$ e $M(0) = D_0/P_0$, onde C_0 é o número inicial de casos confirmados, A_0 é o número inicial de casos ativos, \mathcal{R}_0 é o número inicial de casos recuperados, e D_0 é o número inicial de mortes, que usualmente será 0 ou 1. Os dados referentes ao número de casos confirmados, recuperados e mortes do Brasil foram obtidos do site <https://data.humdata.org/dataset/novel-coronavirus-2019-ncov-cases> (acessado em 17/03/2022, com dados coletados até o dia 10/03).

Na Fig. 5.3 são feitas as comparações entre os dados oficiais (linha tracejada em verde) de casos confirmados e as previsões apresentadas pelo modelo proposto (linha contínua em vermelho). É bem perceptível o ótimo ajuste do modelo teórico proposto em [1].

Na Fig. 5.4, mostramos uma comparação entre o número de casos de óbito devido à COVID-19 (em preto) e o número de óbitos previstos pelo modelo teórico.

É importante ressaltar que nos casos acima as funções $\kappa(t)$, $\lambda(t)$ e $\rho(t)$ variam no tempo de acordo com as Figuras 5.5, 5.6 e 5.7

Na Fig. 5.5, mostramos a evolução temporal da taxa de contágio $\kappa(t)$. A queda acentuada desta taxa no início da pandemia possivelmente dar-se-á pelo processo de conscientização da população para as medidas de higiene pessoal (lavagem de mãos), como também de isolamento, distanciamento social e o uso de equipamentos de proteção individual. A implantação de campanha de vacina contra a COVID-19 no Brasil se deu a partir de 17 de janeiro de 2021, que inicialmente foram contempladas pessoas da saúde, a posteriori as demais pessoas. A partir daí, apesar de algumas variações semanais, também pode-se perceber uma queda acentuada dessa taxa, mas sempre reforçou-se as medidas de proteção contra o vírus, não dependendo somente da proteção da vacina.

Na Fig. 5.6 é apresentado o número de reprodução em função do tempo. É basicamente uma versão em escala de $\kappa(t)$. Aqui, percebemos que desde o início de julho de 2020, $R_0(t)$ vem oscilando em torno de 1; com exceção do período de dezembro de 2021 a meados de fevereiro de 2022, onde ocorreu um pico, provavelmente devido ao surgimento de uma nova variante e ao relaxamento das medidas de distanciamento social e utilização de equipamentos de proteção individual.

Na Fig. 5.7 apresentamos a evolução temporal das probabilidades de letalidade $P_\lambda(t)$ (linha contínua em preto) e recuperação $P_\rho(t)$ (linha tracejada em azul), obtidas conforme o modelo descrito. Podemos perceber que no início da pandemia a probabilidade de letalidade devida à COVID-19 era muito alta. Possivelmente devia estar relacionada à pequena quantidade de testes laboratoriais para diagnóstico da COVID-19, especialmente nos estágios iniciais da pandemia. Em março de 2021, houve um aumento da letalidade, isso pode ser devido às variantes gama

que se espalharam da cidade de Manaus pelo Brasil nesse período.

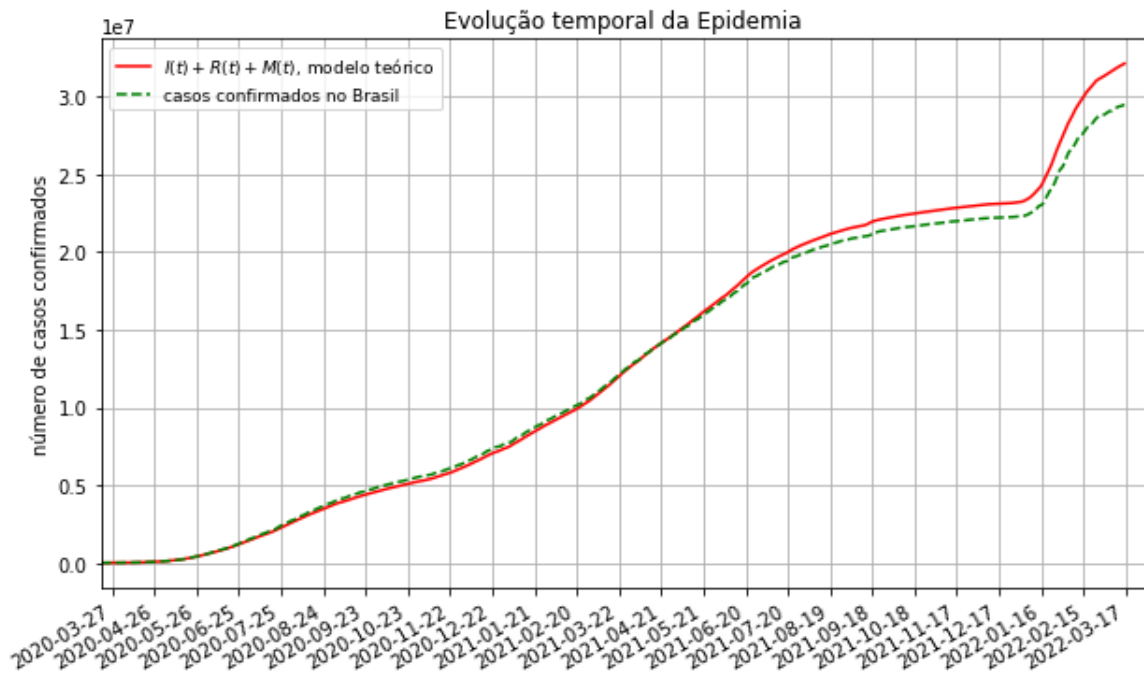


Figura 5.3: Número de casos confirmados oficiais em comparação à previsão do modelo teórico.

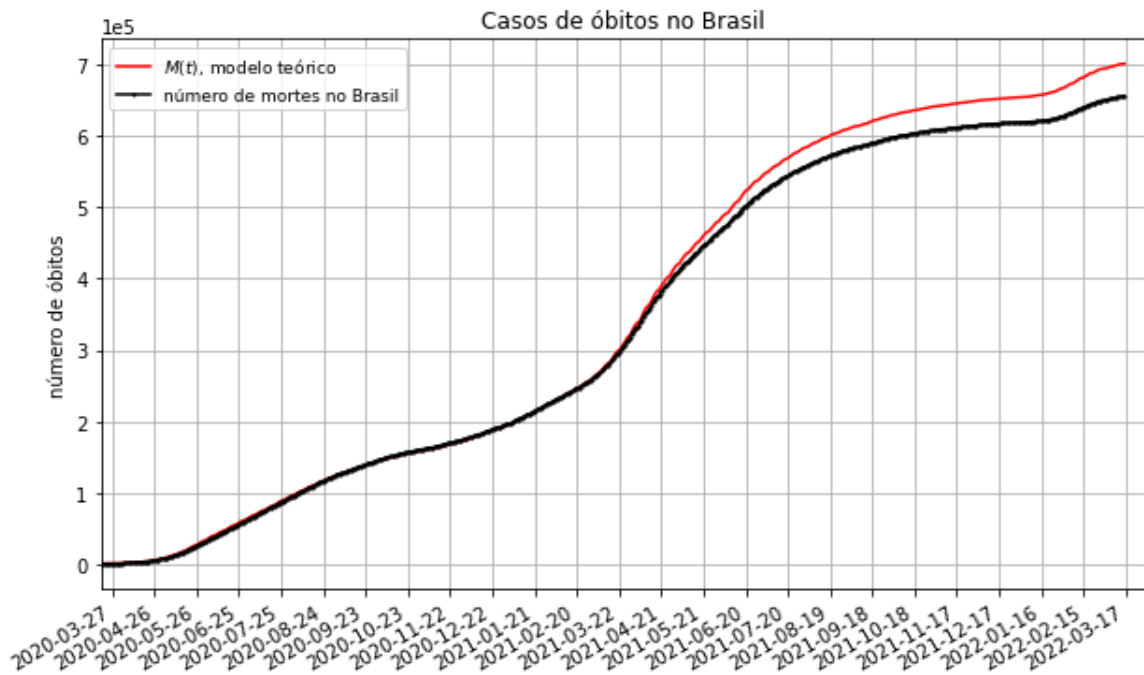


Figura 5.4: Número de mortes oficiais em comparação com a previsão do modelo teórico.

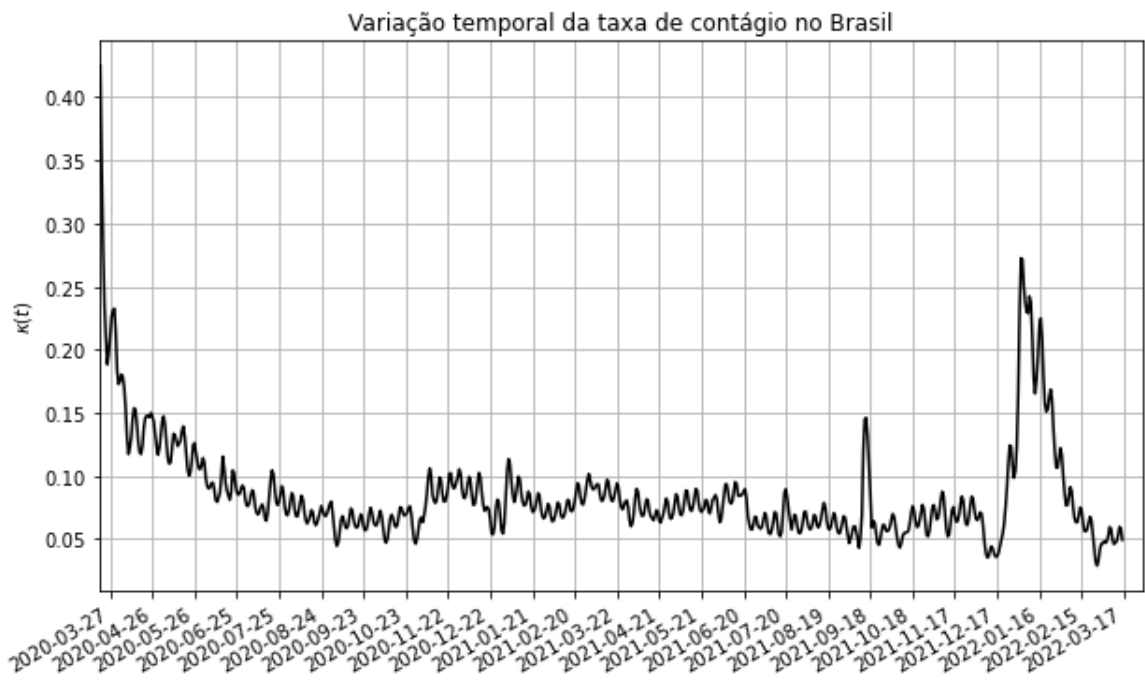


Figura 5.5: Variação da taxa de contágio no Brasil.

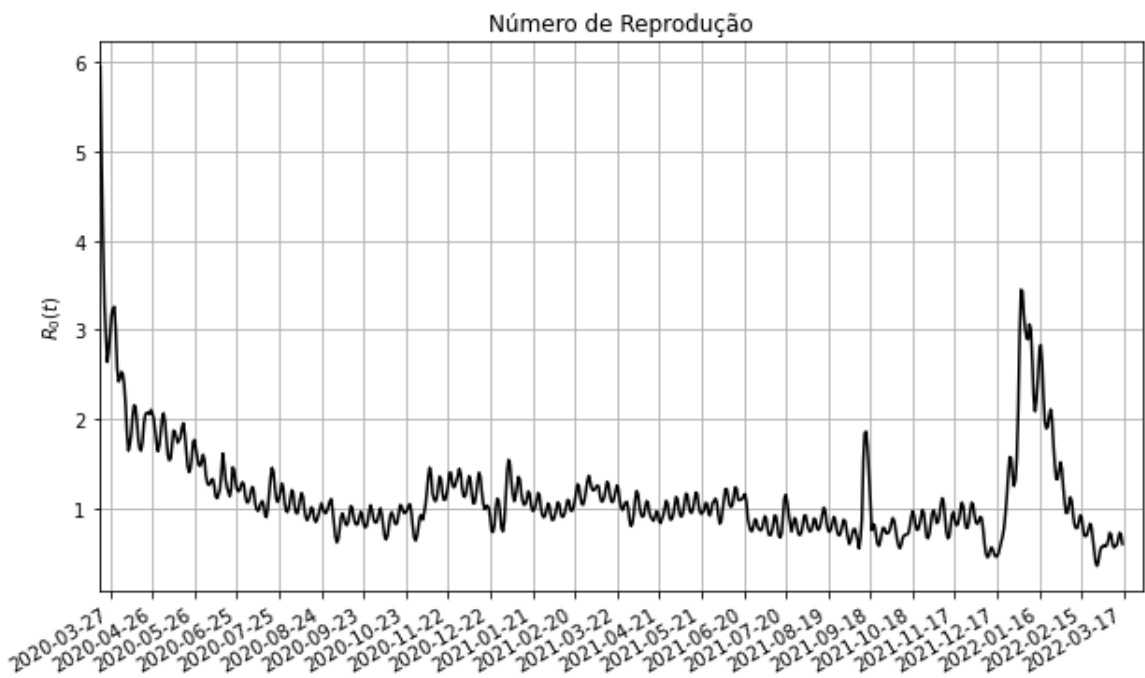


Figura 5.6: Variação do número de reprodução.

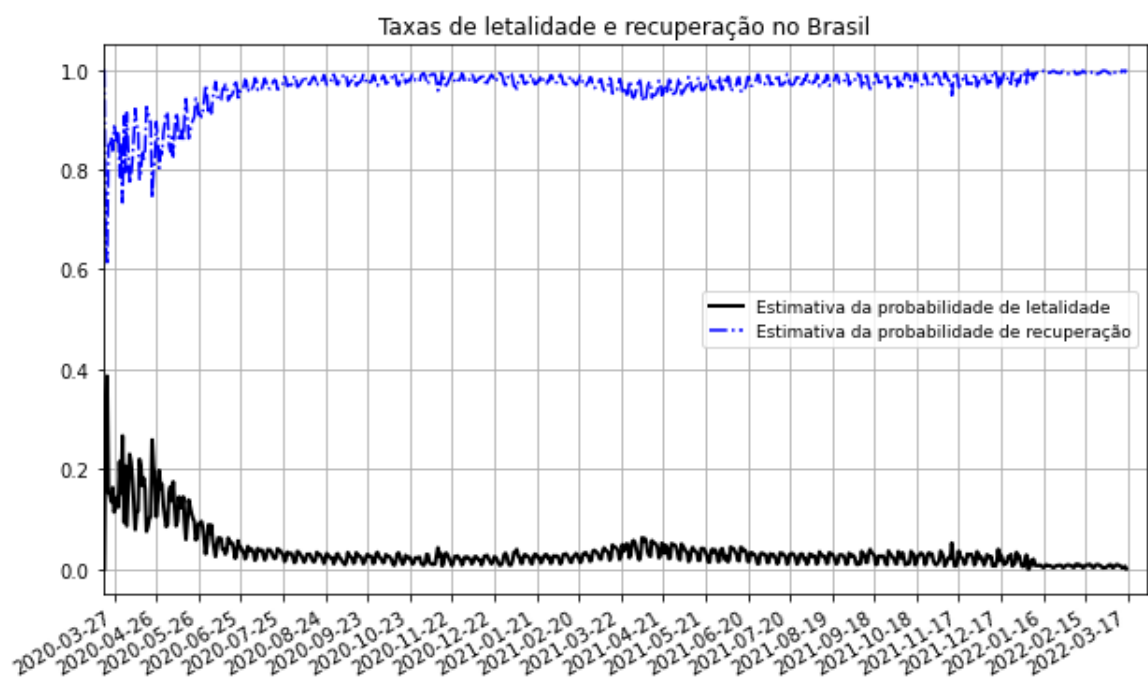


Figura 5.7: Taxas de letalidade e recuperação obtidas com o método descrito.

Apêndice A

Serão apresentados agora alguns conceitos necessários para a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de solução para o problema de valor inicial, proposto em [5], como também soluções de sistemas de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes. Para isto,

A.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definimos uma **métrica** num conjunto X como sendo uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y , de tal forma que para quaisquer $x, y, z \in X$ são satisfeitas as seguintes condições:

d1. $d(x, x) = 0$;

d2. Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

d3. $d(x, y) = d(y, x)$; (simetria)

d4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdade triangular)

Definição A.1. Um **espaço métrico** é um par (X, d) , tal que X é um conjunto não vazio e d é uma métrica sobre X .

Exemplo A.1. Seja X um espaço vetorial munido de uma norma $|\cdot|$. Assim $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $d(x, y) = |x - y|$ é uma métrica sobre X . A mesma é denominada métrica induzida pela norma $|\cdot|$. De fato, dados $x, y, z \in X$, temos

$$d(x, x) = |x - x| = 0.$$

Se $x \neq y$, então

$$d(x, y) = |x - y| > 0.$$

Ademais,

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$$

Finalmente, pela desigualdade triangular de números reais, obtemos

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Conclusão: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, e, por conseguinte, d é uma métrica sobre X .

Exemplo A.2. Seja B_b a bola de \mathbb{R}^n de centro na origem e raio b e $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideremos $X = \mathcal{C}(I, B_b)$ o espaço das funções contínuas $\varphi : I \rightarrow B_b$. Definimos $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Desse modo, d define uma métrica sobre X . De fato, sejam dados $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X$, temos

$$d(\varphi_1, \varphi_1) = \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_1(t)| = 0.$$

Se $\varphi_1 \neq \varphi_2$, então

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| > 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d(\varphi_1, \varphi_2) &= \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \\ &= \sup_{t \in I} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \\ &= d(\varphi_2, \varphi_1). \end{aligned}$$

Finalmente, temos que, pela desigualdade triangular de números reais, para todo $t \in X$

$$|\varphi_1(t) - \varphi_3(t)| \leq |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| + |\varphi_2(t) - \varphi_3(t)|,$$

donde, calculando o supremo, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_3(t)| &\leq \sup_{t \in I} (|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| + |\varphi_2(t) - \varphi_3(t)|) \\ &\leq \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| + \sup_{t \in I} |\varphi_2(t) - \varphi_3(t)|. \end{aligned}$$

Conclusão: $d(\varphi_1, \varphi_3) \leq d(\varphi_1, \varphi_2) + d(\varphi_2, \varphi_3)$, e, portanto, d é uma métrica sobre X .

Definição A.2. Um **ponto fixo** de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Exemplo A.3. Toda função contínua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possui um ponto fixo. De fato, seja a

função contínua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Sendo $0 \leq f(x) \leq 1$ para qualquer $x \in [0, 1]$, obtemos

$$\varphi(0) = f(0) \geq 0 \text{ e } \varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário (ver [12]), existe $x \in [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 0$, ou seja, $f(x) = x$.

Definição A.3. Sejam X, Y espaços métricos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma **contração** quando existe uma constante c , com $0 \leq c < 1$, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Exemplo A.4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e convexo. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável tal que $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in U$ e algum $c \in \mathbb{R}$, temos, pela Desigualdade do Valor Médio (ver [12]),

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f'(x)| |x - y| \\ &\leq c |x - y|. \end{aligned}$$

Conclusão : f é uma contração.

Definição A.4. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma **sequência de Cauchy** quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Definição A.5. Um espaço métrico X é dito **completo** quando toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X . Um espaço vetorial normado que é completo, cuja métrica é induzida pela norma, chama-se um **espaço de Banach**.

Exemplo A.5. Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Com efeito, seja $F \subset M$ um subespaço fechado do espaço métrico completo M . Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F , existe $\lim x_n = a \in M$. Pelo fato de F ser fechado em M , então tem-se que $a \in F$. Com isso, concluímos que F é completo.

Exemplo A.6. O espaço $X = \mathcal{C}(I, B_b)$ das funções contínuas definidas no Exemplo A.2 é um espaço métrico completo. De fato, seja φ_n uma sequência de Cauchy em X . Assim, dado $\epsilon > 0$,

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$, tem-se

$$d(\varphi_m(t), \varphi_n(t)) < \epsilon,$$

isto é,

$$\sup_{t \in I} |\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon.$$

Daí,

$$|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon, \forall t \in I.$$

Logo, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$ é uma sequência de Cauchy em B_b . Sendo B_b um subespaço métrico fechado do espaço métrico completo \mathbb{R}^n , concluímos que B_b é um espaço completo. Assim, existe $\varphi^t \in B_b$ tal que $\varphi_m(t) \rightarrow \varphi^t$, quando $t \rightarrow \infty$. Consideremos a função $\varphi \rightarrow B_b$ dada por

$$\varphi(t) = \varphi^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t).$$

Afirmação:

- (i) $\varphi \in X$;
- (ii) $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

De fato, sendo as φ_n funções contínuas de I em B_b é fácil perceber que $\varphi : I \rightarrow B_b$ também é uma função contínua. Ademais, dado $t \in I$, temos

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| = |\varphi_n(t) - \varphi^t| < \epsilon.$$

Daí,

$$\sup_{t \in I} |\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon,$$

ou seja,

$$d(\varphi_m(t), \varphi_n(t)) < \epsilon.$$

Portanto, X é um espaço métrico completo.

Teorema A.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo em X , ou mais precisamente, dado $x_0 \in X$, a sequência*

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

converge em X e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f .

Demonstração. Unicidade: sejam a_1 e a_2 dois pontos fixos, isto é, $f(a_1) = a_1$ e $f(a_2) = a_2$. Assim

$$d(a_1, a_2) = d(f(a_1), f(a_2)) \leq c \cdot d(a_1, a_2),$$

isto é,

$$(1 - c) \cdot d(a_1, a_2) \leq 0.$$

Como $1 - c > 0$, resulta que $d(a_1, a_2) = 0$ e, portanto, $a_1 = a_2$.

Existência: para provarmos a existência, provaremos primeiro que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X . Ora,

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1), \\ d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

e, por recorrência, concluímos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.1})$$

Logo, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer, segue que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [c^n(1 + c + c^2 + \cdots + c^{p-1})] \cdot d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{c^n}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Calculando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1).$$

Pelo fato de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0;$$

o que implica que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X . Logo existe $a \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Provemos agora que a é ponto fixo. De fato, sendo f contínua, temos que

$$\begin{aligned} f(a) &= f(\lim x_n) \\ &= \lim f(x_n) \\ &= \lim x_{x+1} \\ &= a, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Lema A.2 (Lema da Contração). *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \rightarrow X$ é contínua e, para algum m , F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo para F .*

Mais ainda, p é atrator de F , isto é, $F^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$. Onde $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Demonstração. Suponhamos que p seja o ponto fixo atrator de F^m dado pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Seja $n = mk + l$, com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, como p é atrator de F^m , e também pelo fato de $F^l(j)$, $0 \leq l < m$ ser finito, temos

$$[F^m]^k(F^l(x)) \rightarrow p, k \rightarrow \infty.$$

Da relação

$$F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$$

e do fato que quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $k \rightarrow \infty$, segue que $F^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$, mostrando que p é atrator de F . Além disso,

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(F(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(p)) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p)) = F(p).$$

□

Teorema A.3 (Teorema de Picard). *Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω , então existe uma única solução de*

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

em I_α , onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Demonstração. Seja $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$, com a métrica da convergência uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|. \quad (\text{A.2})$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in I_\alpha. \quad (\text{A.3})$$

Podemos notar que F satisfaz às seguintes propriedades:

- (i) $F(X) \subset X$;
- (ii) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$, temos

$$\begin{aligned}
|F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t M ds \\
&= M(t - t_0) \\
&\leq M\alpha \\
&\leq b.
\end{aligned}$$

Com isso, $F(X) \subset X$, provando (i). Quanto a (ii), para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$, temos

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha, \quad (\text{A.4})$$

onde K é a constante de Lipschitz de f . Verificamos esta igualdade por indução em n . Para $n = 0$ a verificação é imediata, pois

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha.$$

Suponhamos que seja válida para $n = k$, ou seja,

$$|F^k(\varphi_1)(t) - F^k(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^k |t - t_0|^k}{k!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha.$$

Então,

$$\begin{aligned}
|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| \\
&\leq \int_{t_0}^t |f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t K |F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)| ds \\
&\leq K \int_{t_0}^t \frac{K^k |s - t_0|^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \\
&= \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (A.4) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Calculando o supremo em (A.4), segue

que

$$d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Mais ainda, para n suficientemente grande,

$$\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1,$$

pois este é o termo geral de uma série cuja soma é $e^{K\alpha}$. Conclusão: F^n é uma contração em X . Pelo Lema da Contração, existe uma única $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$, ficando provado o teorema de Picard. \square

Corolário A.1. *Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua com $D_2 f$ também contínua. Para todo ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma vizinhança $V = T(t_0) \times B(x_0)$ tal que $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, tem uma única solução em $I(t_0)$. Ademais, o gráfico desta solução está contido em V .*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de (t_0, x_0) tal que $f|_U$ é Lipschitziana e $|f| \leq M$ em U . Seja $\alpha > 0$ suficientemente pequeno para que $V = I_\alpha(t_0) \times B(x_0) \subseteq U$, onde $b = \alpha M$. Conclui-se o argumento aplicando o Teorema de Picard em V . \square

Proposição A.1. *Seja f contínua e Lipschitziana em $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução de*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

em $I = [a, b]$.

Demonstração. Consideremos $X = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ e $F : X \rightarrow X$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Conforme os passos da demonstração do Teorema de Picard, concluímos que F tem um único ponto fixo, para n grande, F^n é uma contração. Basta observar que a desigualdade (A.4) vale substituindo $|t - t_0|$ por $(b - a)$. \square

Corolário A.2 (Equações Lineares). *Sejam $A(t)$ e $b(t)$ matrizes $n \times n$ e $n \times 1$, respectivamente, de funções contínuas num intervalo I . Para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução de $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ definida em I .*

Demonstração. De fato, seja $I = \cup_n I_n$, onde $I_n \subset I_{n+1}$ são intervalos compactos que contêm t_0 . $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ satisfaz as hipóteses da Proposição A.1 em cada intervalo I_n . Seja φ_n a única solução neste intervalo passando por (t_0, x_0) . É claro que $\varphi_{n+1}|_{I_n} = \varphi_n$. Logo,

$\varphi(t) = \varphi_n(t)$, $t \in I_n$ está bem definida em I . É claro também que φ é a única solução em I passando por (t_0, x_0) . □

Referências Bibliográficas

- [1] BATISTA, A. A.; DA SILVA, S. H. **An Epidemiological Compartmental Model With Automated Parameter Estimation and Forecasting of the Spread of COVID-19 With Analysis of Data From Germany and Brazil**, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, China, 13 de abr. de 2022, v. 8, DOI: 10.3389/fams.2022.645614. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fams.2022.645614>>. Acesso em: 15 abr. 2022.
- [2] BATISTA, A. A.; DA SILVA, S. H. **Um Modelo Epidemiológico tipo SIR Aplicado à Dinâmica de Disseminação da COVID-19 no Brasil, na Paraíba e em Campina Grande**, 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.26557.69600. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.26557.69600>>. Acesso em: 12 mar. 2022.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [4] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide, São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [5] BRAUN, M. **Equações Diferenciais e Suas Aplicações**. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1979.
- [6] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicações**. 2 ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
- [7] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [8] FRANCO, C. M. R.; DUTRA, R. F. **Modelo SIR para propagação da Covid-19 no Estado da Paraíba (Brasil)**. *INTERMATHS*, Vitória da Conquista, v. 2, n. 2, p. 39-48, 2021. DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.9696. Disponível em: <<https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/9696>>. Acesso em: 12 fev. 2022.
- [9] HIRSCH, M. W.; SMALE, S. **Differential Equations Dynamical Systems, and Linear Algebra**. New York: Academic Press, 1974.

- [10] KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. **Contributions to the mathematical theory of epidemics-I.** 1927. Bulletin of Mathematical Biology 53(1-2), 33-55, 1991. <https://doi.org/10.1007/BF02464423>.
- [11] LIMA, E. L. **Álgebra Linear.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [12] LIMA, E. L. **Curso de Análise.** v. 1. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [13] LIMA, E. L. **Curso de Análise.** v. 2. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1992.
- [14] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1: mecânica.** 4. ed. São Paulo: Blucher, 2002.
- [15] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 2: fluidos, oscilações e ondas, calor.** 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014.
- [16] OLIVEIRA, M. H. **Análise do modelo SIR: Comportamento da curva de infectados em relação à inclusão de novas semanas epidemiológicas.** Trabalho de Conclusão de Curso. USP/IME, 2018.
- [17] SILVA, M. B. **Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares.** Trabalho de Conclusão de Curso. UAMat/CCT/UFCG, 2011.
- [18] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [19] TAVARES, J. N. **Modelo SIR em epidemiologia.** Revista de Ciência Elementar, V5(2):020, 2017. DOI: 10.24927/rce2017.020. Disponível em: <<http://doi.org/10.24927/rce2017.020>>. Acesso em: 12 fev. 2022.